Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Ильин, Интегральные неравенства Либа–Тирринга и их приложения к аттракторам уравнений Навье–Стокса, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 1, 33–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1260>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 15:53:07

УДК 517.9

А. А. Ильин

Интегральные неравенства Либа–Тирринга и их приложения к аттракторам уравнений Навье–Стокса

Доказываются интегральные неравенства типа Либа–Тирринга и их обобщения, причем все соответствующие константы вычисляются в явном виде. Особое внимание уделяется приложениям к аттракторам двумерных уравнений Навье–Стокса. В частности, получена явная двусторонняя оценка размерности аттрактора в задаче Колмогорова на двумерном вытянутом торе.

Библиография: 26 названий.

§ 1. Введение

Рассмотрим оператор типа Шрёдингера в $L_2(\mathbb{R}^n)$

$$(-\Delta)^m - f(x), \quad f \geq 0.$$

Известно, что если f достаточно гладкая и достаточно быстро убывает на бесконечности, то этот оператор полуограничен снизу, самосопряжен и его непрерывный спектр заполняет положительную полуось, а отрицательный спектр (если он есть) дискретный.

Для отрицательных собственных значений $\nu_i = \nu_i(f)$, выписанных с учетом кратностей, справедлива оценка

$$\sum_{\nu_i \leq 0} |\nu_i|^\gamma \leq L_{\gamma, m, n} \int f(x)^{\gamma + n/(2m)} dx. \quad (1.1)$$

Здесь $\gamma > \max(0, 1 - n/(2m))$ [1]; $\gamma = 0$, если $n > 2m$ (это оценка Розенблюма–Либа–Цвikelя, см., например, [2]); $\gamma = 1 - n/(2m)$, если $n < 2m$ [3].

Во всех случаях наилучшая постоянная $L_{\gamma, m, n}$ оценивается снизу ее так называемым “классическим” значением [1], [3]

$$L_{\gamma, m, n} \geq L_{\gamma, m, n}^{\text{cl}} = \frac{\Gamma(\gamma + 1)\Gamma(n/(2m) + 1)}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(n/2 + 1)\Gamma(n/(2m) + \gamma + 1)}. \quad (1.2)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 03-01-00189, 02-01-00801), фонда INTAS (грант № 00-899), фонда CRDF (грант № RM1-2343-МО-02) и Программы РАН “Современные проблемы теоретической математики” (г.к. 090703-1028).

В частности, при $m = 1$

$$L_{\gamma,n} \geq L_{\gamma,n}^{\text{cl}} = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{(4\pi)^{n/2} \Gamma(n/2 + \gamma + 1)}. \quad (1.3)$$

Эти оценки получаются следующим образом. Пусть $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Для оператора

$$H_1 = -h\Delta - f(x),$$

где $h \rightarrow 0$, известна оценка числа $N_{-a} = N_{-a}(H_1)$ его отрицательных собственных значений, меньших либо равных $-a$ (см., например, [4]):

$$N_{-a}(H_1) = h^{-n/2} L_{0,n}^{\text{cl}} \int (f-a)_+^{n/2} dx + o(h^{-n/2}), \quad (1.4)$$

где

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } f(x) \geq 0, \\ 0 & \text{при } f(x) < 0. \end{cases}$$

Тогда для соответствующего числа $N_{-a}(H_2)$, определенного для оператора

$$H_2 = -\Delta - h^{-1}f(x),$$

справедливо представление

$$N_{-a}(H_2) = N_{-ah}(H_1) = h^{-n/2} L_{0,n}^{\text{cl}} \int (f-ah)_+^{n/2} dx + o(h^{-n/2}), \quad (1.5)$$

причем $N_{-a}(H_2) = 0$, если $a > M/h$, $M = \max_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$. Пусть $\nu_j(H_2)$ — отрицательные собственные значения оператора H_2 . Тогда

$$\begin{aligned} h^{\gamma+n/2} \sum_{\nu_j \leq 0} |\nu_j|^\gamma &= h^{\gamma+n/2} \gamma \int_0^\infty a^{\gamma-1} N_{-a} da \\ &= \gamma L_{0,n}^{\text{cl}} h^\gamma \int_0^\infty a^{\gamma-1} \int (f(x)-ah)_+^{n/2} dx da + o(h^\gamma) \int_0^{M/h} a^{\gamma-1} da \\ &= \gamma L_{0,n}^{\text{cl}} h^\gamma \int \int_0^\infty a^{\gamma-1} (f(x)-ah)_+^{n/2} da dx + o(1) \\ &= \gamma L_{0,n}^{\text{cl}} B\left(\gamma, \frac{n}{2} + 1\right) \int f(x)^{n/2+\gamma} dx + o(1) = L_{\gamma,n}^{\text{cl}} \int f(x)^{n/2+\gamma} dx + o(1), \end{aligned}$$

где мы воспользовались тем, что в силу (1.3) $\gamma L_{0,n}^{\text{cl}} B(\gamma, n/2 + 1) = L_{\gamma,n}^{\text{cl}}$. Отсюда следует, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{\nu_j \leq 0} |\nu_j|^\gamma \left(\int \left(\frac{f(x)}{h} \right)^{n/2+\gamma} dx \right)^{-1} = L_{\gamma,n}^{\text{cl}},$$

что и доказывает (1.3). Доказательство оценки (1.2) аналогично.

Пусть $m = 1$. В работе [1], где и была получена оценка (1.1), было установлено следующее важное неравенство. Пусть $\{\varphi_j\}_{j=1}^N \in H^1(\mathbb{R}^n)$ – произвольная ортонормированная система функций: $(\varphi_i, \varphi_j) = \int \varphi_i(x)\varphi_j(x) dx = \delta_{ij}$. Тогда для $\rho_\varphi(x) = \sum_{j=1}^N \varphi_j(x)^2$ справедливо неравенство

$$\left(\int \rho(x)^{p/(p-1)} dx \right)^{2(p-1)/n} \leq k_{p,n} \sum_{j=1}^N \|\nabla \varphi_j\|^2,$$

где $\max(1, n/2) < p \leq 1 + n/2$. Постоянная $k_{p,n}$ не зависит от N . При $p = 1 + n/2$ получаем

$$\int \rho(x)^{1+2/n} dx \leq k_n \sum_{j=1}^N \|\nabla \varphi_j\|^2, \quad (1.6)$$

причем наилучшие постоянные k_n и $L_{1,n}$ связаны равенством [1]

$$k_n = \frac{2}{n} \left(1 + \frac{n}{2} \right)^{1+2/n} L_{1,n}^{2/n}.$$

Недавно были получены важные результаты о значениях констант Либа–Тирринга $L_{\gamma,1,n} = L_{\gamma,n}$. В [5] было показано, что

$$L_{\gamma,n} = L_{\gamma,n}^{\text{cl}}, \quad \gamma \geq \frac{3}{2}, \quad n \geq 1.$$

На основании этого результата в [6] была получена следующая важная оценка констант Либа–Тирринга для $1 \leq \gamma < 3/2$:

$$L_{\gamma,n} \leq 2 L_{\gamma,n}^{\text{cl}}, \quad 1 \leq \gamma < \frac{3}{2}, \quad n \geq 1. \quad (1.7)$$

Неравенства (1.6) чрезвычайно важны для оценки размерности аттракторов эволюционных уравнений, в особенности уравнений Навье–Стокса. Первой работой в этом направлении была статья [7], подробное изложение соответствующей теории и многочисленные примеры содержатся в [8].

В теории размерности аттракторов важную роль играют оценки N -мерного следа оператора, линеаризованного на решениях, лежащих на аттракторе [9], [8]. Здесь и используются ортонормированные системы функций и соответствующие неравенства типа (1.6). При рассмотрении систем уравнений естественным образом возникают системы вида $\{\varphi_j, \psi_j\}_{j=1}^N$, ортонормированные в смысле $(\varphi_i, \varphi_j) + (\psi_i, \psi_j) = \delta_{ij}$. Тогда легко заметить, что системы $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ и $\{\psi_j\}_{j=1}^N$ будут субортонормированными. Это по определению означает [10], что

$$\sum_{i,j=1}^N (\varphi_i, \varphi_j) \xi_i \xi_j \leq \sum_{j=1}^N \xi_j^2 \quad \text{для любого } \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Аналогично, если $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ ортонормирована, а P – произвольный ортогональный проектор, то система $\{P\varphi_j\}_{j=1}^N$ субортонормирована.

Неравенства Либа–Тирринга были обобщены в [8], [10] на случай старших производных и субортонормированных систем, заданных в области Ω с произвольными краевыми условиями, на многообразиях и т.д. Однако использованный там метод сведения к неравенствам на n -мерном торе T^n и использование операторов продолжения соболевских пространств с Ω на $\mathbb{R}^n$, нормы которых и само существование зависят от гладкости границы $\partial\Omega$, в принципе не позволяло получить соответствующие константы в явном виде. Кроме того, при переходе от ортонормированных систем к субортонормированным константы, вообще говоря, увеличивались.

В статье доказываются неравенства Либа–Тирринга для старших производных ($m \geq 1$) и для субортонормированных систем. Основной результат §2 состоит в том, что если некоторое неравенство справедливо для ортонормированного случая, то оно справедливо и для субортонормированного случая, причем с той же константой. Субортонормированная система при этом достраивается до ортонормированной системы, но не в том же x -пространстве, как в [10], а, переходя к векторному случаю, во вспомогательной компоненте, что позволяет избежать использования операторов продолжения для пространств Соболева.

В §3 рассматриваются неравенства для вектор-функций. В частности, доказывается неравенство для субортонормированной системы $\{u_j\}_{j=1}^N$ двумерных соленоидальных векторных полей с наилучшей на сегодняшний день оценкой константы: для $\rho_u(x) = \sum_{j=1}^N |u_j(x)|^2$, где $\operatorname{div} u_j = 0$, $u_j \in H_0^1(\Omega)^2$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, выполняется неравенство

$$\int_{\Omega} \rho_u(x)^2 dx \leq \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n \|\operatorname{rot} u_j\|^2.$$

В §4 рассматриваются неравенства на двумерном торе, вытянутом вдоль координаты x_1 : $T_{\alpha}^2 = (0, L/\alpha) \times (0, L)$, $0 < \alpha \leq 1$. Заметим сначала, что для первого собственного значения оператора Стокса в прямоугольнике T_{α}^2 с краевым условием Дирихле справедлива оценка снизу [11]

$$\lambda_1^{(D)} \geq \frac{2\pi}{|T_{\alpha}^2|} = \frac{2\pi\alpha}{L^2},$$

где $|T_{\alpha}^2|$ – площадь прямоугольника. В то же время первое собственное значение оператора Стокса с периодическими краевыми условиями

$$\lambda_1 = \frac{4\pi^2\alpha^2}{L^2}$$

имеет порядок малости α^2 . Соответствующее собственное подпространство с собственными значениями порядка α^2 образовано функциями, зависящими от x_1 и не зависящими от x_2 . Это порождает ортогональное разложение L_2 -пространства H функций с нулевым средним

$$H = MH \oplus NH,$$

где функции из MH зависят лишь от x_1 . В теореме 4.2 доказываются неравенства Либа–Тирринга с явными выражениями для констант, причем на всем H константа

растет как α^{-1} , а на NH не зависит от α . Такого типа неравенства играли важную роль в [12], [13], однако использованный там метод не позволяет получить для них явные выражения.

Из результатов § 4 также следуют неравенства Гальярдо–Ниренберга и Ладженской на двумерном торе с $\alpha = 1$, причем константы указаны в явном виде (см. (4.25), (4.26)).

