Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Колмыков, Преобразование Кокстера: дельтоиды, трилистники и числа распада, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 1, 67–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1261>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 11:43:29

УДК 512.543.14+512.643.5+512.817.73

В. А. Колмыков

Преобразование Кокстера: дельтоиды, трилистники и числа распада

Рассматриваются преобразования Кокстера, ассоциированные с дельтоидами (т.е. с графами, все простые циклы которых имеют длину три). Во множестве всех связанных дельтоидов, в спектре которых есть минус единица, описываются все неразложимые объекты, находится система образующих элементов и операций. Рассматривается одна формализация понятия “критическое число распада”.

Библиография: 8 названий.

Введение

Преобразование Кокстера — это суперпозиция операторов, являющихся отражениями относительно некоторого набора гиперплоскостей. Такой линейный оператор естественно появляется в ряде вопросов алгебры и анализа. Используемые наборы отражений возникают не сами по себе: исследуемой задаче сопутствует некоторая геометрическая или алгебраическая “структура”, а отражения являются простейшими операторами, сохраняющими ее.

Во многих ситуациях (см., например, [1], [2]) преобразование Кокстера появляется следующим образом. Пусть G — граф¹. Всякая комплексная функция, определенная на множестве его вершин, называется *взвешиванием*. Взвешивания естественно образуют $|G|$ -мерное пространство. С каждой вершиной u свяжем преобразование σ_u этого пространства: σ_u не меняет весов вершин, отличных от u , а вес вершины u заменяет на противоположный плюс сумма весов всех вершин, инцидентных u . Операторы σ_u являются отражениями (в смысле [1; гл. V, §2]). *Преобразованием Кокстера* называется суперпозиция всех отражений σ_u , взятых по одному (порядок произвольный). Итак, с каждым графом связано, вообще говоря, несколько преобразований Кокстера.

Главное, что мы хотим знать о преобразовании Кокстера — его спектральные свойства, например информацию о характеристическом многочлене. А так как преобразований Кокстера, ассоциированных с графом, вообще говоря, несколько, то мы имеем дело с целым набором характеристических многочленов. Изучению этого набора многочленов препятствуют естественные комбинаторные сложности. Однако существуют графы, для которых такие комбинаторные сложности отсутствуют.

¹Под словом “граф” в этой статье понимается пара (V_0, V_1) , где V_0 — некоторое непустое конечное множество, а V_1 — некоторое множество, состоящее из двухэлементных подмножеств множества V_0 .

Дельтоидом называется граф, в котором нет простых циклов² длины > 3 . Например, всякое дерево является дельтоидом. В [3] показано, что все преобразования Кокстера, ассоциированные с дельтоидом, имеют одинаковый характеристический многочлен. Множество всех корней этого многочлена называется *спектром дельтоида*.

В [4] и [5] подробно исследовалась ситуация появления минус единицы в спектре дерева. В настоящей статье мы рассматриваем множество Δ_- всех связных дельтоидов, в спектре которых есть минус единица. Мы находим для этого множества систему образующих элементов и операций.

Дельтоид из Δ_- называется *неразложимым*, если его нельзя представить в виде склейки по вершине двух дельтоидов из Δ_- . Мы описываем все неразложимые дельтоиды. Оказывается, они строятся некоторым простым способом из деревьев-трилистников. Доказательство этого утверждения составляет наиболее сложную часть статьи.

Начинается же статья с одной формализации интуитивного понятия “критическое число распада”.

§ 1. Модели разложения и критическое число распада

Пусть $(M, *)$ – коммутативная полугруппа с единичным элементом и всякий ее неединичный элемент необратим. Пусть, кроме того, задано некоторое непустое подмножество $E \subseteq M$. Если θ – единичный элемент в $(M, *)$, то положим $\tilde{M} = M \setminus \{\theta\}$, $\tilde{E} = E \setminus \{\theta\}$. Элемент $x \in \tilde{E}$ называется *разложимым (над $\tilde{E}$)*, если его можно представить в виде $x = a * b$, где $a, b \in \tilde{E}$. Тройку $\mathcal{M} = (M, *, E)$ назовем *моделью разложения*.

Через $\tilde{M}^{*t}$ обозначим множество всех элементов вида $u_1 * \dots * u_m$, где $u_1, \dots, u_m \in \tilde{M}$ (если $t = 1$, то запись $u_1 * \dots * u_m$ означает u_1).

