Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Воловиков, Е. В. Щепин, Антиподы и вложения, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 1, 3–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1259>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 17:18:44

УДК 515.142.226

А. Ю. Воловиков, Е. В. Щепин

Антиподы и вложения

Статья посвящена не склеивающим антиподов отображениям сфер в компакты и полиэдры меньшей размерности и препятствиям к вложению полиэдров и компактов в евклидовы пространства. Получены оценки размерности множества склеиваемых антиподов для отображений сфер в компакты. Систематически изложена и развита применительно к взрезанному квадрату теория гомологического индекса Янга пространств с инволюцией.

Библиография: 38 названий.

Введение

Склеивание антиподов. Теорема Борсука–Улама [1] о том, что непрерывное отображение $S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ склеивает пару антиподов, сразу после своего появления в 1933 году была применена Флоресом [2] к доказательству невложимости в $\mathbb{R}^{2n}$ некоторых n -мерных полиэдров. В цитированной статье Флорес, в частности, доказал, что симплициальный взрезанный джойн¹ n -мерного остова $(2n+2)$ -мерного симплекса (обозначаемый Δ_{2n+2}^n) эквивариантно гомеоморфен сфере S^{2n+1} . Естественная проекция джойна на конус в этом случае дает не склеивающее антиподов отображение сферы S^{2n+1} в $(n+1)$ -мерный полиэдр – конус над Δ_{2n+2}^n – и препятствует в силу теоремы Борсука–Улама вложению этого конуса в $\mathbb{R}^{2n+1}$, откуда, в свою очередь, вытекает невложимость Δ_{2n+2}^n в $\mathbb{R}^{2n}$. Однако сам Флорес не обратил внимания на эту возможность построения не склеивающего антиподов отображения из S^{2n+1} в конус над Δ_{2n+2}^n .

Впервые не склеивающее антиподов отображение сферы на полиэдр меньшей размерности было построено в 1937 году в статье Хопфа [3]. Хопф называл не склеивающие антиподов отображения (антиподально) свободными, и мы будем придерживаться этой же терминологии. Хопф в [3] построил свободное отображение сферы S^{2n-1} в n -ю степень триода.

Этот результат Хопфа был удивительным образом проигнорирован современниками. Так, Борсук [4; гл. 9, проблема 2.5] поставил проблему о возможности вложения любого n -мерного абсолютного ретракта в $\mathbb{R}^{2n-1}$, хотя из вышеупомянутого результата Хопфа немедленно вытекает, что n -я степень триода не вкладывается в $\mathbb{R}^{2n-1}$. А в Москве в 1939 году Тумаркин [5] выдвинул гипотезу об урысо-

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00014) и Программы РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

¹Симплициальный взрезанный джойн полиэдра P определяется как подпространство джойна $P * P$, образованное джойнами непересекающихся симплексов.

новских поперечниках сфер, равносильную утверждению, что *всякое отображение сферы в полиэдр меньшей размерности склеивает антиподы*. И в книге Коннера–Флойда [6; с. 85] как нерешенный формулировался вопрос о существовании не склеивающего антиподов отображения 3-мерной сферы в двумерный полиэдр.

Вышеупомянутую проблему Борсука в 1968 году решил Вебер [7], доказав, что $C\Delta_{2n}^{n-1}$ при $n \geq 5$ не вкладывается в $\mathbb{R}^{2n-1}$. Ограничение $n \geq 5$ возникло у Вебера в связи с тем, что при доказательстве он опирался на свой критерий вложимости полиэдра. Этот же результат без размерностных ограничений немедленно вытекает из существования свободного отображения $S^{2n-1} \rightarrow C\Delta_{2n}^{n-1}$, которое можно извлечь из статьи Флореса.

Гипотеза Тумаркина была одновременно и независимо опровергнута в 1974 году в работах Стесина [8] и Щепина [9]. При этом Щепин в точности повторил конструкцию Хопфа, а Стесин предложил другую.

Факт существования понижающего размерность не склеивающего антиподов отображения сферы позже был переоткрыт в 1981 году Вайсалою [10], а затем еще раз в 1995 году Изидореком и Яворовским [11]. Последние результаты были инициированы вопросом Коннера и Флойда.

И лишь в XXI веке Богатый [12] обнаружил, что упомянутая статья Хопфа, которая регулярно цитировалась по другому поводу, содержит примеры понижающих размерность свободных отображений сфер. В этой статье Хопф попытался решить следующий вопрос:

ВОПРОС 1. *При каких n и k существует не склеивающее антиподов непрерывное отображение n -мерной сферы в k -мерный полиэдр?*

Хопф доказал, что ответ положителен при $n < 2k$, что вытекает из упомянутой выше конструкции отображения S^{2k-1} на k -ю степень триода. И Хопф доказал, что ответ отрицателен при $n > 2k$ с помощью теоремы Борсука–Улама, воспользовавшись тем обстоятельством, что при $2k < n$ всякий k -мерный полиэдр вкладывается в $\mathbb{R}^n$. Эти результаты позволяют получить исчерпывающее решение вопроса 1 для нечетного n и оставляют открытым следующий вопрос.

ВОПРОС 2. *Всякое ли непрерывное отображение S^{2n} в n -мерный полиэдр склеивает пару антиподов?*

Хопф в [3] сумел получить положительное решение этого вопроса для $n = 1$. Этот же результат в Москве в 1943 году был повторен Шклярским [13]. Стесин [8] получил положительный ответ на этот вопрос для любого n , но только для отображений, гомотопных постоянному. Без всяких оговорок вопрос был решен Щепиным в [9]. Доказательство Щепина опиралось на теорему Серра о конечности гомотопических групп сфер. Этот же результат позднее был переоткрыт Изидореком и Яворовским сначала в [11] для ациклического полиэдра, а затем в [14] доказан в полном объеме (в этом препринте, судя по введению в [15], было найдено другое доказательство).

Следующий результат настоящей статьи дает более подробный ответ на вопросы Хопфа:

ТЕОРЕМА 1. *Непрерывное отображение сферы S^n в компакт размерности k имеет множество склеиваемых антиподов размерности $\geq n - 2k$.*

В §3 приведено доказательство этой теоремы, известное второму автору этой статьи с 1974 года. Теорема 1 содержится также в недавней статье Гонсалвеса, Яворовского, Пергера [16], в которой доказана более точная гомологическая версия этой теоремы. В гомологической версии роль сферы играет компакт со свободной инволюцией, имеющий такие же, как сфера, гомологии с коэффициентами в поле $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. В §5, посвященном гомологическому индексу Янга пространств с инволюцией, получен следующий еще более точный результат:

ТЕОРЕМА 2. *Для всякого непрерывного отображения компакта со свободной инволюцией индекса Янга n в компакт размерности k , индуцирующего нулевой гомоморфизм k -мерных когомологий с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$, множество склеиваемых антиподов имеет размерность $\geq n - 2k$.*

В этой теореме “размерность” можно понимать и как “гомологическая размерность с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ ”. Поскольку для k -ацикличного (с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$) компакта индекс Янга свободной инволюции $> k$ (см. лемму 5.6), постольку теорема 2 влечет вышеупомянутый результат [16].

Препятствие ван Кампена. На год раньше Флореса примеры n -мерных полиэдров, не вложимых в $\mathbb{R}^{2n}$, были построены ван Кампеном [17]. В работе [17] ван Кампен открыл когомологическое препятствие к вложимости n -мерного полиэдра в $\mathbb{R}^{2n}$, называемое теперь *препятствием ван Кампена*.

Множество упорядоченных пар различных точек пространства X называется *взрезанным квадратом* пространства X . Мы будем обозначать взрезанный квадрат пространства X через X^2 или $X \times X$. Эти обозначения инспирированы обозначениями факториальных степеней, предложенными в “Конкретной математике” [18], и согласуются с ними для конечных пространств. А именно, если число точек пространства X равно x , то число точек пространства X^2 равно $x^2 = x(x-1)$. Взрезанный квадрат мы всегда рассматриваем с инволюцией $(x, y) \rightarrow (y, x)$. И через $X^2/2$ обозначаем факторпространство взрезанного квадрата по этой инволюции, т.е. пространство неупорядоченных пар точек пространства X .

Когомологическое препятствие к вложимости компакта X в $\mathbb{R}^n$ можно определить следующим образом: вложим X в евклидово пространство $\mathbb{R}^m$ достаточно большой размерности (например $m > 2 \dim X$). Это вложение индуцирует отображение $X^2/2 \rightarrow \mathbb{R}P^{m-1}$. Обозначим через $w(X)$ одномерный класс когомологий $X^2/2$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$, являющийся образом образующей из $H^1(\mathbb{R}P^{m-1}, \mathbb{Z}_2)$. Этот класс когомологий, называемый *характеристическим классом* взрезанного квадрата, не зависит от произвола, участвующего в его определении. (Этот класс является одномерным классом Штифеля–Уитни одномерного линейного расслоения, ассоциированного с инволюцией взрезанного квадрата, см. [19].) n -я степень характеристического класса служит препятствием к вложению X в $\mathbb{R}^n$. Действительно, в случае вложимости X в $\mathbb{R}^n$ эта степень должна равняться нулю, потому что является образом n -й степени образующей из $H^1(\mathbb{R}P^{n-1}, \mathbb{Z}_2)$. Если X является n -мерным полиэдром, то $w^{2n}(X)$ совпадает с приведенным по модулю 2 препятствием ван Кампена.

Описанное выше препятствие по существу является препятствием к существованию эквивариантного отображения взрезанного квадрата в сферу. А наличие эквивариантного отображения в сферу обеспечивает вложимость в евклидово пространство на единицу большей размерности в силу теоремы Вебера [20] для метастабильного ранга.

В работе Бествины, Каповича и Клейнера [21] препятствие ван Кампена было применено к доказательству несуществования собственно-разрывных действий дискретных групп на стягиваемых многообразиях. Точнее, в [21] введено понятие n -обструктора как полиэдра P , вложимого в $\mathbb{R}^n$ и обладающего ненулевым когомологическим препятствием к вложению в $\mathbb{R}^{n-1}$, удовлетворяющим трем условиям, из которых два первые эквивалентны неравенству $w^{n-1}(P) \neq 0$, а третье условие, технического характера, сами авторы считали несколько искусственным. В настоящей работе показано, как можно отказаться от третьего условия без потери результатов.

Третье условие использовалось в статье [21] в двух местах: леммах о зацеплении и о джойне. Лемма о зацеплении утверждает, что если n -обструктор вложен в $\mathbb{R}^n$, то и всякое достаточно близкое вложение с ним зацеплено. А лемма о джойне утверждает, что джойн n -обструктора с m -обструктором является $(n + m + 2)$ -обструктором. Авторам удалось получить аналогичные результаты: лемму 6.2 и теорему 6.3, заменив третье условие на естественное и малоограничительное требование, чтобы коразмерность вложения была не меньше двух.

В статье представлены также новые теоремы о несуществовании дизъюнктивных несчетных семейств компактов в евклидовом пространстве. В отличие от [22], где такого рода теорема доказана для семейств топологических копий одного и того же компакта, представленные теоремы относятся к семействам компактов различных топологических типов. Отметим такой результат.

ТЕОРЕМА 3. *Пространство $\mathbb{R}^n$ не содержит несчетного дизъюнктивного семейства $\{X_t\}_{t \in T}$ абсолютных ретрактов таких, что $w^{n-1}X_t \neq 0$ при любом $t \in T$.*

§ 1. Свободные отображения $\mathbb{Z}_2$ -пространств

Сепарабельное метризуемое пространство X с фиксированной на нем непрерывной инволюцией называется $\mathbb{Z}_2$ -пространством. Свободным называется $\mathbb{Z}_2$ -пространство со свободной (без неподвижных точек) инволюцией.

Сфера S^n всегда рассматривается со стандартной антиподальной инволюцией $x \rightarrow -x$. Образ точки x при инволюции любого $\mathbb{Z}_2$ -пространства так же, как и для сферы, обозначается $-x$ и называется ее *антиподом*. Множество, содержащее со всякой точкой ее антипод, называется *инвариантным*. Через $X/2$ обозначается пространство орбит инволюции $\mathbb{Z}_2$ -пространства X , в частности $S^n/2 = \mathbb{R}P^n$.

Эквивариантность отображения² f двух $\mathbb{Z}_2$ -пространств выражается равенством $-f(x) = f(-x)$. Отображение $\mathbb{Z}_2$ -пространства $f: X \rightarrow Y$ в любое пространство (с инволюцией или без) называется *свободным*, если оно не склеивает антиподов, т.е. если неравенство $x \neq -x$ влечет неравенство $f(x) \neq f(-x)$ для любого $x \in X$.

²Отображения по умолчанию непрерывны.

Конус. Для пространства X через CX обозначается конус над пространством X . Точки конуса CX мы будем изображать в виде формальных произведений $t \cdot x$ или tx , где $t \in [0, 1]$ и $x \in X$. При этом $0 \cdot x = 0 \cdot x'$ при любых $x, x' \in X$ является вершиной конуса. То есть умножение на нуль дает вершину конуса. Точку конуса tx можно умножить на число $\lambda \in [0, 1]$ по правилу $\lambda \cdot (tx) = (\lambda t) \cdot x$.