В заключительном § 5 рассматриваются аттракторы системы Навье–Стокса на торе T_α^2 . Заметим, что при фиксированном α логарифмически точная оценка размерности аттрактора получена в [14]. Мы же интересуемся случаем, когда $\alpha \rightarrow 0$. Доказывается, что для правой части $f = f(x_2) \in NH$ и $\alpha \rightarrow 0$ справедлива следующая явная оценка фрактальной размерности аттрактора:

$$\dim_F \mathcal{A} \leq \frac{1}{\alpha} \left(15 + \frac{6}{\pi} \tilde{G} \right),$$

где $\tilde{G} = \frac{L^{5/2} \|f\|_{L_2(0,L)}}{\nu^2}$ – безразмерное число типа числа Грасгофа. Наконец, для классической задачи Колмогорова с синусоидальной правой частью получена явная двусторонняя оценка размерности

$$\frac{2}{\alpha} \lesssim \dim_F \mathcal{A}_{\text{Kolm}} \lesssim \frac{247}{\alpha}.$$

§ 2. Неравенства Либа–Тирринга для ортонормированных и субортонормированных систем

В дальнейшем нас будет интересовать наиболее важный для приложений к аттракторам случай $\gamma = 1$, т.е. оценки отрицательного следа и связанные с ним эквивалентные неравенства для ортонормированных и субортонормированных систем функций и вектор-функций. Этот случай выделен особо в приводимой ниже общей теореме.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть справедлива оценка (1.1):

$$\sum_{\nu_i \leq 0} |\nu_i|^\gamma \leq L_{\gamma,m,n} \int f(x)^{\gamma+n/(2m)} dx, \quad \gamma > \max\left(0, 1 - \frac{n}{2m}\right). \quad (2.1)$$

Если семейство функций $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^N \in H^m(\mathbb{R}^n)$ субортонормировано:

$$\sum_{i,j=1}^N \xi_i \xi_j (\varphi_i, \varphi_j) \leq \sum_{i=1}^N \xi_i^2, \quad (2.2)$$

то справедливо неравенство

$$\left(\int \rho(x)^{p/(p-1)} dx \right)^{2m(p-1)/n} \leq k_{p,m,n} \sum_{j=1}^N \|(-\Delta)^{m/2} \varphi_j\|^2, \quad (2.3)$$

где $\rho(x) = \sum_{j=1}^N \varphi_j(x)^2$, p удовлетворяет $\max(1, n/(2m)) < p \leq 1 + n/(2m)$, а постоянная $k_{p,m,n}$ не зависит от N и

$$k_{p,m,n} \leq \left(\frac{2m}{n}\right) p^{2mp/n} \left(p - \frac{n}{2m}\right)^{1-2mp/n} L_{p-n/(2m),m,n}^{2m/n}. \quad (2.4)$$

В частности, при $p = 1 + n/(2m)$ неравенство (2.3) принимает вид

$$\int \rho(x)^{1+2m/n} dx \leq k_{m,n} \sum_{j=1}^N \|(-\Delta)^{m/2} \varphi_j\|^2 \quad (2.5)$$

и справедливо обратное утверждение, а именно, если для любого ортонормированного семейства $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ справедливо неравенство (2.5), то верна оценка (2.1) с $\gamma = 1$, причем наилучшие постоянные $L_{1,m,n}$ и $k_{m,n}$ связаны равенством

$$k_{m,n} = \left(\frac{2m}{n}\right) \left(1 + \frac{n}{2m}\right)^{1+2m/n} L_{1,m,n}^{2m/n}. \quad (2.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим ортонормированный случай и докажем, что из (2.1) следует (2.3) с константой (2.4). Будем считать, что $\varphi_j \in C_0^\infty$. Доказав (2.3) для гладких функций, мы затем можем применить стандартную процедуру замыкания. Положим $V(x) = \alpha \rho(x)^{1/(p-1)}$, где $\alpha > 0$ – положительный параметр. Обозначим этот оператор через A :

$$Au = (-\Delta)^m u - Vu. \quad (2.7)$$

Пусть $H = L_2(\mathbb{R}^n)$. Обозначим через $\bigwedge^N H$ N -ю внешнюю степень H . Это гильбертово пространство с элементами, являющимися линейными комбинациями произведений $v_1 \wedge \cdots \wedge v_N$. Скалярное произведение $v_1 \wedge \cdots \wedge v_N$ и $w_1 \wedge \cdots \wedge w_N$ определено следующим образом:

$$(w_1 \wedge \cdots \wedge w_N, v_1 \wedge \cdots \wedge v_N) = \det\{(w_i, v_j)\}, \quad 1 \leq i, j \leq N,$$

и продолжается на все $\bigwedge^m H$ по линейности. Определим оператор A_N , действующий из $\bigwedge^N H$ в $\bigwedge^N H$ следующим образом:

$$A_N(v_1 \wedge \cdots \wedge v_N) = (Av_1 \wedge \cdots \wedge v_N + \cdots + v_1 \wedge \cdots \wedge Av_N).$$

Оператору A_N соответствует квадратичная форма

$$a_N(v_1 \wedge \cdots \wedge v_N, v_1 \wedge \cdots \wedge v_N) = (A_N(v_1 \wedge \cdots \wedge v_N), v_1 \wedge \cdots \wedge v_N).$$

Если $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ – ортонормированное семейство из условий теоремы, то

$$\begin{aligned} a_N(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_N, \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_N) &= \sum_{j=1}^N \|(-\Delta)^{m/2} \varphi_j\|^2 - \alpha \sum_{j=1}^N \int \rho(x)^{1/(p-1)} |\varphi_j(x)|^2 dx \\ &= \sum_{j=1}^N \|(-\Delta)^{m/2} \varphi_j\|^2 - \alpha \int \rho(x)^{p/(p-1)} dx. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Положим $E = \inf \sigma(A_N)$, где через $\sigma(A_N)$ обозначен спектр оператора A_N . Возможны два случая.

1. Оператор A имеет $k \geq 1$ отрицательных собственных значений. Тогда $E = \sum_{i=1}^N \nu_i$, если $N \leq k$, и $E = \sum_{i=1}^k \nu_i$, если $N \geq k$. В любом случае E не меньше суммы всех отрицательных собственных значений

$$\begin{aligned} E &\geq \sum_{\nu_j(f) \leq 0} \nu_j(f) \geq -L_{\gamma, m, n}^{1/\gamma} \left(\int V(x)^{\gamma+n/(2m)} dx \right)^{1/\gamma} \\ &= -L_{\gamma, m, n}^{1/\gamma} \alpha^{p/\gamma} \left(\int \rho(x)^{p/(p-1)} dx \right)^{1/\gamma}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где в последнем неравенстве мы использовали (2.1) с $\gamma = p - n/(2m) \leq 1$ и элементарным неравенством $\sum |\nu_j| \leq (\sum |\nu_j|^\gamma)^{1/\gamma}$.

2. Отрицательный дискретный спектр оператора A пуст. Тогда поскольку $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Поэтому $\sigma(A) = \sigma_e(A) = [0, \infty)$, где $\sigma_e(\cdot)$ – непрерывный спектр. Тогда $\sigma(A_N) = \sigma_e(A) = [0, \infty)$ и $E = 0$. Отсюда следует, что (2.9) формально тоже выполнено.

С другой стороны, из вариационного принципа и (2.8) вытекает, что

$$E \leq a_N(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_N, \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_N) = \sum_{j=1}^N \|(-\Delta)^{m/2} \varphi_j\|^2 - \alpha \int \rho(x)^{p/(p-1)} dx. \quad (2.10)$$

Из (2.9) и (2.10) получаем

$$\alpha \int \rho(x)^{p/(p-1)} dx - L_{\gamma, m, n}^{1/\gamma} \alpha^{p/\gamma} \left(\int \rho(x)^{p/(p-1)} dx \right)^{1/\gamma} \leq \sum_{j=1}^N \|(-\Delta)^{m/2} \varphi_j\|^2.$$

Подставляя оптимальное

$$\alpha = \left(\frac{p}{\gamma} \right)^{\gamma/(\gamma-p)} L_{\gamma, m, n}^{1/(\gamma-p)} \left(\int \rho(x)^{p/(p-1)} dx \right)^{(1-\gamma)/(\gamma-p)}$$

и учитывая, что $\gamma = p - n/(2m)$, получаем неравенство (2.3) и (2.4).

При $p = 1 + n/(2m)$ мы получаем неравенство (2.5), где

$$k_{m, n} \leq \left(\frac{2m}{n} \right) \left(1 + \frac{n}{2m} \right)^{1+2m/n} L_{1, m, n}^{2m/n}. \quad (2.11)$$

Чтобы убедиться в том, что справедливо противоположное неравенство, т.е. выполнено (2.6), предположим, что выполняется неравенство (2.5), и рассмотрим оператор (2.7) с некоторым неотрицательным потенциалом $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Обозначим через ν_j , $j = 1, \dots, N$, его отрицательные собственные значения с отвечающими им ортонормированными собственными функциями v_j . Тогда

$$\nu_i = \int ((-\Delta)^{m/2} v_j(x))^2 dx - \int V(x) |v_j(x)|^2 dx.$$

Полагая $\rho(x) = \sum_{j=1}^N v_j(x)^2$ и используя (2.5), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\nu_j < 0} |\nu_j| &= \int V(x) \rho(x) dx - \sum_{j=1}^N \|(-\Delta)^{m/2} v_j\|^2 \\ &\leq \|V\|_{(2m+n)/(2m)} \|\rho\|_{(2m+n)/n} - (k_{m,n})^{-1} \|\rho\|_{(2m+n)/n}^{1+2m/n} \\ &\leq \max_{y>0} (\|V\|_{(2m+n)/(2m)} y - (k_{m,n})^{-1} y^{1+2m/n}) \\ &= k_{m,n}^{n/(2m)} \left(\frac{n}{n+2m} \right)^{1+n/(2m)} \left(\frac{2m}{n} \right) \int V^{1+n/(2m)} dx. \end{aligned}$$

Итак, справедлива оценка (1.1) с

$$L_{1,m,n} \leq k_{m,n}^{n/(2m)} \left(\frac{n}{n+2m} \right)^{1+n/(2m)} \left(\frac{2m}{n} \right), \quad (2.12)$$

что доказывает эквивалентность (2.1) с $\gamma = 1$ и (2.5), а также равенство (2.6). Теорема доказана для ортонормированного случая.

Докажем теперь, что переход от ортонормированных семейств к субортонормированным не увеличивает постоянную $k_{p,m,n}$.

Рассмотрим в $L_2(\mathbb{R}^n)^2$ оператор

$$\vec{A} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = (-\Delta)^m \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}, \quad V_1(x) \geq 0, \quad V_2(x) \geq 0. \quad (2.13)$$

Поскольку оператор (2.13) действует раздельно на каждую компоненту, то его отрицательный дискретный спектр $\{\mu_j\}$ есть объединение соответствующих отрицательных спектров операторов, действующих на u и v , и из (2.1) вытекает оценка

$$\sum_{\mu_j < 0} |\mu_j|^\gamma \leq L_{\gamma,m,n} \int (V_1(x)^{\gamma+n/(2m)} + V_2(x)^{\gamma+n/(2m)}) dx. \quad (2.14)$$

Пусть семейство $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ субортонормировано, т.е. выполняется (2.2). Рассмотрим в $L_2(\mathbb{R}^n)^2$ систему (φ_j, ψ_j) и потребуем, чтобы она была ортонормированной в $L_2(\mathbb{R}^n)^2$:

$$(\varphi_i, \varphi_j) + (\psi_i, \psi_j) = \delta_{ij}.$$

Функции ψ_i выберем в виде

$$\psi_i(x) = \sum_{j=1}^N a_{ij} \omega_j(x),$$

где a_{ij} — элементы матрицы a , подлежащей определению, а ω_j — j -я собственная функция оператора $(-\Delta)_D^m$ с краевыми условиями Дирихле в ограниченной области $r\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Здесь Ω — произвольная ограниченная область, а r — произвольный пока параметр. Мы имеем

$$(-\Delta)^m \omega_j = \lambda_j \omega_j, \quad (\omega_i, \omega_j) = \delta_{ij}, \quad \lambda_j = \lambda_j(r) = r^{-2m} \lambda_j(1).$$

Итак, в силу ортонормированности ω_j имеем

$$\begin{aligned}\delta_{ij} &= (\varphi_i, \varphi_j) + (\psi_i, \psi_j) = (\varphi_i, \varphi_j) + \left(\sum_{k=1}^N a_{ik} \omega_k, \sum_{l=1}^N a_{jl} \omega_l \right) \\ &= (\varphi_i, \varphi_j) + \sum_{k=1}^N a_{ik} a_{jk} = (\varphi_i, \varphi_j) + [aa^T]_{ij},\end{aligned}$$

где через $[aa^T]_{ij}$ обозначен элемент i, j матрицы $[aa^T]$. В силу субортонормированности системы $\{\varphi_j\}$ матрица $b = b^T$ с элементами

$$b_{ij} = \delta_{ij} - (\varphi_i, \varphi_j)$$

является неотрицательно определенной:

$$\sum_{i,j=1}^N b_{ij} \xi_i \xi_j = \sum_{j=1}^N \xi_j^2 - \sum_{i,j=1}^N (\varphi_i, \varphi_j) \xi_i \xi_j \geq 0.$$

Поэтому такая матрица a существует. Можно положить

$$a = a^T = b^{1/2}.$$

Итак, семейство $u_j = (\varphi_j, \psi_j)^T$, $j = 1, \dots, N$, ортонормировано в $L_2(\mathbb{R}^n)^2$. Положим

$$\sum_{j=1}^N \varphi_j(x)^2 = \rho_\varphi(x), \quad \sum_{j=1}^N \psi_j(x)^2 = \rho_\psi(x),$$

а в (2.13) положим

$$V_1(x) = \alpha \rho_\varphi^{1/(p-1)}(x), \quad V_2(x) = \alpha \rho_\psi^{1/(p-1)}(x).$$

Теперь мы действуем как и в первой части доказательства, полагая $H = L_2(\mathbb{R}^n)^2$ и заменяя оператор A на $\vec{A}$. Совершенно аналогичным образом определяем оператор $\vec{A}_N$ с квадратичной формой $\vec{a}_N$, которая для ортонормированного семейства $\{u_j\}_{j=1}^N$ принимает вид

$$\begin{aligned}\vec{a}_N(u_1 \wedge \dots \wedge u_N, u_1 \wedge \dots \wedge u_N) &= \sum_{j=1}^N (\|(-\Delta)^{m/2} \varphi_j\|^2 + \|(-\Delta)^{m/2} \psi_j\|^2) \\ &\quad - \alpha \left(\int \rho_\varphi(x)^{p/(p-1)} dx + \int \rho_\psi(x)^{p/(p-1)} dx \right).\end{aligned}\tag{2.15}$$

Как и раньше, для самой левой точки E спектра оператора $\vec{A}_N$ из (2.14) следует, что выполняется неравенство

$$E \geq -L_{\gamma,m,n}^{1/\gamma} \alpha^{p/\gamma} \left(\int \rho_\varphi(x)^{p/(p-1)} dx + \int \rho_\psi(x)^{p/(p-1)} dx \right)^{1/\gamma},$$

а с другой стороны, E не превосходит (2.15). Комбинируя эти два неравенства и выбирая оптимальное

$$\alpha = \left(\frac{p}{\gamma}\right)^{\gamma/(\gamma-p)} L_{\gamma,m,n}^{1/(\gamma-p)} \left(\int \rho_\varphi(x)^{p/(p-1)} dx + \int \rho_\psi(x)^{p/(p-1)} dx \right)^{(1-\gamma)/(\gamma-p)},$$

получаем

$$\begin{aligned} & \left(\int \rho_\varphi(x)^{p/(p-1)} dx + \int \rho_\psi(x)^{p/(p-1)} dx \right)^{2m(p-1)/n} \\ & \leq k_{p,m,n} \sum_{j=1}^N (\|(-\Delta)^{m/2} \varphi_j\|^2 + \|(-\Delta)^{m/2} \psi_j\|^2), \end{aligned} \quad (2.16)$$

где, как и раньше, для $k_{p,m,n}$ выполняется (2.4). Теперь заметим, что

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \|(-\Delta)^{m/2} \psi_j\|^2 &= \sum_{j=1}^N ((-\Delta)^m \psi_j, \psi_j) = \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=1}^N a_{jk} \lambda_k \omega_k, \sum_{l=1}^N a_{jl} \omega_l \right) \\ &= \sum_{j,k=1}^N a_{jk}^2 \lambda_k \leq \lambda_N \sum_{j,k=1}^N a_{jk}^2 \\ &\leq c_N \lambda_N = c_N \lambda_N(r) = c_N r^{-2m} \lambda_N(1) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Устремляя $r \rightarrow \infty$ и отбрасывая в левой части (2.16) второе слагаемое, получаем (2.3), (2.4). Теорема полностью доказана.

