Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Ильин, Усреднение диссипативных динамических систем с быстро осциллирующими правыми частями, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 5, 15–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm126>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 16:33:09

УДК 517.9

А. А. Ильин

Усреднение диссипативных динамических систем с быстро осциллирующими правыми частями

В статье рассматриваются двумерная система Навье–Стокса и гиперболическое уравнение с диссипацией. Предполагается, что правые части этих уравнений имеют вид $f(\omega t)$, где $\omega \gg 1$. Предполагается также, что f имеет среднее.

Основной результат работы состоит в доказательстве глобальной теоремы об усреднении, т.е. сходимости аттракторов неавтономного уравнения к аттрактору автономного усредненного уравнения при $\omega \rightarrow \infty$.

Библиография: 29 названий.

Начиная с основополагающей работы Н. Н. Боголюбова [1] теория усреднения для обыкновенных дифференциальных уравнений активно развивалась и обобщалась в очень многих работах (см. [2]–[4] и цитированные там работы).

На случай дифференциальных уравнений с ограниченными операторными коэффициентами в банаховых пространствах основные теоремы Боголюбова были обобщены в [5]. Вопросы усреднения дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами изучались для абстрактных параболических уравнений в [6]–[8].

В статье рассматривается уравнение

$$\partial_t u = N(u) + f(\omega t),$$

где f – заданная правая часть и $\omega \gg 0$ – большой безразмерный параметр. Мы ограничиваемся рассмотрением двух наиболее характерных примеров: двумерной системы Навье–Стокса (1) из § 2 и гиперболического уравнения с диссипацией (1) из § 3, и мы всегда подразумеваем под такой общей записью одно из этих уравнений.

Пусть существует среднее (в каком смысле – будет явно указано в каждом конкретном случае)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds = f_0.$$

Рассматривается усредненное уравнение

$$\partial_t \bar{u} = N(\bar{u}) + f_0,$$

и доказывается теорема об усреднении на конечном отрезке $[0, T]$ – так называемая первая теорема Боголюбова. Если начальные данные $\bar{u}(0) = u(0)$, то

$$\|\bar{u}(t) - u(t)\| \leq \eta_T(\omega) \rightarrow 0, \quad \omega \rightarrow \infty.$$

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда (грант № J6T100).

Доказывается принцип усреднения на всей оси – так называемая вторая теорема Боголюбова: если существует стационарное решение u_0 усредненного уравнения и эта стационарная точка гиперболическая, то при $\omega > \omega_0$ в малой окрестности этой точки существует ограниченное на всей оси решение $u^*(t) = u_{f(\omega \cdot)}^*(t)$, которое условно экспоненциально устойчиво и почти периодически, если почти периодически правая часть f .

В автономном случае полугруппы S_t разрешающих операторов, соответствующих уравнениям Навье–Стокса и гиперболическому уравнению, являются двумя характерными примерами равномерно компактных и асимптотически компактных полугрупп, свойство которых при $t \rightarrow \infty$ систематически изучались в [9]–[14], где показано, что эти полугруппы имеют в подходящем фазовом пространстве аттрактор $\overline{\mathcal{A}}$.

Теория аттракторов для неавтономных диссипативных динамических систем с почти периодическими символами, в частности, с почти периодическими правыми частями $f(\cdot)$ развита недавно в работах [15]–[19] (см. также [20] и [21]), где показано что исходное неавтономное уравнение имеет аттрактор $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\omega)$.

Оказывается, что аттракторы $\mathcal{A}(\omega)$ полунепрерывно сверху зависят от ω при $\omega \rightarrow \infty$:

$$\text{dist}(\mathcal{A}(\omega), \overline{\mathcal{A}}) := \sup_{x \in \mathcal{A}(\omega)} \inf_{y \in \overline{\mathcal{A}}} \|x - y\| \rightarrow 0, \quad \omega \rightarrow \infty.$$

Это следствие первой теоремы об усреднении и свойства устойчивости аттрактора $\overline{\mathcal{A}}$. Этот результат можно назвать глобальной теоремой об усреднении. Заметим, что он вполне содержателен и в конечномерном случае.

Вторая теорема об усреднении также имеет приложения к аттракторам.

В автономном случае все стационарные точки принадлежат аттрактору $\overline{\mathcal{A}}$. В неавтономном случае соответствующее утверждение звучит так. В аттрактор неавтономного уравнения входит замыкание области значений почти периодического решения $u_{f(\omega \cdot)}^*$, существование которого в малой окрестности стационарной точки доказано во второй теореме об усреднении:

$$\left[\bigcup_{t \in \mathbb{R}} u_{f(\omega \cdot)}^*(t) \right] \subset \mathcal{A}(\omega).$$

В некоторых случаях аттрактор неавтономного уравнения этим множеством и исчерпывается. Так обстоит дело, например, в системе Навье–Стокса, если вязкость достаточно велика. Здесь также очевидна аналогия с автономным случаем, где аттрактор сводится к глобально асимптотически устойчивой стационарной точке, если вязкость достаточно велика.

В заключение заметим, что автору неизвестны какие-либо результаты об усреднении гиперболического уравнения с диссипацией как на конечном отрезке, так и на всей оси. Что же касается уравнений Навье–Стокса, то здесь имеется некоторое пересечение с другими работами.

Основной результат работы состоит в доказательстве глобальной теоремы об усреднении, т.е. сходимости аттракторов неавтономного уравнения к аттрактору

автономного усредненного уравнения при $\omega \rightarrow \infty$. В доказательстве существенную роль играет теорема об усреднении на конечном отрезке, причем оценка близости двух индивидуальных траекторий должна быть равномерна по начальным данным из ограниченных множеств (поглощающих шаров большого радиуса) в соответствующем фазовом пространстве. Доказать это удастся лишь в фазовом пространстве с достаточно сильной нормой: $H^\alpha(\Omega)$, $1 \leq \alpha \leq 2$.

Некоторые результаты о структуре аттрактора неавтономных уравнений Навье–Стокса в пространствах H^α содержатся в теореме 4.7. Здесь используется теорема об усреднении на всей оси. Такая теорема для уравнений Навье–Стокса доказана В. В. Жиковым [7], [22] и дает близость решений в L_2 -норме. Сходимости в L_2 -норме для приложений к аттракторам недостаточно, поэтому мы приводим в работе доказательство теоремы об усреднении уравнений Навье–Стокса на всей оси в той форме, которая пригодна для приложений к аттракторам. Наше доказательство отлично от приведенного в [7] и связано более с первоначальным доказательством Н. Н. Боголюбова [1]–[3]. Кроме того, наш подход позволяет совершенно аналогичным образом доказать теорему об усреднении на всей оси для гиперболического уравнения с диссипацией.

§ 1. Предварительные сведения

Ниже приводятся некоторые факты из теории полугрупп линейных операторов [6] и теории почти периодических функций [7].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Замкнутый оператор A с областью определения $D(A)$, плотной в банаховом пространстве X , называется *секториальным*, если для некоторых $a \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in (0, \pi/2)$ сектор

$$S_{a,\varphi} = \{\lambda \in \mathbb{C}, \pi \geq |\arg(\lambda - a)| \geq \varphi\}$$

лежит в резольвентном множестве, и для $\lambda \in S_{a,\varphi}$

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{X \rightarrow X} \leq \frac{c}{|\lambda - a| + 1}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть A – секториальный оператор, а B такой, что $D(B) \supset D(A)$ и для $x \in D(A)$ и $\varepsilon > 0$ достаточно малого

$$\|Bx\| \leq \varepsilon \|Ax\| + c(\varepsilon) \|x\|.$$

Тогда $A + B$ – тоже секториальный оператор.

Для секториального оператора A определена аналитическая полугруппа ограниченных операторов в X , обозначаемая через e^{-At} , $t \geq 0$, и справедливо $\partial_t e^{-At} = -Ae^{-At}$, $t > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть A – секториальный и $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$. Для $\alpha \in (0, 1)$ определим дробные степени оператора A как

$$A^\alpha = (A^{-\alpha})^{-1}, \quad \text{где } A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-At} dt.$$

Определим также банаховы пространства $D(A^\alpha)$ с нормой

$$\|x\|_\alpha := \|x\|_{D(A^\alpha)} = \|A^\alpha x\|.$$

ТЕОРЕМА 2. *Справедливы следующие оценки*

$$\|e^{-At}\|_{X \rightarrow X} \leq K e^{-at}, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$\|A^\alpha e^{-At}\|_{X \rightarrow X} \leq \frac{K_\alpha}{t^\alpha} e^{-at}, \quad t > 0. \quad (2)$$

ТЕОРЕМА 3. Если A и B – секториальные операторы в X , $D(A) = D(B)$, $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$, $\operatorname{Re} \sigma(B) > 0$, и для некоторого $\alpha \in [0, 1)$ оператор $(A - B)A^{-\alpha}$ ограничен в X , то для любого $\beta \in [0, 1)$

$$D(A^\beta) = D(B^\beta)$$

и соответствующие нормы эквивалентны.

Перейдем теперь к почти периодическим функциям.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Непрерывная функция $f: \mathbb{R} \rightarrow X$ называется *почти периодической*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $l = l(\varepsilon) > 0$ такое, что в каждом интервале $(T, T + l)$ найдется число $\tau = \tau_\varepsilon$, называемое *почти периодом*, удовлетворяющее

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t + \tau) - f(t)\| \leq \varepsilon.$$

Если f зависит еще и от других аргументов, то последнее неравенство выполняется равномерно по этим аргументам.

В теории п.п. функций доказывается, что существует счетное множество чисел λ_α , для которых

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{i\lambda_\alpha t} dt \neq 0.$$

Числа $\{\lambda_\alpha\}$ называются *показателями Фурье* п.п. функции f .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Конечное или счетное множество чисел $\{\omega_\alpha\}$ называется *частотным базисом* п.п. функции f и обозначается через $\mathcal{M}_f$, если каждое из чисел λ_α может быть представлено в виде целочисленной комбинации чисел ω_α и притом единственным способом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Для п.п. функции f последовательность $\{t_m\}$ называется *f -возвращающей*, если

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t + t_m) - f(t)\| \leq \varepsilon_m \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

ТЕОРЕМА 4. Если для двух п.п. функций f и g любая f -возвращающая последовательность является g -возвращающей последовательностью, то частотный базис g содержится в частотном базисе f :

$$\mathcal{M}_g \subset \mathcal{M}_f.$$

§ 2. Уравнения Навье–Стокса

1. Усреднение на конечном отрезке. Рассмотрим двумерную систему Навье–Стокса

$$\begin{aligned} \partial_t u + \sum_{i=1}^2 u_i \partial_i u &= \nu \Delta u - \nabla p + f(\omega t), \\ \operatorname{div} u &= 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\Omega \in \mathbb{R}^2$, $\partial\Omega \in C^2$.

Хорошо известна функциональная постановка задачи [23], [24]. Обозначим через H и V замыкания множества $\{u \in C_0^\infty(\Omega)^2, \operatorname{div} u = 0\}$ в норме $L_2(\Omega)^2$ и $H_0^1(\Omega)^2$, соответственно, и пусть P – ортопроектор $P: L_2(\Omega)^2 \rightarrow H$.

Далее обозначим

$$A = -P \Delta, \quad B(u, v) = P \left(\sum_{i=1}^2 u_i \partial_i v \right),$$

а также для $u, v, w \in V$

$$b(u, v, w) := \langle B(u, v), w \rangle_{V' \times V} = \int_{\Omega} u_i \partial_i v_j w_j \, dx.$$

Оператор Стокса A – самосопряженный положительный с плотной в H областью определения $D(A)$. Обратный оператор компактен. В соответствии с § 1 можно определить пространства $D(A^\alpha)$, $\alpha \in [0, 1]$.

Трилинейная форма $b(u, v, w)$ допускает следующую оценку [23], [24]

$$b(u, v, w) \leq c_0 \|u\|^{1/2} \|u\|_{1/2}^{1/2} \|v\|^{1/2} \|v\|_{1/2}^{1/2} \|w\|_{1/2}, \quad (2)$$

где постоянная c_0 оценивается так:

$$c_0 \leq c^2,$$

где c – постоянная из неравенства

$$\|u\|_{L_4} \leq c \|u\|^{1/2} \|\nabla u\|^{1/2}, \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

Наилучшая постоянная в последнем неравенстве известна [25]

$$c = \left(\frac{1}{\pi \cdot 1.86225 \dots} \right)^{1/4}. \quad (3)$$

Кроме того, для $u \in V = D(A^{1/2})$

$$\|u\|_{1/2} = \|\nabla u\| = \|\operatorname{rot} u\|,$$

и вообще для $\alpha \in [0, 1]$

$$D(A^\alpha) \subset H^{2\alpha}(\Omega),$$

причем при $\alpha \leq \frac{1}{4}$ справедливо $H^{2\alpha}(\Omega) = H_0^{2\alpha}(\Omega)$, поэтому

$$H^{-2\alpha}(\Omega) \subset D(A^{-\alpha}).$$

Итак, систему (1) можно записать в виде уравнения

$$\partial_t u + B(u, u) = -\nu A u + \varphi(\omega t), \quad \varphi = P f. \quad (4)$$

ЛЕММА 1. *Нелинейный оператор $B(u, u)$ является ограниченным и липшицевым отображением в следующем смысле:*

$$\|B(u_1, u_1) - B(u_2, u_2)\|_{1/2} \leq c_{1/2} (\|u_1\|_{D(A)} + \|u_2\|_{D(A)}) \|u_1 - u_2\|_{D(A)}, \quad (5)$$

$$\|B(u_1, u_1) - B(u_2, u_2)\|_{-\delta} \leq c_\delta (\|u_1\|_{1/2} + \|u_2\|_{1/2}) \|u_1 - u_2\|_{1/2}, \quad (6)$$

$$\|B(u_1, u_1) - B(u_2, u_2)\| \leq c'_\delta (\|u_1\|_{1/2+\delta} + \|u_2\|_{1/2+\delta}) \|u_1 - u_2\|_{1/2+\delta}, \quad (6')$$

где $\delta > 0$ сколь угодно мало.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала ограниченность:

$$\|B(u, v)\|_{1/2} \leq c_{1/2} \|u\|_{D(A)} \|v\|_{D(A)}, \quad (7)$$

$$\|B(u, v)\|_{-\delta} \leq c_\delta \|u\|_{1/2} \|v\|_{1/2}, \quad (8)$$

$$\|B(u, v)\| \leq c''_\delta \|u\|_{1/2+\delta} \|v\|_{1/2}, \quad \|B(u, v)\| \leq c''_\delta \|u\|_{1/2} \|v\|_{1/2+\delta}. \quad (8')$$

Так как $\|\cdot\|_{1/2} = \|\cdot\|_{H_0^1} = \|\nabla \cdot\|$, то, используя теоремы вложения Соболева, получаем

$$\begin{aligned} \|B(u, v)\|_{1/2} &= \left\| P \sum_{i=1}^2 u_i \partial_i v \right\|_{H^1} \leq c_1 \left\| \sum_{i=1}^2 u_i \partial_i v \right\|_{H^1} \\ &\leq c_1 (\|u \cdot \partial v\| + \|\partial u \cdot \partial v\| + \|u \cdot \partial^2 v\|) \\ &\leq c_2 \|u\|_{H^2} \|v\|_{H^2} \leq c_3 \|u\|_{D(A)} \|v\|_{D(A)}, \end{aligned}$$

где была использована оценка Каттабриги – Солонникова [23], [24]

$$\|u\|_{H^2} \leq c_4 \|Au\|.$$

Это доказывает ограниченность из $D(A)$ и $D(A^{1/2})$.

Докажем ограниченность из $D(A^{1/2})$ в $D(A^{-\delta})$, $\delta > 0$, что эквивалентно доказательству оценки

$$(B(u, v), h) = b(u, v, h) = \int u_i \partial_i v_j h_j \, dx \leq c_\delta \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \|h\|_{H^\delta}.$$

Однако, $H^\delta \subset L_{2+\mu}$, $\mu > 0$, и этого достаточно, чтобы к интегралу применить неравенство Гёльдера с $u \in L_p$, $p \rightarrow \infty$, $\partial v \in L_2$, $h \in L_{2+\mu}$. Итак, $B(u, v) \subset H_{-\delta} \subset D(A^{-\delta/2})$, $\delta > 0$.

Оценка (8') следует из вложений $D(A^{1/2+\delta}) \subset H^{1+2\delta}(\Omega) \subset L_\infty(\Omega)$. Наконец, оценки (5), (6), (6') следуют из (7), (8), (8') и из билинейности оператора B . Лемма доказана.