Джойн. Джойн пространств $X_1, X_2, \dots, X_k$ обозначается $X_1 * X_2 * \dots * X_k$ и представляется как множество формальных линейных комбинаций типа $t_1 \cdot x_1 + \dots + t_k \cdot x_k$, где $t_i \geq 0$ и $t_1 + \dots + t_k = 1$. Комбинации $t_1 \cdot x_1 + \dots + t_k \cdot x_k$ и $t'_1 \cdot x'_1 + \dots + t'_k \cdot x'_k$ представляют одинаковые элементы джойна, если у них совпадают все коэффициенты $t_i = t'_i$ ($i = 1, \dots, k$) и совпадают $x_i = x'_i$ при $t_i = t'_i \neq 0$. Джойн $\mathbb{Z}_2$ -пространств рассматривается с инволюцией $-(t_1 \cdot x_1 + \dots + t_k \cdot x_k) = t_1 \cdot (-x_1) + \dots + t_k \cdot (-x_k)$. Эта инволюция свободна, если свободны инволюции как на X , так и на Y . Если через $\{\cdot\}$ обозначить одноточечное пространство, то $\{\cdot\} * X$ естественно отождествляется с CX .

Поскольку n -мерный симплекс Δ_n есть джойн $(n+1)$ штук одноточечных пространств, получаем такую формулу для джойна симплексов:

$$\Delta_n * \Delta_m = \Delta_{m+n+1}. \quad (1)$$

Надстройка. Надстройка над пространством X обозначается SX и определяется как джойн $X * S^0$, где $S^0 = \{1, -1\}$ — нульмерная сфера. Точки надстройки мы будем представлять как формальные комбинации вида $tx + \tau$, где $x \in X$, $t \geq 0$, $t + |\tau| = 1$. Отождествляются между собой комбинации вида $0 \cdot x + 1$, дающие верхнюю вершину надстройки, и комбинации вида $0 \cdot x - 1$, дающие нижнюю вершину. Инволюция на надстройке задается соотношением $-(tx + \tau) = t(-x) + (-\tau)$.

Сфера S^n является n -кратной надстройкой нульмерной сферы и является джойном $(n+1)$ экземпляра 0-мерной сферы. Поэтому получаем такую формулу джойна сфер:

$$S^n * S^m = S^{n+m+1}. \quad (2)$$

ЛЕММА 1.1. Для любых пространств X, Y произведение $CX \times CY$ гомеоморфно $C(X * Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Искомый гомеоморфизм $h: C(X * Y) \rightarrow CX \times CY$ можно явно задать следующей формулой (см. [23]):

$$h(t(\tau x + (1 - \tau)y)) = \left(\frac{2t\tau}{|1 - 2\tau| + 1} x, \frac{2t(1 - \tau)}{|1 - 2\tau| + 1} y \right).$$

Джойн-произведение. Предположим, что имеются отображения $f_i: X_i \rightarrow CK_i$ в конусы над компактными пространствами K_i . Определим джойн-произведение отображений $f_1, \dots, f_m$ как отображение f из джойна $X_1 * \dots * X_m$ в произведение $CK_1 \times \dots \times CK_m$ по формуле

$$f(t_1 \cdot x_1 + \dots + t_m \cdot x_m) = (t_1 \cdot f(x_1), \dots, t_m \cdot f(x_m)). \quad (3)$$

ЛЕММА 1.2. *Джойн-произведение свободных отображений свободно.*

Доказательство предоставляется читателю.

Для отображения в пространства, не имеющие конической структуры, замена конструкции джойн-произведения представлена следующей леммой.

ЛЕММА 1.3. *Если существуют нульгомотопные свободные отображения $f: X \rightarrow Z$ и $g: X' \rightarrow Y$ свободных $\mathbb{Z}_2$ -пространств, то существует нульгомотопное свободное отображение $X * X' \rightarrow Y \times Z$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $f(t, x)$ гомотопию, совпадающую с f при $t \leq 1/2$ и постоянную при $t = 0$. И обозначим через $g(t, x)$ гомотопию, совпадающую с g при $t \leq 1/2$ и постоянную при $t = 0$. Тогда искомое отображение задается формулой

$$(tx + (1 - t)x') \rightarrow (g(t, x), f((1 - t), x')).$$

Гомотопия (по θ) этого отображения постоянному задается формулой

$$(tx + (1 - t)x') \rightarrow (g(\theta t, x), f(\theta(1 - t), x')).$$

Триодом T называется конус над трехточечным пространством.

ТЕОРЕМА 1.1 (см. [3], [9]). *Существует свободное отображение сферы S^{2n-1} в n -ю степень триода T^n ($n \geq 1$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $[x]$ означает целую часть числа x , тогда формула³

$$\left| \sin \frac{3\varphi}{2} \right| \exp \left(i \left[\frac{3\varphi}{2} \pi \right] \right) \quad (4)$$

задает свободное непрерывное отображение единичной окружности комплексной плоскости в триод с центром в нуле с концами в кубических корнях из единицы. Джойн-произведение n экземпляров этого отображения свободно в силу леммы 1.2.

Барицентрические ретракции β_k^n . Пусть $\Delta = \Delta_n$ — симплекс размерности n с вершинами $v_0, \dots, v_n$. Вершинами барицентрической триангуляции Δ являются барицентры граней симплекса. Определим симплициальное относительно барицентрической триангуляции отображение $\beta_k^n: \Delta \rightarrow \Delta$, так что β_k^n неподвижно на барицентрах граней размерностей $< k$ и переводит барицентры всех граней размерности $\geq k$ в барицентр всего симплекса. Обозначим через $V_{i,j}$ барицентр грани с вершинами $v_i, v_{i+1}, \dots, v_j$.

ЛЕММА 1.4. *Пусть $x = t_0 v_0 + \dots + t_n v_n$, где t_i не возрастают. Тогда*

$$\begin{aligned} x &= (n+1)t_n V_{0,n} + n(t_{n-1} - t_n) V_{0,n-1} \\ &\quad + (n-1)(t_{n-2} - t_{n-1}) V_{0,n-2} + \dots + (t_0 - t_1) V_{0,0}. \end{aligned}$$

³ Другие конструкции отображения с этими свойствами получаются с помощью теоремы 1.2 или леммы 2.7.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $(m+1)V_{0,m} = v_0 + v_1 + \dots + v_m$, постольку выше написанное представляет собой не что иное, как преобразование Абеля суммы $t_0v_0 + \dots + t_nv_n$.

Точки симплекса x, y называются *центрально противоположными*, если центр симплекса лежит внутри отрезка $[x, y]$.

ЛЕММА 1.5. *Если x и y центрально противоположны и $2k \geq n$, то $\beta_k^n(x) \neq \beta_k^n(y)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие центральной противоположности x и y означает, что для некоторого $c \in [0, 1]$ имеется равенство $cx + (1-c)y = V_{0,n}$. Пусть $x = t_0v_0 + \dots + t_nv_n$ и $y = t'_0v_0 + \dots + t'_nv_n$, тогда $(1-c)t'_i = \frac{1}{1+n} - ct_i$. Перенумерацией вершин можно достичь того, что t_i не возрастают. Тогда t'_i не убывают. В силу леммы 1.4 x принадлежит симплексу Δ_0 с вершинами $V_{0,0}, \dots, V_{0,n}$. А поскольку t'_i не убывают, постольку y в силу той же леммы 1.4, примененной к обратному порядку вершин, принадлежит симплексу Δ_1 с вершинами $V_{n,n}, V_{n-1,n}, \dots, V_{0,n}$. Так как единственной общей вершиной симплексов Δ_0 и Δ_1 является $V_{0,n}$ — центр симплекса, а отображение β_k^n переводит симплексы Δ_0 и Δ_1 в себя, то равенство $\beta_k^n(x) = \beta_k^n(y)$ влечет равенство $\beta_k^n(x) = \beta_k^n(y) = V_{0,n}$. Так как β_k^n не меняет весов барицентров граней размерности $< k$, то равенство $\beta_k^n(x) = V_{0,n}$ влечет равенство нулю первых k барицентрических координат точки x , которые согласно лемме 1.4 равны разностям $t_{i-1} - t_i, i \leq k$. Поэтому равенство $\beta_k^n(x) = V_{0,n}$ влечет $t_0 = t_1 = \dots = t_k$. Аналогично, равенство $\beta_k^n(y) = V_{0,n}$ влечет равенство $t_{n-k} = t_{n-k+1} = \dots = t_n$. И если $2k \geq n$, то $n-k \geq k$ и мы получаем $t_0 = t_1 = \dots = t_n$, что означает совпадение x с центром симплекса, что противоречит нашему предположению о центральной противоположности x и y .

Через Δ_n^k обозначаем k -мерный остов n -мерного симплекса.

ТЕОРЕМА 1.2 [24]. *Если $2k > n$, то существует свободное отображение сферы S^n на конус $C\Delta_{n+1}^{k-1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Delta = \Delta_{n+1}$ — правильный $(n+1)$ -мерный симплекс и $\beta = \beta_{k-1}^{n+1}$. отождествляем $C\Delta_{n+1}^{k-1}$ с образом β , который представляет собой конус над Δ_{n+1}^{k-1} с вершиной в центре симплекса. И считаем S^n сферой, описанной вокруг Δ . Обозначим через ψ центральную проекцию сферы S^n на границу Δ . Тогда композиция $\psi\beta$ не склеивает антиподов в силу леммы 1.5.

Другие свободные отображения сферы S^n на k -мерные полиэдры при $n < 2k$ построены в работах [10], [11].

ЛЕММА 1.6. *Для любого свободного $\mathbb{Z}_2$ -пространства X существует свободное отображение $f: SX \rightarrow CX \vee I$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Букет получается отождествлением левого конца отрезка $[0, 1]$ и вершины конуса. Отображение f задается формулой

$$f(tx + \tau) = \begin{cases} tx, & \tau \leq 0, \\ (1-2\tau)tx, & 0 \leq \tau \leq \frac{1}{2}, \\ 2\tau - 1, & \tau \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

§ 2. Вложимость и антиподальность

Вложимость. Определим *вложимость* пространства X как наименьшее n , при котором X допускает топологическое вложение в $\mathbb{R}^n$, и обозначим ее $\text{emb } X$. Вложимость *сублогарифмична*:

$$\text{emb } X \times Y \leq \text{emb } X + \text{emb } Y. \quad (5)$$

ЛЕММА 2.1. *Для любых пространств справедливо неравенство*

$$\text{emb } X * Y \leq \text{emb } X + \text{emb } Y + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $X \subset I^n$ и $Y \subset I^m$, то $X * Y \subset I^n * I^m$. И нужное утверждение вытекает из гомеоморфизма $I^n * I^m \cong I^{n+m+1}$.

ЛЕММА 2.2. *Для любого пространства X справедливы неравенства*

$$\text{emb } X \times I \leq \text{emb } CX \leq \text{emb } SX \leq \text{emb } X + 1.$$

Доказательство предоставляется читателю.

ЛЕММА 2.3. *При любых $0 \leq k \leq m$ выполнено неравенство*

$$\text{emb } C\Delta_m^k \leq \min\{m, 2k + 2\}. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство $\text{emb } C\Delta_m^k \leq m$ верно, потому что $C\Delta_m^k$ гомеоморфен конусу над k -мерным остовом m -мерного симплекса с вершиной в центре этого симплекса. А неравенство $\text{emb } C\Delta_m^k \leq 2k + 2$ вытекает из теоремы о том, что стягиваемый полиэдр размерности n вкладывается в $\mathbb{R}^{2n}$ (см. [25]).

Антиподальность. Определим *антиподальность* $\text{ant } X$ пространства X как наибольшее n , для которого существует свободное нульгомотопное отображение сферы S^{n-1} в X .

Антиподальность *ковариантна* в том смысле, что не уменьшается эквивариантными отображениями⁴. В частности, антиподальность подпространства не превосходит антиподальности пространства.

Теорема Борсука–Улама обеспечивает для любого X выполнение следующего неравенства:

$$\text{ant } X \leq \text{emb } X. \quad (7)$$

Лемма 1.3 доказывает, что антиподальность удовлетворяет следующему неравенству:

$$\text{ant } X \times Y \geq \text{ant } X + \text{ant } Y. \quad (8)$$

⁴Сформулированное свойство означает, что антиподальность является ковариантным функтором из категории $\mathbb{Z}_2$ -пространств в категорию чисел с неравенствами в качестве морфизмов.

ЛЕММА 2.4. *При любых $0 \leq k \leq m$ выполнено неравенство*

$$\text{ant } C\Delta_m^k \geq \min\{m, 2k + 2\}. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\min\{m, 2k + 2\} = m$, то $m \leq 2k + 2$ и отображение $S^{m-1} \rightarrow C\Delta_m^k$, построенное в теореме 1.2, не склеивает антиподов. Поэтому в этом случае $\text{ant } C\Delta_m^k \geq m$. Если же $\min\{m, 2k + 2\} = 2k + 2$, то $m \geq 2k + 2$ и потому $C\Delta_m^k \supset C\Delta_{2k+2}^k$. А так как теорема 1.2 дает свободное отображение из S^{2k+1} в $C\Delta_{2k+2}^k \subset C\Delta_m^k$, то в этом случае $\text{ant } C\Delta_m^k \geq 2k + 2$. Таким образом, в обоих случаях выполнено неравенство (9).