Результаты такого сорта непосредственно обобщаются на операторы, определяемые квадратичными формами, на операторы, действующие на многообразиях, на векторные операторы и т.д. Общий смысл всех приводимых ниже в этом параграфе результатов таков: при переходе к субортонормированным системам постоянная k (точнее, ее оценка) не ухудшается, а при $\gamma = 1 \Leftrightarrow p = 1 + n/(2m)$ наилучшие постоянные L и k удовлетворяют (2.6).

Ниже рассматривается оператор на многообразии. Пусть M — n -мерное компактное гладкое риманово многообразие. Вполне содержательным является случай, когда M есть гладкая замкнутая гиперповерхность. Рассмотрим скалярный случай; векторный случай рассматривается аналогично.

Пусть Δ — скалярный оператор Лапласа: $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$. Пусть V — замкнутое подпространство пространства Соболева $H^m(M)$, ортогональное константам. Обозначим через H замыкание V в $L_2(M)$ и соответствующий ортогональный проектор — через P :

$$H = PL_2(M), \quad V = PH^m(M).$$

Для достаточно гладкой $f \geq 0$ рассмотрим на V квадратичную форму

$$\|(-\Delta)^{m/2} h\|^2 - \int_M f h^2 dM, \quad h \in V, \quad (2.17)$$

и соответствующий ей оператор типа Шрёдингера

$$A_f = P((-\Delta)^m - f)P. \quad (2.18)$$

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть для отрицательного спектра оператора A (см. (2.18)) справедлива оценка

$$\sum_{\nu_i \leq 0} |\nu_i|^\gamma \leq L_\gamma \int f(x)^{\gamma+n/(2m)} dM \quad (2.19)$$

с некоторой константой L_γ , зависящей от P и M : $L_\gamma = L_\gamma^P(M)$. Тогда если семейство $\{\varphi_j\}_{j=1}^N \in V$ субортонормировано, то для $\rho(x) = \sum_{j=1}^N \varphi_j(x)^2$ справедливо неравенство

$$\left(\int_M \rho^{p/(p-1)} dM \right)^{2m(p-1)/n} \leq k_p(M) \sum_{j=1}^N \|(-\Delta)^{m/2} \varphi_j\|^2, \quad (2.20)$$

где p удовлетворяет $\max(1, n/(2m)) < p \leq 1 + n/(2m)$, а постоянная $k_p(M)$ не зависит от N и удовлетворяет оценке

$$k_p(M) \leq \left(\frac{2m}{n} \right) p^{2mp/n} \left(p - \frac{n}{2m} \right)^{1-2mp/n} L_{p-n/(2m)}^{2m/n}. \quad (2.21)$$

Неравенство (2.20) с $p = 1 + n/(2m)$ и оценка (2.19) с $\gamma = 1$ эквивалентны. При этом наилучшие постоянные $k = k_{1+n/(2m)}(M)$ и $L = L_1(M)$ удовлетворяют равенству

$$k = \left(\frac{2m}{n} \right) \left(1 + \frac{n}{2m} \right)^{1+2m/n} L^{2m/n}. \quad (2.22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для ортонормированной системы доказательство совпадает с доказательством теоремы (2.1). Тот факт, что оператор A определен на подпространстве V , не вносит ничего нового.

Для случая субортонормированной системы действуем следующим образом. Наряду с многообразием M рассмотрим гомотетичное многообразие $M_r = rM$. Легко видеть, что постоянная $L_\gamma^P(M)$ зависит лишь от формы многообразия M . Другими словами, $L_\gamma^P(M_r) = L_\gamma^P(M)$. Тогда для отрицательного спектра μ_j оператора

$$\vec{A} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_f \varphi \\ A_g \psi \end{pmatrix}, \quad f(x) \geq 0, \quad g(x) \geq 0, \quad (2.23)$$

действующего в пространстве $L_2(M) \oplus L_2(M_r)$, справедлива оценка

$$\sum_{\mu_j < 0} |\mu_j|^\gamma \leq L_\gamma^P(M) \left(\int_M f^{\gamma+n/(2m)} dM + \int_{M_r} g^{\gamma+n/(2m)} dM_r \right). \quad (2.24)$$

Теперь субортонормированную (в $L_2(M)$) систему $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ достраиваем до ортонормированной (в $L_2(M) \oplus L_2(M_r)$) системы $\{(\varphi_j, \psi_j)\}_{j=1}^N$, где

$$\psi_i(x) = \sum_{j=1}^N a_{ij} \omega_j(x), \quad x \in M_r,$$

$a = b^{1/2}$, $b_{ij} = \delta_{ij} - (\varphi_i, \varphi_j)$ и

$$\begin{aligned} P(-\Delta)^m P\omega_j(x) &= \lambda_j \omega_j(x), \quad x \in M_r, \quad \omega_j \in PL_2(M_r), \\ \|(-\Delta)^{m/2} \omega_j\|_{L_2(M_r)}^2 &= \lambda_j, \end{aligned}$$

причем $\lambda_j = \lambda_j(r) = r^{-2m} \lambda_j(1)$. Как и в теореме 2.1, отсюда для ортонормированной системы $\{(\varphi_j, \psi_j)\}_{j=1}^N$ получаем неравенство

$$\begin{aligned} &\left(\int_M \rho_\varphi^{p/(p-1)} dM + \int_{M_r} \rho_\psi^{p/(p-1)} dM_r \right)^{2m(p-1)/n} \\ &\leq k_p \sum_{j=1}^N (\|(-\Delta)^{m/2} \varphi_j\|_{L_2(M)}^2 + \|(-\Delta)^{m/2} \psi_j\|_{L_2(M_r)}^2), \end{aligned}$$

где k_p удовлетворяет (2.21). Устремляя $r \rightarrow \infty$, видим, что последнее слагаемое справа стремится к нулю, что дает (2.20).

Наконец, утверждение теоремы о том, что из (2.20) с $p = 1 + n/(2m)$ вытекает оценка (2.19) с $\gamma = 1$ и равенство (2.22), доказывается как в теореме 2.1. Теорема доказана.

Из доказанных теорем вытекает следующий полезный результат.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *В использованных выше обозначениях пусть для любого N и для любого ортонормированного семейства $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ выполняется неравенство*

$$\int \rho^{1+2m/n} dx \leq k \sum_{j=1}^N \|(-\Delta)^{m/2} \varphi_j\|^2 \quad (2.25)$$

с некоторой константой k . Тогда неравенство (2.25) выполняется и для любой субортонормированной системы, причем с той же константой k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2.25) выводим оценку (2.19) с $\gamma = 1$, причем ввиду (2.12)

$$L_1 \leq k^{n/(2m)} \left(\frac{n}{2m+n} \right)^{1+n/(2m)} \left(\frac{2m}{n} \right).$$

Пусть теперь система $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ субортонормирована. Достаивая эту систему до ортонормированной системы $\{(\varphi_j, \psi_j)\}_{j=1}^N$ и пользуясь полученной оценкой для L_1 , получаем утверждение следствия.

В заключение этого параграфа приведем некоторые замечания о неравенствах Либа–Тирринга при $m > n/2$. Идея приводимого ниже элементарного доказательства принадлежит Фояшу [8], [15].

Пусть M есть либо $\mathbb{R}^n$, либо гладкое замкнутое n -мерное многообразие. Пусть $V \subseteq H^m(M)$ – замкнутое подпространство в $H^m(M)$. Если M – компактное многообразие, то дополнительно потребуем, чтобы V было ортогонально константам.

Пространство Соболева $H^m(M)$ непрерывно вложено в пространство непрерывных ограниченных функций, и для $f \in V$ справедливо мультипликативное неравенство

$$\|f\|_\infty \leq c_M(m) \|f\|^{1-n/(2m)} \|(-\Delta)^{m/2} f\|^{n/(2m)}. \quad (2.26)$$

ТЕОРЕМА 2.3. Для любой субортонормированной системы $\{\varphi_j\}_{j=1}^N \in V$ справедливо неравенство

$$\int_M \rho_\varphi(x)^{1+2m/n} dM \leq k \sum_{j=1}^N \|(-\Delta)^{m/2} \varphi_j\|^2, \quad (2.27)$$

где $\rho_\varphi(x) = \sum_{j=1}^N \varphi_j(x)^2$, а k допускает оценку

$$k \leq c_M(m)^{4m/n}. \quad (2.28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что в силу следствия 2.1 достаточно доказать теорему для ортонормированного семейства.

Пусть H – замыкание V в $L_2(M)$. Рассмотрим подпространство

$$P_N H = \text{Span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$$

и обозначим соответствующий ортогональный проектор через P_N .

Два любых ортонормированных базиса $P_N H$ $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ и $\{\psi_j\}_{j=1}^N$ связаны ортогональной $(N \times N)$ -матрицей θ с постоянными элементами: $\psi = \theta \varphi$. Поэтому

$$\sum_{j=1}^N \varphi_j(x)^2 = \sum_{j=1}^N \psi_j(x)^2.$$

Кроме того,

$$\sum_{j=1}^N \|(-\Delta)^{m/2} \varphi_j\|^2 = \sum_{j=1}^N (A_N \varphi_j, \varphi_j) = \text{Tr } A_N,$$

где $A_N = P_N(-\Delta)^{m/2} P_N$. Это говорит о том, что левая и правая части неравенства (2.28) зависят лишь от подпространства $P_N H$, а не от конкретного выбора в нем базиса. Поэтому без ограничения общности мы можем выбрать в $P_N H$ специальный базис и считать, что φ_j являются собственными функциями оператора A_N , что дает $(A_N \varphi_i, \varphi_j) = \|(-\Delta)^{m/2} \varphi_j\|^2 \delta_{ij}$.

Для любого $\xi \in \mathbb{R}^N$, учитывая это и ортонормированность φ_j , имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^N \xi_j \varphi_j(x) \right| &\leq \left\| \sum_{j=1}^N \xi_j \varphi_j \right\|_\infty \\ &\leq c_M(m) \left\| \sum_{j=1}^N \xi_j \varphi_j \right\|^{1-n/(2m)} \left\| \sum_{j=1}^N \xi_j (-\Delta)^{l/2} \varphi_j \right\|^{n/(2m)} \\ &= c_M(m) \left(\sum_{j=1}^N \xi_j^2 \right)^{1/2-n/(4m)} \left(\sum_{i,j=1}^N \xi_i \xi_j (A_N \varphi_i, \varphi_j) \right)^{n/(4m)} \\ &= c_M(m) \left(\sum_{j=1}^N \xi_j^2 \right)^{1/2-n/(4m)} \left(\sum_{j=1}^N \xi_j^2 \|(-\Delta)^{m/2} \varphi_j\|^2 \right)^{n/(4m)}. \end{aligned}$$

Положим теперь $\xi_j = \varphi_j(x)$. Это дает

$$\left(\sum_{j=1}^N \varphi_j(x)^2 \right)^{1+2m/n} \leq c_M(m)^{4m/n} \sum_{j=1}^N \varphi_j(x)^2 \|(-\Delta)^{m/2} \varphi_j\|^2.$$

Интегрируя и используя ортонормированность, получаем (2.27) и (2.28).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Для $M = \mathbb{R}^n$, а также для n -мерной сферы S^n постоянная $c_M(m)$ известна [16]. Для $\mathbb{R}^n$

$$c_{\mathbb{R}^n}(m)^2 = \frac{2\pi}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)(4\pi)^{n/2} \sin \frac{n\pi}{2m} n^{n/(2m)} (2m-n)^{1-n/(2m)}}. \quad (2.29)$$

Из оценки снизу (1.2) и (2.6) следует, что для соответствующей константы $L_{1,m,n}$ имеем

$$L_{1,m,n}^{\text{cl}} \leq L_{1,m,n} \leq c_{\mathbb{R}^n}(m)^2 \left(\frac{2m}{n}\right) \left(\frac{n}{2m+n}\right)^{1+n/(2m)}. \quad (2.30)$$

Заметим теперь, что левая и правая части этого неравенства при $m \rightarrow \infty$ стремятся к одному и тому же пределу, равному $((4\pi)^{n/2} \Gamma(n/2 + 1))^{-1}$.