Перейдем теперь к вопросам, связанным с усреднением. Пусть $\omega \gg 1$ – большой безразмерный параметр. Обозначив

$$\tau = \omega t, \quad \varepsilon = \omega^{-1},$$

приходим к уравнению в так называемой стандартной форме

$$\partial_\tau u + \varepsilon B(u, u) = -\varepsilon \nu A u + \varepsilon \varphi(\tau). \quad (9)$$

Предположим, что функция φ имеет среднее в $D(A^\beta)$, значение β уточним позже. Более точно, будем предполагать, что $\varphi(\tau), \varphi_0 \in D(A^\beta)$ и

$$\left\| A^\beta \left(\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \varphi(\tau) d\tau - \varphi_0 \right) \right\| \leq \min(M_\beta, \sigma_\beta(T)), \quad (10)$$

$$M_\beta > 0, \quad \sigma_\beta(T) \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим усредненное уравнение

$$\partial_\tau \bar{u} + \varepsilon B(\bar{u}, \bar{u}) = -\varepsilon \nu A \bar{u} + \varepsilon \varphi_0. \quad (11)$$

Это уравнение автономно, и если возвратиться к исходному времени t , то оно не содержит малого параметра:

$$\partial_t \bar{u} + B(\bar{u}, \bar{u}) = -\nu A \bar{u} + \varphi_0. \quad (11')$$

Известно [9, теорема I.6.2], [13], [14], что если $\varphi_0 \in H$, то полугруппа S_t , соответствующая уравнению (11'), имеет в пространствах H, V , и $D(A)$ поглощающие множества – шары $B(R_0)$ в этих пространствах, где R_0 достаточно велико. Это значит, что для любого ограниченного множества B

$$S_t B \subset B(R_0) \quad \text{для } t > t_0(B, R_0).$$

Кроме того, полугруппа в этих пространствах равномерно ограничена, т.е. для любого шара, в частности для $B(R_0)$, существует шар $B(R)$ такой, что

$$S_t B(R_0) \subset B(R), \quad t > 0.$$

Увеличив R , можем считать, что

$$S_t B(R_0) \subset B(R - \rho), \quad t > 0, \quad \rho > 0.$$

Рассмотрим сначала теорему об усреднении в пространстве V . Выпустим из произвольной точки $u_0 \in B_V(R_0)$ траектории систем (9) и (11) и рассмотрим их разность на отрезке $\tau \in [0, T/\varepsilon]$, T – произвольно и фиксировано. Предположим пока, что $u(\tau) \in B_V(R)$. Тогда $z(\tau) = u(\tau) - \bar{u}(\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_\tau z = \varepsilon (-\nu A z + B(u, u) - B(\bar{u}, \bar{u}) + \varphi(\tau) - \varphi_0), \quad z(0) = 0.$$

Считая без ограничения общности, что $\nu = 1$, переходя к эквивалентному интегральному уравнению, получаем

$$z(\tau) = \varepsilon \int_0^\tau e^{-\varepsilon A(\tau-s)} (B(u(s), u(s)) - B(\bar{u}(s), \bar{u}(s))) ds + \varepsilon \int_0^\tau e^{-\varepsilon A(\tau-s)} (\varphi(s) - \varphi_0) ds. \quad (12)$$

Согласно (6) и (2) из § 1 норма в $D(A^{1/2})$ первого слагаемого справа не превосходит

$$\begin{aligned} & \left\| \varepsilon \int_0^\tau A^{1/2+\delta} e^{-\varepsilon A(\tau-s)} A^{-\delta} (B(u, u) - B(\overline{u}, \overline{u})) ds \right\| \\ & \leq \varepsilon \int_0^\tau K_{1/2+\delta} \varepsilon^{-1/2-\delta} (\tau-s)^{-1/2-\delta} e^{-\varepsilon a(\tau-s)} c_\delta 2R \|z(s)\|_{1/2} ds \\ & = 2R c_\delta K_{1/2+\delta} \varepsilon^{1/2-\delta} \int_0^\tau e^{-\varepsilon a(\tau-s)} (\tau-s)^{-1/2-\delta} \|z(s)\|_{1/2} ds. \end{aligned} \quad (13)$$

Оценим второе слагаемое в (12). Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} & \left\| \varepsilon \int_0^\tau e^{-\varepsilon A(\tau-s)} (\varphi(s) - \varphi_0) ds \right\|_{1/2} \\ & = \left\| -\varepsilon e^{-\varepsilon A(\tau-s)} \int_s^\tau (\varphi(t) - \varphi_0) dt \Big|_{s=0}^{s=\tau} \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon^2 \int_0^\tau A e^{-\varepsilon A(\tau-s)} \int_s^\tau (\varphi(t) - \varphi_0) dt ds \right\|_{1/2} \\ & \leq \left\| \varepsilon A^{1/2-\beta} e^{-\varepsilon A\tau} A^\beta \int_0^\tau (\varphi(t) - \varphi_0) dt \right\| \\ & \quad + \left\| \varepsilon^2 \int_0^\tau A^{3/2-\beta} e^{-\varepsilon A(\tau-s)} A^\beta \int_s^\tau (\varphi(t) - \varphi_0) dt ds \right\|. \end{aligned} \quad (14)$$

Первое слагаемое справа в (14) не превосходит

$$\begin{aligned} & \varepsilon K_{1/2-\beta} e^{-\varepsilon a\tau} \tau (\varepsilon \tau)^{\beta-1/2} \left\| \tau^{-1} \int_0^\tau A^\beta (\varphi(t) - \varphi_0) dt \right\| \\ & = \varepsilon^{1/2+\beta} \tau^{1/2+\beta} K_{1/2-\beta} e^{-\varepsilon a\tau} \left\| \tau^{-1} \int_0^\tau A^\beta (\varphi(t) - \varphi_0) dt \right\| \\ & \leq \varepsilon^{1/2+\beta} \tau^{1/2+\beta} K_{1/2-\beta} \min(M_\beta, \sigma_\beta(\tau)) e^{-\varepsilon a\tau} =: L(\tau). \end{aligned}$$

Возьмем произвольное $\delta > 0$. Пусть τ_δ таково, что при $\tau \geq \tau_\delta$ $\sigma_\beta(\tau) \leq \delta$. Возьмем ε_0 столь малым, чтобы при $\varepsilon < \varepsilon_0$ было $T/\varepsilon > \tau_\delta$. Тогда

$$L(\tau) \leq e^{-\varepsilon a\tau} \cdot \begin{cases} T^{1/2+\beta} K_{1/2-\beta} \delta, & \text{если } \tau \geq \tau_\delta, \\ \varepsilon^{1/2+\beta} \tau^{1/2+\beta} K_{1/2-\beta} M_\beta, & \text{если } \tau < \tau_\delta. \end{cases}$$

Потребуем, чтобы выполнялось условие $\beta > -\frac{1}{2}$. Поскольку τ_δ не зависит от ε , то, устремляя сначала $\delta \rightarrow 0$, а затем $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем, что

$$\left\| \varepsilon e^{-\varepsilon A\tau} \int_0^\tau (\varphi(t) - \varphi_0) dt \right\|_{1/2} \leq G_{\beta 1}(T, \varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (15)$$

Второе слагаемое справа в (14) не превосходит

$$\begin{aligned} & K_{3/2-\beta} \varepsilon^{1/2+\beta} \int_0^\tau \min(M_\beta, \sigma_\beta(u)) u^{\beta-1/2} du \\ & \leq K_{3/2-\beta} M_\beta \varepsilon^{1/2+\beta} \int_0^{\tau_\mu} u^{\beta-1/2} du + K_{3/2-\beta} \varepsilon^{1/2+\beta} \mu \int_0^{T/\varepsilon} u^{\beta-1/2} du \\ & = K_{3/2-\beta} \left(\beta + \frac{1}{2} \right)^{-1} ((\varepsilon \tau_\mu)^{1/2+\beta} + \mu T^{1/2+\beta}) =: G_{\beta 2}(T, \varepsilon), \end{aligned} \quad (16)$$

где для произвольного $\mu > 0$ мы выбрали τ_μ таким, что $\sigma_\beta(\tau) < \mu$, $\tau > \tau_\mu$. Устремляя $\mu \rightarrow 0$, а затем $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$G_{\beta 2}(T, \varepsilon) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Итак, используя (12)–(16), получаем неравенство

$$\|z(\tau)\|_{1/2} \leq K(\delta) \varepsilon^{1/2-\delta} \int_0^\tau (\tau-s)^{-1/2-\delta} \|z(s)\|_{1/2} ds + G_\beta(T, \varepsilon), \quad (17)$$

где $K(\delta) = 2Rc_\delta K_{1/2+\delta}$ и $G_\beta = G_{\beta 1} + G_{\beta 2} \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

ЛЕММА 2 [6]. Пусть $\gamma \in (0, 1]$, и на отрезке $t \in [0, T]$

$$u(t) \leq a + b \int_0^t (t-s)^{\gamma-1} u(s) ds.$$

Тогда

$$u(t) \leq a E_\gamma((b\Gamma(\gamma))^{1/\gamma} t),$$

где функция $E_\gamma(z)$ монотонна, и при $z \rightarrow \infty$ $E_\gamma(z) \sim \gamma^{-1} e^z$.

Применяя эту лемму к неравенству (17) на отрезке $\tau \in [0, T/\varepsilon]$, получаем

$$\begin{aligned} \|z(\tau)\|_{1/2} & \leq G_\beta(T, \varepsilon) E_{1/2-\delta}(\varepsilon \tau (K(\delta) \Gamma(\tfrac{1}{2} - \delta))^{2/(1-2\delta)}) \\ & \leq G_\beta(T, \varepsilon) E_{1/2-\delta}(T (K(\delta) \Gamma(\tfrac{1}{2} - \delta))^{2/(1-2\delta)}). \end{aligned}$$

Учитывая, что δ было в нашем распоряжении, получаем

$$\|z(\tau)\|_{1/2} \leq G_\beta(T, \varepsilon) \min_{0 < \delta < 1/2} E_{1/2-\delta}(T (\Gamma(\tfrac{1}{2} - \delta) 2Rc_\delta K_{1/2+\delta})^{2/(1-2\delta)}). \quad (18)$$

Продельвая теперь то же самое в $D(A)$, предполагая при этом, что в (10) $\beta > 0$, получаем

$$\|z(\tau)\|_{D(A)} \leq F_\beta(T, \varepsilon) E_{1/2}(T \pi (2RK_{1/2} c_{1/2})^2), \quad F_\beta(T, \varepsilon) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (19)$$

Мы доказали близость решений в V и $D(A)$ при условии, что решение неусредненной системы с начальным условием $u(0) \in B_{V, D(A)}(R_0)$ не покинет шара $B(R)$ на отрезке $[0, T/\varepsilon]$.

Пусть ε столь мало, что правая часть (18) и (19) меньше $\rho/2$. Предположим, что решение $u(t)$ выходит из шара $B(R)$ на отрезке $[0, T/\varepsilon]$, и пусть τ^* — это первый момент времени, когда $\|u(\tau^*)\| = R$. Но на отрезке $\tau \in [0, \tau^*]$ решения обеих систем лежат в шаре $B(R)$ и, следовательно, по уже доказанному справедливо неравенство $\|u(\tau) - \bar{u}(\tau)\| \leq \rho/2$, верное, в частности, и при $\tau = \tau^*$. Вместе со справедливым по условию теоремы неравенством $\|\bar{u}(\tau^*)\| \leq R - \rho$ приходим к противоречию:

$$\|u(\tau^*)\| \leq \|u(\tau^*) - \bar{u}(\tau^*)\| + \|\bar{u}(\tau^*)\| \leq R - \frac{\rho}{2}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть правая часть уравнения (9) имеет среднее в смысле (10). Пусть $T > 0$ – любое фиксированное число.

Тогда, если $\beta \geq 0$ и $u(0) = \bar{u}(0) \in B_V(R_0)$, т.е. начальные данные совпадают и принадлежат поглощающему шару, то при $\tau \in [0, T/\varepsilon]$

$$\|u(\tau) - \bar{u}(\tau)\|_{1/2} \leq \eta_T^1(\varepsilon) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Если $\beta > 0$ и $u(0) = \bar{u}(0) \in B_{D(A)}(R_0)$, то

$$\|u(\tau) - \bar{u}(\tau)\|_{D(A)} \leq \eta_T^2(\varepsilon) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

2. Усреднение на всей оси. Рассмотрим вновь уравнение (9)

$$\partial_\tau u + \varepsilon B(u, u) = -\varepsilon \nu A u + \varepsilon \varphi(\tau). \quad (20)$$

Все предположения о данных задачи те же, что и в п. 1 этого параграфа, т.е., в частности, существует среднее в смысле (10).

Известно, что уравнение (11) имеет хотя бы одно стационарное решение $u_0 \in D(A^{1/2})$:

$$B(u_0, u_0) + \nu A u_0 = \varphi_0. \quad (21)$$

Сделаем в уравнении (20) замену

$$u = u_0 + z.$$

Тогда с учетом (21) для z имеем (вновь полагая $\nu = 1$)

$$\partial_\tau z = \varepsilon (-Az - B(u_0, z) - B(z, u_0) - B(z, z) + \varphi(\tau) - \varphi_0).$$

Сделаем еще одну замену

$$z = h - \varepsilon v(\tau, \varepsilon).$$

Получим

$$\begin{aligned} \partial_\tau z = \partial_\tau h - \varepsilon \partial_\tau v = \varepsilon & (-Ah - B(h, u_0) - B(u_0, h) + B(\varepsilon v, u_0) + B(u_0, \varepsilon v) \\ & - B(h, h) + B(\varepsilon v, h) + B(h, \varepsilon v) - B(\varepsilon v, \varepsilon v) + (\varphi(\tau) - \varphi_0) + \varepsilon A v). \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы функция $v(\tau, \varepsilon)$ удовлетворяла уравнению

$$\partial_\tau v = -\varepsilon A v + (\varphi_0 - \varphi(\tau)). \quad (22)$$

Тогда получаем для h

$$\partial_\tau h = \varepsilon (-Ah - B(h, u_0) - B(u_0, h)) + \varepsilon F(h, \varepsilon, \tau), \quad (23)$$

где

$$F(h, \varepsilon, \tau) = B(\varepsilon v, u_0) + B(u_0, \varepsilon v) - B(\varepsilon v, \varepsilon v) + B(\varepsilon v, h) + B(h, \varepsilon v) - B(h, h). \quad (24)$$

Рассмотрим уравнение (22).

ЛЕММА 3. Пусть для φ существует среднее в смысле (10). Тогда, если $\alpha - \beta < 1$, то уравнение (22) имеет в $D(A^\alpha)$ единственное ограниченное равномерно по $\tau \in \mathbb{R}$ решение $v(\tau, \varepsilon)$. Кроме того,

$$\|\varepsilon v(\tau, \varepsilon)\|_\alpha \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (25)$$

Если φ почти периодическая в $D(A^\beta)$, то v почти периодическая в $D(A^\alpha)$ с частотным базисом, содержащимся в частотном базисе φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Искомое решение дается формулой

$$v(\tau, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\varepsilon A(\tau-s)} (\varphi_0 - \varphi(s)) ds. \quad (26)$$

Единственность мы докажем в более общем случае в лемме 5, а сейчас докажем (25). Интегрируя по частям и используя (10) и (2) из §1, получаем

$$\begin{aligned} \|\varepsilon v(\tau, \varepsilon)\|_\alpha &= \left\| \varepsilon \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\varepsilon A(\tau-s)} (\varphi_0 - \varphi(s)) ds \right\|_\alpha \\ &= \left\| \varepsilon \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon A s} (\varphi_0 - \varphi(\tau - s)) ds \right\|_\alpha \\ &= \left\| \varepsilon^2 \int_0^{\infty} A e^{-\varepsilon A s} \int_0^s (\varphi_0 - \varphi(\tau - t)) dt ds \right\|_\alpha \\ &= \left\| \varepsilon^2 \int_0^{\infty} A^{1+\alpha-\beta} e^{-\varepsilon A s} s \left(s^{-1} A^\beta \int_0^s (\varphi_0 - \varphi(\tau - t)) dt \right) ds \right\| \\ &\leq \varepsilon^{1+\beta-\alpha} K_{1+\alpha-\beta} \int_0^{\infty} s^{\beta-\alpha} e^{-\varepsilon a s} \min(M_\beta, \sigma_\beta(s)) ds \\ &\leq K_{1+\alpha-\beta} (\varepsilon^{1-\alpha+\beta} M_\beta (\beta - \alpha + 1)^{-1} s_0^{\beta-\alpha+1} + \delta a^{\alpha-\beta-1} \Gamma(\beta - \alpha + 1)), \end{aligned}$$

где δ мало, а $s_0 = s_0(\delta)$ столь велико, что $\sigma_\beta(s) < \delta$ при $s > s_0$. Устремляя $\delta \rightarrow 0$, а затем $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем (25).

Докажем последнее утверждение леммы. В силу теоремы 4 из §1 достаточно доказать, что всякая φ -возвращающаяся последовательность $\{\tau_m\}$ является также v -возвращающей. В силу (26)

$$v(\tau + \tau_m) - v(\tau) = \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon A s} (\varphi(\tau - s) - \varphi(\tau + \tau_m - s)) ds.$$

Поэтому

$$\sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|v(\tau + \tau_m) - v(\tau)\|_\alpha \leq \sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|\varphi(\tau + \tau_m) - \varphi(\tau)\|_\beta \cdot K_{\alpha-\beta} \Gamma(\beta - \alpha + 1) a^{\alpha-\beta-1} \varepsilon^{-1}.$$

Лемма доказана.

Установим теперь некоторые свойства функции F из (24).

ЛЕММА 4. Если $\|h\|_\alpha \leq \rho$ и правая часть φ имеет среднее в $D(A^\beta)$ (10), то F является ограниченным липшицевым отображением из $D(A^\alpha)$ в $D(A^\gamma)$:

$$\begin{aligned} \|F(h_1, \varepsilon, \tau) - F(h_2, \varepsilon, \tau)\|_\gamma &\leq \lambda_{\alpha\gamma}(\varepsilon, \rho) \|h_1 - h_2\|_\alpha, \\ \|F(0, \varepsilon, \tau)\|_\gamma &\leq N_{\alpha\gamma}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (27)$$

где $\lambda_{\alpha\gamma}(\varepsilon, \rho), N_{\alpha\gamma}(\varepsilon) \rightarrow 0$, если $\varepsilon, \rho \rightarrow 0$.