ТЕОРЕМА 2.1. *При любых $0 \leq k \leq m$ выполнены равенства*

$$\text{emb } C\Delta_m^k = \text{ant } C\Delta_m^k = \min\{m, 2k + 2\}. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенства (9), (6) и (7) влекут равенства (10).

Гиперантиподальность. Компакт X называется *гиперантиподальным*, если

$$\text{ant } X = \text{emb } X. \quad (11)$$

Гиперантиподальны кубы (но не сферы!) всех размерностей. Простейшим нетривиальным примером гиперантиподального полиэдра является *триод* $C\Delta_2^0$ – конус над тросточием.

ЛЕММА 2.5. *Если X гиперантиподален, то CX и SX также гиперантиподальны и $\text{emb } CX = \text{emb } SX = \text{emb } X + 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как антиподальность не возрастает при переходе к подпространству и в силу лемм 1.1, 1.3 имеем $\text{ant } SX \geq \text{ant } CX \geq \text{ant } X + 1 = \text{emb } X + 1$. С другой стороны, $\text{ant } SX \leq \text{emb } SX \leq \text{emb } X + 1$. Отсюда и получается, что $\text{ant } SX = \text{emb } SX = \text{emb } X + 1$ и $\text{ant } CX = \text{emb } CX = \text{emb } X + 1$.

Вложимость гиперантиподальных компактов подчиняется логарифмическому закону.

ТЕОРЕМА 2.2. *Если X и Y гиперантиподальны, то таково же их произведение $X \times Y$ и $\text{emb } X \times Y = \text{emb } X + \text{emb } Y$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1.3 $\text{ant } X \times Y \geq \text{ant } X + \text{ant } Y$. С другой стороны, $\text{emb } X \times Y \leq \text{emb } X + \text{emb } Y = \text{ant } X + \text{ant } Y$. Теперь в силу неравенства (7) получаем все необходимые равенства.

Так как полиэдры $C\Delta_m^k$ и кубы гиперантиподальны, в силу теоремы 2.1 получаем такое следствие:

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Для любой последовательности конусов над остовами симплексов справедливо равенство*

$$\text{emb}(C\Delta_{m_1}^{k_1} \times C\Delta_{m_2}^{k_2} \times \cdots \times C\Delta_{m_n}^{k_n}) = \text{emb } C\Delta_{m_1}^{k_1} + \text{emb } C\Delta_{m_2}^{k_2} + \cdots + \text{emb } C\Delta_{m_n}^{k_n}.$$

Поскольку $C\Delta_1^0 \cong I$, в частности имеем

$$\text{emb}(C\Delta_m^k \times I^k) = \text{emb } C\Delta_m^k + k. \quad (12)$$

ЛЕММА 2.6. *Если конусы CX и CY гиперантиподальны, то $C(X * Y)$ гиперантиподален и $\text{emb } C(X * Y) = \text{emb } CX + \text{emb } CY$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $C(X * Y) \cong CX \times CY$, то в силу (8) имеем $\text{ant } C(X * Y) \geq \text{emb } CX + \text{emb } CY$. В то же время $\text{emb } C(X * Y) \leq \text{emb } CX + \text{emb } CY$ в силу (5).

ТЕОРЕМА 2.3 (см. [2], [17]). *Вложимость джойна остовов симплексов определяется следующей формулой:*

$$\text{emb}(\Delta_{2s_1}^{s_1-1} * \dots * \Delta_{2s_m}^{s_m-1}) = 2(s_1 + \dots + s_m) - 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $K = \Delta_{2s_1}^{s_1-1} * \dots * \Delta_{2s_m}^{s_m-1}$ и $s = s_1 + \dots + s_m$. В силу леммы 2.6 CK гиперантиподально и $\text{emb } CK = 2s$, поскольку $\text{emb } C\Delta_{2t}^{t-1} = 2t$ в силу теоремы 2.1. Следовательно, $\text{emb } K \geq 2s - 1$. Но, с другой стороны, вложимость K в $\mathbb{R}^{2s-1}$ вытекает из общего положения, поскольку $\dim K = s - 1$.

Зонтики. Букет $B^m \vee I$ m -мерного шара и отрезка (отождествляются центр шара и один из концов отрезка) обозначим через T_m . Это пространство называется m -мерным зонтиком. Зонтик T_1 совпадает с триодом T .

ЛЕММА 2.7. *Пусть $f: X \rightarrow Y$ – свободное отображение. Тогда существует свободное отображение надстройки SX в букет $CY \vee I$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Искомое отображение представляет собой композицию надстройки $Sf: SX \rightarrow SY$ с отображением $SY \rightarrow CY \vee I$ из леммы 1.6.

ЛЕММА 2.8. *Зонтик T_m гиперантиподален для любого m .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 2.7 $\text{ant } T_m > m$ и очевидно, что $\text{emb } T_m \leq m + 1$.

Таким образом, доказанная лемма позволяет получить из теоремы 2.2 такое следствие:

ТЕОРЕМА 2.4 (Шашкин, Богатый [12]). *Вложимость произведения зонтиков куба определяется следующей формулой:*

$$\text{emb}(T_{m_1} \times \dots \times T_{m_k} \times I^d) = m_1 + \dots + m_k + k + d.$$

Графы. Следующая теорема позволяет вычислить вложимость джойнов графов.

ТЕОРЕМА 2.5. *Граф Γ не вкладывается в плоскость в том и только том случае, когда имеется свободное отображение S^3 в $C(\Gamma)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если граф не вкладывается в плоскость, то согласно теореме Понтрягина–Куратовского он содержит или $K_{3,3} = \Delta_2^0 * \Delta_2^0$ – джойн трехточечных пространств, или $K_5 = \Delta_4^1$ – одномерный остов четырехмерного симплекса (полный пятивершинник). Но $C(\Delta_2^0 * \Delta_2^0)$ содержит $T \times T$ в силу леммы 1.1 и так как S^3 свободно отображается в $T \times T$ согласно теореме 1.1, то есть такое отображение и в $C(\Delta_2^0 * \Delta_2^0)$. Свободное отображение из S^3 в пятивершинник построено в теореме 1.2. Таким образом, свободное отображение S^3 в конус над неплоским графом имеется. Если же граф Γ плоский, то конус над ним лежит в $\mathbb{R}^3$ и потому всякое отображение $f: S^3 \rightarrow C(\Gamma)$ склеивает пару антиподов в силу теоремы Борсука–Улама.

ЛЕММА 2.9. *Для любого связного графа Γ его конус гиперантиподален, и если граф отличен от окружности, то $\text{emb } C\Gamma = \text{emb } \Gamma + 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\text{emb } \Gamma = 3$, то $\text{emb } C\Gamma \geq 4$ в силу вышедшей теоремы. А так как $\text{emb } \Gamma \leq \text{emb } C\Gamma + 1$, получаем $\text{emb } C\Gamma = 4 = \text{ant } C\Gamma$.

Если $\text{emb } \Gamma = 2$, то Γ содержит триод. Поэтому $\text{emb } C\Gamma \geq \text{emb } CT = 3$ и $\text{ant } C\Gamma \geq \text{ant } CT = 3$.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. *Если все графы $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ связны и отличны от окружности, то $\text{emb}(\Gamma_1 * \dots * \Gamma_n) = \text{emb } \Gamma_1 + \dots + \text{emb } \Gamma_n + n - 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2.9 и теоремы 2.6 мы можем написать цепочку равенств:

$$\begin{aligned} n + \text{emb } \Gamma_1 + \dots + \text{emb } \Gamma_n &= \text{emb } C\Gamma_1 + \dots + \text{emb } C\Gamma_n = \text{emb } C(\Gamma_1 * \dots * \Gamma_n) \\ &\leq 1 + \text{emb}(\Gamma_1 * \dots * \Gamma_n). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает неравенство $\text{emb}(\Gamma_1 * \dots * \Gamma_n) \geq \text{emb } \Gamma_1 + \dots + \text{emb } \Gamma_n + n - 1$. Обратное неравенство вытекает из неравенства для вложимости джойнов (лемма 2.1).

Отметим результат работы [26], в которой доказано, что произведение неплоских графов не вкладывается в $\mathbb{R}^4$, и работы [27], в которой полностью решен вопрос о вложимости произведений графов.

Теорема о дизъюнктном семействе. Следующая теорема является многомерным аналогом теоремы Мура о том, что в плоскости не содержится несчетного дизъюнктного семейства триодов. В случае, когда все элементы семейства гомеоморфны между собой, эта теорема получена в [28].

ТЕОРЕМА 2.6. $\mathbb{R}^n$ не содержит дизъюнктного несчетного семейства гиперантиподальных компактов $\{P_t\}_{t \in I}$ вложимости n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{P_t\}_{t \in I}$ – несчетное семейство гиперантиподальных компактов. Фиксируем для каждого $t \in I$ нульгомотопное свободное отображение $f_t: S^{n-1} \rightarrow P_t$. Для любой пары $t, t' \in I$ определим отображение $\varphi_{t,t'}: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ следующей формулой:

$$\varphi_{t,t'}(x) = \frac{f_t(x) - f_{t'}(-x)}{|f_t(x) - f_{t'}(-x)|}. \quad (13)$$

Заметим, что $\varphi_{t,t'}$ гомотопно постоянному отображению в том и только том случае, когда $t \neq t'$. Действительно, при $t = t'$ это отображение эквивариантно и потому не гомотопно постоянному. Если же $t \neq t'$, то формула (13) благодаря условию $P_t \cap P_{t'} = \emptyset$ определит гомотопию $\varphi_{t,t'}$ к постоянному отображению, если гомотопировать к постоянным отображениям f_t по P_t и соответственно $f_{t'}$ по $P_{t'}$.

Переходя, если нужно, к бесконечному подсемейству, мы, не теряя общности рассуждений, можем предположить, что для некоторого $\varepsilon > 0$ неравенство

$$|f_t(x) - f_t(-x)| \geq \varepsilon \quad (14)$$

выполнено при любых $t \in I$ и $x \in S^n$. Поскольку пространство отображений $S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ сепарабельно, постольку $\{f_t\}$ не дискретно и найдется такая последовательность $\{t_0, t_1, \dots, t_k, \dots\} \subset I$, что f_{t_i} сходится к f_{t_0} при i стремящемся к бесконечности. Пусть k столь велико, что $|f_{t_k}(x) - f_{t_0}(x)| < \varepsilon$ при любом $x \in S^{n-1}$. Тогда $\varphi_{t_0,t_k}(x)$ не является антиподом $\varphi_{t_0,t_0}(x)$ ни для какого $x \in S^{n-1}$. Следовательно, φ_{t_0,t_k} гомотопно φ_{t_0,t_0} , что противоречит установленным выше свойствам отображений $\varphi_{t,t'}$.

§ 3. Сферический и косферический индексы

Сферический индекс. Для свободного $\mathbb{Z}_2$ -пространства X его *сферический индекс* (см. [29]) $\text{ind } X$ определяется как наибольшее натуральное число n , для которого существует эквивариантное отображение из S^n в X .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Для любого стягиваемого пространства X имеет место равенство $\text{ant } X = \text{ind } X^2 + 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f: S^n \rightarrow X$ не склеивает антиподов, то равенство $F(x) = (f(x), f(-x))$ определяет эквивариантное отображение $F: S^n \rightarrow X^2$. Обратно, эквивариантное отображение $F: S^n \rightarrow X^2$ в композиции с проекцией на первый множитель $X \times X \rightarrow X$ не склеивает антиподов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Если свободное $\mathbb{Z}_2$ -пространство X связано до размерности n включительно, то $\text{ind } X > n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По индукции можно определить последовательность отображений $f_k: S^k \rightarrow X$, каждое следующее из которых продолжает предыдущее, если сферу S^k рассматривать как экваториальную сферу в S^{k+1} . А именно в качестве f_0 рассматриваем произвольное эквивариантное отображение S^0 в X . Если уже определено f_k и $\pi_k X = 0$, то f_k допускает непрерывное продолжение на верхнюю полусферу сферы S^{k+1} , а на нижнюю полусферу оно продолжается по эквивариантности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Для любых X и Y справедливо неравенство*

$$\text{ind}(X * Y) \geq \text{ind } X + \text{ind } Y + 1. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $f: S^n \rightarrow X$ и $g: S^k \rightarrow Y$ — два эквивариантных отображения, то их джойн дает эквивариантное отображение из $S^{n+k+1} = S^n * S^k$ в $X * Y$.

Косферический индекс. Двойственным к сферическому индексу является *косферический индекс* $\mathbb{Z}_2$ -пространства X , определяемый как наименьшее m , для которого имеется эквивариантное отображение $X \rightarrow S^m$. Следуя Коннеру–Флойд [29], мы обозначаем косферический индекс через $\text{co-ind } X$. Коннер и Флойд называли $\text{co-ind } X$ *коиндексом*. В литературе более известен *род*, который на единицу больше коиндекса.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4 [29]. *Для любого пространства X справедливы неравенства*

$$\text{ind } X \leq \text{co-ind } X. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение вытекает из несуществования эквивариантного отображения $S^n \rightarrow S^k$ при $k < n$, что, как хорошо известно, эквивалентно теореме Борсука–Улама.