§ 3. Неравенства для вектор-функций

В этом параграфе доказываются неравенства для (суб)ортонормированных систем векторных полей, которые чрезвычайно важны для приложений к уравнениям Навье–Стокса.

Ключевую роль здесь, как и раньше, играет оценка Либа–Тирринга

$$\sum_{\nu_i \leq 0} |\nu_i| \leq L_{1,m,n} \int f(x)^{1+n/(2m)} dx \quad (3.1)$$

для отрицательного спектра ν_j скалярного оператора Шрёдингера

$$(-\Delta)^m - f, \quad f \geq 0. \quad (3.2)$$

Наряду с оператором (3.2) рассмотрим векторный оператор, действующий на векторы $u = (u^1, \dots, u^d)^T$ по правилу

$$(-\Delta)^m \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^d \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^d \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Тогда аналогично (2.14) видим, что для отрицательного спектра $\mu_j(f)$ этого оператора справедлива оценка

$$\sum_{\mu_i \leq 0} |\mu_i| \leq d L_{1,m,n} \int f(x)^{1+n/(2m)} dx. \quad (3.4)$$

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть семейство $u_1, \dots, u_N \in H_0^m(\Omega)^d$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, является субортонормированным в $L_2(\Omega)^d$:

$$\sum_{i,j=1}^N (u_i, u_j) \xi_i \xi_j \leq \sum_{j=1}^N \xi_j^2,$$

где $(u, v) = \int \sum_{i=1}^d u^i(x) v^i(x) dx$. Тогда справедливо неравенство

$$\int \rho_u(x)^{1+2m/n} dx \leq \vec{k} \sum_{j=1}^N \|(-\Delta)^{m/2} u_j\|^2, \quad (3.5)$$

где $\rho_u(x) = \sum_{j=1}^N |u_j(x)|^2$, а для наилучшей постоянной $\vec{k} = \vec{k}_{d,m,n}$ в этом неравенстве выполняется

$$\vec{k} = \left(\frac{2m}{n} \right) (d L_{1,m,n})^{2m/n} \left(1 + \frac{n}{2m} \right)^{1+2m/n} = d^{2m/n} k_{m,n}. \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (3.5) вместе с (3.6) для ортонормированной системы следует из оценки (3.4) точно так же, как в теореме 2.1. Если же система $\{u_j\}_{j=1}^N$ субортонормирована, то ее надо достроить до ортонормированной системы в $L_2(\Omega)^d \oplus L_2(\Omega)^d$, после чего доказательство завершается опять так же, как в теореме 2.1.

Заметим теперь, что для уравнений Навье–Стокса $m = 1$. В [6] была получена следующая важная оценка констант Либа–Тирринга для $1 \leq \gamma < 3/2$:

$$L_{\gamma,n} \leq 2 L_{\gamma,n}^{\text{cl}}, \quad 1 \leq \gamma < \frac{3}{2}, \quad n \geq 1. \quad (3.7)$$

Отсюда и из предыдущей теоремы получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть семейство $u_1, \dots, u_N \in H_0^1(\Omega)^n$ субортонормировано в $L_2(\Omega)^n$, где $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\int \rho_u(x)^{1+2/n} dx \leq \vec{k}_n \sum_{j=1}^N \|\nabla u_j\|^2, \quad (3.8)$$

где

$$\left(\frac{2}{n} \right) (n L_{1,n}^{\text{cl}})^{2/n} \left(1 + \frac{n}{2} \right)^{1+2/n} \leq \vec{k}_n \leq \left(\frac{2}{n} \right) (2n L_{1,n}^{\text{cl}})^{2/n} \left(1 + \frac{n}{2} \right)^{1+2/n}. \quad (3.9)$$

В частности (см. (1.3)),

$$2^{-2/3} \frac{5}{3\pi^{4/3}} \leq \vec{k}_3 \leq \frac{5}{3\pi^{4/3}}, \quad \frac{1}{\pi} \leq \vec{k}_2 \leq \frac{2}{\pi}. \quad (3.10)$$

В случае уравнений Навье–Стокса для несжимаемой жидкости выполняется условие $\text{div } u = 0$. Поэтому ясно, что если учесть это дополнительное условие в теореме 3.2, то постоянные $\vec{k}_n$ должны уменьшиться. Оказывается, что в двумерном случае постоянную $\vec{k}_2$ можно уменьшить по крайней мере вдвое. А именно справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть вектор-функции $u_1, \dots, u_N \in H_0^1(\Omega)^2$ образуют субортонормированное семейство в $L_2(\Omega)^2$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Предположим, что $\operatorname{div} u_j = 0$ (или $\operatorname{rot} u_j = 0$) для $j = 1, \dots, N$. Тогда справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \int \rho_u(x)^2 dx &\leq k_2^{\text{sol}} \sum_{j=1}^N \|\operatorname{rot} u_j\|^2, & \text{если } \operatorname{div} u_j = 0, \\ \int \rho_u(x)^2 dx &\leq k_2^{\text{pot}} \sum_{j=1}^N \|\operatorname{div} u_j\|^2, & \text{если } \operatorname{rot} u_j = 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где $\rho_u(x) = \sum_{j=1}^N |u_j(x)|^2$, а для наилучших постоянных k_2^{sol} и k_2^{pot} выполняется

$$\frac{1}{2\pi} \leq k_2^{\text{sol}} = k_2^{\text{pot}} \leq \frac{\vec{k}_2}{2} = k_2 \leq \frac{1}{\pi}. \quad (3.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим ортонормированный случай. Ясно, что надо доказать лишь (3.12). Наряду с вектором $u(x)$ рассмотрим вектор $\widehat{u}(x)$, $\widehat{u}(x) = (-u^2(x), u^1(x))^T$. Легко видеть, что

$$|u(x)| = |\widehat{u}(x)|, \quad \operatorname{div} u(x) = \operatorname{rot} \widehat{u}(x), \quad \operatorname{rot} u(x) = -\operatorname{div} \widehat{u}(x).$$

Более того, если $u_1, \dots, u_N$ ортонормированы в $L_2(\Omega)^2$, то и $\widehat{u}_1, \dots, \widehat{u}_N$ ортонормированы и наоборот. Отсюда следует, что $k_2^{\text{sol}} = k_2^{\text{pot}}$. Докажем неравенство $k_2^{\text{sol}} \leq \vec{k}_2/2$, содержащееся в (3.12). Пусть $u_1, \dots, u_N$ ортонормированы в $L_2(\Omega)^2$, и пусть $\operatorname{div} u_j = 0$, $j = 1, \dots, N$. Положим $\rho(x) = \sum_{j=1}^N |u_j(x)|^2$ и рассмотрим семейство $2N$ вектор-функций $u_1, \dots, u_N, \widehat{u}_1, \dots, \widehat{u}_N$. Поскольку $\operatorname{rot} \widehat{u}_j = 0$, $j = 1, \dots, N$, то $(u_i, \widehat{u}_j) = 0$ для $1 \leq i, j \leq N$, и все это семейство ортонормировано. Применяя теорему 3.2 к этому семейству $2N$ функций и учитывая тождество

$$\|\nabla u\|^2 = \|\operatorname{div} u\|^2 + \|\operatorname{rot} u\|^2,$$

получаем

$$\begin{aligned} 4 \int \rho(x)^2 dx &= \int \left(\sum_{j=1}^N (|u_j(x)|^2 + |\widehat{u}_j(x)|^2) \right)^2 dx \\ &\leq \vec{k}_2 \sum_{j=1}^N (\|\operatorname{rot} u_j\|^2 + \|\operatorname{div} \widehat{u}_j\|^2) = 2\vec{k}_2 \sum_{j=1}^N \|\operatorname{rot} u_j\|^2. \end{aligned}$$

Поэтому $k_2^{\text{sol}} \leq \vec{k}_2/2$. Оценка снизу $k_2^{\text{sol}} \geq 1/(2\pi)$ доказана в [11]. Теорема доказана для ортонормированного семейства. Для субортонормированного семейства теорема следует из следствия 2.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Те же самые рассуждения показывают, что для субортонормированной системы векторных полей $\{u(x)\}_{j=1}^N$ с нулевым средним, заданных на торе T^2 , выполняется (3.11), причем

$$k_2^{\text{sol}}(T^2) = k_2^{\text{pot}}(T^2) \leq \frac{\vec{k}_2(T^2)}{2} = k_2(T^2).$$

Аналогичный результат справедлив и для двумерного гладкого многообразия M . Здесь под оператором Лапласа будем понимать оператор Лапласа–де Рама, действующий на векторные поля на M по правилу [17]

$$\Delta u = \nabla \operatorname{div} u - \operatorname{rot} \operatorname{rot} u = \nabla \operatorname{div} u - n \times \nabla \operatorname{div}(n \times u),$$

где операторы $\nabla = \operatorname{grad}$ и div имеют обычный смысл, а оператор rot действует на касательные векторы и нормальные векторы (которые мы отождествляем со скалярами) по правилу

$$\operatorname{rot} u = -n \operatorname{div}(n \times u), \quad \operatorname{rot} \psi = -n \times \nabla \psi.$$

Здесь n – единичная внешняя нормаль и $n \times u(x)$ – это поворот вектора $u(x)$ в касательном пространстве TM_x на угол $\pi/2$ в положительном направлении. Наконец, обозначим через $\mathcal{H}$ конечномерное пространство гармонических векторных полей $\mathcal{H} = \{u \in TM, \operatorname{div} u = 0, \operatorname{rot} u = 0\}$.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть семейство $u_1, \dots, u_N \in H^1(TM)$ субортонормировано в $L_2(TM)$ и $u_i \perp \mathcal{H}$. Тогда для $\rho_u(x) = \sum_{j=1}^N |u_j(x)|^2$, $x \in M$, справедливо неравенство

$$\int_M \rho_u^2 dM \leq \vec{k}_2(M) \sum_{j=1}^N \|(-\Delta)^{1/2} u_j\|^2 = \vec{k}_2(M) \sum_{j=1}^N (\|\operatorname{rot} u_j\|^2 + \|\operatorname{div} u_j\|^2). \quad (3.13)$$

Если дополнительно $\operatorname{div} u_j = 0$, то

$$\int_M \rho_u^2 dM \leq \frac{\vec{k}_2(M)}{2} \sum_{j=1}^N \|\operatorname{rot} u_j\|^2. \quad (3.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Само неравенство (3.13) можно получить из общих результатов работы [10].

Неравенство (3.14) доказывается совершенно аналогично плоскому случаю. Для оператора Лапласа–де Рама справедлива формула интегрирования по частям [17]

$$(-\Delta u, u) = \|(-\Delta)^{1/2} u\|^2 = \|\operatorname{div} u\|^2 + \|\operatorname{rot} u\|^2.$$

Как и в плоском случае, для $\hat{u} = n \times u$ выполняется $|u(x)| = |\hat{u}(x)|$, $\operatorname{rot} \hat{u} = \operatorname{div} u$ и $\operatorname{div} \hat{u} = -\operatorname{rot} u$. Теперь доказать (3.14) можно с помощью того же приема, что и в теореме 3.3.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Пусть $\dim M = 2$. Если система скалярных функций $\{\varphi_j\} \in H^1(M)$ субортонормирована и $\int_M \varphi_j dM = 0$, то для $\rho_\varphi(x) = \sum_{j=1}^N \varphi_j(x)^2$ выполняется неравенство

$$\int_M \rho_\varphi^2 dM \leq k_2(M) \sum_{j=1}^N \|\nabla \varphi_j\|^2. \quad (3.15)$$

В отличие от плоского случая, где оператор Лапласа действует на вектор-функции покомпонентно и поэтому $\vec{k}_2 = 2k_2$ (см. (3.6)), мы не утверждаем, что $\vec{k}_2(M) = 2k_2(M)$. Однако для сферы это выполняется по крайней мере для явных мажорант соответствующих констант.

Пусть M есть двумерная сфера $\mathbb{S}^2$. Тогда $\mathcal{H} = \{0\}$.

ТЕОРЕМА 3.5. Для сферы $\mathbb{S}^2$ константы $\vec{k}_2(\mathbb{S}^2)$ и $k_2(\mathbb{S}^2)$ в неравенствах (3.13), (3.14) и (3.15) соответственно допускают явные оценки

$$k_2(\mathbb{S}^2) \leq 2, \quad \vec{k}_2(\mathbb{S}^2) \leq 4. \quad (3.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценки констант (3.16) получены в [18] для ортонормированного случая. Для субортонормированного семейства теорема вытекает из следствия 2.1.

В заключение этого параграфа приведем еще одно одномерное неравенство на окружности (т.е. для периодических функций), которое понадобится нам в дальнейшем.