Неравенства (27) выполняются при

- 1) $\alpha = \frac{1}{2}, \gamma = -\delta$ ($\delta > 0$) при $\beta > -\frac{1}{2}$,
- 2) $\alpha = 1, \gamma = \frac{1}{2}$ при $\beta > 0$,
- 3) $\alpha \in (\frac{1}{2}, \beta + 1), \gamma = 0$ при $\beta > -\frac{1}{2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем 1). Из (24), (6) и (8) получаем

$$\begin{aligned} \|F(h_1) - F(h_2)\|_{-\delta} &= \|B(\varepsilon v, h_1 - h_2) - B(h_1 - h_2, \varepsilon v) + B(h_2, h_2) - B(h_1, h_1)\|_{-\delta} \\ &\leq (2c_\delta \|\varepsilon v\|_{1/2} + 2\rho c_\delta) \|h_1 - h_2\|_{1/2} \\ &=: \lambda_{\alpha\gamma}(\varepsilon, \rho) \|h_1 - h_2\|_{1/2}, \end{aligned}$$

где согласно (25) с $\alpha = \frac{1}{2}$ (и $\beta > -\frac{1}{2}$ в (10))

$$\lambda_{\alpha\gamma}(\varepsilon, \rho) \rightarrow 0, \quad \varepsilon, \rho \rightarrow 0.$$

Второе неравенство в (27) следует из (25) и (8) и того, что $u_0 \in D(A^{1/2})$.

Доказательство случая 2) аналогично, следует только учесть, что $\beta > 0$, и поэтому $u_0 \in D(A)$.

Случай 3) также следует из (6'), (8') и (25) с $\alpha < \beta + 1$.

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь оператор

$$Lh = Ah + B(h, u_0) + B(u_0, h). \quad (28)$$

Оператор $L + \lambda I$ обратим в H при $\lambda > \lambda_0 = \frac{1}{2}c_0^2 \|u_0\|_{1/2}^2$ и имеет компактную резольвенту. Действительно, рассмотрим уравнение

$$Ah + B(h, u_0) + B(u_0, h) + \lambda h = f.$$

Умножим это скалярно в L_2 на h . Получим, учитывая, что $(B(u_0, h), h) = 0$,

$$\|h\|_{1/2}^2 - b(h, h, u_0) + \lambda \|h\|^2 = (f, h).$$

Согласно (2)

$$|b(h, h, u_0)| \leq c_0 \|h\| \|h\|_{1/2} \|u_0\|_{1/2} \leq \frac{1}{2} \|h\|_{1/2}^2 + \frac{c_0^2}{2} \|h\|^2 \|u_0\|_{1/2}^2.$$

Поэтому при $\lambda \geq \lambda_0$ форма $((L + \lambda I)h, h)$ коэрцитивна, и по лемме Лакса–Мильграма уравнение $(L + \lambda I)h = f$ имеет единственное решение $h \in D(A^{1/2})$. Вложение $D(A^{1/2}) \rightarrow H$ компактно, поэтому L имеет компактную резольвенту.

Оценим $B(h, u_0) + B(u_0, h)$ при $h \in (D(A))$. Воспользуемся неравенствами

$$\begin{aligned}\|h\|_\infty &\leq k_1 \|h\|^{1/2} \|Ah\|^{1/2}, \\ \|\nabla h\|_{L_4} &\leq k_2 \|h\|^{1/4} \|Ah\|^{3/4},\end{aligned}$$

которые вытекают из известных неравенств для соболевских пространств и того, что $D(A) = H^2(\Omega) \cap H$. Тогда

$$\begin{aligned}\|B(h, u_0) + B(u_0, h)\| &\leq \|h\|_\infty \|\nabla u_0\| + \|u_0\|_{L_4} \|\nabla h\|_{L_4} \\ &\leq k_1 \|h\|^{1/2} \|Ah\|^{1/2} \|\nabla u_0\| + c \|\nabla u_0\| \|h\|^{1/4} \|Ah\|^{3/4} \\ &\leq \varepsilon \|Ah\| + c(\varepsilon, \|\nabla u_0\|) \|h\|.\end{aligned}$$

Оператор A секториальный как положительный самосопряженный. Поэтому из предыдущей оценки и теоремы 1 из §1 следует, что оператор

$$L = A + B(\cdot, u_0) + B(u_0, \cdot)$$

тоже секториальный. Кроме того, при $\operatorname{Re} \lambda \geq \lambda_0$ оператор $L_\lambda = L + \lambda I$ обратим, т.е.

$$\operatorname{Re} \sigma(L_{\lambda_0}) \geq b > 0.$$

Имея ввиду воспользоваться теоремой 3 из §1, рассмотрим оператор

$$(L_{\lambda_0} - A)A^{-\alpha} = \lambda_0 A^{-\alpha} + B(u_0, A^{-\alpha} \cdot) + B(A^{-\alpha} \cdot, u_0).$$

При $\alpha \geq \frac{3}{4}$ этот оператор ограничен из H в H , поскольку для $h \in H$

$$\nabla A^{-\alpha} h \subset L_4, \quad A^{-\alpha} h \subset L_\infty \quad \text{и} \quad u_0 \in L_p, \quad p < \infty.$$

Совпадение областей определения $D(A) = D(L_{\lambda_0})$ следует из теорем о регулярности обобщенных решений для оператора Стокса [23], [24].

Поэтому из теоремы 3 из §1 вытекает, что совпадают банаховы пространства $D(A^\alpha) = D(L_{\lambda_0}^\alpha)$, $\alpha \in [0, 1]$, т.е.

$$c_{1\alpha} \|L_{\lambda_0}^\alpha\| \leq \|A^\alpha h\| \leq c_{2\alpha} \|L_{\lambda_0}^\alpha h\| \quad \forall h \in D(A^\alpha). \quad (29)$$

Мы доказали, что спектр оператора L дискретный. Предположим, что стационарное решение u_0 таково, что $\operatorname{Re} \sigma(L) \neq 0$, т.е.

$$\sigma(L) = \sigma_+(L) \cup \sigma_-(L), \quad \sigma_+ \cap \sigma_- = \emptyset \quad \text{и} \quad \operatorname{Re} \sigma_+ < -a, \quad \operatorname{Re} \sigma_- > a, \quad a > 0.$$

Заметим, что σ_+ есть конечное множество собственных значений, и знак “+” соответствует неустойчивым собственным модам, а знак “−” — устойчивым.

Пусть γ_+ – контур в левой полуплоскости, окружающий σ_+ . Положим

$$P_+ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda, \quad P_- = I - P_+.$$

Оператор L допускает представление

$$L = L_+ + L_-, \quad L_+ = P_+ L, \quad L_- = P_- L,$$

и выполняется

$$P_+ L = L P_+, \quad P_- L = L P_-.$$

Обозначив $H_+ = P_+ H$, $\dim H_+ = N < \infty$ и $H_- = P_- H$, получаем

$$L_+ H_+ \subset H_+, \quad L_- H_- \subset H_-.$$

Оператор L_+ ограничен, а оператор $-L_-$ порождает аналитическую полугруппу в H_- .

Рассмотрим при $t \in \mathbb{R}$ уравнение

$$\partial_t h + Lh = f(t). \quad (30)$$

ЛЕММА 5. Пусть $f \in L_\infty(\mathbb{R}; D(A^\gamma))$, $\gamma \geq 0$. Тогда, если $\alpha - \gamma < 1$, то уравнение (30) имеет единственное ограниченное в $D(A^\alpha)$ решение h :

$$\|h\|_{C_b(\mathbb{R}; D(A^\alpha))} \leq K(\alpha, \gamma) \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}; D(A^\gamma))}. \quad (31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)L_-} f(s) ds - \int_t^\infty e^{-(t-s)L_+} f(s) ds \\ &= \int_{-\infty}^\infty G(t-s) f(s) ds, \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$G(t) = \begin{cases} e^{-tL_-}, & t > 0, \\ -e^{-tL_+}, & t < 0, \end{cases} \quad G(+0) = P_-, \quad G(-0) = -P_+.$$

В силу (29)

$$\begin{aligned} \|h(t)\|_\alpha &\leq c_{2\alpha} \int_{-\infty}^t \|L_{\lambda_0}^{\alpha-\gamma} e^{-(t-s)L_-} L_{\lambda_0}^\gamma f_-(s)\| ds \\ &\quad + c_{2\alpha} \int_t^\infty \|L_{\lambda_0}^{\alpha-\gamma} e^{-(t-s)L_+} L_{\lambda_0}^\gamma f_+(s)\| ds. \end{aligned}$$

Но на H_- выполняется $\operatorname{Re} \sigma_{H_-}(L_-) > a > 0$, и $L_{\lambda_0} H_- \subset H_-$. Поэтому $\operatorname{Re} \sigma_{H_-}(L_{\lambda_0}) > a + \lambda_0 > 0$. Ясно также, что $D(L_-) = D(L_{\lambda_0}|_{H_-})$. Поэтому по теореме 3 из §1 для $h \in H_-$ и $\gamma \geq 0$

$$c'_\gamma \|L_{\lambda_0}^\gamma h\| \leq \|L_-^\gamma h\| \leq c''_\gamma \|L_{\lambda_0}^\gamma h\|.$$

Используя это, (2) из § 1, (29) и ограниченность проектора P_- в $D(A^\gamma)$ получаем, что первое слагаемое не превосходит

$$c_{2\alpha}(c'_{\alpha-\gamma})^{-1} \int_{-\infty}^t \|L_-^{\alpha-\gamma} e^{-(t-s)L_-} L_{\lambda_0}^\gamma f_-(s)\| ds \leq K_1(\alpha, \gamma) \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}; D(A^\gamma))}.$$

Оператор L_+ конечномерен, поэтому второе слагаемое оценивается сверху через $K_2(\alpha, \gamma) \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}; D(A^\gamma))}$, что и доказывает справедливость оценки (31).

Легко проверить, что h – решение уравнения (30), т.е. непрерывное решение интегрального уравнения, соответствующего (30).

Докажем, что решение единственно, что эквивалентно доказательству того, что однородное уравнение $\partial_t h + Lh = 0$ имеет лишь нулевое ограниченное решение. Пусть $h_0 = h(0) \neq 0$. Тогда

$$h(t) = h_-(t) + h_+(t) = e^{-L_-t} h_{0-} + e^{-L_+t} h_{0+}.$$

При $t \rightarrow \infty$ первое слагаемое ограничено, а поскольку $h(t)$ ограничено по предположению, то ограничено и второе. При $t \rightarrow -\infty$ ограничено второе слагаемое, значит, и первое, т.е. $h_+(t)$ и $h_-(t)$ ограничены равномерно по $t \in \mathbb{R}$. Однако, $\operatorname{Re} \sigma(L_+) < -a < 0$, а $\operatorname{Re} \sigma(L_-) > a > 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \|h_-(0)\| &\leq K e^{-at} \|h_-(-t)\|, & t \geq 0, \\ \|h_+(0)\| &\leq K e^{-at} \|h_+(t)\|, & t \geq 0. \end{aligned}$$

Устремляя $t \rightarrow \infty$, получаем $h_+(0) = h_-(0) = 0$. Лемма доказана.

Вернемся к уравнению (23). Сделав обратную замену $t = \varepsilon \tau$, получим

$$\partial_t h + Lh = Q(h, \varepsilon, t), \quad (33)$$

где $Q(h, \varepsilon, t) = F(h, \varepsilon, t/\varepsilon)$, и в силу (27)

$$\begin{aligned} \|Q(h_1) - Q(h_2)\|_\gamma &\leq \lambda_{\alpha\gamma}(\varepsilon, \rho) \|h_1 - h_2\|_\alpha, \\ \|Q(0, \varepsilon, t/\varepsilon)\|_\gamma &\leq N_{\alpha\gamma}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (34)$$

где $\|h_{1,2}\|_\alpha \leq \rho$, и $\lambda_{\alpha\gamma}(\varepsilon, \rho), N_{\alpha\gamma}(\varepsilon) \rightarrow 0$, когда $\varepsilon, \rho \rightarrow 0$.

ЛЕММА 6. Пусть Q удовлетворяет (34), и пусть $\alpha - \gamma < 1$, $\gamma \geq 0$. Тогда при $\varepsilon < \varepsilon_0$ уравнение (33) имеет единственное ограниченное решение h^* , обладающее следующими свойствами:

- 1) $\|h^*\|_{C_b(\mathbb{R}; D(A^\alpha))} \leq \delta(\varepsilon) \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$;
- 2) существует начальное многообразие M_- в $D(A^\alpha)$, $\operatorname{codim} M_- = N$, такое, что, если $h_0 \in M_-$ и $\|h_0\|_\alpha \leq \rho$, где ρ достаточно мало, то решение $h(t)$ уравнения (33) с $h(0) = h_0$ удовлетворяет

$$\|h(t) - h^*(t)\|_\alpha \leq K e^{-a|t|} \|h_0 - h^*(0)\|_\alpha, \quad a > 0, \quad (36)$$

при $t \rightarrow +\infty$. В частности, если $N = 0$, то решение h^* асимптотически устойчиво; существует начальное многообразие M_+ в $D(A^\alpha)$, $\dim M_+ = N$, такое, что (36) выполняется при $t \rightarrow -\infty$;

- 3) если функция $Q(h, \varepsilon, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow D(A^\gamma)$ почти периодическая, то решение h^* тоже почти периодическое с частотным модулем, содержащимся в частотном модуле функции Q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в лемме 5 сводим уравнение (33) к эквивалентному интегральному уравнению

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)Q(h(s), \varepsilon, s) ds =: \mathcal{F}h(t). \quad (37)$$

Согласно (31) и (34)

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}h\|_{C_b(\mathbb{R}; D(A^\alpha))} &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)(Q(0, \varepsilon, s) + (Q(h(s), \varepsilon, s) - Q(0, \varepsilon, s))) ds \right\|_\alpha \\ &\leq K(\alpha, \gamma)(N_{\alpha\gamma}(\varepsilon) + \lambda_{\alpha\gamma}(\varepsilon, \rho)\|h\|_{C_b(\mathbb{R}; D(A^\alpha))}). \end{aligned} \quad (38)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}h_1 - \mathcal{F}h_2\|_{C_b(\mathbb{R}; D(A^\alpha))} &\leq K(\alpha, \gamma)\lambda_{\alpha\gamma}(\varepsilon, \rho)\|h_1 - h_2\|_{C_b(\mathbb{R}; D(A^\alpha))} \\ &\leq \frac{1}{2}\|h_1 - h_2\|_{C_b(\mathbb{R}; D(A^\alpha))} \end{aligned} \quad (39)$$

при достаточно малых ε, ρ .

Итак, за счет малости ρ и ε можно добиться того, чтобы $\mathcal{F}$ отображало некоторый шар радиуса ρ в $C_b(\mathbb{R}; D(A^\alpha))$ в себя и было бы там сжимающим отображением. По теореме Банаха $\mathcal{F}$ имеет единственную неподвижную точку

$$\mathcal{F}h^* = h^*,$$

т.е. выполнено (37), и h^* — ограниченное в $D(A^\alpha)$ решение уравнения (37). Из (38) также следует, что выполняется (35), что доказывает первое утверждение леммы.

Докажем утверждение 3. Пусть $\{t_m\}$ является Q -возвращающей последовательностью (см. определение 5 из § 1). Тогда

$$\begin{aligned} &\sup_{t \in \mathbb{R}} \|h^*(t + t_m) - h^*(t)\|_\alpha \\ &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\mathcal{F}h^*(t + t_m) - \mathcal{F}h^*(t)\|_\alpha \\ &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)[Q(h^*(s + t_m), \varepsilon, s + t_m) - Q(h^*(s + t_m), \varepsilon, s) \right. \\ &\quad \left. + Q(h^*(s + t_m), \varepsilon, s) - Q(h^*(s), \varepsilon, s)] ds \right\|_\alpha \\ &\leq K(\alpha, \gamma) \sup_{s \in \mathbb{R}} \|Q(h^*(s + t_m), \varepsilon, s + t_m) - Q(h^*(s + t_m), \varepsilon, s)\|_\gamma \\ &\quad + K(\alpha, \gamma)\lambda_{\alpha\gamma}(\varepsilon, \rho) \sup_{t \in \mathbb{R}} \|h^*(t + t_m) - h^*(t)\|_\alpha, \end{aligned}$$

откуда, учитывая (39), получаем

$$\begin{aligned} &\sup_{t \in \mathbb{R}} \|h^*(t + t_m) - h^*(t)\|_\alpha \\ &\leq 2K(\alpha, \gamma) \sup_{t \in \mathbb{R}} \|Q(h^*(t + t_m), \varepsilon, t + t_m) - Q(h^*(t + t_m), \varepsilon, t)\|_\gamma \\ &\leq 2K(\alpha, \gamma)\varepsilon_m \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

т.е. последовательность $\{t_m\}$ является h^* -возвращающей, что вместе с теоремой 4 из § 1 доказывает утверждение 3.

Докажем утверждение 2. Положим $h(t) = h^*(t) + y(t)$. Для y получаем уравнение

$$\partial_t y + Ly = \Phi(y, \varepsilon, t), \quad (40)$$

где

$$\Phi(y, \varepsilon, t) = Q(h^* + y, \varepsilon, t) - Q(h^*, \varepsilon, t).$$

Функция Φ при $\|y_{1,2}\|_\alpha \leq \rho$ удовлетворяет условиям

$$\Phi(0, \varepsilon, t) = 0, \quad \|\Phi(y_1) - \Phi(y_2)\|_\gamma \leq \Lambda_{\alpha\gamma}(\varepsilon, \rho) \|y_1 - y_2\|_\alpha, \quad (41)$$

причем, учитывая (35), аналогично (27) получаем, что

$$\Lambda_{\alpha\gamma}(\varepsilon, \rho) \rightarrow 0, \quad \varepsilon, \rho \rightarrow 0.$$

Заметим, что (41) выполняется при $\gamma = 0$, $\alpha \in (\frac{1}{2}, \beta + 1)$; $\gamma = \frac{1}{2}$, $\alpha = 1$.