Следующие два предложения двойственны приведенным выше предложениям 3.2 и 3.3 соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5 [29]. *Для любого свободного $\mathbb{Z}_2$ -пространства X справедливо неравенство*

$$\text{co-ind}(X) \leq \dim X.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f: X \rightarrow S^n$ – эквивариантное непрерывное отображение, для которого $\dim X < n$, то малым шевелением, сохраняя эквивариантность, можно добиться, чтобы f не было сюръективным. Тогда можно представить S^n в виде джойна $S^0 \times S^{n-1}$, причем образ f не задевает $S^0 \subset S^n$. Тогда композиция f и проекции из $S^n \setminus S^0$ в S^{n-1} , задаваемой формулой $(\pm t, (1-t)x) \rightarrow x$, даст эквивариантное отображение из X в S^{n-1} .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6 [29]. *Для любых X и Y справедливо неравенство*

$$\text{co-ind}(X * Y) \leq \text{co-ind } X + \text{co-ind } Y + 1. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $f: X \rightarrow S^n$ и $g: Y \rightarrow S^k$ – два эквивариантных отображения, то их джойн дает эквивариантное отображение из $X * Y$ в $S^{n+k+1} = S^n * S^k$.

ЛЕММА 3.1. *Пусть X – инвариантное компактное подмножество компактного $\mathbb{Z}_2$ -пространства S . Тогда найдется такое инвариантное компактное подмножество $Y \subset S \setminus X$, что $\text{co-ind } X + \text{co-ind } Y \geq \text{co-ind } S - 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $k = \text{co-ind } X$ и $f: X \rightarrow S^k$ – эквивариантное отображение. Не нарушая общности рассуждений, можно предположить, что f определено (и эквивариантно) на некоторой инвариантной окрестности OX компакта X . Положим $Y = S \setminus OX$ и $n = \text{co-ind } S$. Тогда мы беремся доказать, что $\text{co-ind } Y \geq n - k - 1$. Действительно, в противном случае найдется эквивариантное отображение $g: Y \rightarrow S^{n-k-2}$, которое мы можем считать определенным также

на некоторой инвариантной окрестности OY компакта Y . Положим $X_1 = S \setminus OY$. Зафиксируем функцию Урысона $u: S \rightarrow [0, 1]$ пары X_1, Y вида

$$u(x) = \frac{\text{dist}(x, X_1) + \text{dist}(-x, X_1)}{2(\text{dist}(x, X_1) + \text{dist}(x, Y))}.$$

Теперь формула $(1-u(x))f(x) + u(x)g(x)$ определяет эквивариантное отображение пространства S в джойн $S^k * S^{n-k-2} = S^{n-1}$, чего не может быть.

Из доказанной леммы непосредственно вытекает следующее неравенство для косферического индекса [29]:

$$\text{co-ind}(X \cup Y) \leq \text{co-ind } X + \text{co-ind } Y + 1. \quad (18)$$

Множество склеиваемых антиподов. Для отображения f из $\mathbb{Z}_2$ -пространства X через $A(f)$ мы обозначаем множество $\{x \in X \mid f(x) = f(-x)\}$.

ТЕОРЕМА 3.1 (Янг [30], Буржен [31]). *Для любого непрерывного отображения $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ имеем*

$$\dim A(f) \geq n - k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $\text{co-ind } S^n \setminus A(f) < k$. Действительно, эквивариантное отображение из $S^n \setminus A(f)$ в S^{k-1} задается формулой $\frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}$.

Поэтому $n = \text{co-ind } S^n \leq \text{co-ind } A(f) + \text{co-ind}(X \setminus A(f)) + 1 < \text{co-ind } A(f) + k$. Отсюда $\text{co-ind } A(f) \geq n - k$ и в силу предложения 3.5 такую же оценку мы получаем для размерности множества $A(f)$.

ЛЕММА 3.2. *Пусть $f: S^{2n} \rightarrow Y$ — отображение сферы в компакт размерности $\dim Y = k$, тогда*

$$\text{co-ind } A(f) \geq 2n - 2k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, напротив, что $\text{co-ind } A(f) < 2n - 2k$. Тогда существует свободное отображение $p: A(f) \rightarrow S^{2n-2k-1}$. А в силу теоремы 1.1 найдется не склеивающее антиподов отображение $q: S^{2n-2k-1} \rightarrow T^{n-k}$. Продолжим композицию qp до непрерывного отображения $r: S^{2n} \rightarrow T^{n-k}$. Тогда $r \times f: S^{2n} \rightarrow T^{n-k} \times Y$ является свободным отображением в компакт размерности n , что противоречит теореме Шепина [9], согласно которой всякое отображение сферы в компакт половинной размерности склеивает пару антиподов.

ЛЕММА 3.3. *Пусть $X \subset S^n$ — компактное эквивариантное подмножество сферы. Тогда существует такое эквивариантное клеточноподобное отображение $f: S^n \rightarrow S^n$, которое однозначно на $f^{-1}X$ и для которого $f^{-1}X$ является ручным компактом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через P верхнюю полусферу сферы S^n . Тогда существует [32] клеточноподобное отображение $f: P \rightarrow P$, тождественное на крае P и однозначное на $f^{-1}(P \cap X)$, для которого ручным будет $f^{-1}(P' \cap X)$, где P' является внутренностью P . Тогда, склеивая пару экземпляров отображения f по краю, получим искомое эквивариантное отображение.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $f: S^n \rightarrow Y$ – отображение сферы в компакт размерности $\dim Y = k$, тогда

$$\dim A(f) \geq n - 2k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если n четно, то утверждение теоремы следует из леммы 3.2 ввиду предложения 3.5.

Пусть теперь n нечетно и $\dim A(f) < n - 2k$, тогда в силу леммы 3.3 мы, не теряя общности рассуждений, можем предполагать $A(f)$ ручным. Тогда первая нетривиальная группа гомологий у $S^n \setminus A(f)$ совпадает с первой нетривиальной группой гомологий. Из двойственности Александера–Понтрягина следует $H_i(S^n \setminus A(f), \mathbb{Z}) = 0$ для $i < 2k$. Поэтому $S^n \setminus A(f)$ будет связным в размерности $2k - 1$. И в силу предложения 3.2 получаем, что существует эквивариантное отображение $g: S^{2k} \rightarrow S^n \setminus A(f)$. Композиция этого отображения с f не склеивает антиподов, что противоречит теореме Щепина о склеивании антиподов [9].

§4. Взрезанный квадрат

Взрезанный квадрат пространства мы всегда рассматриваем с инволюцией $(x, y) \rightarrow (y, x)$. Инвариантные по отношению к этой инволюции множества называются также *симметричными*. Через $|x - y|$ мы обозначаем расстояние между точками x, y даже в том случае, если рассматриваемое пространство не имеет линейной структуры. Через $\operatorname{sgn} t$ обозначается знак числа t , равный $+1$ для $t > 0$, -1 для $t < 0$ и равный нулю для $t = 0$. Точка в формулах означает формальное умножение для записи формальных линейных комбинаций, применяемых для обозначения элементов джойнов. То есть $t \cdot y$ означает пару (t, y) .

ЛЕММА 4.1. Для любой пары метрических пространств X, Y имеется эквивариантное отображение $(X * Y)^{\mathbb{Z}_2} \rightarrow S(X^{\mathbb{Z}_2} * Y^{\mathbb{Z}_2})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивариантным является отображение, которое ставит в соответствие элементу $(t \cdot x + (1 - t) \cdot y, t' \cdot x' + (1 - t') \cdot y') \in (X * Y)^{\mathbb{Z}_2}$ элемент из $S^0 * X^{\mathbb{Z}_2} * Y^{\mathbb{Z}_2}$, задаваемый следующей формулой:

$$\frac{|t - t'| \cdot \operatorname{sgn}(t - t') + |x - x'| \cdot (x, x') + |y - y'| \cdot (y, y')}{|t - t'| + |x - x'| + |y - y'|}. \quad (19)$$

ЛЕММА 4.2. Для любых пространств X, Y имеется эквивариантное отображение $X^{\mathbb{Z}_2} * Y^{\mathbb{Z}_2} \rightarrow (X * Y)^{\mathbb{Z}_2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Искомое отображение задается формулой

$$t \cdot (x, x') + (1 - t) \cdot (y, y') \rightarrow (t \cdot x + (1 - t) \cdot y, t \cdot x' + (1 - t) \cdot y'). \quad (20)$$

ЛЕММА 4.3. Если существует гомотопное постоянно эквивариантное отображение из $\mathbb{Z}_2$ -пространства X в $\mathbb{Z}_2$ -пространство Y , то имеется эквивариантное отображение $SX \rightarrow Y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надстройку SX можно рассматривать как объединение двух конусов с общим основанием. Гомотопию эквивариантного отображения можно рассматривать как отображение верхнего конуса надстройки. А отображение нижнего конуса можно определить симметрично.

$\mathbb{Z}_2$ -пространства X и Y называем эквивариантно эквивалентными и пишем $X \simeq Y$, если имеются эквивариантные отображения $X \rightarrow Y$ и обратно $Y \rightarrow X$.

ТЕОРЕМА 4.1. *Если полиэдр P имеет стягиваемую компоненту связности, то $(CP)^{\mathbb{Z}_2} \simeq S(P^{\mathbb{Z}_2})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $X = P$ для одноточечного Y , получаем эквивариантное отображение $(CP)^{\mathbb{Z}_2} \rightarrow S(P^{\mathbb{Z}_2})$, опуская в числителе и знаменателе (19) слагаемые, связанные с Y .

Для определения обратного отображения мы будем доказывать гомотопность постоянному эквивариантного отображения $c: P^{\mathbb{Z}_2} \rightarrow (CP)^{\mathbb{Z}_2}$, индуцированного вложением, и строить из полученной гомотопии эквивариантное отображение надстройки с помощью леммы 4.3.

Фиксируем стягиваемую компоненту связности $P_0 \subset P$ и определяем отображение $f: P^{\mathbb{Z}_2} \rightarrow (CP)^{\mathbb{Z}_2}$ по формуле

$$f(x, x') = \begin{cases} (x, 0 \cdot x') & \text{при } x \in P_0, \\ (0 \cdot x, x') & \text{при } x \notin P_0. \end{cases} \quad (21)$$

Отображение f гомотопно c . Действительно, для получения формулы гомотопии, связывающей эти отображения, достаточно заменить 0 на t в (21). Поэтому нам достаточно доказать, что f гомотопно постоянному отображению.

Для этого фиксируем гомотопию h_t , стягивающую P_0 в точку $x_0 \in P_0$. Через 0 обозначаем вершину конуса CP . Теперь мы определяем гомотопию f_t отображения $f = f_0$ к постоянному отображению $f_1(x, x') = (x_0, 0)$ следующим образом: при $x \in P_0$ полагаем $f_t(x, x') = (h_t(x), 0)$ и при $x \notin P_0$ полагаем $f_t(x, x') = (t \cdot x_0, (1 - t) \cdot x')$.

ЛЕММА 4.4. *Для стягиваемого пространства X имеют место эквивалентности*

$$(X \times I)^{\mathbb{Z}_2} \simeq (CX)^{\mathbb{Z}_2} \simeq S(X^{\mathbb{Z}_2}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вложение $X \times I \rightarrow CX$ индуцирует эквивариантное отображение $(X \times I)^{\mathbb{Z}_2} \rightarrow (CX)^{\mathbb{Z}_2}$.

Эквивариантное отображение $(CX)^{\mathbb{Z}_2} \rightarrow S(X^{\mathbb{Z}_2})$ можно определить с помощью леммы 4.1, если CX рассматривать как джойн одноточечного пространства и X .

Для определения эквивариантного отображения $S(X^{\mathbb{Z}_2}) \rightarrow (X \times I)^{\mathbb{Z}_2}$ в силу леммы 4.3 достаточно стянуть в точку отображение $X^{\mathbb{Z}_2} \rightarrow (X \times I)^{\mathbb{Z}_2}$, индуцированное вложением $x \rightarrow (x, 1)$. Если зафиксировать стягивание $c(x, t)$ пространства X в точку, то искомая гомотопия может быть определена формулой

$$((c(x, t), t), (c(x', t), t)).$$

Коантиподальность. Косферический индекс X^2 называем *коантиподальностью* компакта X и обозначаем $\text{co-ant } X$. Связь коантиподальности с вложимостью обеспечивается следующей эквивалентностью.