ТЕОРЕМА 3.6. Пусть функции $\varphi_1, \dots, \varphi_N \in H^{1/2}(\mathbb{S}^1)$ образуют субортонормированное семейство, причем $\int_0^{2\pi} \varphi_j(x) dx = 0$. Тогда для $\rho_\varphi(x) = \sum_{j=1}^N \varphi_j(x)^2$ выполняется неравенство

$$\int_0^{2\pi} \rho_\varphi(x)^2 dx \leq k_1(\mathbb{S}^1) \sum_{j=1}^N \|(-\Delta)^{1/4} \varphi_j\|^2. \quad (3.17)$$

Если дополнительно $\{\varphi_j\}_{j=1}^N \in H^1(\mathbb{S}^1)$, то

$$\int_0^{2\pi} \rho_\varphi(x)^2 dx \leq k_1(\mathbb{S}^1) \sum_{j=1}^N \|\varphi_j'\|. \quad (3.18)$$

Здесь $k_1(\mathbb{S}^1) \leq 6$ ($k_1(\mathbb{S}^1) \leq 5.76 \dots$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (3.17) доказано в [18], причем для $k_1(\mathbb{S}^1)$ получена оценка $k_1(\mathbb{S}^1) \leq 4 \min_{1 < k < 2} F(k)$, где

$$F(k) = \frac{k}{2(k-1)^{k-1}(2-k)^{2-k} \sin \pi(k-1)}. \quad (3.19)$$

Имеем $F(3/2) = 3/2$. Минимум же достигается при $k = 1.38 \dots$, что дает $k_1(\mathbb{S}^1) \leq 5.76 \dots$ (см. также (4.20)).

Неравенство (3.18) следует из интерполяционного неравенства

$$\|(-\Delta)^{1/4} \varphi\|^2 \leq \|\varphi\| \|\varphi'\|$$

и ортонормированности.

§ 4. Неравенства на двумерном торе

В этом параграфе рассматриваются неравенства Либа–Тирринга на двумерном торе $T_\alpha^2 = (0, L/\alpha) \times (0, L)$, $0 < \alpha \leq 1$. Для удобства мы положим $L = 2\pi$. Как уже отмечалось, это не ограничивает общности, поскольку постоянные в неравенствах и оценках Либа–Тирринга безразмерны и зависят лишь от α , а не от L .

Рассмотрим сначала скалярный случай. Спектр $\sigma = \{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ задачи

$$-\Delta w_j = \lambda_j w_j \quad (4.1)$$

в пространстве $H = L_2(T_\alpha^2) \cap \left\{ \int f dx = 0 \right\}$ выписывается в явном виде:

$$\sigma = \{\alpha^2 k_1^2 + k_2^2, k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}_0^2\}, \quad \mathbb{Z}_0^2 = \mathbb{Z}^2 \setminus 0. \quad (4.2)$$

Представим σ в виде

$$\sigma = \sigma_N \cup \sigma_M,$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_N &= \{\alpha^2 k_1^2 + k_2^2, k_2 \neq 0, k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}_0^2\}, \\ \sigma_M &= \{\alpha^2 k_1^2, k_1 \in \mathbb{Z}_0\}, \quad \mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z} \setminus 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Соответствующие спектральные проекторы обозначим через N и M . Итак, гильбертово пространство H расщепляется на два ортогональных инвариантных подпространства:

$$H = NH \oplus MH.$$

Заметим, что функции из MH зависят лишь от x_1 .

Ортонормированный базис $w_j(x)$, соответствующий задаче (4.1), состоит из тригонометрических функций

$$\begin{aligned} \bigcup_{j \in \mathbb{N}} w_j(x) &= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_+^2} \left\{ \left(\frac{\alpha}{2\pi^2} \right)^{1/2} \sin kx, \left(\frac{\alpha}{2\pi^2} \right)^{1/2} \cos kx \right\}, \\ \mathbb{Z}_+^2 &= \{k \in \mathbb{Z}_0^2, k_1 \geq 0, k_2 \geq 0\} \cup \{k \in \mathbb{Z}_0^2, k_1 \geq 1, k_2 \leq 0\}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Поскольку числа λ_j идут парами, соответствующими k и $-k \in \mathbb{Z}_0^2$, мы имеем

$$\bigcup_{j=1}^\infty \{\lambda_j\} = \bigcup_{l=1}^\infty \{\Lambda_l, \Lambda_l\},$$

где

$$1 = \Lambda_1 \leq \Lambda_2 \leq \dots, \quad \{\Lambda_j, j = 1, \dots\} = \{k^2, k \in \mathbb{Z}_+^2\}. \quad (4.5)$$

Поэтому $\Lambda_j = \lambda_{2j} = \lambda_{2j-1}$, $j \geq 1$, и каждому $\Lambda = \Lambda_j$ соответствуют две собственные функции $u_j(x) = (\alpha/(2\pi^2))^{1/2} \sin kx$ и $v_j(x) = (\alpha/(2\pi^2))^{1/2} \cos kx$ для некоторого однозначно определенного $k = k(j)$. Кроме того, конечно,

$$u_j(x)^2 + v_j(x)^2 = \frac{\alpha}{2\pi^2} =: c_2. \quad (4.6)$$

Аналогичным образом для задачи (4.1), суженной на собственное подпространство NH , т.е. для задачи

$$-N\Delta w_j^{(N)} = \lambda_j^{(N)} w_j^{(N)}, \quad (4.7)$$

мы имеем

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \{\lambda_j^{(N)}\} = \bigcup_{l=1}^{\infty} \{\Lambda_l^{(N)}, \Lambda_l^{(N)}\}$$

и каждому $\Lambda_j^{(N)}$ отвечают собственные функции $u_j^{(N)}(x) = (\alpha/(2\pi^2))^{1/2} \sin kx$ и $v_j^{(N)}(x) = (\alpha/(2\pi^2))^{1/2} \cos kx$ для некоторого $k = k^{(N)}(j)$, для которых, как и раньше, выполняется (4.6).

Справедливы следующие оценки снизу для λ_j и $\lambda_j^{(N)}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *В случае квадратного тора ($\alpha = 1$) для $j \geq 1$ выполняется*

$$\lambda_j \geq c_1 j, \quad \Lambda_j \geq 2c_1 j, \quad \text{где} \quad c_1 = \frac{1}{4}. \quad (4.8)$$

При всех $0 < \alpha \leq 1$ для $\lambda_j^{(N)}$ выполняется

$$\lambda_j^{(N)} \geq c_1^{(N)} j, \quad \Lambda_j^{(N)} \geq 2c_1^{(N)} j, \quad \text{где} \quad c_1^{(N)} = \frac{1}{8}\alpha. \quad (4.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай $\alpha = 1$. Для λ_j справедлива вейлевская асимптотика (которую для нашего случая легко доказать непосредственно): $\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j / j = 1/\pi > 1/4$. Поэтому $\lambda_j > j/4$ для $j \geq j_0$. Прямым подсчетом получаем, что $\lambda_4 = 1 = 4/4$ и $\lambda_{20} = 5 = 20/4$. Поэтому надо проверить, что $\lambda_j \geq j/4$ для *конечного множества* $j < j_0$. Мы опустим детали.

Наконец, второе неравенство в (4.8) следует из того, что $\Lambda_j = \lambda_{2j}$.

Докажем (4.9) (см. [19]). Для $\lambda > 0$ обозначим через $\mathcal{N}(\lambda)$ число собственных значений $\lambda_j^{(N)} \leq \lambda$:

$$\mathcal{N}(\lambda) = \#\{\lambda_j^{(N)} \leq \lambda\}.$$

Поскольку

$$\sigma_N = \{k_1^2 \alpha^2 + k_2^2, k \in \mathbb{Z}_0^2\} \cap \{k_2 \neq 0\},$$

то заведомо выполняется

$$\mathcal{N}(\lambda) \leq \#\{k \in \mathbb{Z}_0^2, k_1^2 \alpha^2 + k_2^2 \leq \lambda\}.$$

Вписывая эллипс в прямоугольник и вычеркивая точку $k = 0$, получаем

$$\mathcal{N}(\lambda) \leq \left(1 + \frac{2\sqrt{\lambda}}{\alpha}\right)(1 + 2\sqrt{\lambda}) - 1 = \left(2 + \frac{2}{\alpha}\right)\sqrt{\lambda} + \frac{4\lambda}{\alpha}.$$

По определению $\mathcal{N}(\lambda_j^{(N)}) = j$, поэтому

$$\alpha j \leq (2 + 2\alpha)\sqrt{\lambda_j^{(N)}} + 4\lambda_j^{(N)} \leq (6 + 2\alpha)\lambda_j^{(N)},$$

где мы использовали тот факт, что $\lambda_j^{(N)} \geq \lambda_1^{(N)} = 1$ и $\sqrt{\lambda_j^{(N)}} \leq \lambda_j^{(N)}$. Отсюда

$$\lambda_j^{(N)} \geq \frac{\alpha}{6+2\alpha} j \geq \frac{\alpha}{8} j =: c_1^{(N)} j.$$

Кроме того, заметим, что

$$c_1^{(N)} \gtrsim \frac{\alpha}{6} \quad \text{при } \alpha \rightarrow 0. \quad (4.10)$$

Пусть P – некоторый спектральный проектор $P\Delta = \Delta P$. Будут рассмотрены два случая: $P = \Pi$, $\Pi u = u - \frac{1}{4\pi^2} \int u dx$, и $P = N$. Обозначим $V = PH^1(T_\alpha^2)$.

Рассмотрим для $f \in L_2(T_\alpha^2)$ квадратичную форму на V

$$Q_f(\varphi) = \|\nabla \varphi\|^2 + \int_{T_\alpha^2} f \varphi^2 dx, \quad \varphi \in V, \quad (4.11)$$

которая ограничена снизу, и числа

$$\mu_j(f) = \max_{\psi_1, \dots, \psi_{j-1} \in V} \min_{\substack{(\varphi, \psi_i)=0, i=1, \dots, j-1 \\ \varphi \in V, \|\varphi\|=1}} Q_f(\varphi). \quad (4.12)$$

Квадратичная форма (4.11) определяет на PH оператор Шрёдингера

$$-\Delta + P f P, \quad (4.13)$$

а числа μ_j являются его собственными значениями.

Задача заключается в доказательстве оценки Либа–Тирринга для оператора (4.13)

$$\sum_{\mu_j \leq 0} |\mu_j|^\gamma \leq L_\gamma^P(T_\alpha^2) \int_{T_\alpha^2} f_-^{\gamma+1} dx \quad (4.14)$$

для $0 < \gamma \leq 1$, точнее, в оценке постоянной $L_\gamma^P(T_\alpha^2)$ (поскольку неравенство (4.14) следует из общей теоремы в [8]). Здесь

$$f_-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{при } f(x) \leq 0, \\ 0 & \text{при } f(x) > 0. \end{cases}$$

Как уже отмечалось, нас интересуют два случая: $P = \Pi$, где Π – ортопроектор в L_2 на подпространство функций с нулевым средним, причем здесь рассматривается квадратный тор с $\alpha = 1$, и случай $P = N$, где $0 < \alpha \leq 1$.

ТЕОРЕМА 4.1. *Постоянная $L_\gamma^\Pi(T_1^2) = L_\gamma(T^2)$ для $\alpha = 1$ удовлетворяет оценке*

$$L_\gamma(T^2) \leq \frac{1}{\pi^2} \min_{1 < k < \gamma+1} F(\gamma, k), \quad F(\gamma, k) = \frac{\gamma^{\gamma+1} B(\gamma+1-k, k+1)}{(k-1)^k (\gamma+1-k)^{\gamma+1-k}}, \quad (4.15)$$

$$L_1(T^2) \leq \frac{3}{2\pi} = 0.478\dots \quad (L_1(T^2) \leq 0.459\dots), \quad (4.16)$$

а для $L_1^N(T_\alpha^2)$ выполняется

$$L_\gamma^N \leq 2 L_\gamma(T^2), \quad L_1^N(T_\alpha^2) \leq \frac{3}{\pi} = 0.954\dots \quad (L_1^N(T_\alpha^2) \leq 0.918\dots). \quad (4.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала (4.15) и (4.16). Обозначим через $N_r(f)$ число собственных значений $\mu_j(f)$ таких, что $\mu_j(f) \leq r$:

$$N_r(f) = \#\{\mu_j(f), \mu_j(f) \leq r\}.$$

Тогда

$$\sum_{\mu_j \leq 0} |\mu_j|^\gamma = \gamma \int_0^\infty r^{\gamma-1} N_{-r}(f) dr. \quad (4.18)$$

Используя ядро Бирмана–Швингера [1], [8] и матричное неравенство Либа и Тирринга [1], [20], получим

$$N_{-r}(f) \leq \text{Tr}(f + (1-t)r)_-^{k/2} (\Pi(-\Delta + tr)\Pi)^{-k} (f + (1-t)r)_-^{k/2},$$

где $r > 0$, $k \geq 1$ и $t \in [0, 1]$. Покажем сначала, что для $k > 1$

$$N_{-r}(f) \leq \frac{c_2}{2c_1} (k-1)^{-1} (tr)^{1-k} \int_{T^2} (f + (1-t)r)_-^k dx, \quad (4.19)$$

где c_1, c_2 определены в (4.8), (4.6). Действительно, полагая $g = (f + (1-t)r)_-$ и используя собственный базис, находим

$$[g^{k/2} (\Pi(-\Delta + tr)\Pi)^{-k} g^{k/2} \varphi](x) = \int_{T^2} G(x, x') \varphi(x') dx',$$

где

$$G(x, x') = \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j + tr)^{-k} g(x)^{k/2} w_j(x) g(x')^{k/2} w_j(x').$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \text{Tr } g^{k/2} (\Pi(-\Delta + tr)\Pi)^{-k} g^{k/2} \\ &= \int_{T^2} G(x, x) dx = \int_{T^2} \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j + tr)^{-k} g(x)^k w_j(x)^2 dx \\ &= \int_{T^2} \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j + tr)^{-k} g(x)^k (u_j(x)^2 + v_j(x)^2) dx \\ &= c_2 \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j + tr)^{-k} \int_{T^2} g(x)^k dx, \end{aligned}$$