Дальнейшие рассуждения аналогичны теореме об условной устойчивости по Ляпунову для обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [26]). Пусть a – вектор из устойчивого подпространства: $a \in H_-$. Рассмотрим уравнение

$$y(t, a) = G(t)a + \int_0^\infty G(t-s)\Phi(y(s, a), s) ds, \quad t \geq 0, \quad (42)$$

где операторная функция $G(t)$ определена в (32) и удовлетворяет оценке

$$\|A^\alpha G(t)\|_{H \rightarrow H} \leq K_\alpha \begin{cases} t^{-\alpha} e^{-a't}, & t > 0, \\ e^{a't}, & t < 0, \end{cases}$$

где $a' > 0$. Эту оценку для технических целей мы перепишем в виде

$$\|A^\alpha G(t)\|_{H \rightarrow H} \leq K_\alpha \begin{cases} t^{-\alpha} e^{-(a+b)t}, & t > 0, \\ e^{bt}, & t < 0, \end{cases} \quad (43)$$

для некоторых $a, b > 0$, $a + b < a'$.

Пусть при $\varepsilon < \varepsilon_0$, $\rho < \rho_0$ константа Липшица $\Lambda_{\alpha\gamma}(\varepsilon, \rho)$ столь мала, что выполняется неравенство:

$$\Lambda_{\alpha\gamma} K_{\alpha-\gamma} \left(b^{\alpha-\gamma-1} \Gamma(\gamma - \alpha + 1) + \frac{1}{a+b} \right) \leq \frac{1}{2}, \quad (44)$$

и пусть

$$\|a\|_\alpha \leq \frac{\rho}{2K_0}.$$

Решение уравнения (42) найдем методом последовательных приближений, полагая

$$\begin{aligned} y_0(t, a) &= 0, \\ y_p(t, a) &= G(t)a + \int_0^\infty G(t-s)\Phi(y_{p-1}(s, a), s) ds. \end{aligned}$$

Тогда

$$\|y_1\|_\alpha \leq K_0 \|a\|_\alpha e^{-at},$$

и, следовательно, при $p = 1$ справедливо

$$\|y_p(t, a) - y_{p-1}(t, a)\|_\alpha \leq \frac{K_0}{2^{p-1}} \|a\|_\alpha e^{-at}.$$

Поэтому в силу (43), (41) и (44)

$$\begin{aligned} & \|y_{p+1}(t, a) - y_p(t, a)\|_\alpha \\ & \leq \left\| \int_0^\infty A^\alpha G(t-s) [\Phi(s, y_p(s, a)) - \Phi(s, y_{p-1}(s, a))] ds \right\| \\ & \leq K_0 K_{\alpha-\gamma} \Lambda_{\alpha\gamma} \frac{1}{2^{p-1}} \|a\|_\alpha \left(e^{-at} \int_0^t (t-s)^{\gamma-\alpha} e^{-b(t-s)} ds \right. \\ & \quad \left. + e^{bt} \int_t^\infty e^{-(a+b)s} ds \right) \\ & \leq \Lambda_{\alpha\gamma} K_{\alpha-\gamma} (b^{\alpha-\gamma-1} \Gamma(\gamma-\alpha+1) + (a+b)^{-1}) \frac{K_0}{2^{p-1}} \|a\|_\alpha e^{-at} \\ & \leq \frac{K_0}{2^p} \|a\|_\alpha e^{-at}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $y_p(t, a) \rightarrow y(t, a)$ и

$$\|y(t, a)\|_\alpha \leq \|y_0\|_\alpha + \sum_{p=1}^\infty \|y_p - y_{p-1}\|_\alpha \leq 2K_0 e^{-at} \|a\|_\alpha \ (\leq \rho),$$

равномерно по $t \in [0, \infty)$, и предельная функция $y(t, a)$ удовлетворяет уравнению (42) и поэтому является решением уравнения (40), экспоненциально стремящимся к 0 в $D(A^\alpha)$ при $t \rightarrow \infty$.

Полагая $t = 0$ в (42), получаем

$$y(0, a) = a_- + \int_0^\infty G(-s) \Phi(y(s, a), s) ds \in S_-,$$

где S_- — некоторое многообразие — график некоторой функции в $H = H_+ + H_-$ над H_- :

$$S_- = \left\{ \int_0^\infty G(-s) \Phi(y(s, a), s) ds, a_- \right\}, \quad a = a_- \in B_\alpha \left(\frac{\rho}{2K_0} \right) \cap H_-.$$

Итак, для $y_0 \in S_-$ решение $y(t)$ уравнения (40) с $y(0) = y_0$ экспоненциально стремится к 0 при $t \rightarrow \infty$, т.е. выполняется (36) с $M_- = S_- + h^*(0)$.

Для случая $t \rightarrow -\infty$ рассмотрим следующее интегральное уравнение с $a = a_+$ и $t < 0$

$$y(t, a) = G(t) a_+ + \int_{-\infty}^0 G(t-s) \Phi(y(s, a), s) ds.$$

Действуя совершенно аналогично, получаем, что решение $y(t)$ уравнения (40) с $y(0) \in S_+ \subset H_+ + H_-$, где

$$S_+ = \left\{ -a_+, \int_{-\infty}^0 G(-s) \Phi(y(s, a), s) ds \right\},$$

экспоненциально стремится к 0 при $t \rightarrow -\infty$.

Многообразия S_+ и S_- (фактически гиперповерхности над H_- и H_+) проходят через 0 и пересекают подпространства H_+ и H_- под малым углом, стремящимся к 0 при $\varepsilon \rightarrow 0$. Лемма полностью доказана.

ТЕОРЕМА 2 (принцип усреднения на всей оси). *Пусть в системе Навье–Стокса (9), записанной в стандартной форме, равномерно по $t \in \mathbb{R}$ существует среднее правой части φ в смысле (10). Пусть усредненная система (11) имеет стационарное решение u_0 , и спектр оператора L*

$$Lh = \nu Ah + B(h, u_0) + B(u_0, h)$$

не пересекает мнимой оси.

Тогда при достаточно малом $\varepsilon < \varepsilon_0$ выполняются следующие условия:

1) *уравнение (9) имеет единственное в малой окрестности точки u_0 ограниченное на всей оси решение $u^*(\tau)$ такое, что*

$$\|u^*(\tau) - u_0\|_\alpha \leq \delta(\varepsilon) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0;$$

2) *в шаре $B_\alpha(\rho)$ существует начальное устойчивое многообразие $\mathcal{M}_-$, $\text{codim } \mathcal{M}_- = N$, такое, что при $u(0) \in \mathcal{M}_-$ и $\tau \rightarrow \infty$*

$$\|u(\tau) - u^*(\tau)\|_\alpha \leq ce^{-a\varepsilon|\tau|} \|u(0) - u^*(0)\|_\alpha, \quad (45)$$

и существует начальное неустойчивое многообразие $\mathcal{M}_+$, $\dim \mathcal{M}_+ = N$, такое, что при $u(0) \in \mathcal{M}_+$ неравенство (45) выполнено при $\tau \rightarrow -\infty$, в частности, если $N = 0$, то решение u^ асимптотически устойчиво;*

3) *если правая часть $\varphi(\tau)$ почти периодическая в $D(A^\alpha)$, то решение $u^*(\tau)$ почти периодическое в $D(A^\beta)$ с частотным базисом, содержащимся в частотном базисе φ .*

Если в (10) $\beta > -\frac{1}{2}$, то теорема верна при любом $\alpha \in (\frac{1}{2}, \beta + 1)$; если $\beta > 0$, то теорема верна при $\alpha = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из представления $u(\tau, \varepsilon) = u_0 + h(\tau, \varepsilon) - \varepsilon v(\tau, \varepsilon)$ с учетом леммы 3 и леммы 6 вытекают все утверждения теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В терминах уравнения (4) следует лишь подставить $\tau = \omega t$ во все утверждения теоремы 2. Все утверждения теоремы справедливы для $u^*(\omega t)$. Например, если в п. 3) функция $\varphi(\tau)$ периодическая с периодом T , то решение $u^*(\omega t)$ уравнения (4) периодическое с периодом T/ω .

В заключение этого пункта приведем один результат, являющийся глобальным аналогом теоремы 2 в случае, если усредненная правая часть достаточно мала.

ТЕОРЕМА 3. Пусть существует среднее (10) при $\beta \geq 0$. Предположим, что усредненная правая часть такова, что

$$\frac{\|\varphi_0\|_\beta}{\nu^2 \lambda_1^{1+\beta}} < \frac{1}{c_0} \approx 2.4, \quad (46)$$

где c_0 – постоянная из оценки (2), а λ_1 – первое собственное значение оператора Стокса A .

Тогда стационарное решение u_0 единственно, $\operatorname{Re} \sigma(L) > c > 0$, и вдобавок ко всем утверждениям теоремы 2 для любого v_0 , $\|v_0\|_\alpha \leq R$, выполняется

$$\|u(\tau) - u^*(\tau)\|_\alpha \leq C(R) e^{-\varepsilon a \tau} \|u(0) - u^*(0)\|_\alpha, \quad \tau \rightarrow \infty, \quad (47)$$

где $u(\tau) = u(\tau, \varepsilon)$ – решение уравнения (9) с $u(0) = v_0$ и $\varepsilon < \varepsilon_0(R)$.

Если $\beta = 0$, то теорема верна для любого $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$, если $\beta > 0$, то для любого $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем прежде всего, что для автономного уравнения (11') выполняется

$$\|\bar{u}(t) - u_0\| \leq c e^{-kt} \|\bar{u}(0) - u_0\|, \quad k > 0, \quad t > 0, \quad (48)$$

где u_0 – стационарное решение уравнения (11). Действительно, для $v(t) = \bar{u}(t) - u_0$ имеем уравнение

$$\partial_t v + \nu A v + B(v, v) + B(v, u_0) + B(u_0, v) = 0.$$

Умножая скалярно на v , получаем

$$\begin{aligned} \partial_t \|v\|^2 + 2\nu \|\nabla v\|^2 &= 2b(v, v, u_0) \leq 2c_0 \|v\| \|\nabla v\| \|\nabla u_0\| \\ &\leq \nu \|\nabla v\|^2 + c_0^2 \nu^{-1} \|v\|^2 \|\nabla u_0\|^2. \end{aligned}$$

Хорошо известно, что стационарное решение u_0 оценивается так:

$$\|\nabla u_0\|^2 \leq \frac{\|f\|_{-1/2}^2}{\nu^2} \leq \frac{\|f\|_\beta^2}{\nu^2 \lambda_1^{2\beta+1}},$$

где было использовано неравенство Пуанкаре

$$\lambda_1^{2(\beta-\alpha)} \|f\|_\alpha^2 \leq \|f\|_\beta^2, \quad \alpha \leq \beta.$$

Поэтому

$$\partial_t \|v\|^2 \leq \left(-\nu + \frac{c_0^2 \|f\|_\beta^2}{\nu^3 \lambda_1^{2\beta+2}} \right) \|\nabla v\|^2.$$

Если выполнено (46), то выражение в круглых скобках отрицательно. Используя еще раз неравенство Пуанкаре, получаем (48).

С помощью аналогичных оценок доказывается, что $\operatorname{Re} \sigma(L) > 0$. Действительно, мы уже знаем, что спектр дискретный. Пусть

$$\nu Ah + B(h, u_0) + B(u_0, h) = \lambda h, \quad h = h_1 + ih_2.$$

Умножим на $h^* = h_1 - ih_2$. Отделяя действительную часть, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda \|h\|^2 &= \nu \|\nabla h\|^2 - b(h_1, h_1, u_0) - b(h_2, h_2, u_0) \\ &\geq \frac{\nu}{2} \|\nabla h\|^2 - \frac{c_0^2}{2\nu\lambda_1} \|\nabla h\|^2 \|\nabla u_0\|^2 \\ &\geq \frac{\nu}{2} \|\nabla h\|^2 - \frac{c_0^2}{2\nu\lambda_1} \|\nabla h\|^2 \frac{\|f\|_\beta^2}{\nu^2 \lambda_1^{2\beta+1}} \\ &= \frac{\delta}{2} \|\nabla h\|^2 + \frac{1}{2}(\nu - \delta) \|\nabla h\|^2 \left(1 - \frac{c_0^2 \|f\|_\beta^2}{\nu^3 (\nu - \delta) \lambda_1^{2\beta+2}}\right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что если выполнено неравенство (46), то при малом $\delta \in (0, \nu)$ выражение в круглых скобках положительно, поэтому

$$\operatorname{Re} \lambda \geq \frac{\delta}{2\lambda_1} > 0. \quad (49)$$

В силу (48) точка u_0 является (H, H) -аттрактором полугруппы, соответствующей системе (11'). (Определения аттракторов и основных связанных с ними понятий дано в § 4.) В [9] доказано, что при $\varphi_0 \in H$, т.е. при $\beta \geq 0$, (H, H) -аттрактор уравнений Навье–Стокса является также $(H, D(A))$ -аттрактором. Отсюда следует, что u_0 есть $(D(A^\alpha), D(A^\alpha))$ -аттрактор. Действительно, локальное решение $S_t: D(A^\alpha) \rightarrow D(A^\alpha)$, $t < t_0$, существует. Это следует из (6') и теоремы о сжатых отображениях аналогично [6, теорема 3.3.3]. Однако $D(A^\alpha)$ -норма решения $S_t u_0$ ограничена при $t > 0$, и значит, решение существует при всех t , поскольку S_t отображает множества, ограниченные в $H \supset D(A^\alpha)$, в множества, компактные в $D(A) \subset D(A^\alpha)$ [9]. Отсюда же следует существование в $D(A^\alpha)$ компактного поглощающего множества. Поэтому для любого шара $B_\alpha(R)$ справедливо

$$\|S_t B_\alpha(R) - u_0\|_\alpha < \mu(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Пусть при $t > T_0$, $\mu(t) < \rho/2$, где ρ – то же самое, что и в теореме 2. Из произвольной точки $v_0 \in B_\alpha(R)$ выпустим траектории систем (10) и (11). Тогда по теореме 1 на отрезке $\tau \in [0, T_0/\varepsilon]$ выполняется $\|\bar{u}(\tau) - u(\tau)\|_\alpha \leq \rho/2$, если $\varepsilon < \varepsilon_0$ достаточно мало. Поэтому при $\tau_0 = T_0/\varepsilon$ выполняется $\|u(\tau_0) - u_0\|_\alpha < \rho$. Но с этого момента по теореме 2, учитывая, что (49) означает, что шар $B_\alpha(u_0, \rho)$ принадлежит устойчивому многообразию $\mathcal{M}_-$, получаем

$$\|u^*(\tau - \tau_0) - u(\tau - \tau_0)\|_\alpha \leq c e^{-a\varepsilon(\tau - \tau_0)} \|u^*(\tau_0) - u(\tau_0)\|_\alpha.$$

Мажорируя на отрезке $[0, T_0/\varepsilon]$ левую часть (47) за счет $C(R)$ получаем (47) при всех $\tau > 0$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В процессе доказательства теоремы 3 мы установили, что полугруппа S_t , соответствующая автономному уравнению, равномерно ограничена в $D(A^\alpha)$ и имеет там поглощающее множество. Если $\beta \geq 0$, то оценки (13)–(16) верны и в $D(A^\alpha)$ -норме. Поэтому теорема об усреднении на конечном отрезке (теорема 1) верна также в пространстве $D(A^\alpha)$ для любого $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Справедлива оценка $\lambda_1 \geq 2\pi/|\Omega|$, где $|\Omega|$ – площадь области Ω [27]. Поэтому неравенство (46) при $\beta = 0$ выполняется, если

$$\frac{\|\varphi_0\| |\Omega|}{\nu^2} < \frac{2\pi}{c_0} \approx 15.2.$$

§ 3. Гиперболическое уравнение с диссипацией

1. Усреднение на конечном отрезке. Рассматривается неавтономное гиперболическое уравнение второго порядка с диссипацией и быстро осциллирующей правой частью

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u + \gamma \partial_t u &= \Delta u - f(u) + \varphi(\omega t), \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \quad \Omega \in \mathbb{R}^3, \quad \gamma > 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Мы ограничиваемся рассмотрением лишь случая трехмерной области Ω , предполагаем при этом, что $\partial\Omega \in C^2$. Предположения о нелинейной функции f следующие: $f \in C^2(\mathbb{R})$, $f(0) = 0$ и выполняются неравенства [9]:

$$F(u) \geq -(\lambda_1 - \varepsilon)u^2 - C, \quad \varepsilon > 0, \quad (2_1)$$

$$F(u) \leq C f(u)u + C_1 + \frac{1}{2}(\lambda_1 - \varepsilon)u^2, \quad \varepsilon > 0, \quad (2_2)$$

$$|f'(u)| \leq C(1 + u^2), \quad (2_3)$$

$$|f'(u)| \geq -C, \quad (2_4)$$

$$|f''(u)| \leq C(1 + |u|^\beta), \quad \beta < \infty, \quad (2_5)$$

где $F(u) = \int_0^u f(v) dv$, $C, C_1 > 0$ и $\lambda_1 > 0$ – первое собственное значение задачи Дирихле для оператора $-\Delta$ в Ω . Перечисленным выше требованиям удовлетворяет любой многочлен третьей степени с положительным старшим коэффициентом, а также $f(u) = \sin(u)$.

Уравнение (1) удобно записать в виде системы

$$\begin{aligned} \partial_t u &= p, \\ \partial_t p &= -\gamma p + \Delta u - f(u) + \varphi(\omega t), \end{aligned} \quad (3)$$

или

$$\partial_t y = -Ay - g(y) + \psi(\omega t), \quad (4)$$

где

$$A = - \begin{bmatrix} 0 & I \\ \Delta & -\gamma I \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} y &= (u, p)^T, \\ g(y) &= (0, f(u))^T, \\ \psi(t) &= (0, \varphi(t))^T. \end{aligned}$$

Значок T в дальнейшем будем опускать.