ЛЕММА 4.5. *Взрезанный квадрат пространства $\mathbb{R}^n$ эквивариантно эквивалентен сфере S^{n-1} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивариантное отображение $S^{n-1} \rightarrow (\mathbb{R}^n)^2$ задается формулой $x \rightarrow (x, -x)$. И формула $(x, y) \rightarrow \frac{x-y}{|x-y|}$ задает отображение в другую сторону.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Для любого компакта X справедливы неравенства*

$$\text{ant } X \leq \text{co-ant } X \leq \text{emb } X.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство $\text{ant } X \leq \text{co-ant } X$ непосредственно вытекает из неравенства между сферическим и косферическим индексами (предложение 5.2) для X^2 . Неравенство $\text{co-ant } X \leq \text{emb } X$ вытекает из леммы 4.5.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Для любого гиперантиподального компакта X справедливо равенство $\text{ant } X = \text{co-ant } X$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $\text{ant } X = \text{emb } X$ для гиперантиподального компакта. Так как $\text{co-ant } X \leq \text{emb } X$, то $\text{co-ant } X \leq \text{ant } X$. Обратное неравенство доказано выше.

Теорема о дизъюнктном семействе. Вложение компакта X в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ называем *гомотопически существенным*, если на некотором компакте не гомотопно (неэквивариантной гомотопией) постоянному индуцированное отображение взрезанных квадратов $V^2 \rightarrow (\mathbb{R}^n)^2$.

ТЕОРЕМА 4.2. *Пространство $\mathbb{R}^n$ не содержит несчетного семейства гомотопически существенно вложенных абсолютных ретрактов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{X_t\}_{t \in T}$ — несчетное дизъюнктное семейство абсолютных ретрактов в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что все они существенно вложены. Переходя, если нужно, к подсемейству, можно считать, что все отображения ε -взрезанных квадратов существенны. Выберем для каждого t ретракцию $r_t: \mathbb{R}^n \rightarrow X_t$. Пространство всех ретракций пространства $\mathbb{R}^n$ в равномерной метрике сепарабельно. Поэтому сепарабельно будет и подпространство $\{h_t \mid t \in T\}$. А сепарабельное несчетное пространство не может быть дискретным. Поэтому найдется последовательность ретракций $r_i: \mathbb{R}^n \rightarrow X_i$, сходящаяся к ретракции $r: \mathbb{R}^n \rightarrow X$ (X и X_i принадлежат рассматриваемому семейству). Выберем i столь большим, чтобы $|r_i(x) - r(x)| < \varepsilon$ для любого $x \in X$. В таком случае для любой пары точек $(x, x') \in X$ на расстоянии большем чем ε x не будет лежать на отрезке $[x', r_i(x')]$. Отсюда следует, что отображение $X_\varepsilon^2 \rightarrow (\mathbb{R}^n)^2$, индуцированное вложением, гомотопно отображению, задаваемому формулой $(x, x') \rightarrow (x, r_i(x'))$. Следовательно, с одной стороны, последнее отображение не гомотопно постоянному ввиду существенности вложения X , но, с другой стороны, последнее отображение гомотопно постоянному, потому что оно пропускается через $X \times X_i$.

Заметим, что для произвольных компактов теорема 4.2 неверна, как следует из примера в работе [33].

§ 5. Гомологический индекс Янга

Характеристический класс $\mathbb{Z}_2$ -пространства. В этом параграфе все рассматриваемые когомологии имеют поле $\mathbb{Z}_2$ в качестве коэффициентов. Все рассматриваемые пространства локально компактны. Для свободного $\mathbb{Z}_2$ -пространства X накрытие $X \rightarrow X/2$ является главным расслоением со структурной группой $\mathbb{Z}_2 = O(1)$. Универсальным двулистным накрытием является стандартное накрытие $S^\infty \rightarrow S^\infty/2 = \mathbb{R}P^\infty$ бесконечномерного проективного пространства бесконечномерной сферой. Пусть $f: X/2 \rightarrow \mathbb{R}P^\infty$ – отображение, индуцирующее накрытие $X \rightarrow X/2$ из универсального. Пусть $w \in H^1(\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{Z}_2)$ – единственный ненулевой элемент в $H^1(\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{Z}_2)$. Тогда $w(X) = f^*(w) \in H^1(X/2, \mathbb{Z}_2)$ называется *характеристическим классом $\mathbb{Z}_2$ -пространства X* . То есть характеристический класс есть не что иное, как одномерный класс Штифеля–Уитни ассоциированного одномерного векторного расслоения. Из теории характеристических классов нам потребуются лишь их *естественность* и *нетривиальность* ($w(S^1) \neq 0$) [19; аксиомы 2 и 4]. Естественность означает следующее:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Для любого эквивариантного отображения $f: X \rightarrow Y$ индуцированное отображение когомологий переводит $w(Y)$ в $w(X)$.*

Индекс Янга. *Гомологический индекс Янга* свободного $\mathbb{Z}_2$ -пространства X обозначается $\text{h-ind } X$ и определяется как наибольшее n , для которого $w^n(X) \neq 0$, где $w^n(X)$ – n -я степень класса $w(X)$. В частности, $\text{h-ind } S^n = n$. Естественность характеристического класса очевидным образом влечет следующее свойство *ковариантности*.

ЛЕММА 5.1 (см. [30], [6]). *Если имеется эквивариантное отображение из X в Y , то $\text{h-ind } X \leq \text{h-ind } Y$.*

Между введенными индексами имеются следующие неравенства.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2 (см. [29]). *Для любого пространства X справедливы неравенства*

$$\text{ind } X \leq \text{h-ind } X \leq \text{co-ind } X. \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение вытекает из ковариантности индекса Янга ввиду того, что все индексы сферы S^n равны n .

Поскольку все рассматриваемые индексы ковариантны, имеет место следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. *Эквивалентность $X \simeq Y$ влечет $\text{ind } X = \text{ind } Y$, $\text{h-ind } X = \text{h-ind } Y$ и $\text{co-ind } X = \text{co-ind } Y$.*

ЛЕММА 5.2. *Пусть $f: X \rightarrow Y$ – послойно $\mathbb{Z}_2$ -ациклическое эквивариантное отображение свободных $\mathbb{Z}_2$ -пространств. Тогда $\text{h-ind } X = \text{h-ind } Y$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В данной ситуации индуцированное отображение фактор-пространств $f/2: X/2 \rightarrow Y/2$ также имеет $\mathbb{Z}_2$ -ациклические прообразы. Поэтому в силу теоремы Виеториса–Бегля индуцированное отображение когомологий

$H^n(Y/2) \rightarrow H^n(X/2)$ является изоморфизмом для любого n . Так как образом $w^n(Y)$ при индуцированном отображении в силу естественности характеристического класса служит $w^n(X)$, получаем, что $w^n(Y) = 0$ в том и только том случае, когда $w^n(X) = 0$.

Индекс Янга обладает следующим свойством *непрерывности*.

ЛЕММА 5.3. *Индекс Янга обратного предела $\text{h-ind } \text{invlim } X_i$ свободных $\mathbb{Z}_2$ -компактов равен $\lim \text{h-ind } X_i$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу ковариантности индекса Янга последовательность $\text{h-ind } X_i$ не возрастает, следовательно, она имеет предел и этот предел удовлетворяет неравенству $\text{h-ind } X_i \geq \lim \text{h-ind } X_i$. С другой стороны, в силу непрерывности когомологий $H^n(X)$ является прямым пределом групп $H^n(X_i)$. Поэтому обращение в нуль $w^n(X)$ влечет обращение в нуль $w^n(X_i)$ для всех i , начиная с некоторого.

ТЕОРЕМА 5.1. *Для любых компактных свободных $\mathbb{Z}_2$ -компактов справедливо равенство*

$$\text{h-ind}(X * Y) = \text{h-ind } X + \text{h-ind } Y + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как всякий компакт является обратным пределом последовательности конечных полиэдров, в силу леммы 5.3 достаточно рассмотреть случай, в котором X и Y — компактные полиэдры. Далее, поскольку гомологический индекс Янга k -мерного остова полиэдра совпадает с индексом всего пространства, если последний не превосходит k , постольку, не теряя общности, мы можем считать, что $\text{h-ind } X = \dim X = m$ и $\text{h-ind } Y = \dim Y = n$. Тогда имеются эквивариантные отображения $X \rightarrow S^m$ и $Y \rightarrow S^n$ такие, что индуцированные ими гомоморфизмы $H^m(\mathbb{R}P^m) \rightarrow H^m(X/2)$ и $H^n(\mathbb{R}P^n) \rightarrow H^n(Y/2)$ нетривиальны. Действительно, например, для пространства X эквивариантное отображение $X \rightarrow S^m$ существует в силу m -универсальности накрытия $S^m \rightarrow \mathbb{R}P^m$, а нетривиальность указанного выше гомоморфизма вытекает из того, что $\text{h-ind } X = m$ (аналогично для пространства Y). Кроме того, можно считать, что отображения $X \rightarrow S^m$ и $Y \rightarrow S^n$ симплициальны (по отношению к инвариантным симплициальным разбиениям соответствующих пространств). В силу двойственности между гомологиями и когомологиями (для коэффициентов в поле $\mathbb{Z}_2$) получаем, что нетривиальны гомоморфизмы $H_m(X/2) \rightarrow H_m(\mathbb{R}P^m)$ и $H_n(Y/2) \rightarrow H_n(\mathbb{R}P^n)$. Пусть a и a' — инвариантные циклы пространств X и Y , переходящие соответственно в инвариантные циклы s и s' сфер S^m и S^n , которые определяют образующие групп гомологий $H^m(\mathbb{R}P^m)$ и $H^n(\mathbb{R}P^n)$ (циклы s и s' на самом деле равны сумме всех m -мерных симплексов, поскольку $(m+1)$ -мерных симплексов нет). Можно считать, что $m, n > 0$. Тогда $a * a'$ — инвариантный цикл в пространстве $X * Y$ (в силу того, что $\partial(a * a') = (\partial a) * a' \pm a * (\partial a')$), переходящий в инвариантный цикл $s * s'$ пространства $S^m * S^n = S^{m+n+1}$. Цикл $s * s'$ равен сумме всех симплексов сферы $S^m * S^n = S^{m+n+1}$ и, следовательно, представляет образующий класс гомологий в $\mathbb{R}P^{m+n+1}$.

Частный случай доказанной теоремы представляет собой следующее доказанное Коннером и Флойдом [29] равенство

$$\text{h-ind } SX = \text{h-ind } X + 1. \quad (23)$$

ЛЕММА 5.4. Пусть X и Y – инвариантные компактные подпространства свободного $\mathbb{Z}_2$ -пространства. Тогда имеет место неравенство

$$\text{h-ind}(X \cup Y) \leq \text{h-ind } X + \text{h-ind } Y + 1. \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через Z подпространство джойна $X * Y$, полученное объединением $X = \{1 \cdot x + 0 \cdot y \mid x \in X, y \in Y\}$, $Y = \{0 \cdot x + 1 \cdot y \mid x \in X, y \in Y\}$ и $(X \cap Y) \times I = \{t \cdot x + (1-t) \cdot x \mid x \in X \cap Y\}$. Тогда Z является инвариантным подпространством джойна $X * Y$. Следовательно, $\text{h-ind } Z \leq \text{h-ind}(X * Y)$. С другой стороны, естественное отображение $Z \rightarrow X \cup Y$ имеет в качестве прообразов точек или точки, или отрезки. Поэтому $\text{h-ind } Z = \text{h-ind}(X \cup Y)$ в силу леммы 5.2.

ТЕОРЕМА 5.2 (см. [29]). Пусть X , Y и $X \cup Y$ – локально-компактные $\mathbb{Z}_2$ -пространства. Тогда имеет место равенство

$$\text{h-ind}(X \cup Y) \leq \text{h-ind } X + \text{h-ind } Y + 1. \quad (25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Z – произвольное компактное инвариантное подпространство в $X \cup Y$. Положим $X' = Z \cap X$ и $Y' = Z \cap Y$. Тогда в силу леммы 5.4 имеем $\text{h-ind } Z \leq \text{h-ind } X' + \text{h-ind } Y' + 1 \leq \text{h-ind } X + \text{h-ind } Y + 1$. Ввиду произвольности Z ссылка на лемму 5.3 завершает доказательство.

Последовательность Смита. Янг определял индекс с помощью последовательности Смита. В случае свободной инволюции на накрытие $X \rightarrow X/2$ можно смотреть как на локально тривиальное расслоение, слоем которого является нульмерная сфера S^0 . Поскольку в качестве поля коэффициентов мы берем $\mathbb{Z}/2$, это расслоение ориентируемо. Последовательность Гизина этого расслоения и есть последовательность Смита для пространства со свободной инволюцией. Последовательность Смита функториальна и для накрытия $\pi: X \rightarrow X/2$ имеет вид

$$\longrightarrow H^n(X/2) \xrightarrow{\pi^*} H^n(X) \xrightarrow{\pi^!} H^n(X/2) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(X/2) \longrightarrow .$$

Здесь π^* индуцирован отображением π и $\pi^!$ – трансфер.