что и доказывает (4.19), поскольку

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j + tr)^{-k} \leq \sum_{j=1}^{\infty} (2c_1 j + tr)^{-k} \leq \int_0^\infty \frac{ds}{(2c_1 s + tr)^k} = \frac{1}{2c_1} (k-1)^{-1} (tr)^{1-k}.$$

Учитывая (4.18), для $k \in (1, \gamma + 1)$ получаем

$$\begin{aligned}
 \sum_{\mu_j \leq 0} |\mu_j|^\gamma &\leq \frac{c_2 \gamma t^{1-k}}{2c_1(k-1)} \int_0^\infty \int_{T^2} r^{\gamma-k} (f(x) + (1-t)r)_-^k dx dr \\
 &= \frac{c_2 \gamma t^{1-k}}{2c_1(k-1)} \int_{T^2} \int_0^\infty r^{\gamma-k} (f(x) + (1-t)r)_-^k dr dx \\
 &= \frac{c_2 \gamma t^{1-k} (1-t)^{k-\gamma-1} B(\gamma+1-k, k+1)}{2c_1(k-1)} \int_{T^2} f_-(x)^{\gamma+1} dx \\
 &= \frac{c_2}{2c_1} \frac{\gamma^{\gamma+1} B(\gamma+1-k, k+1)}{(k-1)^k (\gamma+1-k)^{\gamma+1-k}} \int_{T^2} f_-(x)^{\gamma+1} dx \\
 &= \frac{1}{\pi^2} F(\gamma, k) \int_{T^2} f_-(x)^{\gamma+1} dx,
 \end{aligned}$$

где было выбрано оптимальное $t = (k-1)/\gamma$ и мы учли, что $c_2/(2c_1) = 1/\pi^2$ при $\alpha = 1$, а интеграл по r мы вычислили, полагая для почти всех x

$$r = \frac{1}{1-t} f_-(x) \rho.$$

Если $f \leq 0$ и $f_- = -f$, то $(f + (1-t)r)_- = f_-(\rho-1)_-$ и

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty r^{\gamma-k} (f(x) + (1-t)r)_-^k dr &= (1-t)^{k-\gamma-1} f_-(x)^2 \int_0^\infty \rho^{\gamma-k} (\rho-1)_-^k d\rho \\
 &= (1-t)^{k-\gamma-1} f_-(x)^2 \int_0^1 \rho^{\gamma-k} (1-\rho)^k d\rho \\
 &= (1-t)^{k-\gamma-1} B(\gamma+1-k, 1+k) f_-(x)^2.
 \end{aligned}$$

Если $f(x) > 0$, то $(f(x) + (1-t)r)_- = 0$, $f_-(x) = 0$ и предыдущее равенство выполнено формально.

Итак, (4.15) доказано. Для $\gamma = 1$ имеем

$$L_1(T^2) \leq \frac{1}{\pi^2} \min_{1 < k < 2} F(1, k) \leq \frac{1}{\pi^2} F\left(1, \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2\pi}. \quad (4.20)$$

На самом деле $\min_{1 < k < 2} F(1, k) = F(1, 1.38\dots) = \pi \cdot 1.4417$, что дает (4.16).

Доказательство неравенства (4.17) совершенно аналогично. Надо лишь использовать собственный базис в $NL_2(T_\alpha^2)$ и учесть, что $c_2(\alpha)/(2c_1^{(N)}(\alpha)) = 2/\pi^2$. Вместе с (4.20) это дает (4.17).

В заключение заметим, что из (4.10) вытекает

$$L_1^N(T_\alpha^2) \lesssim \frac{3}{2\pi^2} F(1, 1.38\dots) = 0.688\dots \quad \text{при } \alpha \rightarrow 0. \quad (4.21)$$

Из доказанной теоремы вытекают следующие неравенства (с явными константами) для различных семейств ортонормированных функций и соленоидальных векторных полей. Подытожим их в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть семейства скалярных функций $\{\varphi_j\}_{j=1}^m$ и вектор-функций $\{v_j\}_{j=1}^m$ являются субортонормированными в $L_2(T_\alpha^2)$, имеют нулевое среднее и $\operatorname{div} v_j = 0$. Положим $\rho_v(x) = \sum_{j=1}^m |v_j(x)|^2$ и $\rho_\varphi(x) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(x)^2$. Тогда справедливы неравенства

$$\int \rho_\varphi(x)^2 dx \leq \frac{c_{LT}}{\alpha} \sum_{j=1}^m \|\nabla \varphi_j\|^2, \quad \int \rho_v(x)^2 dx \leq \frac{c_{LT}}{\alpha} \sum_{j=1}^m \|\operatorname{rot} v_j\|^2, \quad c_{LT} \leq \frac{6}{\pi}. \quad (4.22)$$

Если $v_j = N v_j$, $\varphi_j = N \varphi_j$ и $\operatorname{div} v_j = 0$, то для $\rho_{Nv}(x) = \sum_{j=1}^m |N v_j(x)|^2$ и $\rho_{N\varphi}(x) = \sum_{j=1}^m N \varphi_j(x)^2$ выполнены неравенства

$$\int \rho_{N\varphi}(x)^2 dx \leq c_N \sum_{j=1}^m \|\nabla N v_j\|^2, \quad \int \rho_{Nv}(x)^2 dx \leq c_N \sum_{j=1}^m \|\operatorname{rot} N v_j\|^2, \quad c_N \leq \frac{12}{\pi}. \quad (4.23)$$

Наконец, если $v_j = M v_j$, $\operatorname{div} v_j = 0$, то для $\rho_{Mv}(x) = \sum_{j=1}^m |M v_j(x)|^2$ выполнено неравенство

$$\int \rho_{Mv}(x)^2 dx \leq \frac{c_M}{L} \sum_{j=1}^m \|\operatorname{rot} M v_j\|, \quad c_M \leq 6. \quad (4.24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу следствия 2.1 достаточно доказать (4.22)–(4.24) для ортонормированных семейств.

Из (4.16) и (2.6) следует, что первое неравенство в (4.22) с указанной в нем константой выполняется для $\alpha = 1$ для ортонормированного семейства скалярных функций. Учитывая замечание 3.1, видим, что второе неравенство в (4.22) с той же константой выполняется и для ортонормированной системы бездивергентных вектор-функций. Итак, $c_{LT} \leq 4 L_1(T^2) \leq 6/\pi$ и оба неравенства (4.22) доказаны для $\alpha = 1$.

Пусть теперь $\alpha < 1$. Докажем второе неравенство, доказательство первого аналогично. Дополнительно предположим, что $1/\alpha$ целое. Рассмотрим тор $T_\alpha^2 = (0, L/\alpha) \times (0, L)$ и $1/\alpha$ раз продолжим все функции периодически с периодом L в направлении x_2 [19]. Обозначим таким образом полученный большой тор с обоими периодами L/α через T^2 , а соответствующие вектор-функции – через $\tilde{v}_j$. Поскольку исходное семейство $\{v_j\}_{j=1}^m$ ортонормировано в $L_2(T_\alpha^2)$, то семейство $u_j = \sqrt{\alpha} \tilde{v}_j$ ортонормировано в $L_2(T^2)$. Применяя к этому семейству уже доказанное неравенство (4.22) с $\alpha = 1$, получим

$$\int_{T^2} \rho_u(x)^2 dx \leq \frac{6}{\pi} \sum_{j=1}^m \int_{T^2} |\operatorname{rot} u_j(x)|^2 dx.$$

Возвращаясь к T_α^2 и семейству v_j , находим, что

$$\int_{T^2} \rho_u(x)^2 dx = \alpha \int_{T_\alpha^2} \rho_v(x)^2 dx \quad \text{и} \quad \int_{T^2} |\operatorname{rot} u_j(x)|^2 dx = \|\operatorname{rot} v_j\|^2,$$

что и доказывает (4.22) при всех $\alpha \leq 1$, удовлетворяющих дополнительному техническому требованию, что $1/\alpha$ целое.

Оценка константы в неравенствах (4.23) следует из (4.17), (2.6) и замечания 3.1: $c_N \leq 4 L_1^{(N)}(T_\alpha^2) \leq 12/\pi$.

Докажем (4.24). Обе компоненты вектор-функции Mv зависят лишь от x_1 , а $\operatorname{div} Mv = 0$. Поэтому $Mv^1 = \operatorname{const} = 0$. Стало быть, $|\operatorname{rot} Mv(x)| = |(Mv^2)'_{x_1}|$ и (4.24) есть фактически одномерное скалярное неравенство. Если $\{Mv_j\}_{j=1}^m$ ортонормировано в $L(T_\alpha^2)$, то $\{\sqrt{L} Mv_j\}_{j=1}^m$ ортонормировано в $L_2(0, L/\alpha)$. Применяя неравенство (3.18), получаем

$$\begin{aligned} \int_{T_\alpha^2} \rho_M(x)^2 dx &= L \int_0^{L/\alpha} \rho_M(x_1)^2 dx_1 = \frac{1}{L} \int_0^{L/\alpha} \left(\sum_{j=1}^m (\sqrt{L} Mv_j)^2 \right)^2 dx_1 \\ &\leq \frac{k_1(\mathbb{S}^1)}{L} \sum_{j=1}^m \|\sqrt{L} Mv_j'\|_{L_2(0, L/\alpha)}^2 = \frac{k_1(\mathbb{S}^1)}{L} \sum_{j=1}^m \|\operatorname{rot} Mv_j\|, \end{aligned}$$

что доказывает (4.24).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Как и в теореме 4.1, справедливы чуть более точные оценки констант:

$$c_{LT} \leq 1.84, \quad c_M \leq k_1(\mathbb{S}^1) \leq 5.77, \quad c_N \leq 3.68 \quad \text{и} \quad c_N \lesssim 2.76 \quad \text{при} \quad \alpha \rightarrow 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть $f \in H^1(T^2)$ ($\alpha = 1$) и $\int f(x) dx = 0$. Тогда справедливо следующее мультипликативное неравенство:

$$\|f\|_{L_q(T^2)} \leq \left(\frac{2}{\pi^2} \right)^{(q-2)/(2q)} q^{1/2} \|f\|^{2/q} \|\nabla f\|^{1-2/q}, \quad q \in [2, \infty). \quad (4.25)$$

В частности, справедливо неравенство Ладженской

$$\|f\|_{L_4(T^2)} \leq \left(\frac{6}{\pi} \right)^{1/4} \|f\|^{1/2} \|\nabla f\|^{1/2}. \quad (4.26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим в теореме 2.2 $M = T^2$, $m = 1$ и оценим скорость роста постоянной k_p в (2.20) при $p \rightarrow 1$. В силу (2.21) и (4.15), учитывая, что $\gamma = p - 1$ и для $1 < k < p$

$$B(p - k, k + 1) < B(p - k, 2) = (p - k)^{-1} (p - k + 1)^{-1} < (p - k)^{-1},$$

имеем

$$\begin{aligned} k_p(T^2) &\leq p^p (p - 1)^{1-p} L_{p-1}(T^2) = \frac{p^p (p - 1)}{\pi^2} \min_{1 < k < p} \frac{B(p - k, k + 1)}{(k - 1)^k (p - k)^{p-k}} \\ &\leq \frac{p^p (p - 1)}{\pi^2} \min_{1 < k < p} \frac{1}{(k - 1)^k (p - k)^{p-k+1}} \\ &\leq \frac{p^p (p - 1)}{\pi^2} \frac{1}{(k - 1)^k (p - k)^{p-k+1}} \Big|_{k=(p+1)/2} = \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{2p}{p - 1} \right)^p. \end{aligned}$$

Положим теперь в (2.20) $N = 1$ и $\varphi_1 = f/\|f\|$. Тогда (2.20) принимает вид

$$\|f\|_{L_{2p/(p-1)}(T^2)} \leq k_p (T^2)^{1/(2p)} \|f\|^{1-1/p} \|\nabla f\|^{1/p}.$$

Обозначая $q = 2p/(p-1)$, так что $p = q/(q-2)$, получаем (4.25) для $q \in [4, \infty)$. Для $q \in [2, 4]$ нужно воспользоваться неравенством Гёльдера.

Наконец, (4.26) вытекает из (4.16). Кроме того, заметим, что показатель $1/2$ в (4.25) точный.