Пусть $\mathcal{M} = (M, *, E)$ – некоторая модель разложения. Натуральное число n назовем *числом распада для $\mathcal{M}$* , если для любого $t \geq n$ всякий элемент множества $\tilde{M}^{*t} \cap \tilde{E}$ является разложимым. Например, если все элементы из E разложимы, то число 1 является числом распада.

Если для $\mathcal{M}$ существует хотя бы одно число распада, то среди таких чисел есть наименьшее. Это наименьшее число распада назовем *критическим числом распада для модели $\mathcal{M}$* и обозначим $k(\mathcal{M})$. Если для $\mathcal{M}$ нет ни одного числа распада, то $k(\mathcal{M})$ не определено.

Рассмотренные нами модели разложения слишком абстрактны. Интерес представляют модели разложения, удовлетворяющие дополнительным аксиомам.

Пусть A – некоторая аксиома³. *Критическим числом распада при аксиоме A* назовем натуральное число $k(A)$, для которого выполнены следующие два условия:

²Простым циклом (длины $k \geq 3$) в графе называется последовательность $\{v_i\}_{i \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$ попарно различных вершин таких, что v_i инцидентна v_{i+1} для любого i .

³Для чтения статьи достаточно интуитивного понимания слова “аксиома”. Говоря же точно, под “аксиомой” мы понимаем формулу на формализованном языке Пермело–Френкеля L_1 Set теории множеств (см., например, [6; гл. I]).

- 1) для любой модели разложения $\mathcal{M}$, удовлетворяющей аксиоме A , справедливо неравенство $k(\mathcal{M}) \leq k(A)$;
- 2) существует модель разложения $\mathcal{M}_0$, удовлетворяющая аксиоме A и такая, что $k(\mathcal{M}_0) = k(A)$.

Рассмотрим следующую аксиому, которую назовем FP -постулатом.

Существуют отображения $F: M \rightarrow \mathbb{Z}$ и $P: \widetilde{M} \rightarrow M$ такие, что

$$F^{-1}(0) = E, \quad (1.1)$$

$$P(\widetilde{M} \setminus E) \subseteq E, \quad (1.2)$$

$$\text{если } u, v \in \widetilde{M}, \quad \text{то } F(P(u * v)) = F(P(u))F(P(v)), \quad (1.3)$$

$$\text{если } u, v \in \widetilde{M}, \quad \text{то } F(u * v) = F(P(u))F(v) + F(u)F(P(v)). \quad (1.4)$$

ТЕОРЕМА 1. *Критическое число распада при FP -постулате равно 4.*

Доказательство см. в §4. Эта теорема понадобится в §5.

§ 2. Неразложимые дельтоиды

При описании операций над графами удобно использовать понятие пунктированного графа, т.е. графа, в котором отмечена одна из вершин. Формально говоря, граф — это пара (V_0, V_1) , а пунктированный граф — это тройка (V_0, v, V_1) , где $v \in V_0$.

Если F и G — пунктированные графы, то через $F \oplus G$ обозначим пунктированный граф, получающийся из F и G отождествлением отмеченных вершин, причем отмеченной в $F \oplus G$ считается вершина, получившаяся в результате отождествления двух ранее отмеченных.

Через Δ будем обозначать множество всех связных дельтоидов, а через Δ_- — множество всех связных дельтоидов, содержащих в спектре минус единицу.

Дельтоид $H \in \Delta_-$ назовем разложимым (соответственно неразложимым), если существуют (соответственно не существуют) дельтоиды $F, G \in \Delta_- \setminus \{H\}$ такие, что при некотором их пунктировании и применении операции $\oplus$ получаем дельтоид H , пунктированный некоторым образом.

Следуя традиции⁴, через A_n обозначим граф, являющийся n -вершинной цепью: $A_n = (V_0, V_1)$, где $V_0 = \{v_1, \dots, v_n\}$, $V_1 = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}\}$ (если $n = 1$, то $V_1 = \emptyset$). В A_n отметим вершину степени $\neq 2$. Полученный пунктированный граф обозначим $\dot{A}_n$.

Пусть $p \geq q \geq r$. В пунктированном дереве $\dot{A}_p \oplus \dot{A}_q \oplus \dot{A}_r$ отменим пунктирование. Полученное дерево обозначим $T_{p,q,r}$ и назовем *трилистником*. Таким образом, если $r \geq 2$, то трилистник $T_{p,q,r}$ — это граф, в котором есть одна вершина степени 3 и от нее отходят три пути, длины которых соответственно равны $p-1$, $q-1$ и $r-1$. Если же $r = 1$, то $T_{p,q,r} = A_{p+q-1}$.