Сделаем замену $\tau = \omega t$, $\omega^{-1} = \varepsilon$. Получим

$$\partial_\tau y = \varepsilon(-Ay - g(y) + \psi(\tau)). \quad (5)$$

Введем пространства

$$\begin{aligned} E_0 &= \{y = (u, p); u \in H_0^1(\Omega), p \in L_2(\Omega)\}, \\ \|y\|_{E_0}^2 &= \|\nabla u\|^2 + \|p\|^2, \\ E_1 &= \{y = (u, p); u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), p \in H_0^1(\Omega)\}, \\ \|y\|_{E_1}^2 &= \|\Delta u\|^2 + \|\nabla p\|^2, \\ E_2 &= \{y = (u, p); u \in H^3 \cap H_0^1 \cap \{\Delta u \in H_0^1\}, p \in H^2 \cap H_0^1\}, \\ \|y\|_{E_2}^2 &= \|\nabla \Delta u\|^2 + \|\Delta p\|^2. \end{aligned}$$

Предположим, что существует среднее в следующем смысле: $\varphi(\tau), \varphi_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ и

$$\left\| \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \Delta(\varphi(\tau) - \varphi_0) d\tau \right\| \leq \min(M, \sigma(T)) \cdot (1 + \gamma^2 \lambda_1^{-1})^{-1/2}, \quad (6)$$

где $M > 0$, $\sigma(T) \rightarrow 0$, $T \rightarrow \infty$.

Поскольку $A\psi = (-\varphi, \gamma\varphi)$ и

$$\|\Delta\varphi\|^2 \leq \|\Delta\varphi\|^2 + \gamma^2 \|\nabla\varphi\|^2 = \|A\psi\|_{E_1}^2 \leq (1 + \gamma^2 \lambda_1^{-1}) \|\Delta\varphi\|^2,$$

то из (6) следует, что

$$\left\| \frac{1}{T} \int_t^{t+T} A(\psi(\tau) - \psi_0) d\tau \right\|_{E_1} \leq \min(M, \sigma(T)), \quad (7)$$

где $\psi_0 = (0, \varphi_0)$.

Наряду с (5) будем рассматривать усредненную систему

$$\begin{aligned} \partial_\tau \bar{y} &= \varepsilon(-A\bar{y} - g(\bar{y}) + \psi_0), \\ \bar{y}(0) &= y_0 \end{aligned} \quad (8)$$

или

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{y} &= -A\bar{y} - g(\bar{y}) + \psi_0, \\ \bar{y}(0) &= y_0. \end{aligned} \quad (8')$$

Для линейного однородного уравнения

$$\begin{aligned} \partial_t y + Ay &= 0, \\ y(0) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

известны [9], [13], [14] следующие оценки эволюционного оператора

$$\|e^{-At}\|_{E_i \rightarrow E_i} \leq K_i e^{-at}, \quad i = 0, 1, 2, \quad a > 0. \quad (10)$$

ЛЕММА 1. При выполнении условий (2) функция $g(y)$ является ограниченным липшицевым отображением из E_1 в E_1 :

$$\|g(y_1) - g(y_2)\|_{E_1} \leq L(\|y_1\|_{E_1} + \|y_2\|_{E_1})\|y_1 - y_2\|_{E_1}, \quad (11)$$

где $L(\cdot)$ – некоторая непрерывная монотонная функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $g(y) = (0, f(u))$, то

$$\begin{aligned} \|g(y_1) - g(y_2)\|_{E_1} &= \|\nabla(f(u_1) - f(u_2))\| = \|f'(u_1)\nabla u_1 - f'(u_2)\nabla u_2\| \\ &\leq \|f'(u_1)\nabla(u_1 - u_2)\| + \|(f'(u_1) - f'(u_2))\nabla u_2\| \\ &\leq \|f'(u_1)\|_{L_4}\|\nabla(u_1 - u_2)\|_{L_4} + \|f'(u_1) - f'(u_2)\|_{L_4}\|\nabla u_2\|_{L_4}. \end{aligned}$$

По теореме вложения Соболева $\|\nabla(u_1 - u_2)\|_{L_4} \leq c_1\|u_1 - u_2\|_{H^2}$. Согласно (25)

$$|f'(u_1(x)) - f'(u_2(x))| \leq c_2(1 + |u_1(x)|^\beta + |u_2(x)|^\beta)|u_1(x) - u_2(x)|.$$

Поэтому, учитывая, что $H^2(\Omega) \subset C_b(\Omega)$, получаем

$$\|f'(u_1) - f'(u_2)\|_{L_4} \leq c_3(\|u_1\|_{H^2}^\beta + \|u_2\|_{H^2}^\beta + 1)\|u_1 - u_2\|_{H^2}.$$

Лемма доказана.

Известно [9, теорема I.8.2], [12], что усредненная система (8') имеет единственное решение $y \in C([0, T]; E_1)$. Кроме того, соответствующая полугруппа S_t имеет E_1 -поглощающее множество: шар $B_{E_1}(R_0)$ достаточно большого радиуса, т.е. $\|S_t y_0\|_{E_1} \leq R_0$ при $t \geq t_0 = t_0(\|y_0\|_{E_1}, R_0)$. Полугруппа S_t является также (E_1, E_1) ограниченной равномерно по $t \geq 0$, т.е. $\forall R_1 > 0 \exists R_2 > 0$, что $\forall t \geq 0$ выполняется $S_t B_{E_1}(R_1) \subset B_{E_1}(R_2)$. Таким образом, в частности, выполнено

$$S_t B_{E_1}(R_0) \subset B_{E_1}(R - \rho), \quad \rho > 0.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть нелинейный член удовлетворяет условиям (2), а правая часть φ имеет среднее в смысле (6). Пусть $T > 0$ фиксировано.

Тогда если $y(0) = \bar{y}(0) \in B_{E_1}(R_0)$, то при $\varepsilon < \varepsilon_0$ и $\tau \in [0, T/\varepsilon]$ выполняется соотношение:

$$\|y(\tau) - \bar{y}(\tau)\|_{E_1} \leq \eta_T(\varepsilon) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $z(\tau) = y(\tau) - \bar{y}(\tau)$ имеем уравнение

$$\partial_\tau z = \varepsilon(-Az - (g(y) - g(\bar{y})) + \psi(\tau) - \psi_0), \quad z(0) = 0.$$

Обращая линейную часть, получаем

$$\begin{aligned} z(\tau) &= -\varepsilon \int_0^\tau e^{-\varepsilon A(\tau-s)} (g(y(s)) - g(\bar{y}(s))) ds \\ &\quad + \varepsilon \int_0^\tau e^{-\varepsilon A(\tau-s)} (\psi(s) - \psi_0) ds. \end{aligned} \quad (12)$$

Будем пока считать, что решение $y(\tau)$ на отрезке $\tau \in [0, T/\varepsilon]$ не покидает шара $B_{E_1}(R)$. Тогда, используя (10) и (11), получаем

$$\begin{aligned} \|z(\tau)\|_{E_1} &\leq \varepsilon K L(R) \int_0^\tau e^{-\varepsilon a(\tau-s)} \|z(s)\|_{E_1} ds \\ &\quad + \left\| \varepsilon \int_0^\tau e^{-\varepsilon A(\tau-s)} (\psi(s) - \psi_0) ds \right\|_{E_1}. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, оценим второе слагаемое

$$\begin{aligned} &\left\| \varepsilon \int_0^\tau e^{-\varepsilon A(\tau-s)} (\psi(s) - \psi_0) ds \right\|_{E_1} \\ &\leq \left\| \varepsilon e^{-\varepsilon A\tau} \int_0^\tau (\psi(t) - \psi_0) dt \right\|_{E_1} \\ &\quad + \left\| \varepsilon^2 \int_0^\tau e^{-\varepsilon A(\tau-s)} A \int_s^\tau (\psi(t) - \psi_0) dt ds \right\|_{E_1}, \end{aligned} \quad (13)$$

где мы воспользовались тем, что $\int_s^\tau (\psi(t) - \psi_0) dt \in E_2$, а для $y \in E_2$ в пространстве E_1 справедливо равенство

$$A e^{-\varepsilon A\tau} y = e^{-\varepsilon A\tau} A y.$$

Первое слагаемое справа в (13), аналогично (15) из §2, не превосходит

$$\begin{aligned} \varepsilon K e^{-\varepsilon a\tau} \tau \left\| \frac{1}{\tau} \int_0^\tau (\psi(t) - \psi_0) dt \right\|_{E_1} &\leq \varepsilon K e^{-\varepsilon a\tau} \tau \min(M, \sigma(\tau)) \\ &\leq e^{-\varepsilon a\tau} G_1(T, \varepsilon) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Заметим, что если

$$\left\| \int_t^{t+T} A(\psi(\tau) - \psi_0) d\tau \right\|_{E_1} \leq M_1, \quad (14)$$

то оцениваемое слагаемое не превосходит $\varepsilon K e^{-\varepsilon a\tau} M_1$.

Выберем произвольное $\delta > 0$ и τ_δ так, чтобы при $\tau \geq \tau_\delta$ выполнялось $\sigma(\tau) < \delta$. Тогда второе слагаемое в (13) не превосходит

$$\varepsilon^2 K \int_0^\tau e^{-\varepsilon a u} u \min(M, \sigma(u)) du \leq \frac{\varepsilon^2 K M \tau_\delta^2}{2} + \frac{\delta K}{a^2} \leq G_2(\varepsilon) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Кроме того, если выполнено (14), то оцениваемое слагаемое не превосходит $\varepsilon a^{-1} K M_1$. Итак,

$$\|z(\tau)\|_{E_1} \leq \varepsilon K L(R) \int_0^\tau e^{-\varepsilon a(\tau-s)} \|z(s)\|_{E_1} ds + (e^{-\varepsilon a\tau} G_1(T, \varepsilon) + G_2(\varepsilon)),$$

откуда по неравенству Гронуолла для $e^{\varepsilon a\tau} \|z(\tau)\|$ получаем

$$\|z(\tau)\|_{E_1} \leq (e^{-\varepsilon a\tau} G_1(T, \varepsilon) + G_2(\varepsilon)) e^{\varepsilon K L(R)\tau}, \quad \tau \in [0, T/\varepsilon], \quad (15)$$

что и доказывает теорему, если решение $y(\tau)$ не покидает на отрезке $[0, T/\varepsilon]$ шара $B_{E_1}(R)$. Однако, предположение о том, что решение покидает этот шар на данном отрезке приводит к противоречию, как и в теореме 1 из §2. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если выполнено (14), для чего достаточно, чтобы функция $\psi(\tau)$ была периодической, то оценка близости решений (15) принимает более простой вид

$$\|z(\tau)\|_{E_1} \leq \varepsilon K M_1 (e^{-\varepsilon a \tau} + a^{-1}) e^{K L(R) T}, \quad \tau \in [0, T/\varepsilon].$$

2. Усреднение на всей оси. Вновь рассмотрим уравнение (1). Предположим, что существует среднее (7). В этом пункте все рассуждения происходят в малой окрестности стационарной точки, поэтому предположения относительно нелинейности $f(u)$ существенно слабее: предполагается лишь, что $f \in C^2(\mathbb{R})$.

Предположим, что усредненная система (8) имеет стационарное решение $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$,

$$\Delta u_0 - f(u_0) + \varphi_0 = 0 \quad \text{или} \quad -A u_0 - g(y_0) + \psi_0 = 0, \quad y_0 = (0, u_0). \quad (16)$$

Для существования стационарного решения u_0 достаточно, чтобы выполнялось

$$f(u)u \geq -C \quad \text{или} \quad \int_{\Omega} f(u)u \, dx \geq -(1-\varepsilon)\|\nabla u\|^2 - C_{\varepsilon}, \quad u \in H_0^1(\Omega), \quad \varepsilon > 0. \quad (17)$$

Сделаем замену

$$y = y_0 + z.$$

С учетом (16) получим

$$\partial_{\tau} z = \varepsilon (-A z - (g(y_0 + z) - g(y_0)) + \psi(\tau) - \psi_0). \quad (18)$$

ЛЕММА 2. Оператор $g: E_1 \rightarrow E_1$ дифференцируем по Фреше из E_1 в E_1 , и его дифференциал есть линейный оператор $Dg(y_0)$:

$$Dg(y_0)\delta y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f'_u(u_0) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta p \end{bmatrix} = (0, f'_u(u_0)\delta u)^T.$$

Доказательство аналогично доказательству приводимой ниже леммы 4 и поэтому опускается.

Обозначим через $L = L(y_0)$ линейный оператор

$$L y = A y + Dg(y_0) y \quad (19)$$

или

$$L = - \begin{bmatrix} 0 & I \\ \Delta - f'(u_0) & -\gamma I \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Тогда

$$\partial_{\tau} z = -\varepsilon L z + \varepsilon (\psi(\tau) - \psi_0 - (g(y_0 + z) - g(y_0) - Dg(y_0)z)). \quad (21)$$

Проведем в уравнении (21) еще одну замену

$$z = h - \varepsilon v(\tau, \varepsilon). \quad (22)$$

Получим

$$\partial_{\tau} h = \varepsilon (\partial_{\tau} v + \varepsilon A v + (\psi(\tau) - \psi_0)) + \varepsilon (-L h - (g(y_0 + h - \varepsilon v) - g(y_0) - Dg h)). \quad (23)$$

Потребуем, чтобы первое слагаемое обращалось в нуль.

ЛЕММА 3. *Существует единственное ограниченное в E_1 на всей оси решение $v(\tau, \varepsilon)$ уравнения*

$$\partial_\tau v = -\varepsilon A v + (\psi_0 - \psi(\tau)). \quad (24)$$

Кроме того,

$$\sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|\varepsilon v(\tau, \varepsilon)\|_{E_1} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (25)$$

Если функция $\psi(\tau)$ н.п. в E_1 , то и решение v – н.п. в E_1 с частотным базисом, содержащимся в частотном базисе ψ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу оценки (10) решение дается формулой

$$v(\tau, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\varepsilon A(\tau-s)} (\psi_0 - \psi(s)) ds. \quad (26)$$

Единственность будет доказана в более общем случае в лемме 6, а сейчас докажем ограниченность и свойство (25). Пусть $\delta > 0$ произвольно мало, и $s_0 = s_0(\delta)$ таково, что $\sigma(s) < \delta$ при $s > s_0$ (см. (7)). Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \|\varepsilon v(\tau, \varepsilon)\|_{E_1} &= \left\| \varepsilon \int_0^\infty e^{-\varepsilon A s} (\psi_0 - \psi(\tau - s)) ds \right\|_{E_1} \\ &= \left\| \varepsilon^2 \int_0^\infty e^{-\varepsilon A s} s s^{-1} A \int_0^s (\psi_0 - \psi(\tau - t)) dt ds \right\|_{E_1} \\ &\leq \varepsilon^2 K \int_0^\infty e^{-\varepsilon a s} s \min(M, \sigma(s)) ds \\ &\leq \frac{\varepsilon^2 K M s_0(\delta)^2}{2} + \frac{\delta K}{a^2}. \end{aligned}$$

Устремляя $\delta \rightarrow 0$, а затем $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем утверждение (25).

Пусть, наконец, $\{\tau_m\}$ – любая ψ -возвращающая последовательность. Тогда

$$v(\tau + \tau_m) - v(\tau) = \int_0^\infty e^{-\varepsilon A s} (\psi(\tau - s) - \psi(\tau - s + \tau_m)) ds.$$

Поэтому

$$\sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|v(\tau + \tau_m) - v(\tau)\|_{E_1} \leq \sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|\psi(\tau + \tau_m) - \psi(\tau)\|_{E_1} K(\varepsilon a)^{-1}.$$

Лемма доказана.

Итак, для h мы получили уравнение

$$\begin{aligned} \partial_\tau h &= -\varepsilon L h + \varepsilon F(h, \varepsilon, \tau), \\ F(h, \varepsilon, \tau) &= -g(y_0 + h - \varepsilon v) + g(y_0) + Dg(y_0)h. \end{aligned} \quad (27)$$

ЛЕММА 4. Функция F липшицева из E_1 в E_1 . Если $h_1, h_2 \in B_{E_1}(\rho)$, то

$$\|F(h_1, \varepsilon, \tau) - F(h_2, \varepsilon, \tau)\|_{E_1} \leq \lambda(\varepsilon, \rho) \|h_1 - h_2\|_{E_1}, \quad (28)$$

$$\|F(0, \varepsilon, \tau)\|_{E_1} \leq N(\varepsilon), \quad (29)$$

где $\lambda(\varepsilon, \rho)$, $N(\varepsilon) \rightarrow 0$, если $\varepsilon, \rho \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через Π_1 проектор $\Pi_1(u, p) = u$, и пусть $\Pi_1 v = w$, $\Pi_1 h_{1,2} = \pi_{1,2}$. Тогда

$$\begin{aligned} & \|F(h_1) - F(h_2)\|_{E_1} \\ &= \|\nabla(f(u_0 - \varepsilon w + \pi_1) - f(u_0 - \varepsilon w + \pi_2) - f'(u_0)(\pi_1 - \pi_2))\| \\ &\leq \|(f'(u_0 - \varepsilon w + \pi_1) - f'(u_0 - \varepsilon w + \pi_2))\nabla(u_0 - \varepsilon w) - f''(u_0)(\pi_1 - \pi_2)\nabla u_0\| \\ &\quad + \|f'(u_0 - \varepsilon w + \pi_1)\nabla \pi_1 - f'(u_0 - \varepsilon w + \pi_2)\nabla \pi_2 - f'(u_0)\nabla(\pi_1 - \pi_2)\| \\ &=: A + B. \end{aligned}$$

Далее, для некоторой функции $\theta = \theta(x) \in [0, 1]$ имеем

$$\begin{aligned} A &= \|(f''(u_0 - \varepsilon w + \pi_1 + \theta(\pi_2 - \pi_1)) - f''(u_0))\nabla u_0(\pi_1 - \pi_2) \\ &\quad + f''(u_0 - \varepsilon w + \pi_1 + \theta(\pi_2 - \pi_1))\varepsilon \nabla w(\pi_1 - \pi_2)\| \\ &\leq \|f''(u_0 - \varepsilon w + \pi_1 + \theta(\pi_2 - \pi_1)) - f''(u_0)\|_\infty \|\nabla u_0\| \|\pi_1 - \pi_2\|_\infty \\ &\quad + \|f''(u_0 - \varepsilon w + \pi_1 + \theta(\pi_2 - \pi_1))\|_\infty \|\varepsilon \nabla w\| \|\pi_1 - \pi_2\|_\infty. \end{aligned}$$

Пользуясь непрерывностью f'' , теоремами вложения и оценкой (25), получаем

$$A \leq \lambda_1(\varepsilon, \rho) \|h_1 - h_2\|_{E_1}, \quad \lambda_1(\varepsilon, \rho) \rightarrow 0, \quad \varepsilon, \rho \rightarrow 0.$$

Аналогичному неравенству удовлетворяет и слагаемое B , что дает (28). Аналогично доказывается неравенство (29). Лемма доказана.