§ 5. Размерность аттрактора в задаче Колмогорова

В этом параграфе рассматривается система Навье–Стокса

$$\begin{aligned} \partial_t u + \sum_{i=1}^2 u^i \partial_i u &= \nu \Delta u - \nabla p + f, \\ \operatorname{div} u &= 0, \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Здесь u – вектор скорости, p – давление, $\nu > 0$ – вязкость, а f – вынуждающая сила. Система рассматривается на двумерном торе $T_\alpha^2 = (0, L/\alpha) \times (0, L)$, где $0 < \alpha \leq 1$ – безразмерный (малый) параметр. Другими словами, мы предполагаем, что все функции u , p , f периодичны с периодом L/α по x_1 и L по x_2 . Кроме того, предполагается, что f и u имеют нулевое среднее:

$$\int_{T_\alpha^2} f \, dx = 0, \quad \int_{T_\alpha^2} u \, dx = 0.$$

Обозначим через P ортогональный проектор из $L_2(T_\alpha^2)^2 \cap \left\{ u : \int_{T_\alpha^2} u \, dx = 0 \right\}$ на гильбертово пространство H , являющееся замыканием в $L_2(T_\alpha^2)^2$ множества гладких бездивергентных периодических векторных полей. Применяя P к первому уравнению в (5.1), получаем

$$\partial_t u + B(u, u) + \nu A u = f, \quad u(0) = u_0, \tag{5.2}$$

где $A = -P\Delta$ – оператор Стокса, а $B(u, v) = P(\sum_{i=1}^2 u^i \partial_i v)$ – нелинейный член. Кроме того, положим

$$b(v, u, w) = (B(v, u), w) = \int \sum_{i,k=1}^2 v^k \partial_k u^i w^i \, dx. \tag{5.3}$$

Хорошо известно, что уравнение (5.2) имеет единственное решение $u(t) \in H$, порождая тем самым полугруппу $S_t : H \rightarrow H$, $S_t u_0 = u(t)$, обладающую глобальным аттрактором $\mathcal{A} \subseteq H$, являющимся по определению компактным строго инвариантным множеством, притягивающим любые ограниченные множества (см., например, [8], [21]–[23]).

Напомним важные результаты об оценках снизу размерности аттрактора $\mathcal{A}$.

Предположим, что в системе (5.1) правая часть имеет вид

$$f = f_{\text{Kolm}} = \{f^1, f^2\} = \begin{cases} f^1 = \Lambda \nu^2 \sin \frac{2\pi x_2}{L}, \\ f^2 = 0, \end{cases} \quad (5.4)$$

где Λ – параметр. Тогда (5.1) имеет стационарное решение $\bar{p} = \text{const}$ и

$$\bar{u} = \begin{cases} \bar{u}^1 = \Lambda \nu \sin \frac{2\pi x_2}{L}, \\ \bar{u}^2 = 0. \end{cases}$$

Решение $\bar{u}$ называется *поток Колмогорова*. Вопрос об устойчивости этого решения исчерпывается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 5.1 (см. [24], [25]). *Для любого $\alpha < 1$ существует $\Lambda_0 = \Lambda_0(\alpha)$ такое, что для $\Lambda > \Lambda_0$ линеаризованная задача на собственные значения*

$$L_{\bar{u}}u = -B(\bar{u}, u) - B(u, \bar{u}) - \nu Au = \sigma u$$

имеет ровно $\lfloor \frac{1}{\alpha} \rfloor$ различных действительных положительных собственных значений с двумя линейно независимыми собственными функциями, соответствующими каждому собственному значению. Других собственных значений с положительной действительной частью нет. (Здесь $\lfloor x \rfloor$ обозначает количество целых положительных чисел, строго меньших x .)

Кроме того,

$$\Lambda_0(\alpha) \rightarrow \sqrt{2} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^3 \quad \text{при} \quad \alpha \rightarrow 0. \quad (5.5)$$

СЛЕДСТВИЕ 5.1 (см. [21]). *Справедлива следующая оценка снизу размерности аттрактора системы (5.1):*

$$\dim \mathcal{A} \geq 2 \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor. \quad (5.6)$$

Займемся теперь оценками сверху размерности аттрактора. Под размерностью будем понимать фрактальную размерность (см., например, [8]).

Полугруппа $S_t u_0 \rightarrow u(t)$ равномерно дифференцируема в H , и ее дифференциалом является линейный оператор $L(t, u_0): \xi \rightarrow U(t) \in H$, где $U(t)$ есть решение уравнения в вариациях

$$\partial_t U = -\nu AU - B(U, u(t)) - B(u(t), U) =: \mathcal{L}(t, u_0)U, \quad U(0) = \xi. \quad (5.7)$$

Кроме того, дифференциал $L(t, u_0)$ непрерывно зависит от начального значения $u_0 \in \mathcal{A}$ [21].

Следуя [9], [8], определим числа $q(m)$ – суммы первых m глобальных показателей Ляпунова:

$$q(m) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{u_0 \in \mathcal{A}} \sup_{\substack{\xi_i \in H \\ i=1, \dots, m}} \frac{1}{t} \int_0^t \text{Tr}[\mathcal{L}(\tau, u_0) \circ Q_m(\tau)] d\tau, \quad (5.8)$$

где $U_i(t)$ – решение уравнения (5.7) с начальным условием $U_i(0) = \xi_i$, $i = 1, \dots, m$, а через $Q_m(t)$ обозначен ортогональный (в H) проектор на подпространство $\text{Span}\{U_1(t), \dots, U_m(t)\}$. Числа $q(m)$ определены, таким образом, для целых положительных m . Доопределим $q(m)$ для всех m с помощью линейной интерполяции.

В [26] доказан следующий результат:

$$\dim_F \mathcal{A} \leq d_0, \quad \text{где } q(d_0) = 0. \quad (5.9)$$

Заметим, что раньше эта оценка была доказана для хаусдорфовой размерности [8], [9], [21], [23].

Оценим числа $q(m)$, для чего сначала оценим H^1 -норму решений на аттракторе.

Предположим, что правая часть $f \in NH$. (Заметим, что $f_{\text{Kolm}} \in NH$.) Для вектор-функций $u \in NH \cap H^1(T_\alpha^2)^2$, $\text{div } u = 0$, справедливо неравенство Пуанкаре

$$\|u\|^2 \leq \lambda_1^{-1} \|\text{rot } u\|^2, \quad (5.10)$$

где $\lambda_1 = \lambda_1^{(N)} = 4\pi^2/L^2$ – первое собственное значение оператора Стокса, суженного на NH . Действительно, из доказательства предложения 4.1 следует, что первое собственное значение скалярного оператора $-N\Delta$ есть $4\pi^2/L^2$. Поскольку проектор N действует на вектор u покомпонентно, то

$$\|u\|^2 \leq \frac{L^2}{4\pi^2} \|\nabla u\|^2 = \frac{L^2}{4\pi^2} \|\text{rot } u\|^2.$$

Равенство здесь достигается для $u = \text{rot } \omega$, где ω – собственная функция, отвечающая собственному значению $\lambda_1^{(N)} = 4\pi^2/L^2$.

Умножая (5.2) скалярно на u , интегрируя по частям и пользуясь хорошо известным соотношением $(B(u, v), v) = 0$ и неравенством (5.10), получаем

$$\begin{aligned} \partial_t \|u\|^2 + 2\nu \|\text{rot } u\|^2 &= 2(f, u) = 2(Nf, u) = 2(f, Nu) \leq \nu \lambda_1 \|Nu\|^2 + \nu^{-1} \lambda_1^{-1} \|f\|^2 \\ &\leq \nu \|\text{rot } Nu\|^2 + \nu^{-1} \lambda_1^{-1} \|f\|^2 \leq \nu \|\text{rot } u\|^2 + \nu^{-1} \lambda_1^{-1} \|f\|^2. \end{aligned}$$

Интегрируя по t , получаем

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \|\text{rot } u(\tau)\|^2 d\tau \leq \frac{1}{4\pi^2} \frac{L^2 \|f\|^2}{\nu^2}. \quad (5.11)$$

Теперь оценим m -след оператора $\mathcal{L}$ в (5.7). Поскольку $U_i(t) \in H^1(T_\alpha^2)$ при $t > 0$, обозначим через $v_i = v_i(t) \in H \cap H^1$, $i = 1, \dots, m$, ортонормированный

(в H) базис в $\text{Span}\{U_1(t), \dots, U_m(t)\}$. Интегрируя по частям, используя соотношение $(B(u(t), v_j), v_j) = 0$, ортонормированность v_j и первое неравенство из (5.31), получаем

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}[\mathcal{L}(t, u_0) \circ Q_m(t)] &= \sum_{j=1}^m (\mathcal{L}(t, u_0) v_j, v_j) \\
 &= -\nu \sum_{j=1}^m \|\text{rot } v_j\|^2 + \int \sum_{j=1}^m \sum_{i,k=1}^2 v_j^k \partial_k u^i v_j^i dx \\
 &\leq -\nu \sum_{j=1}^m \|\text{rot } v_j\|^2 + 2^{-1/2} \int \rho(x) |\nabla u(x)| dx \\
 &\leq -\nu \sum_{j=1}^m \|\text{rot } v_j\|^2 + 2^{-1/2} \|\rho\| \|\text{rot } u(t)\| \\
 &\leq -\frac{\nu}{2} \sum_{j=1}^m \|\text{rot } v_j\|^2 + \frac{c_{\text{LT}}}{4\nu\alpha} \|\text{rot } u(t)\|^2,
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

где $\rho(x) = \sum_{j=1}^m |v_j(x)|^2$ и на последнем шаге было использовано неравенство (4.22). Далее, из ортонормированности семейства v_j получаем

$$m^2 = \left(\int \rho(x) dx \right)^2 \leq \frac{L^2}{\alpha} \|\rho\|^2 \leq \frac{L^2 c_{\text{LT}}}{\alpha^2} \sum_{j=1}^m \|\text{rot } v_j\|^2, \quad \sum_{j=1}^m \|\text{rot } v_j\|^2 \geq \frac{\alpha^2 m^2}{L^2 c_{\text{LT}}}.$$

Поэтому для чисел $q(m)$ получаем, используя (5.11), оценку

$$\begin{aligned}
 q(m) &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{u_0 \in \mathcal{A}} \sup_{\substack{\xi_i \in H \\ i=1, \dots, m}} \frac{1}{t} \int_0^t \text{Tr}[\mathcal{L}(\tau, u_0) \circ Q_m(\tau)] d\tau \\
 &\leq -\frac{\nu \alpha^2 m^2}{2L^2 c_{\text{LT}}} + \frac{c_{\text{LT}}}{16\pi^2 \alpha} \frac{L^2 \|f\|^2}{\nu^3} = \frac{\nu}{2c_{\text{LT}} L^2} \left[-\alpha^2 m^2 + \frac{c_{\text{LT}}^2}{8\pi^2 \alpha} G^2 \right],
 \end{aligned}$$

где

$$G = \frac{L^2 \|f\|}{\nu^2}. \tag{5.13}$$

Поскольку $c_{\text{LT}} \leq 6/\pi$, то, используя (5.9), окончательно получаем

$$\dim_F \mathcal{A} \leq \frac{1}{\alpha^{3/2}} \frac{c_{\text{LT}}}{2\sqrt{2}\pi} G \leq \frac{1}{\alpha^{3/2}} \frac{3}{\sqrt{2}\pi^2} G. \tag{5.14}$$

Здесь удобно ввести число

$$\tilde{G} = \sqrt{\alpha} G, \tag{5.15}$$

которое “не зависит” от α . Действительно, если $f = f(x_2)$ не зависит от x_1 (а именно этот случай нас интересует больше всего, имея в виду потоки Колмогорова), то $\|f\|^2 = \|f\|_{L_2(T_\alpha^2)}^2 = (L/\alpha) \|f\|_{L_2(0,L)}^2$. Таким образом, в этом случае

$$\tilde{G} = \frac{L^{5/2} \|f\|_{L_2(0,L)}}{\nu^2}. \tag{5.16}$$

Оценка (5.14) принимает вид

$$\dim_F \mathcal{A} \leq \frac{1}{\alpha^2} \frac{3}{\sqrt{2} \pi^2} \tilde{G}. \quad (5.17)$$

В действительности оценку (5.17) можно существенно улучшить и доказать, что справедлива оценка сверху порядка $1/\alpha$. Это было сделано в [12]. Мы далее следуем этой работе с некоторыми техническими улучшениями. Кроме того, теорема 4.2 позволит получить основную оценку из [12] в явном виде.