Имеют место соотношения $\delta(1) = w(X)$ и $\delta(w^n(X)) = w^{n+1}(X)$. Действительно, поскольку $H^*(\mathbb{R}P^\infty) = \mathbb{Z}/2[w]$ – алгебра многочленов от одномерного образующего $w \in H^1(\mathbb{R}P^\infty)$, из последовательности Смита накрытия $S^\infty \rightarrow \mathbb{R}P^\infty$ сразу получаем, что δ – изоморфизм во всех размерностях, т.е. $\delta(1) = w$ и $\delta(w^n) = w^{n+1}$. Поэтому приведенные соотношения следуют из функториальности последовательности Смита. Теперь видно, что если определить $\delta^1 = \delta$ и $\delta^n = \delta \circ \delta^{n-1}$, то $\text{h-ind } X$ равен наибольшему n , для которого $\delta^n(1) \neq 0$, где $1 \in H^0(X)$.

ЛЕММА 5.5 (см. [29]). Пусть X_1, X_2 – связные свободные $\mathbb{Z}_2$ -пространства индекса $\text{h-ind } X_1 = \text{h-ind } X_2 = n$. Тогда всякое эквивариантное отображение $f: X_1 \rightarrow X_2$ индуцирует ненулевой гомоморфизм $f^*: H^n(X_2) \rightarrow H^n(X_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\bar{f}: X_1/2 \rightarrow X_2/2$ отображение фактор-пространств, индуцированное эквивариантным отображением f . Рассмотрим отображение последовательностей Смита и возникающую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} H^n(X_2) & \xrightarrow{\pi_2^!} & H^n(X_2/2) & \xrightarrow{\delta_2} & H^{n+1}(X_2/2) \\ f^* \downarrow & & \bar{f}^* \downarrow & & \bar{f}^* \downarrow \\ H^n(X_1) & \xrightarrow{\pi_1^!} & H^n(X_1/2) & \xrightarrow{\delta_1} & H^{n+1}(X_1/2). \end{array}$$

Из сделанных предположений следует, что $w^n(X_2) \neq 0$ и $\delta_2 w^n(X_2) = 0$. Из точности верхней последовательности следует, что существует класс $0 \neq \gamma \in H^n(X_2)$ такой, что $\pi_2^! \gamma = w^n(X_2)$. Кроме того, $w^n(X_1) = \bar{f}^* w^n(X_2)$. Из коммутативности левого квадрата вытекает, что $w^n(X_1) = \pi_1^! f^* \gamma$. Поскольку $w^n(X_1) \neq 0$, получается, что $f^* \neq 0$ в размерности n .

Из леммы 5.5, в частности, следует, что степень эквивариантного отображения сферы в себя равна 1 по модулю 2. Это утверждение, как хорошо известно, эквивалентно теореме Борсука–Улама.

ЛЕММА 5.6. *Если свободное связное $\mathbb{Z}_2$ -пространство X имеет нулевые когомологии $H^k(X) = 0$ для $k < n$, то $\text{h-ind } X \geq n$, а если оно имеет нулевые когомологии $H^k(X) = 0$ для $k > n$ и $\dim X < \infty$, то $\text{h-ind } X \leq n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим тождественное отображение X на себя, тогда согласно лемме 5.5 оно индуцирует ненулевой автогомоморфизм группы $H^m(X)$ для $m = \text{h-ind } X$. Следовательно, $H^m(X) \neq 0$ и $m \geq n$.

Второе утверждение доказывается точно так же, как и первое, поскольку из сделанных предположений следует, что $\text{h-ind } X < \infty$ (для компактного X конечность индекса вытекает из того, что образ отображения $X \rightarrow \mathbb{R}P^\infty$, индуцирующего накрытие $X \rightarrow X/2$, содержится в конечном остове, т.е. содержится в $\mathbb{R}P^N$ для подходящего N).

ЛЕММА 5.7. *Для любого свободного $\mathbb{Z}_2$ -компакта X справедливо неравенство*

$$\text{h-ind } X \leq \dim_{\mathbb{Z}_2} X.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\dim_{\mathbb{Z}_2} X = \dim_{\mathbb{Z}_2} X/2$ и $H^n(X/2) \neq 0$ для $n = \text{h-ind } X$, то $\dim_{\mathbb{Z}_2} X \geq \text{h-ind } X$.

§ 6. Гомологическая антиподальность

Увеличенный на единицу максимум индексов Янга симметричных компактных подмножеств взрезанного квадрата X^2 мы называем *гомологической антиподальностью* пространства X и обозначаем $\text{h-ant } X$.

ЛЕММА 6.1. *Для любого компакта X справедливы неравенства*

$$\text{h-ant } CX \leq \text{h-ant } X + 1, \quad \text{h-ant } X \geq \dim X.$$

Если $\text{h-ant } X > \dim X + 1$, то

$$\text{h-ant } CX = \text{h-ant } X + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое неравенство вытекает из существования эквивариантного отображения $(CX)^{\mathbb{Z}} \rightarrow SX^{\mathbb{Z}}$ (лемма 4.1).

Обозначим через X' пространство, полученное добавлением к X одной изолированной точки p , так что $X' = X \cup \{p\}$. Докажем, что $\text{h-ind } X'^{\mathbb{Z}} = \text{h-ind } X^{\mathbb{Z}}$. Действительно, $X'^{\mathbb{Z}}$ представляется в виде дискретного объединения $X^{\mathbb{Z}} \sqcup (p \times X) \sqcup (X \times p)$. Поэтому можно определить эквивариантную ретракцию $X'^{\mathbb{Z}} \rightarrow X^{\mathbb{Z}}$, переводя $p \times X$ в любую точку из $X^{\mathbb{Z}}$. Это доказывает эквивалентность $X^{\mathbb{Z}} \hookrightarrow X'^{\mathbb{Z}}$.

Далее, так как X' имеет стягиваемую компоненту, то $(CX')^{\mathbb{Z}}$ эквивариантен $S(X'^{\mathbb{Z}})$ в силу теоремы 4.1. Отсюда $\text{h-ind}(CX')^{\mathbb{Z}} = \text{h-ind } S(X'^{\mathbb{Z}}) = \text{h-ind } X'^{\mathbb{Z}} + 1$ в силу теоремы 5.1.

Для окончания доказательства достаточно убедиться в справедливости равенства

$$\text{h-ind}(CX')^{\mathbb{Z}} = \text{h-ind}(CX)^{\mathbb{Z}}. \quad (26)$$

Пусть w обозначает характеристический класс $(CX')^{\mathbb{Z}}$. Тогда ограничение w на $(CX)^{\mathbb{Z}}$ является в силу естественности характеристическим классом для $(CX)^{\mathbb{Z}}$. Если $m = \text{h-ind}(CX')^{\mathbb{Z}}$, то $w^m(z) \neq 0$ для некоторого цикла $z \in H_m((CX')^{\mathbb{Z}})$. Так как $\text{h-ind } X^{\mathbb{Z}} > \dim X$ и пространство $(CX')^{\mathbb{Z}}$ представляется в виде $(CX)^{\mathbb{Z}} \cup (CX \times I) \cup (I \times CX) \cup I^{\mathbb{Z}}$, то z имеет носитель внутри $X^{\mathbb{Z}}$. Следовательно, $z \in H_m((CX)^{\mathbb{Z}})$ и ограничение w^m на $(CX)^{\mathbb{Z}}$ не равно нулю, что и доказывает неравенство $\text{h-ind}(CX')^{\mathbb{Z}} \leq \text{h-ind}(CX)^{\mathbb{Z}}$. Обратное неравенство вытекает из ковариантности гомологического индекса.

ЛЕММА 6.2. *Всегда справедливо неравенство $\text{h-ant}(X * Y) \leq \text{h-ant } X + \text{h-ant } Y + 1$, и если $\text{h-ant } X > \dim X + 1$, то*

$$\text{h-ant}(X * Y) = \text{h-ant } X + \text{h-ant } Y + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 6.1 имеет место равенство

$$\text{h-ind}(C(X * Y))^{\mathbb{Z}} = \text{h-ind}(X * Y)^{\mathbb{Z}} + 1. \quad (27)$$

А так как $C(X * Y) = (CX) * Y$ и существует эквивариантное отображение

$$((CX) * Y)^{\mathbb{Z}} \rightarrow S((CX)^{\mathbb{Z}} * Y^{\mathbb{Z}})$$

в силу леммы 4.1, то

$$\text{h-ind } C(X * Y)^{\mathbb{Z}} = \text{h-ind}((CX)^{\mathbb{Z}} * Y^{\mathbb{Z}}) + 1 = \text{h-ind}(CX)^{\mathbb{Z}} + \text{h-ind } Y^{\mathbb{Z}} + 2$$

(теорема 5.1). И все это равно $\text{h-ind } X^{\mathbb{Z}} + \text{h-ind } Y^{\mathbb{Z}} + 3$ благодаря лемме 6.1. Полученное равенство и (27) вместе дают нужный результат.

Скажем, что вложение компакта X в многообразие M *гомологически существенно*, если нетривиально индуцированное вложением отображение $\mathbb{Z}_2$ -гомогий взрезанных квадратов. Всякое гомологически существенное вложение будет, очевидно, и гомотопически существенным.

ЛЕММА 6.3. *Если $\text{h-ant } X = n$, то всякое вложение компакта X в $\mathbb{R}^n$ гомологически существенно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим компактное $R \subset X^2$ индекса $\text{h-ind } R = n - 1$. Индуцированное вложением эквивариантное отображение $R \rightarrow (\mathbb{R}^n)^2$ в силу леммы 5.5 индуцирует нетривиальное отображение когомологий, а значит, и гомологий с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$.

ЛЕММА 6.4. *Всякое свободное вложение $\mathbb{Z}_2$ -ациклического компакта в $\mathbb{R}^{n+1}$ не является гомологически существенным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R \subset X^2$ — любое симметричное компактное подмножество. Докажем, что индуцированный вложением гомоморфизм гомологий взрезанных квадратов тривиален. Пусть ε столь мало, что $|x - y| > \varepsilon$ для любых $(x, y) \in R$. В силу свободной вложенности X найдется ε -близкое к тождественному отображение $f: X \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, для которого $f(X) \cap X = \emptyset$. Тогда для всех $(x, y) \in R$ отрезок $[y, f(y)]$ не содержит x и потому отображение $(x, y) \rightarrow (x, f(y))$ гомотопно тождественному. Но отображение $(x, y) \rightarrow (x, f(y))$ индуцирует нулевой гомоморфизм $H^n((\mathbb{R}^{n+1})^2) \rightarrow H^n(R)$, поскольку этот гомоморфизм пропускается через нулевую группу $H^n(X^2)$.

ТЕОРЕМА 6.1. *Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ не содержит несчетного дизъюнктного семейства $\mathbb{Z}_2$ -ациклических абсолютных окрестностных ретрактов гомологической антиподальности n .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого члена несчетного семейства X_t окрестностных ретрактов можем фиксировать элемент счетной базы топологии $\mathbb{R}^n$, ретрактом которого этот элемент является. Тогда некоторый элемент этой базы, скажем U , ретрагируется на несчетное число X_t . Зафиксируем несчетное число ретракций r_t из U на элементы этого семейства. Тогда найдется сходящаяся последовательность $r_{t_i} \rightarrow r_0$ ретракций. В таком случае $r_0(U)$ окажется свободно вложенным элементом рассматриваемого семейства, что противоречит леммам 6.3, 6.4.

Самозацепления. Будем говорить, что отображение $f: X \rightarrow M$ компакта в некомпактное многообразие *гомотопируется в бесконечность*, если существует собственное отображение $F: X \times [0, \infty) \rightarrow M$, для которого $F(x, 0) = f(x)$.

Пусть X является подмножеством M . Скажем, что гомотопия $h_t: X \rightarrow M$ является ε -цепляющей, если найдется такое t и такие $x, x' \in X$, что $|x - x'| \geq \varepsilon$ и $h_t(x) = x'$. Вложение компакта в некомпактное многообразие $X \subset M$ называется *самозацепленным*, если найдется такое $\varepsilon > 0$, для которого всякая собственная гомотопия, уводящая X на бесконечность, является ε -цепляющей.

ЛЕММА 6.5. *Если компакт X коразмерности 2 стягивается в связном многообразии, то X стягивается в дополнении к любой из точек многообразия.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h_t: X \rightarrow M$ — гомотопия тождественного отображения к постоянному. Тогда приведением в “общее положение” можно добиться, чтобы образ этой гомотопии избегал любой наперед заданной точки.

ЛЕММА 6.6 (см. [21]). *Для любого стягиваемого n -многообразия M будет $M^{\mathbb{Z}} \hookrightarrow S^{n-1}$.*

ЛЕММА 6.7. *Всякое гомотопически существенное вложение компакта размерности ≥ 2 в некомпактное стягиваемое многообразие является самозацепленным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу существенности вложения $X \subset M$ найдется $\varepsilon > 0$, для которого X_ε^2 не стягивается в $M^{\mathbb{Z}}$. Докажем, что в этом случае каждая гомотопия, уводящая X на бесконечность, будет ε -цепляющей. Предположим, напротив, что имеется не ε -цепляющая собственная гомотопия $f_t: X \rightarrow M$, уводящая X на бесконечность. Пусть T столь велико, что X стягивается в $M \setminus g_T(X)$ к точке. И пусть $g_t: X \rightarrow M$ — гомотопия, осуществляющая это стягивание. Зафиксируем также гомотопию h_t , стягивающую $f_T(X)$ к точке в дополнении к $M \setminus g_1(X)$. Теперь мы в три этапа можем осуществить стягивание в точку X_ε^2 вопреки нашему предположению. А именно на первом этапе мы осуществляем гомотопию $X_\varepsilon^2 \rightarrow M^{\mathbb{Z}}$ по формуле $(x, y) \rightarrow (x, f_t(y))$ от $t = 0$ до $t = T$. Предположение об ε -незацепленности f_t обеспечивает корректность процедуры. На втором этапе мы применяем гомотопию $(x, y) \rightarrow (g_t(x), y)$ от $t = 0$ до $t = 1$. Корректность этой гомотопии обеспечивает условие, что g_t протекает в дополнении к $f_T(X)$. Наконец, на третьем этапе включается гомотопия $(x, y) \rightarrow (x, h_t(y))$, t от нуля до единицы.