Перейдем к анализу линейного уравнения

$$\partial_t y = -Ly, \quad y(0) = y_0 \in E_1 \quad (30)$$

или

$$\begin{aligned} & \partial_t^2 u + \gamma \partial_t u = \Delta u - f'(u_0)u, \\ & u(0) = u_0, \quad \partial_t u(0) = p_0, \quad (u_0, p_0) \in E_1. \end{aligned} \quad (31)$$

Это уравнение имеет единственное решение $y \in C([0, T]; E_1)$. Обозначим через S_t соответствующую полугруппу (группу) линейных непрерывных операторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [9]. Полугруппа $S_t: X \rightarrow X$ линейных непрерывных операторов, действующих в банаховом пространстве X , называется почти устойчивой, если

- 1) $\|S_t\|_{X \rightarrow X} \leq C(T)$, $t \in [0, T]$;
- 2) функция $S_t v$ слабо непрерывна по t ;
- 3) существует число r_0 , $0 < r_0 < 1$, такое что вне круга $|\zeta| \leq r_0$ имеется лишь конечное число точек спектра оператора S_1 ;
- 4) инвариантное подпространство, соответствующее этой части спектра, конечномерно.

ЛЕММА 5. Полугруппа S_t , соответствующая уравнению (30), почти устойчива в E_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем основную идею из [9]–[11] и представим S_t как

$$S_t = S_t^0 + D_t,$$

где S_t^0 – линейная полугруппа, соответствующая однородному уравнению

$$\begin{aligned} \partial_t^2 v + \gamma \partial_t v &= (\Delta - f'(u_0) - M)v \equiv -A_0 v, \\ v(0) &= u_0, \quad \partial_t v(0) = p_0, \quad M > 0, \end{aligned} \quad (32)$$

а линейные операторы D_t определяются так: $D_t(u_0, p_0) = (w(t), \partial_t w(t))$, где $w(t)$ – решение уравнения

$$\begin{aligned} \partial_t^2 w + \gamma \partial_t w &= -A_0 w + M u(t), \\ w(0) &= 0, \quad \partial_t w(0) = 0, \end{aligned} \quad (33)$$

где $u(t)$ – решение уравнения (31).

Пусть константа M , находящаяся в нашем распоряжении, столь велика, что $M > \max_{x \in \Omega} |f'(u_0)|$. Тогда $(A_0 v, v) \geq \alpha \|\nabla v\|^2$, $\alpha > 0$, и для таких M выполняется [9], [13], [14]

$$\|S_t^0\|_{E_j \rightarrow E_j} \leq K_j e^{-bt}, \quad b > 0, \quad j = 0, 1, 2. \quad (34)$$

Представим решение уравнения (31) интегралом Дюамеля

$$(u(t), \partial_t u(t)) = \int_0^t S_{t-\tau}^0(0, M u(\tau)) d\tau + S_t^0(u_0, p_0). \quad (35)$$

Отсюда следует, что решение $(u(t), \partial_t u(t)) \in C([0, T]; E_1)$ и выполняются п. 1) и п. 2) определения 1.

Аналогично, для уравнения (33) имеем

$$(w(t), \partial_t w(t)) = \int_0^t S_{t-\tau}^0(0, M u(\tau)) d\tau.$$

Учитывая, что $(0, M u) \in C([0, T]; E_2)$, получаем, что $(w, \partial_t w) \in C([0, T]; E_2)$.

Вложение $E_2 \subset E_1$ компактно, поэтому оператор $D_t: E_1 \rightarrow E_1$ компактен.

По теореме о спектральном радиусе с учетом (34), получаем, что спектр оператора S_t^0 лежит в круге $|\zeta| \leq e^{-bt} < 1$. Оператор D_t компактен, поэтому существенный спектр $\sigma_e(S_t)$ оператора S_t лежит в том же круге $|\zeta| \leq e^{-bt}$. Оператор S_t ограничен, поэтому связная компонента множества $\mathbb{C} \setminus \sigma_e(S_t)$, содержащая бесконечность, содержит внешность нашего круга, т.е. множество $|\zeta| > e^{-bt}$ [28]. Поэтому все точки из внешности круга лежат в резольвентном множестве оператора S_t или являются его изолированными собственными значениями конечной кратности. Таким образом, вне этого круга собственных значений с учетом кратности лишь конечное число. Лемма доказана.

Обозначим через $\sigma_+(S_1) = \{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}$ часть спектра оператора S_1 , лежащую вне единичной окружности и обозначим через Π_+ спектральный проектор

$$\Pi_+ u = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\zeta I - S_1)^{-1} u d\zeta,$$

где Γ – контур в резольвентном множестве, окружающий $\sigma_+(S_1)$. Пусть Π_- – дополнительный проектор: $\Pi_+ + \Pi_- = I$.

Поскольку операторы S_1 и S_t коммутируют, то пространства $E_{1+} = \Pi_+ E_1$ и $E_{1-} = \Pi_- E_1$ инвариантны относительно S_t для всех t :

$$S_t E_{1+} \subset E_{1+}, \quad S_t E_{1-} \subset E_{1-}.$$

Обозначим для $t \neq 0$

$$G(t) = \begin{cases} S_t \Pi_-, & t > 0, \\ -S_t \Pi_+, & t < 0. \end{cases}$$

ЛЕММА 6. Пусть почти устойчивая полугруппа разрешающих операторов S_t , соответствующих уравнению (30), такова, что спектр оператора S_1 не пересекается с единичной окружностью. Тогда неоднородное уравнение

$$\partial_t h = -Lh + f(t),$$

где $\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}; E_1)} < \infty$, имеет единственное ограниченное на всей оси решение $h \in C_b(\mathbb{R}; E_1)$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)f(s) ds. \quad (36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно (см., например, [9, теорема IV.2.1]), что существуют $\delta \in (0, 1)$ и $K_0 > 0$, для которых

$$\begin{aligned} \|S_t \Pi_-\|_{E_1 \rightarrow E_1} &\leq K_0 \delta^t, \quad t > 0, \\ \|S_t \Pi_+\|_{E_1 \rightarrow E_1} &\leq K_0 \delta^{|t|}, \quad t < 0, \end{aligned} \quad \text{т.е.} \quad \|G(t)\| \leq K_0 \delta^{|t|}. \quad (37)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \|h(t)\|_{E_1} &\leq \left\| \int_{-\infty}^t G(t-s)f(s) ds \right\|_{E_1} + \left\| \int_t^{\infty} G(t-s)f(s) ds \right\|_{E_1} \\ &\leq \frac{2K_0}{\ln \frac{1}{\delta}} \|f\|_{L_{\infty}(\mathbb{R}; E_1)}. \end{aligned} \quad (38)$$

Ясно, что h — действительно решение, единственность которого доказывается точно так же, как в лемме 5 из § 2. Лемма доказана.

С этого момента всё дальнейшее вполне аналогично случаю уравнений Навье—Стокса. Вернемся в уравнении (27) к исходному времени t :

$$\begin{aligned} \partial_t h &= -Lh + Q(h, \varepsilon, t), \\ Q(h, \varepsilon, t) &= F(h, \varepsilon, \varepsilon^{-1}t). \end{aligned} \quad (39)$$

Согласно (28) выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \|Q(h_1) - Q(h_2)\|_{E_1} &\leq \lambda(\varepsilon, \rho) \|h_1 - h_2\|_{E_1}, \quad \|Q(0, \varepsilon, t)\|_{E_1} \leq N(\varepsilon), \\ h_1, h_2 &\in B_{E_1}(\rho), \quad \lambda(\varepsilon, \rho), N(\varepsilon) \rightarrow 0, \quad \text{при } \varepsilon, \rho \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (40)$$

ЛЕММА 7. При $\varepsilon < \varepsilon_0$, $\rho < \rho_0$ уравнение (39) имеет единственное решение $h^*(t) = h_{\varepsilon}^*(t)$, удовлетворяющее условиям:

- 1) $\|h^*\|_{C_b(\mathbb{R}; E_1)} \leq \delta(\varepsilon) \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$; (41)
- 2) в E_1 существует начальное многообразие M_- , $\text{codim } M_- = N$ ($= \dim E_{1+}$), такое, что если $h_0 \in B_{E_1}(\rho) \cap M_-$, то решение $h(t)$ уравнения (39) с $h(0) = h_0$ удовлетворяет при $t \rightarrow +\infty$ неравенству:

$$\|h(t) - h^*(t)\|_{E_1} \leq k e^{-a|t|} \|h_0 - h^*(0)\|_{E_1}, \quad k > 0, \quad a > 0; \quad (42)$$

существует начальное многообразие M_+ , $\dim M_+ = N$, такое, что если $h_0 \in B_{E_1}(\rho) \cap M_+$, то (42) выполнено при $t \rightarrow -\infty$;

- 3) если функция $Q(h, \varepsilon, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow E_1$ н.н. в E_1 равномерно по $\varepsilon < \varepsilon_0$ и $h \in B_{E_1}(\rho)$, то решение h^* тоже н.н. в E_1 с частотным базисом, содержащимся в частотном базисе функции Q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathcal{F}$ функциональное преобразование

$$(\mathcal{F}h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)Q(h(s), \varepsilon, s) ds.$$

Используя (38), (40), видим, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ и $\rho < \rho_0$ преобразование $\mathcal{F}$ переводит шар малого радиуса ρ в $C_b(\mathbb{R}; E_1)$ в себя и является там сжимающим отображением. Соответствующая неподвижная точка и есть h^* . Это доказывает п. 1). Доказательство п. 3) совпадает с доказательством п. 3) леммы 6 из § 2.

Доказывая п. 2), положим $h(t) = h^*(t) + y(t)$, и для y имеем уравнение

$$\begin{aligned} \partial_t y + Ly &= \Phi(y, \varepsilon, t), \\ \Phi(y, \varepsilon, t) &= Q(h^* + y, \varepsilon, t) - Q(h^*, \varepsilon, t), \end{aligned} \quad (43)$$

и Φ удовлетворяет

$$\|\Phi(y_1) - \Phi(y_2)\|_{E_1} \leq \Lambda(\varepsilon, \rho) \|y_1 - y_2\|_{E_1}, \quad \Lambda(\varepsilon, \rho) \rightarrow 0, \quad \text{если } \varepsilon, \rho \rightarrow 0.$$

Пусть $y(0) = a = a_-$, т.е. $\Pi_+ a = 0$. Рассмотрим уравнение

$$y(t, a) = G(t)a + \int_0^\infty G(t-s)\Phi(y(s, a), s) ds. \quad (44)$$

Оценку (37) запишем в виде

$$G(t) \leq K_0 \begin{cases} e^{-(\alpha+\beta)t}, & t > 0, \\ e^{\beta t}, & t < 0, \end{cases} \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

Пусть при $\varepsilon < \varepsilon_0$ и $\rho < \rho_0$ выполняется $\Lambda(\varepsilon, \rho) < \beta/(4K_0)$, и пусть $\|a\|_{E_1} \leq \rho/(2K_0)$.

Решая уравнение (44) методом последовательных приближений, как и в лемме 6 из § 2, находим решение $y(t, a)$, удовлетворяющее

$$\|y(t, a)\|_{E_1} \leq 2K_0 \|a\|_{E_1} e^{-\alpha t}.$$

Итак, $y(t, a)$ — решение (44) и, следовательно, решение дифференциального уравнения (43), экспоненциально стремящееся к нулю.

Многообразия M_+ и M_- строятся точно так же, как в лемме 6 из § 2. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть в уравнении (1) $f \in C^2(\mathbb{R})$, и правая часть φ имеет среднее в смысле (6). Пусть усредненное уравнение имеет стационарное решение $u_0 \in H^2 \cap H_0^1$ (16) (для этого достаточно, чтобы выполнялось (17)). Пусть почти устойчивая в E_1 полугруппа линейных операторов $S_t(v_0, p_0) = (v(t), \partial_t v(t))$, порожденная линеаризованным уравнением

$$\begin{aligned} \partial_t^2 v + \gamma \partial_t v &= \Delta v - f'_u(u_0)v, \\ v(0) &= v_0, \quad \partial_t v(0) = p_0, \end{aligned}$$

такова, что спектр оператора S_1 не пересекается с единичной окружностью.

Тогда

1) при достаточно большом $\omega > \omega_0$ уравнение (1) имеет единственное решение $y^*(t) = (u^*(t), \partial_t u^*(t))$, $y^*(t) = y_\omega^*(t)$, ограниченное в E_1 на всей оси и такое, что

$$\|y^*(t) - y_0\|_{E_1} \leq \delta(\omega) \rightarrow 0, \quad \omega \rightarrow \infty, \quad y_0 = (u_0, 0);$$

2) в шаре $B_{E_1}(y_0, \rho)$ существуют устойчивое и неустойчивое начальные многообразия $\mathcal{M}_-$ и $\mathcal{M}_+$, $\text{codim } \mathcal{M}_- = N = \dim \mathcal{M}_+$, такие, что если $y(t)$ – решение уравнения (1) с $y(0) \in \mathcal{M}_-$ ($y(0) \in \mathcal{M}_+$), то

$$\|y(t) - y^*(t)\|_{E_1} \leq ce^{-a|t|} \|y(0) - y^*(0)\|_{E_1}$$

при $t \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow -\infty$), в частности, если $N = 0$, то решение $y^*(t)$ асимптотически устойчиво;

3) если функция $\psi(t) = (0, \varphi(t))$ почти периодическая в E_1 (существование среднего надо требовать в E_2 ; почти периодичность достаточно потребовать в E_1), то решение $y^*(t)$ почти периодическое в E_1 и частотный базис y^* содержится в частотном базисе ψ . В частности, если $\psi(\tau)$ периодическая с периодом T , то решение $y^*(t)$ периодическое с периодом T/ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из представления $y(t) = y_0 + h - \varepsilon v$ и из доказанных лемм 2 и 7 вытекают все утверждения теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если размерность области $n = 1$, то теоремы 1 и 2 верны в пространстве $E_0 = H_0^1 \times L_2$, причем вместо (2₃)–(2₅) достаточно потребовать $|f'(u)| \leq c(1 + |u|^\gamma)$, $\gamma < \infty$. Все соответствующие доказательства совершенно аналогичны (проще) и получаются с помощью замены пространств E_k на E_{k-1} для $k = 1, k = 2$.

§ 4. Аттракторы исходных и усредненных уравнений

Напомним сначала определение аттрактора автономного уравнения [9].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть в банаховом пространстве E действует полугруппа нелинейных непрерывных операторов $S_t: E \rightarrow E$. Пусть некоторое банахово пространство H непрерывно вложено в E . Множество $\mathcal{A} \subset H$ называется *максимальным (E, H) -аттрактором* полугруппы S_t , если

- 1) $\mathcal{A}$ компактно в H ,
- 2) $S_t \mathcal{A} = \mathcal{A}$, $t \geq 0$,
- 3) $\text{dist}_H(S_t B, \mathcal{A}) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, $\forall B \in \mathcal{B}(E)$.

Для краткости (E, E) -аттрактор будем называть просто аттрактором.

Нам также будет полезен локальный вариант этого определения.

Пусть $E = H$. Если для некоторого $R > 0$ множество $\mathcal{A}^R$ лежит в шаре $B_E(R)$, и для $\mathcal{A}^R$ выполняются свойства 1) и 2), а свойство 3) выполнено не для всех ограниченных множеств B , а лишь для множеств, принадлежащих шару $B_E(R)$, то такое множество $\mathcal{A}^R$ называется *R -локальным аттрактором*.

Очевидно, $\mathcal{A}^R \subseteq \mathcal{A}$, когда оба аттрактора существуют.