Возвращаясь к (5.12), имеем

$$\mathrm{Tr}[\mathcal{L}(t, u_0) \circ Q_m(t)] = \sum_{j=1}^m (\mathcal{L}(t, u_0) v_j, v_j) = -\nu \sum_{j=1}^m \|\mathrm{rot} v_j\|^2 + \sum_{j=1}^m b(v_j, u, v_j). \quad (5.18)$$

Представим u и v_j в виде $u = Mu + Nu$, $v_j = Mv_j + Nv_j$. Заметим, что если $\mathrm{div} w = 0$, то $\mathrm{div} Nw = 0$ и $\mathrm{div} Mw = 0$. Поскольку Mu и Mv_j зависят только от x_1 , $Mu^1 = Mv_j^1 = 0$ и $\int_0^L Nu(x_1, x_2) dx_2 = 0$, то

$$b(Mv_j, u, Mv_j) = 0, \quad b(Mv_j, Mu, Nv_j) = 0, \quad b(Nv_j, Mu, Mv_j) = 0$$

и для трилинейной формы b (см. (5.3)) справедливо равенство

$$b(v_j, u, v_j) = b(Nv_j, u, Nv_j) + b(Mv_j, Nu, Nv_j) + b(Nv_j, Nu, Mv_j).$$

На основании предложения 5.1 получаем

$$\sum_{j=1}^m b(v_j, u, v_j) \leq 2^{-1/2} \|\mathrm{rot} u\| \|\rho_{Nv}\| + 2^{1/2} \|\mathrm{rot} Nu\| \|\rho_{Mv}\|^{1/2} \|\rho_{Nv}\|^{1/2}. \quad (5.19)$$

Для первого слагаемого имеем, используя (4.23),

$$2^{-1/2} \|\mathrm{rot} u\| \|\rho_{Nv}\| \leq \frac{c_N}{2\nu} \|\mathrm{rot} u\|^2 + \frac{\nu}{4c_N} \|\rho_{Nv}\|^2 \leq \frac{c_N}{2\nu} \|\mathrm{rot} u\|^2 + \frac{\nu}{4} \sum_{j=1}^m \|\mathrm{rot} Nv_j\|^2. \quad (5.20)$$

Аналогично для второго слагаемого

$$\begin{aligned} 2^{1/2} \|\mathrm{rot} Nu\| \|\rho_{Mv}\|^{1/2} \|\rho_{Nv}\|^{1/2} &\leq 2^{1/2} \|\mathrm{rot} u\| \|\rho_{Mv}\|^{1/2} \|\rho_{Nv}\|^{1/2} \\ &\leq 2^{1/2} \|\mathrm{rot} u\| c_N^{1/4} \left(\sum_{j=1}^m \|\mathrm{rot} Nv_j\|^2 \right)^{1/4} \frac{c_M^{1/4}}{L^{1/4}} m^{1/8} \left(\sum_{j=1}^m \|\mathrm{rot} Mv_j\|^2 \right)^{1/8} \\ &\leq \frac{\sqrt{c_M c_N}}{2\nu} \|\mathrm{rot} u\|^2 + \nu \left(\sum_{j=1}^m \|\mathrm{rot} Nv_j\|^2 \right)^{1/2} \frac{m^{1/4}}{L^{1/2}} \left(\sum_{j=1}^m \|\mathrm{rot} Mv_j\|^2 \right)^{1/4} \\ &\leq \frac{\sqrt{c_M c_N}}{2\nu} \|\mathrm{rot} u\|^2 + \frac{\nu}{4} \sum_{j=1}^m \|\mathrm{rot} Nv_j\|^2 + \frac{\nu m^{1/2}}{L} \left(\sum_{j=1}^m \|\mathrm{rot} Mv_j\|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{\sqrt{c_M c_N}}{2\nu} \|\mathrm{rot} u\|^2 + \frac{\nu}{4} \sum_{j=1}^m \|\mathrm{rot} Nv_j\|^2 + \frac{\nu}{2} \sum_{j=1}^m \|\mathrm{rot} Mv_j\|^2 + \frac{\nu m}{2L^2}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Из (5.19)–(5.21) выводим

$$\sum_{j=1}^m b(v_j, u, v_j) \leq \frac{c_N + \sqrt{c_M c_N}}{2\nu} \|\operatorname{rot} u\|^2 + \frac{\nu}{2} \sum_{j=1}^m \|\operatorname{rot} v_j\|^2 + \frac{\nu m}{2L^2}. \quad (5.22)$$

Поэтому для (5.18) получаем

$$\operatorname{Tr}[\mathcal{L}(t, u_0) \circ Q_m(t)] \leq -\frac{\nu}{2} \sum_{j=1}^m \|\operatorname{rot} v_j\|^2 + \frac{c_N + \sqrt{c_M c_N}}{2\nu} \|\operatorname{rot} u\|^2 + \frac{\nu m}{2L^2}. \quad (5.23)$$

Оценим теперь первое слагаемое. Поскольку

$$\begin{aligned} m^2 &= \left(\int \rho(x) dx \right)^2 = \left(\int \rho_M(x) dx + \int \rho_N(x) dx \right)^2 \\ &\leq 2 \left(\int \rho_M(x) dx \right)^2 + 2 \left(\int \rho_N(x) dx \right)^2 \leq \frac{2L^2}{\alpha} (\|\rho_N\|^2 + \|\rho_M\|^2), \end{aligned}$$

то, используя (4.23) и (4.24), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\alpha m^2}{2L^2} &\leq c_N \sum_{j=1}^m \|\operatorname{rot} N v_j\|^2 + \frac{c_M}{L} m^{1/2} \left(\sum_{j=1}^m \|\operatorname{rot} M v_j\|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq c_N \sum_{j=1}^m \|\operatorname{rot} N v_j\|^2 + c_N \sum_{j=1}^m \|\operatorname{rot} M v_j\|^2 + \frac{c_M^2 m}{4c_N L^2} = c_N \sum_{j=1}^m \|\operatorname{rot} v_j\|^2 + \frac{c_M^2 m}{4c_N L^2} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\sum_{j=1}^m \|\operatorname{rot} v_j\|^2 \geq \frac{\alpha m^2}{2c_N L^2} - \frac{c_M^2}{c_N^2} \frac{m}{4L^2}. \quad (5.24)$$

Используя в (5.23) оценку решений на аттракторе (5.11) и (5.24), получаем

$$q_m \leq \frac{\nu}{4c_N L^2} \left[-\alpha m^2 + c_N \left(\frac{c_M^2}{2c_N^2} + 2 \right) m + \frac{c_N (c_N + \sqrt{c_M c_N})}{2\pi^2} G^2 \right]. \quad (5.25)$$

Полагая для простоты $c_N = c_M = 6$ и пользуясь элементарной оценкой $m_* < a + c$ для положительного корня m_* квадратного уравнения $m^2 - am - c^2 = 0$, на основании (5.9) получаем отсюда

$$\dim_F \mathcal{A} \leq \frac{1}{\alpha} \left(15 + \frac{6}{\pi} \tilde{G} \right), \quad \text{где} \quad \tilde{G} = \alpha^{1/2} G = \frac{\alpha^{1/2} L^2 \|f\|}{\nu^2}. \quad (5.26)$$

Используя более точные оценки констант из замечания 4.1: $c_M \leq k_1(\mathbb{S}^1) \leq 5.77$, $c_N \leq 3.68$, аналогичным образом получаем

$$\dim_F \mathcal{A} \leq \frac{1}{\alpha} (11.9 + 1.3\tilde{G}). \quad (5.27)$$

В заключение вновь рассмотрим системы Навье–Стокса с колмогоровской правой частью (5.4). Положим там $\Lambda = \Lambda_0(\alpha)$ и учтем (5.5). Тогда для числа $\tilde{G}$, определенного в (5.15) или (5.16), получим

$$\tilde{G}_{\text{Kolm}} \rightarrow (2\pi)^3, \quad \alpha \rightarrow 0. \quad (5.28)$$

Подставим это значение $\tilde{G}$ в (5.25). Тогда для аттрактора $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\text{Kolm}}$ получим с учетом (5.6) следующую двустороннюю оценку:

$$\frac{2}{\alpha} \lesssim \dim_F \mathcal{A}_{\text{Kolm}} \lesssim \frac{247}{\alpha}, \quad \alpha \rightarrow 0. \quad (5.29)$$

Итак, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5.2. *Пусть в системе Навье–Стокса (5.1) на торе T_α^2 правая часть $f \in NH$. Тогда справедлива оценка фрактальной размерности глобального аттрактора $\mathcal{A}$:*

$$\dim_F \mathcal{A} \leq \min \left(\frac{1}{\alpha} \left(15 + \frac{6}{\pi} \tilde{G} \right), \frac{1}{\alpha^2} \frac{3}{\sqrt{2}\pi^2} \tilde{G} \right), \quad \text{где} \quad \tilde{G} = \frac{\alpha^{1/2} L^2 \|f\|}{\nu^2}. \quad (5.30)$$

Для колмогоровской правой части (5.4) при условии (5.5) выполняется двусторонняя оценка (5.29).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Если $\operatorname{div} u(x) = 0$, то*

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k,i=1}^2 v^k(x) \partial_k u^i(x) v^i(x) \right| &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} |\nabla u(x)| |v(x)|^2, \\ \left| \sum_{k,i=1}^2 (v^k(x) \partial_k u^i(x) w^i(x) + w^k(x) \partial_k u^i(x) v^i(x)) \right| &\leq \sqrt{2} |\nabla u(x)| |v(x)| |w(x)|, \end{aligned} \quad (5.31)$$

где v и w – произвольные вектор-функции, а $|\nabla u| = (\sum_{k,i=1}^2 (\partial_k u^i)^2)^{1/2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначая

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \partial_1 u^1 & \partial_1 u^2 \\ \partial_2 u^1 & \partial_2 u^2 \end{pmatrix}, \quad \nabla u^* = \begin{pmatrix} \partial_1 u^1 & \partial_2 u^1 \\ \partial_1 u^2 & \partial_2 u^2 \end{pmatrix},$$

получим

$$\left| \sum_{k,i=1}^2 v^k \partial_k u^i v^i \right| = |\nabla u v \cdot v| = \left| \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^*) v \cdot v \right| \leq \lambda |v|^2,$$

где λ – максимальное по абсолютной величине собственное значение матрицы $\frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^*)$. Из характеристического полинома с учетом условия $\operatorname{div} u = 0$ получаем, что собственные значения этой матрицы суть $\lambda > 0$ и $-\lambda$, где

$$\lambda^2 = (\partial_1 u^1)^2 + \frac{1}{4}(\partial_1 u^2 + \partial_2 u^1)^2 \leq \frac{1}{2} |\nabla u|^2,$$

что доказывает первое неравенство в (5.31). Для доказательства второго неравенства имеем

$$\left| \sum_{k,i=1}^2 (v^k(x) \partial_k u^i(x) w^i(x) + w^k(x) \partial_k u^i(x) v^i(x)) \right| = |(\nabla u + \nabla u^*) v \cdot w| \leq 2\lambda |v| |w|.$$

Список литературы

1. Lieb E., Thirring W. Inequalities for the moments of the eigenvalues of the Schrödinger hamiltonian and their relation to Sobolev inequalities // Studies in mathematical physics. Essays in honor of Valentine Bargmann. Princeton: Princeton Univ. Press, 1976. P. 269–303.
2. Руд М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. М.: Мир, 1982.
3. Netrusov Y., Weidl T. On Lieb–Thirring inequalities for higher order operators with critical and subcritical powers // Comm. Math. Phys. 1996. V. 182. P. 355–370.
4. Бурман М. Ш., Борзов В. В. Проблемы математической физики. Т. 5. ЛГУ, 1971.
5. Laptev A., Weidl T. Sharp Lieb–Thirring inequalities in high dimensions // Acta Math. 2000. V. 184. P. 87–111.
6. Hundertmark D., Laptev A., Weidl T. New bounds on the Lieb–Thirring constants // Inv. Math. 2000. V. 140. №3. P. 693–704.
7. Lieb E. On characteristic exponents in turbulence // Comm. Math. Phys. 1984. V. 92. P. 473–480.
8. Temam R. Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics. New York: Springer-Verlag, 1997.
9. Constantin P., Foias C. Global Lyapunov exponents, Kaplan–Yorke formulas and the dimension of the attractors for the 2D Navier–Stokes equations // Comm. Pure Appl. Math. 1985. V. 38. P. 1–27.
10. Ghidaglia J. M., Marion M., Temam R. Generalization of the Sobolev–Lieb–Thirring inequalities and applications to the dimension of attractors // Differential Integral Equations. 1988. V. 1. P. 1–21.
11. Ilyin A. A. Attractors for Navier–Stokes equations in domains with finite measure // Nonlinear Anal. 1996. V. 27. P. 605–616.
12. Ziane M. Optimal bounds on the dimension of attractors for the Navier–Stokes equations // Phys. D. 1997. V. 105. P. 1–19.
13. Miranville A., Ziane M. On the dimension of the attractor for the Benard problem with free surfaces // Russian J. Math. Phys. 1998. V. 5. P. 489–502.
14. Constantin P., Foias C., Temam R. On the dimension of the attractors in two-dimensional turbulence // Phys. D. 1988. V. 30. P. 284–296.
15. Eden A., Foias C. A simple proof of the generalized Lieb–Thirring inequalities in one space dimension // J. Math. Anal. Appl. 1991. V. 162. P. 250–254.
16. Ильин А. А. Точные постоянные для одного класса полимультипликативных неравенств для производных // Матем. сб. 1998. Т. 189. №9. С. 61–84.
17. Ильин А. А. Частично диссипативные полугруппы, порождаемые системой Навье–Стокса на двумерных многообразиях, и их аттракторы // Матем. сб. 1993. Т. 184. №1. С. 55–88.
18. Ilyin A. A. Lieb–Thirring inequalities on the N -sphere and in the plane, and some applications // Proc. London Math. Soc. (3). 1993. V. 67. P. 159–182.
19. Ghidaglia J. M., Temam R. Lower bound on the dimension of the attractor for the Navier–Stokes equations in space dimension 3 // Mechanics, analysis and geometry: 200 years after Lagrange / ed. M. Francaviglia, D. Holmes. Amsterdam: Elsevier, 1991. P. 33–60.
20. Araki H. On an inequality of Lieb and Thirring // Lett. Math. Phys. 1990. V. 19. P. 167–170.
21. Бабин А. В., Вишик М. И. Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1988.
22. Ladyzhenskaya O. A. Attractors for semigroups and evolution equations. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991.
23. Babin A. V. Attractors of Navier–Stokes equations // Handbook of mathematical fluid dynamics. V. II. Amsterdam: North-Holland, 2003. P. 169–222.

24. Мешалкин Л. Д., Синай Я. Г. Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости // Прикл. матем. и мех. 1961. Т. 25. С. 1140–1143.
25. Юдович В. И. Пример рождения вторичного стационарного или периодического течения при потере устойчивости ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости // Прикл. матем. и мех. 1965. Т. 29. С. 453–467.
26. Chepyzhov V. V., Ilyin A. A. On the fractal dimension of invariant sets; applications to Navier–Stokes equations // Discrete Contin. Dynam. Systems. 2004. V. 10. № 1&2. P. 117–135.

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН
E-mail: ilyin@spp.keldysh.ru

Поступила в редакцию
02.02.2004