ТЕОРЕМА 6.2. *Всякое вложение компакта X в стягиваемое многообразие M самозацеплено, если $\text{h-ant } X = \dim M$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 6.7 достаточно доказать существенность вложения $X \subset M$. Пусть $R \subset X^2$ — компактное симметричное подмножество, для которого $\text{h-ind } R = \text{ant } X - 1$. Включение $R \subset M^{\mathbb{Z}}$ индуцирует ненулевой гомоморфизм n -мерных когомологий в силу лемм 5.5 и 6.6. Поэтому это включение не гомотопно постоянному, что и доказывает существенность вложения X .

Полиэдры. Для симплициального комплекса K через $|K|$ будем обозначать его полиэдральную реализацию. Через K^2 обозначаем полный подкомплекс K^2 , вершинами которого служат пары различных вершин комплекса K . Полиэдр $|K^2|$ мы, следуя [34], называем *симплициальным взрезанным квадратом* комплекса K . Заметим, что $|K^2|$ является подпространством полиэдра $|K|^2$ и не совпадает с ним. Впрочем различия между этими полиэдрами малосущественны, как показывает следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1 (см. [25]). *Для любого симплициального комплекса K имеет место эквивалентность $|K|^{\mathbb{Z}} \hookrightarrow |K^2|$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для точки $x \in |K|$ обозначим через $\sigma(x)$ ее симплекс-носитель, т.е. тело наименьшего симплекса, которому x принадлежит. Обозначим через X подмножество $|K|^{\mathbb{Z}}$, образованное парами точек (x, y) , для которых $\sigma(x) \neq \sigma(y) \cup \sigma(x) \neq \sigma(y)$. Докажем, что $X \hookrightarrow |K|^{\mathbb{Z}}$. Так как X симметрично, то вложение $X \subset |K|^{\mathbb{Z}}$ является эквивариантным отображением. В обратную сторону, определим эквивариантную ретракцию $F_1: |K|^{\mathbb{Z}} \rightarrow X$ следующим образом. Пусть $(x, y) \notin X$, тогда $F_1(x, y)$ определяется как пара точек (x', y') , полученных в результате пересечения прямой, проходящей через $[x, y]$, с границей $\sigma(x) \cup \sigma(y)$ и упорядоченная так, что x' ближе к x , чем к y .

Теперь докажем, что $X \hookrightarrow |K^{\mathbb{Z}}|$. Включение $|K^{\mathbb{Z}}| \subset X$ является эквивариантным отображением. Для определения эквивариантного отображения $X \rightarrow |K^{\mathbb{Z}}|$ рассмотрим многозначную ретракцию $F_2: X \rightarrow |K^{\mathbb{Z}}|$. Пусть $(x, y) \in X \setminus |K^{\mathbb{Z}}|$, тогда непусто $s = \sigma(x) \cap \sigma(y)$. Представим $\sigma(x) = s * s_1$ и $\sigma(y) = s * s_2$ в виде джойнов. Положим $F_2(x, y) = s_1 \times s_2$. Многозначная ретракция F_2 выпуклозначна, непрерывна сверху и эквивариантна. Поэтому в любой окрестности ее графика по эквивариантной версии теоремы Майкла имеется график эквивариантного непрерывного отображения $f_\varepsilon: X \rightarrow |K^{\mathbb{Z}}|$.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. *Для любого симплициального комплекса K имеет место равенство: $\text{h-ind } |K^{\mathbb{Z}}| = \text{h-ind } |K|^{\mathbb{Z}}$.*

Пусть K является полиэдром с триангуляцией τ . Отображение $f: K \rightarrow X$ называется *дизъюнктивным* относительно τ или τ -*дизъюнктивным*, если $f(\sigma) \cap f(\sigma') = \emptyset$ для любой пары дизъюнктивных симплексов σ, σ' триангуляции τ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. *Если $\text{h-ant } P > n$, то не существует симплициально дизъюнктивного отображения $P \rightarrow \mathbb{R}^n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу следствия 6.1 условие $\text{h-ant } P > n$ влечет неравенство $\text{h-ind } |K^{\mathbb{Z}}| \geq n$ для любого симплициального комплекса с $|K| = P$. Но симплициально дизъюнктивное отображение $|K| \rightarrow \mathbb{R}^n$ индуцирует эквивариантное отображение симплициального взрезанного квадрата в $(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{Z}}$, что противоречит ковариантности индекса Янга.

Следующая теорема копирует Linking Lemma из [21].

ТЕОРЕМА 6.3. *Пусть K – комплекс такой, что $\dim K < m-1$ и $\text{h-ant } |K| \geq m$. Тогда для всякого собственного отображения $G: |K| \times [0, \infty) \rightarrow M^m$ в стягиваемое m -многообразие существует пара непересекающихся симплексов σ, τ комплекса K , для которых*

$$G(\sigma \times 0) \cap G(\tau \times [0, \infty)) \neq \emptyset.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу следствия 6.1 $\text{h-ind } |K^{\mathbb{Z}}| = \text{h-ind } |K|^{\mathbb{Z}}$. Поэтому всякое вложение $|K| \rightarrow \mathbb{R}^m$ индуцирует негомотопное постоянному включение $|K^{\mathbb{Z}}| \rightarrow (\mathbb{R}^m)^{\mathbb{Z}}$. Нужное утверждение можно получить, заменив в доказательстве леммы 6.7 X_ε^2 на $|K^{\mathbb{Z}}|$.

§ 7. Индекс Янга склеиваемых антиподов

ТЕОРЕМА 7.1. *Пусть $f: X \rightarrow Y$ – отображение свободного $\mathbb{Z}_2$ -континуума в компактное пространство Y гомотопической размерности $m = \dim_{\mathbb{Z}_2} Y$. Предположим, что $\text{h-ind } X \geq 2m$. При $\text{h-ind } X = 2m$ предположим дополнительно, что $0 = f^*: H^m(Y) \rightarrow H^m(X)$. Тогда f склеивает антиподы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что f свободно. Определим эквивариантное отображение $\widehat{f}: X \rightarrow Y^{\mathbb{Z}}$ формулой $\widehat{f}(x) = (f(x), f(-x))$. Так как размерность по модулю 2 удовлетворяет логарифмическому закону, то $2m = \dim_{\mathbb{Z}_2} Y^2 \geq \dim_{\mathbb{Z}_2} \widehat{f}(X)$. Это ведет к противоречию в случае $\text{h-ind } X > 2m$ ввиду леммы 5.7 и ковариантности индекса Янга.

Остается рассмотреть случай $\text{h-ind } X = 2m$. Из того, что $\dim_{\mathbb{Z}_2} Y^2 = 2m$, вытекает, что $H^{2m}(Y^2) \rightarrow H^{2m}(\widehat{f}(X))$ — эпиморфизм. Из сделанных предположений и формулы Кюннета также следует, что $0 = (f \times f)^*: H^{2m}(Y^2) \rightarrow H^{2m}(X^2)$. Поскольку $\widehat{f}$ является композицией $f \times f$ и отображения $x \rightarrow (x, -x)$, получаем, что $0 = \widehat{f}^*: H^{2m}(\widehat{f}(X)) \rightarrow H^{2m}(X)$. Таким образом, мы получили противоречие с утверждением леммы 5.5.

СЛЕДСТВИЕ 7.1. *Всякое непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ компактного свободного $(2k - 1)$ -ациклического $\mathbb{Z}_2$ -пространства X в пространство размерности $\dim_{\mathbb{Z}_2} Y \leq k$ склеивает пару антиподов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\widetilde{H}^i(X) = 0$ для $i \leq 2k - 1$, то в силу леммы 5.6 получаем, что $\text{h-ind } X \geq 2k \geq 2 \dim_{\mathbb{Z}_2} Y$. Гомоморфизм, индуцированный f в k -мерных когомологиях, является нулевым потому, что $H^k(X) = 0$.

ТЕОРЕМА 7.2. *Если отображение $f: X \rightarrow Y$ континуума индекса $\text{h-ind } X = n$ в компакт Y гомологической размерности $m = \dim_{\mathbb{Z}_2} Y$ индуцирует нулевой гомоморфизм $H^m(Y) \rightarrow H^m(X)$, то*

$$\text{h-ind } A(f) \geq n - 2m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, напротив, что $\text{h-ind } A(f) \leq n - 2m - 1$. Представим $A(f)$ в виде пересечения последовательности компактных инвариантных окрестностей Q_i , тогда $\text{h-ind } Q_i = \text{h-ind } A(f)$ для некоторого i в силу леммы 5.3. Положим $Q = Q_i$ и R — дополнение к внутренности Q . Тогда $Q, R \subset X$ таковы, что $Q \cup R = X$, причем $A(f) \subset Q$, $R \subset X \setminus A(f)$ и $\text{h-ind } A(f) = \text{h-ind } Q$.

Из леммы 5.4 имеем $\text{h-ind } X \leq \text{h-ind } Q + \text{h-ind } R + 1$, поэтому $\text{h-ind } R \geq \text{h-ind } X - \text{h-ind } Q - 1 \geq 2m$. Обозначим $f|_R$ через $g: R \rightarrow Y$. Из определений следует, что $A(g) = \emptyset$. С другой стороны, $\text{h-ind } R \geq 2m$ и $0 = g^*: H^m(Y) \rightarrow H^m(R)$, поэтому из теоремы 7.1 следует, что $A(g) \neq \emptyset$. Полученное противоречие завершает доказательство следствия.

Подобные рассуждения могут быть перенесены на случай действия p -торов [35]. Для $\mathbb{Z}_2$ -действий существует способ доказательства результатов типа теоремы 7.2, основанный на следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 7.3 (см. [36]). *Пусть $f: X \rightarrow M$ — отображение компактного свободного $\mathbb{Z}_2$ -пространства X в k -мерное многообразие M . Предположим, что $\text{h-ind } X = n \geq k$ и $0 = f^*: H^i(M) \rightarrow H^i(X)$ при всех $i \geq 1$. Тогда $\text{h-ind } A(f) \geq n - k$ и, в частности, $\dim A(f) \geq n - k$. Если, кроме того, X — l -мерное многообразие, то $\dim A(f) \geq l - k$.*

В процессе доказательства этой теоремы (см. [36]) устанавливается следующий использующийся ниже факт: в условиях теоремы 7.3 $w^k(U \setminus A(f)) = 0$, где U — инвариантная окрестность $A(f)$, в частности, $w^k(X \setminus A(f)) = 0$. Отметим также, что класс $w^k(X \setminus A(f))$ является ограничением класса $w^k(X)$ на $(X \setminus A(f))/G$. Напротив, из теоремы 7.3 следует, что $w^{n-k}(A(f)) \neq 0$.

ЛЕММА 7.1. *m -мерный компактный полиэдр можно вложить в некоторое $2m$ -мерное многообразие.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольное погружение m -мерного полиэдра P в $\mathbb{R}^{2m}$ (для этого, например, возьмем постоянное отображение в точку и приведем его в общее положение). Можно считать, что P лежит в $\mathbb{R}^{2m}$, имея конечное число двойных точек самопересечения, причем каждая такая точка лежит во внутренности двух симплексов (не являющихся гранями каких-либо симплексов большей размерности) и эти симплексы пересекаются трансверсально. Удалим из $\mathbb{R}^{2m}$ маленький открытый шар U с центром в точке самопересечения, а затем добавим к полученному многообразию с краем ε -окрестность двух пересекающихся в точке симплексов. Если ε мало, то получим две пересекающиеся ручки, приклеенные к границе шара U . Если теперь одну из этих ручек “приподнять” в окрестности пересечения в направлении дополнительной оси в $\mathbb{R}^{2m+1}$, то получится $2m$ -мерное многообразие с краем, лежащее в $\mathbb{R}^{2m+1}$ и содержащее P , при этом у P будет на одну точку самопересечения меньше. Ясно, что подразбив полиэдр, если необходимо, на более мелкие симплексы и проделав указанное построение сразу для всех точек пересечения, получим нужное вложение полиэдра P в $2m$ -мерное многообразие с краем, лежащее в $\mathbb{R}^{2m+1}$ (взяв удвоение этого многообразия, получаем вложение в компактное многообразие без края).