Рассмотрим теперь некоторое неавтономное уравнение.

$$\partial_t u = N(u) + f(t), \quad u|_{t=\tau} = u_\tau. \quad (1)$$

Пусть в некотором банаховом пространстве E уравнение (1) имеет единственное решение $u(t)$, $u \in C([\tau, t]; E)$, т.е. определен процесс

$$\begin{aligned} U_f(t, \tau): E &\rightarrow E, \quad t \geq \tau, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad U_f(t, \tau)u_\tau = u(t), \\ U_f(t, s) \circ U_f(s, \tau) &= U_f(t, \tau), \quad t \geq s \geq \tau. \end{aligned}$$

Предположим, что $f(t)$ – почти периодическая функция со значениями в некотором банаховом пространстве X . По критерию Бохнера [7] множество сдвигов $T(h)f(t) = f^h(t) = f(t+h)$, $h \in \mathbb{R}$, предкомпактно в $C_b(\mathbb{R}; X)$. Замыкание этого множества в $C_b(\mathbb{R}; X)$ называется *оболочкой* п.п. функции f и обозначается

$$\mathcal{H}(f) = [f^h, f^h(t) = f(t+h), h \in \mathbb{R}]_{C_b(\mathbb{R}; X)}.$$

Следуя [17], [19], мы будем рассматривать семейство процессов, порожденных уравнением (1) с $f = g$, где g – произвольный элемент из $\mathcal{H}(f)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Множество $\mathcal{A}_{\mathcal{H}} \subset E$ (соответственно, $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^R \subset E$) называется *равномерным по отношению к $g \in \mathcal{H}(f)$ аттрактором* (соответственно, *R -локальным равномерным аттрактором*) семейства процессов $U_g(t, \tau): E \rightarrow E$, если

- 1) $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ компактно в E (соответственно, дополнительно $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^R \subset B_E(R)$);
- 2) множество $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ – равномерно притягивающее, т.е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{g \in \mathcal{H}(f)} \text{dist}_E(U_g(t, \tau)B, \mathcal{A}_{\mathcal{H}}) = 0 \quad \forall B \in \mathcal{B}(E)$$

(соответственно, $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^R$ – R -локально равномерно притягивающее, т.е. последний предел выполняется для $\mathcal{A}_{\mathcal{H}} = \mathcal{A}_{\mathcal{H}}^R$ и $\forall B \subset B_E(R)$);

- 3) для любого другого замкнутого равномерно притягивающего множества $\mathcal{A}_1$ выполняется $\mathcal{A}_{\mathcal{H}} \subset \mathcal{A}_1$ (соответственно, для любого другого замкнутого R -локально равномерно притягивающего множества $\mathcal{A}_1^R \subset B_E(R)$ выполняется $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^R \subset \mathcal{A}_1^R$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [18]. *Ядром* K процесса $U_f(t, \tau)$, соответствующего уравнению (1), называется множество всех ограниченных полных траекторий:

$$K = K_f = \{u(\cdot); \|u(t)\|_E \leq C_u, U_f(t, \tau)u(\tau) = u(t), t \geq \tau, \tau \in \mathbb{R}\}.$$

Сечением ядра в момент $s \in \mathbb{R}$ называется множество

$$K(s) = \{u(s); u \in K\}.$$

(Соответственно, R -*ядром* называется множество K^R ограниченных полных траекторий, целиком лежащих в шаре $B_E(R)$, т.е. для которых $C_u < R$.)

ТЕОРЕМА 1. Пусть f – п.п. в X , и семейство процессов $U_g(t, \tau)$, $g \in \mathcal{H}(f)$, удовлетворяет условиям:

1) существует компактное в E равномерно притягивающее множество (соответственно, в шаре $B_E(R)$ существует компактное R -локально равномерно притягивающее множество);

2) операторы $U_g(t, \tau): \mathcal{H}(f) \times E \rightarrow E$ непрерывны по $g \in \mathcal{H}(f)$ и $u \in E$.

Тогда полугруппа S_t , действующая в расширенном фазовом пространстве $E \times \mathcal{H}(f) \subset E \times C_b(\mathbb{R}; X)$ по правилу

$$S_t(u, g) = (U_g(t, 0)u, T(t)g),$$

где $T(t)$ – сдвиг, обладает в этом фазовом пространстве аттрактором $\mathcal{A}_{E \times \mathcal{H}}^{R_1}$ (R_1 -локальным аттрактором $\mathcal{A}_{E \times \mathcal{H}}^{R_1}$, где $R_1 = R + \|f\|_{C_b(\mathbb{R}; X)}$), и если обозначить $\Pi_1(u, g) = u$, то равномерный (R -локальный равномерный) аттрактор семейства процессов в смысле определения 2 есть проекция

$$\mathcal{A}_{\mathcal{H}} = \Pi_1 \mathcal{A}_{E \times \mathcal{H}} \quad (\text{соответственно, } \mathcal{A}_{\mathcal{H}}^R = \Pi_1 \mathcal{A}_{E \times \mathcal{H}}^{R_1}).$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathcal{H}} &= \{u(0); u \in K_g, g \in \mathcal{H}(f)\} = \bigcup_{g \in \mathcal{H}(f)} K_g(0) \\ &\left(\text{соответственно, } \mathcal{A}_{\mathcal{H}}^R = \bigcup_{g \in \mathcal{H}(f)} K_g^R(0) \right). \end{aligned}$$

Теорема доказана в [19] в своей основной части. Утверждения относительно R -локальных аттракторов доказываются совершенно аналогично.

Заметим, что $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}^R \subseteq \mathcal{A}_{\mathcal{H}}$, если оба существуют, поскольку $K_g^R \subseteq K_g$.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим систему Навье–Стокса (1) из §2. Пусть f – п.п. со значениями в H . В [19] доказано, что в H существует равномерный аттрактор семейства процессов, соответствующих (1) из §2.

ПРИМЕР 2. Вновь рассмотрим систему (1) из §2. Пусть f – п.п. в H . Тогда для любого $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$ в $D(A^\alpha)$ существует равномерный аттрактор неавтономного уравнения $\mathcal{A}_{\mathcal{H}} = \mathcal{A}_{\mathcal{H}}(f(\omega \cdot))$.

Действительно, сначала аналогично автономному случаю [9, теорема I.6.2] доказывается, что некоторый шар $B_{1/2}(R_0)$ является равномерно поглощающим множеством для семейства процессов, причем $R_0 = R_0(\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}; H)})$. Затем рассматривается множество $U_g(t, \tau)B_{1/2}(R_0)$ при $\tau + \delta < t \leq \tau + 1$, $0 < \delta < 1$ и доказывается, что равномерно по $\omega > 0$

$$\|U_g(t, \tau)B_{1/2}(R_0)\|_{D(A^\gamma)} \leq R_\gamma(R_0, \delta, \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}; H)}) \quad \forall g \in \mathcal{H}(f),$$

где $\gamma < 1$. Для этого решение системы (4) из §2 записываем в виде

$$u(t) = e^{-\nu A t} u_0 + \int_0^t e^{-\nu A(t-s)} (B(u(s), u(s)) + g(\omega s)) ds, \quad t \in (0, 1],$$

где для краткости мы положили $\tau = 0$. По уже доказанному $u(t)$ ограничено в $D(A^{1/2})$, поэтому $B(u(s), u(s))$ ограничено в $D(A^{-\delta})$, $\delta > 0$ (лемма 1 из §2). Поэтому, используя (2) из §1, получаем

$$\|u(t)\|_\gamma \leq t^{-(\gamma-1/2)} K_\gamma R_0 + K_{\gamma\delta} \|F\|_{L_\infty(0,1;D(A^{-\delta}))}, \quad t \in (0,1],$$

где $F(s) := B(u(s), u(s)) + g(\omega s)$. Это доказывает нужную нам оценку. Фиксируя $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$ и выбирая γ так, что $\alpha < \gamma < 1$, получаем, что шар $B_\gamma(R_\gamma)$ – равномерно поглощающее множество, компактное в $D(A^\alpha)$, т.е. выполнен п. 1) теоремы 1.

Докажем непрерывность из $D(A^\alpha) \times \mathcal{H}(f)$ в $D(A^\alpha)$. Для

$$\begin{aligned} z(t-\tau, \tau) &:= U_{g_1}(t, \tau)u_{10} - U_{g_2}(t, \tau)u_{20} \\ &= U_{T(\tau)g_1}(t-\tau, 0)u_{10} - U_{T(\tau)g_2}(t-\tau, 0)u_{20}, \end{aligned}$$

имеем аналогично (12) из §2

$$\begin{aligned} \|z(t-\tau, \tau)\|_\alpha &\leq K_{t-\tau} (\|u_{10} - u_{20}\|_\alpha + \sup_{s \in [\tau, t]} \|g_1(\omega s) - g_2(\omega s)\|) \\ &\quad + K(\alpha, \delta) \int_0^{t-\tau} ((t-\tau) - s)^{-\alpha-\delta} \|z(s, \tau)\|_\alpha ds. \end{aligned}$$

Применяя лемму 2 из §2, получаем нужную непрерывность, и существование в $D(A^\alpha)$ равномерного аттрактора семейства процессов следует из теоремы 1.

Заметим, что аттрактор $\mathcal{A}_{\mathcal{H}(f(\omega \cdot))}$ ограничен в $D(A^\alpha)$ равномерно по ω : $\mathcal{A}_{\mathcal{H}(f(\omega \cdot))} \subset B_\alpha(R_\alpha)$.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим систему Навье–Стокса (1) из §2 на торе T^2 с периодическими краевыми условиями. Соответствующая функциональная постановка аналогична случаю ограниченной области [9], [14].

Предположим для простоты, что f – п.п. в $D(A^{1/2})$. Тогда действуя как в [29, лемма 3.1 и предложение 3.1], получаем, что для некоторого $R_2 = R_2(\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}; D(A^{1/2}))})$ шар $B_{D(A)}(R_2)$ – равномерно поглощающий для семейства процессов $U_g(t, \tau)$, действующих в $D(A^{1/2})$.

Далее, множество $U_g(t, \tau)B_{D(A)}(R_2)$ при $\tau + \delta < t \leq \tau + 1$, $0 < \delta < 1$, ограничено, скажем, в $D(A^{3/2-\gamma})$, $\gamma > 0$, и компактно в $D(A)$ равномерно по $g \in \mathcal{H}(f)$. Это доказывается точно так же, как в предыдущем примере, учитывая, что теперь $u(s) \in L_\infty(0, 1; D(A))$, и поэтому $F(s) \in L_\infty(0, 1; D(A^{1/2}))$.

Непрерывность из $D(A) \times \mathcal{H}(f)$ в $D(A)$ доказывается как в предыдущем примере, и мы получаем существование в $D(A)$ равномерного аттрактора $\mathcal{A}_{\mathcal{H}(f(\omega \cdot))} \subset B_{D(A)}(R_2)$ для всех ω .

Заметим, что результаты этого и предыдущего примера верны для системы Навье–Стокса на двумерном замкнутом многообразии [29].

ПРИМЕР 4. Рассмотрим уравнение (1) из §3 с $n = \dim \Omega = 1$ (см. замечание 2 из §3). Пусть φ – п.п. в L_2 . Тогда в пространстве $E_0 = H_1^0 \times L_2$ существует равномерный аттрактор семейства процессов, порожденных уравнением (1) из §3. Это доказано в [17], причем аттрактор $\mathcal{A}_{\mathcal{H}(\varphi(\omega \cdot))}$ равномерно по $\omega > 0$ содержится в шаре $B_E(R_0)$, где $R_0 = R_0(\|\varphi\|_{L_\infty(\mathbb{R}; L_2)})$.

ТЕОРЕМА 2 (глобальная теорема об усреднении). *Рассмотрим уравнение*

$$\partial_t u = N(u) + f(\omega t), \quad (2)$$

где f — п.п. в X , и пусть $f_0 \in X$ — среднее f . Предположим, что это уравнение порождает в E семейство процессов

$$U_g(t, \tau)u_\tau = u(t), \quad g = g(\omega \cdot) \in \mathcal{H}(f) = \mathcal{H}(f(\omega \cdot)).$$

Пусть усредненное уравнение

$$\partial_t \bar{u} = N(\bar{u}) + f_0 \quad (3)$$

порождает в E полугруппу операторов $S_t u_0 = \bar{u}(t)$, обладающую в E аттрактором $\bar{\mathcal{A}}$. Предполагается также, что S_t равномерно по $t \geq 0$ ограничена в E и обладает там поглощающим множеством.

Пусть, наконец, справедлива теорема об усреднении на конечном отрезке, т.е. если $u(\tau) = \bar{u}(\tau) \in B_E(R_0)$, то на отрезке $t \in [\tau, \tau + T]$ справедливо

$$\|U_g(t, \tau)u(\tau) - S_t \bar{u}(\tau)\|_E \leq \eta_{T, R_0}(\omega) \rightarrow 0, \quad \omega \rightarrow \infty,$$

равномерно по $g \in \mathcal{H}(f)$.

Рассмотрим теперь два случая.

1. Пусть семейство процессов $U_g(t, \tau)$ имеет в E равномерный аттрактор $\mathcal{A}_{\mathcal{H}(f(\omega \cdot))}$, который ограничен в E равномерно по ω .

Тогда аттрактор $\mathcal{A}_{\mathcal{H}(f(\omega \cdot))}$ полунепрерывно сверху зависит от ω :

$$\text{dist}_E(\mathcal{A}_{\mathcal{H}(f(\omega \cdot))}, \bar{\mathcal{A}}) \rightarrow 0, \quad \omega \rightarrow \infty.$$

2а. Если априори неизвестно, что аттрактор $\mathcal{A}_{\mathcal{H}(f(\omega \cdot))}$ равномерно по ω ограничен в E (или его не существует вовсе), то для любого достаточно большого $R > 0$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется $\omega_0 = \omega_0(R, \varepsilon)$ такое, что при $\omega > \omega_0$ ε -окрестность аттрактора $\bar{\mathcal{A}}$ равномерно поглощает ограниченные множества из $B_E(R)$, т.е. является R -локально поглощающим множеством.

2б. Если семейство процессов обладает R -локальным аттрактором $\mathcal{A}_{\mathcal{H}(f(\omega \cdot))}^R$, то и этот аттрактор полунепрерывно сверху зависит от ω :

$$\text{dist}_E(\mathcal{A}_{\mathcal{H}(f(\omega \cdot))}^R, \bar{\mathcal{A}}) \rightarrow 0, \quad \omega \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем первую часть теоремы. В силу п. 3) определения 2, очевидно, достаточно доказать, что любая окрестность аттрактора $\overline{\mathcal{A}}$ в E является равномерно поглощающим множеством для семейства процессов $U_g(t, \tau), g \in \mathcal{H}(f(\omega \cdot))$, при достаточно больших ω .

Пусть $\mu > 0$ сколь угодно мало. Обозначим через $\mathcal{O}_\mu(\overline{\mathcal{A}})$ произвольную μ -окрестность аттрактора $\overline{\mathcal{A}}$: $\mathcal{O}_\mu(\overline{\mathcal{A}}) = \{u \in E; \text{dist}_E(u, \overline{\mathcal{A}}) < \mu\}$.

Пусть $\delta, 0 < \delta < \mu/2$, столь мало, что

$$S_t \mathcal{O}_\delta(\overline{\mathcal{A}}) \subset \mathcal{O}_{\mu/2}(\overline{\mathcal{A}}), \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Такое δ можно найти, поскольку аттрактор $\overline{\mathcal{A}}$ – устойчивое по Ляпунову множество [9, предложение II.1.3].

Рассмотрим шар $B_E(R_0)$ – поглощающий шар для полугруппы S_t . Увеличив, если надо, R_0 , можно считать, что при всех $\omega > 0$ аттракторы неавтономного уравнения лежат в этом шаре: $\mathcal{A}_{\mathcal{H}(f(\omega \cdot))} \subset B_E(R_0), \omega > 0$. Очевидно также, что $\overline{\mathcal{A}} \subset B_E(R_0)$.

Пусть $T = T(R_0, \delta)$ столь велико, что поглощающий шар $B_E(R_0)$ удовлетворяет условиям:

$$S_t B_E(R_0) \subset \mathcal{O}_{\delta/2}(\overline{\mathcal{A}}), \quad t > T, \quad (5)$$

$$S_t B_E(R_0) \subset B_E(R) \quad \forall t > 0, \quad R \geq R_0, \quad (6)$$

где мы воспользовались свойством притяжения к аттрактору и равномерной ограниченностью полугруппы S_t . Зафиксируем это $T > 0$.

Возьмем произвольную точку $u_0 \in B_E(R_0)$. По теореме об усреднении найдется такое $\omega_0 = \omega_0(R_0, T, \delta)$, что при $\omega > \omega_0$ выполняется $\eta_{T, R_0}(\omega) < \delta/2$. Выпустим из точки u_0 траектории систем (2) и (3): $u(t) = U_g(t, 0)u_0, \bar{u}(t) = S_t u_0$. На отрезке $t \in [0, T]$ эти траектории разойдутся не более чем на $\delta/2$, причем согласно (5) конечная точка $\bar{u}(T) \in \mathcal{O}_{\delta/2}(\overline{\mathcal{A}})$, поэтому $u(T) \in \mathcal{O}_\delta(\overline{\mathcal{A}})$.

Повторим все еще один раз; т.е. возьмем за начальную точку $u_1 = u(T) \in \mathcal{O}_\delta(\overline{\mathcal{A}})$ и выпустим из нее траекторию $S_t u_1, t \in [0, T]$, и продолжим траекторию $u(t)$ на отрезок $[T, 2T]$: $u(t+T) = U_g(t+T, 0)u_0$. Согласно (5), (4) $S_T u_1 \in \mathcal{O}_{\delta/2}(\overline{\mathcal{A}})$, и на всем отрезке $t \in [0, T]$ $S_t u_1 \in \mathcal{O}_{\mu/2}(\overline{\mathcal{A}})$.

Вновь по теореме об усреднении $\|U_g(t+T, 0)u_0 - S_t u_1\|_E \leq \delta/2, t \in [0, T]$, и, следовательно, конечная точка $u_2 = U_g(2T, 0)u_0 \in \mathcal{O}_\delta(\overline{\mathcal{A}})$, и на отрезке $t \in [0, T]$

$$U_g(T+t, 0)u_0 \in \mathcal{O}_{\mu/2+\delta/2}(\overline{\mathcal{A}}) \subset \mathcal{O}_\mu(\overline{\mathcal{A}}).$$

Этот процесс, очевидно, можно продолжить и дальше. Однако, ни T , ни ω_0 не зависят от конкретной начальной точки $u_0 \in B_E(R_0)$, и ясно, что все сказанное верно и для траектории $U_g(t+\tau, \tau)u_0, t > 0, \tau \in \mathbb{R}$. Наконец, все наши оценки равномерны по $g \in \mathcal{H}(f)$.

Итак, мы доказали, что при $\omega > \omega_0$ и $t - \tau > T^* \in [0, T]$

$$U_g(t, \tau)B \subset \mathcal{O}_\mu(\overline{\mathcal{A}})$$

для любого $g \in \mathcal{H}(f)$ и любого ограниченного множества $B \subset B_E(R_0)$. Первая часть теоремы доказана.

Доказательство второй части совершенно аналогично.

Ниже даются примеры приложений первой части теоремы 2.

ТЕОРЕМА 3. Пусть в системе Навье–Стокса (1) из § 2 правая часть f – н.п. в H . Тогда для любого $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$

$$\text{dist}_{D(A^\alpha)}(\mathcal{A}\mathcal{H}(f(\omega \cdot)), \overline{\mathcal{A}}) \rightarrow 0, \quad \omega \rightarrow \infty.$$

ТЕОРЕМА 4. Рассмотрим систему Навье–Стокса (1) из § 2 с периодическими краевыми условиями (или на двумерном замкнутом многообразии). Пусть f – н.п. в $D(A^{1/2})$. Тогда

$$\text{dist}_{D(A)}(\mathcal{A}\mathcal{H}(f(\omega \cdot)), \overline{\mathcal{A}}) \rightarrow 0, \quad \omega \rightarrow \infty.$$

ТЕОРЕМА 5. Рассмотрим уравнение (1) из § 3 с $n = 1$. Пусть правая часть $\psi = (0, \varphi)$ н.п. в $E_1 = H^2 \cap H_0^1 \times H_0^1$. Тогда в $E_0 = H_0^1 \times L_2$ справедливо

$$\text{dist}_{E_0}(\mathcal{A}\mathcal{H}(\varphi(\omega \cdot)), \overline{\mathcal{A}}) \rightarrow 0, \quad \omega \rightarrow \infty.$$

Теоремы 3–5 немедленно следуют из теоремы 2 и разобранных выше примеров 2–4 (в теореме 3 используется также замечание 2 из § 2).

Приведем теперь пример приложения второй части теоремы 2. Он связан с гиперболическим уравнением (1) из § 3 в трехмерной области. Нам не удалось доказать, что в E_1 соответствующее семейство процессов имеет аттрактор, равномерно по ω ограниченный в E_1 . Тем не менее справедлив следующий R -локальный результат.

ТЕОРЕМА 6. Рассмотрим гиперболическое уравнение с диссипацией (4) из § 3 в E_1 . Пусть $\psi = (0, \varphi)$ н.п. в E_2 .

Тогда для любого достаточно большого R в шаре $B_{E_1}(R)$ существует R -локальный аттрактор $\mathcal{A}\mathcal{H}(\psi(\omega \cdot))$ и

$$\text{dist}_{E_1}(\mathcal{A}\mathcal{H}^R(\varphi(\omega \cdot)), \overline{\mathcal{A}}) \rightarrow 0, \quad \omega \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже отмечалось, в E_1 существует аттрактор $\overline{\mathcal{A}}$ автономного уравнения [12], [9] (это также следует из приводимого ниже доказательства). Пусть R столь велико, что $\overline{\mathcal{A}} \subset B_{E_1}(R)$. Тогда выполнены все условия, предусмотренные в п. 2а теоремы 2, и, следовательно, при $\omega > \omega_0 = \omega_0(R, \varepsilon)$ ε -окрестность $\overline{\mathcal{A}}$ равномерно поглощает шар $B_{E_1}(R)$:

$$\bigcup_{\chi \in \mathcal{H}(\psi)} U_\chi(t, \tau)B \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\overline{\mathcal{A}})$$

для $t - \tau > T = T(\omega, \varepsilon, R)$ и $\forall B \subseteq B_{E_1}(R)$.

Осталось доказать, что при $\omega > \omega_0$ семейство процессов $U_\chi(t, \tau)$, $\chi \in \mathcal{H}(\psi(\omega \cdot))$, имеет R -локальный аттрактор. Проверим выполнение п. 1) и п. 2) теоремы 1.

Для доказательства п. 1, т.е. для доказательства существования равномерно R -локально притягивающего множества, компактного в E_1 , поступим так. Пусть $\chi \in \mathcal{H}(\psi)$. Тогда решение $y(t)$ уравнения (4) из §3:

$$\partial_t y = -Ay - g(y) + \chi(\omega t), \quad y(\tau) = y_\tau \in B_{E_1}(R)$$

представим в виде

$$y(t) \equiv U_\chi(t, \tau)y(\tau) = U_1(t, \tau)y(\tau) + \tilde{y}(t, \tau, \chi) + w_y(t),$$

где $z(t) = U_1(t, \tau)y(\tau)$ – решение линейного однородного уравнения

$$\partial_t z = -Az, \quad z(\tau) = y(\tau),$$

удовлетворяющее согласно (10) из §3 оценке

$$\|U_1(t, \tau)y(\tau)\|_{E_1} \leq K_1 e^{-a(t-\tau)} \|y(\tau)\|_{E_1},$$

далее, $\tilde{y}(t, \tau, \chi)$ – решение линейного неоднородного уравнения

$$\partial_t \tilde{y} = -A\tilde{y} + \chi(\omega t), \quad \tilde{y}(\tau) = 0,$$

и точно так же, как в [17] показывается, что для $t \geq \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, и для всех $\chi \in \mathcal{H}(\psi)$ решения $\tilde{y}(t, \tau, \chi) \in D_1$, где D_1 – компакт в E_1 .

Наконец, $w(t) = w_y(t)$ есть решение уравнения

$$\partial_t w = -Aw - g(y(t)), \quad w(\tau) = 0.$$

Поскольку $\|y(t)\|_{E_1} \leq R_1 = R_1(R)$ для $t \geq \tau$ и $y(\tau) \in B_{E_1}(R)$ (это следует из равномерной по $t \geq 0$ ограниченности в E_1 полугруппы S_t , из того, что шар $B_{E_1}(R)$ – поглощающий для S_t , а также из теоремы 1 из §3), то для $g = (0, f)$ выполняется

$$\|g(y(t))\|_{E_2} \leq R_2(R) \quad \text{для } t \geq \tau, \chi \in \mathcal{H}(\psi).$$

Поэтому из принципа Дюамеля и (10) из §3 следует, что

$$\|w(t)\|_{E_2} = \left\| \int_\tau^t e^{-A(t-s)} g(y(s)) ds \right\|_{E_2} < K_2 R_2 a^{-1} =: R_3.$$

Таким образом, для $\tau \in \mathbb{R}$, $t \geq \tau$, и $\chi \in \mathcal{H}(\psi)$ выполняется $w(t) \in B_{E_2}(R_3)$. Благодаря компактности вложения $E_2 \rightarrow E_1$, решения $U_\chi(t, \tau)y(\tau)$, $y(\tau) \in B_{E_1}(R)$, равномерно по $\chi \in \mathcal{H}(\psi)$ притягиваются к множеству $[D_1 + B_{E_2}(R_3)]_{E_1}$, компактному в E_1 .

Наконец, п. 2) теоремы 1 проверяется аналогично примеру 2 с использованием аналога (12) из §3. Теорема полностью доказана.

Мы рассмотрели приложения к аттракторам теоремы об усреднении на конечном промежутке. Теоремы об усреднении на всей оси тоже имеют приложения к аттракторам.

В следующей ниже теореме уравнение (2) и пространства E и X имеют тот же смысл, что и в примерах 2–5.

ТЕОРЕМА 7. Пусть правая часть f уравнения (2) н.п. в X , и пусть выполнены дополнительные предположения относительно f , обеспечивающие существование аттрактора $\mathcal{A}\mathcal{H}(f(\omega \cdot))$. Пусть $u^*(t) = u_f^*(t) = u_{f(\omega \cdot)}^*$ — соответствующее н.п. решение, построенное в теореме 2 из § 2 или в теореме 2 из § 3.

Тогда замыкание множества значений этого решения лежит в аттракторе:

$$\left[\bigcup_{t \in \mathbb{R}} u_{f(\omega \cdot)}^*(t) \right]_E \subset \mathcal{A}\mathcal{H}(f(\omega \cdot)). \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v_0 \in \left[\bigcup_{t \in \mathbb{R}} u_f^*(t) \right]_E$. В силу теоремы 1 надо доказать, что для некоторого $g \in \mathcal{H}(f)$ существует такая ограниченная полная траектория $u_g(t)$ уравнения

$$\partial_t u = N(u) + g(\omega t), \quad (8)$$

для которой $v_0 = u_g(0)$.

Если $v_0 = u_f^*(h_0)$ для некоторого $h_0 \in \mathbb{R}$, то рассмотрим соответствующий сдвиг правой части f : $T(h/\omega)f(\omega \cdot) = f^h$, $f^h(t) = f(\omega t + h)$.

Тогда в силу того, что ограниченное решение u^* единственно в малой окрестности фиксированной стационарной точки u_0 , мы имеем, что $\forall h \in \mathbb{R}$ решением $u_{f^h}^*$, которое соответствует в теоремах 2 из § 2 и 2 из § 3 правой части f^h , может быть (и является) только сдвиг решения u_f^* :

$$u_{f^h}^* = T(h)u_f^*.$$

Поэтому $u_{f^{h_0}}^*(0) = T(h_0)u_f^*(0) = u_f^*(h_0) = v_0$. Очевидно, $g = f^{h_0} \in \mathcal{H}(f)$, поэтому $v_0 \in \mathcal{A}\mathcal{H}(f)$.

Если же $v_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} u_f^*(h_k)$, $h_k \in \mathbb{R}$, то вновь в силу единственности решения u^* имеем $v_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} u_{f^{h_k}}^*(0)$, где $f^{h_k} = T(h_k/\omega)f$. Согласно критерию Бохнера некоторая подпоследовательность $f^{h_k} \rightarrow g \in \mathcal{H}(f)$ в $C_b(\mathbb{R}; X)$. В нашей работе мы ограничиваемся рассмотрением уравнений (4) из § 2 и (4) из § 3. Для этих конкретных уравнений легко показать на основе анализа доказательств лемм 6 из § 2 и 6 из § 3, что $u_{f^{h_k}}^* \rightarrow u_g^*$ в $C_b(\mathbb{R}; E)$, если $f^{h_k} \rightarrow g$ в $C_b(\mathbb{R}; X)$.

Поэтому $u_{f^{h_k}}^*(0) \rightarrow u_g^*(0)$ в E , и, значит, $v_0 = u_g^*(0)$, $g \in \mathcal{H}(f)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если правая часть ψ гиперболического уравнения (4), (2₁)–(2₅) из § 3 в трехмерной области есть н.п. функция в E_2 , то для любого достаточно большого R при $\omega > \omega(R)$ выполняется

$$\left[\bigcup_{t \in \mathbb{R}} u_{f(\omega \cdot)}^*(t) \right]_{E_1} \subset \mathcal{A}\mathcal{H}^R(f(\omega \cdot)).$$

В некоторых случаях в (7) справедливо равенство.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если в системе Навье–Стокса (1) из §2 f — п.п. в $D(A^\beta)$, $\beta \geq 0$, и для усредненной правой части f_0 выполняется неравенство (46) из §2, то для аттрактора $\mathcal{AH}(f)$ как множества в $D(A^\alpha)$, $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$, выполняется

$$\mathcal{AH}(f) = \left[\bigcup_{t \in \mathbb{R}} u_f^*(t) \right]_\alpha.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$ равномерно по ω выполняется

$$\|\mathcal{AH}(f(\omega \cdot))\|_\alpha \leq R_\alpha$$

(см. пример 2). Зафиксируем $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$. Пусть $\omega > \omega_0(R_\alpha)$, где $\omega_0(R_\alpha)$ (точнее $\varepsilon_0(R_\alpha)$) определено в теореме 3 из §2. Мы утверждаем, что в большом шаре $B_\alpha(R_\alpha)$ существует лишь одно решение, ограниченное на всей оси, а именно, решение u_f^* , построенное в теореме 2 из §2. Действительно, если существует еще одно решение, ограниченное в $D(A^\alpha)$ на всей оси, то в силу (47) из §2 оно обязательно совпадет с u_f^* , поскольку они оба ограничены при $t \rightarrow -\infty$. Поэтому ядро K состоит из единственного элемента $K = u_f^*$.

Пусть для некоторого $v_0 \in B_\alpha(R_\alpha)$ выполняется $v_0 \in \mathcal{AH}(f)$. Тогда по теореме 1 $v_0 = u_g^b(0)$, где $u_g^b(t)$ — ограниченная полная траектория, соответствующая некоторому $g \in \mathcal{H}(f)$. Но единственной такой траекторией может быть только $u_g^*(t)$. Значит, $v_0 = u_g^*(0)$. Далее, $g = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{h_k}$, и аналогично предыдущей теореме $u_{f^{h_k}}^* \rightarrow u_g^*$ в $C_b(\mathbb{R}; D(A^\alpha))$. Поэтому $u_f^*(h^k) = u_{f^{h_k}}^*(0) \rightarrow u_g^*(0) = v_0$. Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для автономного уравнения (11) из §2 известна оценка хаусдорфовой размерности аттрактора [14]

$$\dim \overline{\mathcal{A}} \leq c(\Omega) \frac{\|f_0\|}{\lambda_1 \nu^2}, \quad (9)$$

где $c(\Omega)$ — некоторая безразмерная постоянная, зависящая от формы области Ω . В работе [27] эта оценка была уточнена:

$$\dim \overline{\mathcal{A}} \leq \frac{1}{\pi} \frac{\|f_0\| |\Omega|}{\nu^2}, \quad (10)$$

причем, если (см. (2) из §2)

$$\frac{\|f_0\| |\Omega|}{\nu^2} < \frac{2\pi}{c_0} \approx 15.2, \quad (11)$$

то $\dim \overline{\mathcal{A}} = 0$ и $\overline{\mathcal{A}} = u_0$, где u_0 — глобально асимптотически устойчивое стационарное решение.

В работе [18] получена оценка размерности сечений ядра $K(s)$, которую, используя результаты [27], можно записать в виде

$$\dim K(s) \leq \frac{1}{\pi} \frac{F_0 |\Omega|}{\nu^2}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad F_0^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \|f(s)\|^2 ds.$$

Если выполнено (46) из § 2, в частности, если выполнено (11), то из следствия 2 получаем, что при достаточно больших ω $K(s) = u_f^*(s)$, и, следовательно,

$$\dim K(s) = 0, \quad s \in \mathbb{R}.$$

В заключение автор выражает благодарность А. В. Бабину и М. И. Вишику за полезные обсуждения и замечания.

Список литературы

1. Боголюбов Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике. Киев: Изд-во АН УССР, 1945.
2. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963.
3. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наукова думка 1971.
4. Филатов А. Н. Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегродифференциальных уравнений. Ташкент: Фан, 1974.
5. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
6. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.
7. Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1978.
8. Симоненко И. Б. Обоснование метода усреднения для абстрактных параболических уравнений // Матем. сб. 1970. Т. 81 (123). № 1. С. 53–61.
9. Бабин А. В., Вишик М. И. Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
10. Hale J. K. Asymptotic behavior and dynamics in infinite dimensions // Res. Notes Math. 1985. № 132. Р. 1–42.
11. Haraux A. Systèmes dynamiques dissipatifs et applications. Paris: Masson, 1991.
12. Ладженская О. А. Об аттракторах нелинейных эволюционных задач с диссипацией // Зап. научных семинаров ЛОМИ. 1986. Т. 152. С. 72–85.
13. Ладженская О. А. О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнений Навье–Стокса и других уравнений с частными производными // УМН. 1987. Т. 42. № 6. С. 25–60.
14. Temam R. Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics. New York: Springer-Verlag, 1988.
15. Haraux A. Attractors of asymptotically compact processes and applications to nonlinear partial differential equations // Comm. Partial Differential Equations. 1988. V. 13. P. 1383–1414.
16. Haraux A. Systèmes dynamiques dissipatifs et applications. Paris: Masson, 1991.
17. Chepyzhov V. V., Vishik M. I. Nonautonomous dynamical systems and their attractors. (Appendix) // Asymptotic behaviour of solutions of evolutionary equations / ed. M. I. Vishik. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992.
18. Chepyzhov V. V., Vishik M. I. A Hausdorff dimension estimate for kernel sections of nonautonomous evolution equations // Indiana Univ. Math. J. 1993. V. 42. P. 1057–1076.
19. Chepyzhov V. V., Vishik M. I. Attractors of non-autonomous dynamical systems and their dimension // J. Math. Pures Appl. (9). 1994. V. 73. P. 279–333.
20. Sell G. R. Nonautonomous differential equations and topological dynamics I, II // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. V. 127. P. 241–262, 263–284.
21. Жиков В. В. Об устойчивости и неустойчивости центра Левинсона // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8. С. 2167–2170.

22. Жиков В. В. Некоторые вопросы допустимости и дихотомии. Принцип усреднения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40. № 6. С. 1380–1408.
23. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
24. Темам Р. Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981.
25. Weinstein M. Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates // Comm. Math. Phys. 1983. V. 87. P. 567–576.
26. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
27. Piuin A. A. Attractors for Navier–Stokes equations in domains with finite measure // Nonlinear Anal. 1996. V. 26. № 6.
28. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
29. Ильин А. А. Частично диссипативные полугруппы, порождаемые системой Навье–Стокса на двумерных многообразиях, и их аттракторы // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 1. С. 55–88.

Гидрометцентр РФ

Поступила в редакцию
09.11.1994