Лемма 7.1 справедлива в более общей ситуации: если компакт X допускает локальное вложение $X \rightarrow \mathbb{R}^d$ с конечным сингулярным множеством, то X можно вложить в d -мерное многообразие, которое лежит в $\mathbb{R}^{d+1}$ и локально замкнуто в $\mathbb{R}^{d+1}$. Из конструкции вложения видно, что, двигая параллельно добавленной координатной оси построенное d -мерное многообразие, получаем вложение $X \times [0, \varepsilon] \subset \mathbb{R}^{d+1}$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$. Следовательно, существует вложение $X \times I \subset \mathbb{R}^{d+1}$. В частности (см. [22]), для m -мерного компактного полиэдра K существует вложение $K \times I \subset \mathbb{R}^{2m+1}$.

ТЕОРЕМА 7.4. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — отображение компактного свободного $\mathbb{Z}_2$ -пространства X в m -мерный компакт Y . Предположим, что $\text{h-ind } X = n \geq 2m$ и $0 = f^*: H^m(Y) \rightarrow H^m(X)$. Тогда $\text{h-ind } A(f) \geq n - 2m$ и, в частности, $\dim A(f) \geq n - 2m$. Если, кроме того, X — l -мерное многообразие, то $\dim A(f) \geq l - 2m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала Y — компактный полиэдр. Заметим, что вместо условия $0 = f^*: H^m(Y) \rightarrow H^m(X)$ мы можем предполагать большее, а именно, что $0 = f^*: H^i(Y) \rightarrow H^i(X)$ при всех $i \geq 1$. Действительно, Y содержится в $(m-1)$ -связном полиэдре Y' (см. лемму в [9]), который получается из Y добавлением конуса над его $(m-1)$ -мерным остовом. Тогда $Y' - (m-1)$ -связный комплекс, гомотопически эквивалентный букету m -мерных сфер, поэтому $Y \subset Y'$ и $0 = f^*: H^i(Y') \rightarrow H^i(X)$ при всех $i \geq 1$ и мы можем заменить Y на Y' . Воспользовавшись леммой 7.1, вложим теперь Y' в $2m$ -мерное многообразие M . Определим $f_1: X \rightarrow M$ как композицию f с вложением $Y' \subset M$. Тогда $A(f_1) = A(f)$ и для f_1 выполнены все предположения теоремы 2.1, откуда и следует утверждение в случае полиэдра.

Рассмотрим теперь общий случай. Без ограничения общности можно считать, что Y — компакт, вложенный в $\mathbb{R}^{2m+1}$.

Для отображения $g: X \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ и $\varepsilon > 0$ положим $A_\varepsilon(g) = \{x \in X : |g(x) - g(-x)| \leq \varepsilon\}$. Множество $A_\varepsilon(g)$ — замкнутое инвариантное подпространство прос-

пространства X , содержащее $A(g)$.

Поскольку $\dim Y = m$ при любом $\varepsilon > 0$, имеется его ε -сдвиг в m -мерный полиэдр $P_\varepsilon \subset \mathbb{R}^{2m+1}$. Будем обозначать через f_ε композицию отображения $f: X \rightarrow Y$ с ε -сдвигом пространства Y в полиэдр P_ε . Таким образом, $f_\varepsilon: X \rightarrow P_\varepsilon \subset \mathbb{R}^{2m+1}$. Ясно, что $A(f) \subset A(f_\varepsilon) \subset A_\varepsilon(f_\varepsilon)$ при любом ε . Имеем

$$A(f) = \bigcap_{\varepsilon} A_\varepsilon(f) = \bigcap_{\varepsilon} A(f_\varepsilon) = \bigcap_{\varepsilon} A_\varepsilon(f_\varepsilon).$$

Действительно, это вытекает из того, что если $x \in A_\varepsilon(f_\varepsilon)$, то

$$\begin{aligned} |f(x) - f(-x)| &= |\{f(x) - f_\varepsilon(x)\} - \{f(-x) - f_\varepsilon(-x)\} + \{f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(-x)\}| \\ &\leq |f(x) - f_\varepsilon(x)| + |f(-x) - f_\varepsilon(-x)| + |f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(-x)| \leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, $A_\varepsilon(f_\varepsilon) \subset A_{3\varepsilon}(f)$. Кроме того, очевидно, что $A_\varepsilon(f)$ содержится в $A_{\varepsilon'}(f)$ при $\varepsilon < \varepsilon'$ и $\bigcap_{\varepsilon} A_\varepsilon(f) = A(f)$.

Применив уже доказанное утверждение к отображению в полиэдр $f_\varepsilon: X \rightarrow P_\varepsilon$, получаем, что $\text{h-ind } A(f_\varepsilon) \geq n - 2m$ для любого $\varepsilon > 0$. Поскольку $A(f_\varepsilon) \subset A_\varepsilon(f_\varepsilon) \subset A_{3\varepsilon}(f)$, из ковариантности индекса следует, что $\text{h-ind } A_{3\varepsilon}(f) \geq n - 2m$ для любого $\varepsilon > 0$, и из непрерывности когомологий Александрова–Чеха получаем, что $\text{h-ind } A(f) \geq n - 2m$.

Остается доказать утверждение, относящееся к ситуации, когда X — многообразие размерности l . Можно считать, что оно не имеет края (в противном случае нужно просто рассмотреть удвоение DX многообразия X и вместо f рассмотреть его композицию с естественным отображением $DX \rightarrow X$). Из двойственности Пуанкаре следует, что существует класс $u \in H^{l-2m}(X/2)$ такой, что $u \smile w^{2m}(X) \neq 0$. Как было отмечено сразу после теоремы 7.3, ограничение класса $w^{2m}(X)$ на $(X \setminus A(f_\varepsilon))/2$ равно нулю для любого ε , поэтому $w^{2m}(X)$ можно представить коцепью, носитель которой содержится в $A(f_\varepsilon)/2$. Мы утверждаем, что ограничение класса u на $A(f)/2$ нетривиально. Действительно, предположим противное. Тогда из непрерывности когомологий следует, что найдется некоторая открытая инвариантная окрестность U множества $A(f)$ в X такая, что ограничение u на $U/2$ тривиально. Следовательно, u можно представить коцепью, носитель которой содержится в $(X \setminus U)/2$. Но $A(f_\varepsilon)/2 \subset U/2$ при всех достаточно малых ε . Таким образом, носители коцепей, представляющих u и $w^{2m}(X)$, не пересекаются и, следовательно, произведение $u \smile w^{2m}(X)$ тривиально, что приводит к противоречию. Итак, $u|_{A(f)/2} \neq 0$, следовательно, $H^{l-2m}(A(f)/2) \neq 0$, поэтому $\dim A(f)/2 \geq l - 2m$. Поскольку $\dim A(f) = \dim A(f)/2$, получаем требуемое неравенство $\dim A(f) \geq l - 2m$.

Условие относительно f^* , вообще говоря, нельзя отбросить. Пусть $K = \Delta_{2m+2}^m$ — m -мерный остов $(2m+2)$ -мерного симплекса Δ^{2m+2} . Тогда $\text{h-ind } K^2 = 2m$ (см. [37], [38]). Пусть $U \subset K^2$ — открытая инвариантная окрестность диагонали Δ такая, что индексы Янга пространств K^2 и $X = K^2 \setminus U$ одинаковы. Тогда X компактно, связно и $\text{h-ind } X = 2m$. Положим $Y = K = \Delta_{2m+2}^m$ и в качестве $f: X \rightarrow Y$ возьмем композицию вложения $X \subset K^2$ с проекцией на первый сомножитель. Тогда $A(f) = \emptyset$ и выполнены все условия, кроме тривиальности гомоморфизма f^* в размерности m .

В заключение отметим, что оба приведенных подхода позволяют получить также так называемый несимметричный вариант (для инволюций в смысле Борсука) приведенных в этом параграфе теорем для однозначных и многозначных отображений.

Список литературы

1. *Borsuk K.* Drei Sätze über n -dimensionale Sphäre // *Fund. Math.* 1933. V. 20. P. 177–190.
2. *Flores A.* Über n -dimensionale Komplexe die im R_{2n+1} absolut selbstverschlungen sind // *Ergeb. Math. Kolloq.* 1933/34. V. 6. P. 4–7.
3. *Hopf H.* Freie Überdeckungen und frei Abbildungen // *Fund. Math.* 1937. V. 28. P. 33–57.
4. *Борсук К.* Теория ретрактов. М.: Мир, 1971.
5. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. М.: МГУ, 1976.
6. *Conner H. E., Floyd E. E.* Differentiable periodic maps. Berlin: Springer-Verlag, 1971.
7. *Weber C.* Deux remarques sur les plongements d'un AR dans un espace euclidean // *Bull. Polish Acad. Sci. Math.* 1968. V. 16. P. 851–855.
8. *Стесин М. И.* Об александровских поперечниках шаров // *Докл. АН СССР.* 1974. Т. 217. №1. С. 31–33.
9. *Щепин Е. В.* Об одной проблеме Л. А. Тумаркина // *Докл. АН СССР.* 1974. Т. 217. №1. С. 42–43.
10. *Väisälä J.* A theorem of the Borsuk–Ulam type, for maps into non-manifolds // *Topology.* 1981. V. 20. P. 319–322.
11. *Izydorek M., Jaworowski J.* Antipodal coincidence for maps of spheres into complexes // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1995. V. 123. P. 1947–1950.
12. *Богатый С. А.* k -регулярные отображения в евклидовы пространства и задача Борсука–Болтянского // *Матем. сб.* 2002. Т. 193. №1. С. 73–82.
13. *Шклярский Д. О.* О разбиениях двумерной сферы // *Матем. сб.* 1945. Т. 16(125). С. 125–128.
14. *Jaworowski J.* Existence of antipodal coincidence for maps of spheres // Preprint.
15. *Jaworowski J.* Periodic coincidence for maps of spheres // *Kobe J. Math.* 2000. V. 17. P. 21–26.
16. *Goncalves D. L., Jaworowski J., Pergher P. Q. L.* Measuring the size of the coincidence set // *Topology Appl.* 2002. V. 125. №3. P. 465–470.
17. *Van Kampen E. R.* Komplexe in euklidischen Raumen // *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg.* 1932. V. 9. P. 72–78.
18. *Грэхэм Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. М.: Мир, 1998.
19. *Милнор Дж., Стасеф Дж.* Характеристические классы. М.: Мир, 1979.
20. *Weber C.* Plongements de polyèdres dans le domaine metastable // *Comment. Math. Helv.* 1967. V. 42. №1–27. P. 851–855.
21. *Bestvina M., Kapovich V., Kleiner B.* Van Kampen's embedding obstruction for discrete groups // *arXiv:math, GT/0010141*, 2000.
22. *Repovš D., Skopenkov A. B., Ščepin E. V.* On embedding of $X \times I$ into Euclidean space // *Houston J. Math.* 1995. V. 21. P. 199–204.
23. *Рохлин В. А., Фукс Д. Б.* Начальный курс топологии. Геометрические главы. М.: Наука, 1977.
24. *Щепин Е. В.* Мягкие отображения многообразий // *УМН.* 1984. Т. 39. №5. С. 207–224.
25. *Wu W. T.* A theory of embedding, immersion and isotopy of polytopes in an Euclidean space. Peking: Science Press, 1965.
26. *Ummel Brain R.* The product of nonplanar complexes does not imbed in 4-space // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1978. V. 242. P. 319–328.
27. *Skopenkov M.* Embedding product of graphs into Euclidean space // *Fund. Math.* 2003. V. 179. P. 191–197.
28. *Repovš D., Skopenkov A. B., Ščepin E. V.* On uncountable collection of continua and their span // *Colloq. Math.* 1995. V. 69. P. 289–296.

- 29. *Conner P. E., Floyd E. E.* Fixed point free involutions and equivariant maps // Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.). 1960. V. 66. P. 416–441.
- 30. *Yang C. T.* On theorems of Borsuk–Ulam, Kakutani–Yamabe–Yujobô and Dyson. I // Ann. of Math. (2). 1954. V. 60. P. 262–282.
- 31. *Bourgin D. G.* On some separation and mapping theorems // Comment. Math. Helv. 1955. V. 29. P. 199–214.
- 32. *Daverman R. J.* Decompositions of manifolds. Orlando: Academic press, 1986.
- 33. *Ingram W. T.* An uncountable collection of mutually exclusive planar atriodic tree-like continua with positive span // Fund. Math. 1974. V. 85. P. 73–78.
- 34. *Реповш Д., Скопенков А. Б.* Новые результаты о вложениях полиэдров и многообразий в евклидовы пространства // УМН. 1999. Т. 54. № 6. С. 61–108.
- 35. *Воловиков А. Ю.* Точки совпадения отображений $\mathbb{Z}_p^k$ -пространств в CW -комплексы // УМН. 2002. Т. 57. № 1. С. 154–155.
- 36. *Воловиков А. Ю.* Отображения свободных $\mathbb{Z}_p$ -пространств в многообразия // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. № 1. С. 36–55.
- 37. *Воловиков А. Ю.* К теореме ван Кампена–Флореса // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 5. С. 663–670.
- 38. *Stefanov S. T.* Yang index of the deleted product // Proc. Amer. Math. Soc. 1999. V. 128. № 3. P. 885–891.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН

Поступила в редакцию
04.12.2003