⁴Исследования преобразований Кокстера в значительной мере мотивированы проблемами, возникающими в теории алгебр Ли и в теории представлений. Обозначения, принятые в этих теориях, удобны (учитывая контингент возможных читателей) и для формулировки наших результатов.

Трилистники естественно появляются при исследовании квадратичных форм, связанных с алгебрами Ли (см., например, [1; гл. VI, § 4], [7; гл. 4], [8]).

Ребро дерева назовем *периферийным*, если степень одной его вершины равна 1, а степень другой не равна 1. Например, если $n \geq 3$, то в A_n два периферийных ребра; в A_2 и в A_1 периферийных ребер нет.

По каждому дереву F построим новый дельтоид следующим образом. Пусть $l_1, \dots, l_m$ – перечень всех непериферийных ребер F . К множеству вершин дерева F добавим m вершин $w_1, \dots, w_m$. Для каждого $i \in \{1, \dots, m\}$ соединим w_i с концами ребра l_i . При такой операции число вершин графа увеличилось на m , а число ребер – на $2m$. Получившийся граф является дельтоидом. Обозначим его F^Δ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Сопоставление $F \mapsto F^\Delta$ можно рассматривать как частичное отображение $\Delta \rightarrow \Delta$. Это отображение имеет среди трилистников ровно три неподвижные точки: $T_{2,2,2}$, $T_{2,2,1}$ и $T_{1,1,1}$.

ТЕОРЕМА 2. *Дельтоиды $T_{p,q,r}^\Delta$ и только они неразложимы.*

Доказательство см. в § 5.

§ 3. Конструктор для Δ_-

Пусть M – некоторое множество, R – набор операций (возможно, частичных и многозначных), позволяющих из элементов множества M строить какие-то элементы из этого же множества. Если $P \subseteq M$, то через $R(P)$ обозначим множество всех элементов множества M , получающихся из элементов множества P применением к ним (с учетом аргументности) операций из множества R . Обозначим $P \cup R(P) \cup R(R(P)) \cup \dots = \langle P \mid R \rangle$. Если $L \subseteq M$ и $L = \langle P \mid R \rangle$, то пару (P, R) назовем *конструктором* для множества L . Если $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ и $R = \{r_1, \dots, r_m\}$, то вместо $\langle P \mid R \rangle$ иногда удобно писать $\langle p_1, \dots, p_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$. В [4] приведены примеры, показывающие, что понятие конструктора формализует понятие “основная теорема”.

На множестве Δ введем многозначную операцию $\oplus$ и многозначную частичную операцию Υ . Заметим, что при этом не возникает путаницы с (однозначной) операцией $\oplus$, определенной на множестве пунктированных графов: из описания операндов или из контекста всегда будет ясно, о какой операции идет речь.

Пусть $G_1, G_2 \in \Delta$. Через $G_1 \oplus G_2$ обозначим множество, описываемое следующим условием: $H \in G_1 \oplus G_2$ тогда и только тогда, когда G_1 , G_2 и H можно пунктировать так, что пунктированный H получается из пунктированных G_1 и G_2 применением операции $\oplus$ для пунктированных графов. Неформально говоря, множество $G_1 \oplus G_2$ состоит из результатов всевозможных вершинных склеек дельтоидов G_1 и G_2 .

Теперь опишем операцию Υ . Ребро графа назовем *циклическим*, если его вершины принадлежат множеству вершин некоторого простого цикла. Пусть $G_1 = (V_0, V_1)$ и $G_2 = (U_0, U_1)$ – дельтоиды из Δ . Множество нециклических ребер дельтоида G_1 обозначим V'_1 . Пусть $\{v, w\} \in V'_1$, $u \in U_0$. К графу $G_1 \sqcup G_2$ добавим одну вершину, которую соединим с каждой из вершин v , w и u . Полученный граф обозначим $G_1\{v, w\} + uG_2$ (число его вершин равно $|V_0| + 1 + |U_0|$, число его ребер равно $|V_1| + 3 + |U_1|$). Положим $G_1 \Upsilon G_2 = \{G_1\{v, w\} + uG_2\}_{\{v, w\} \in V'_1, u \in U_0}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Операция $\oplus$ коммутативна: множества $G_1 \oplus G_2$ и $G_2 \oplus G_1$ совпадают. Операция Υ некоммутативна: множества $G_1 \Upsilon G_2$ и $G_2 \Upsilon G_1$, вообще говоря, различны (например, если в G_1 все ребра циклические, а в G_2 все ребра нециклические и $G_2 \neq A_1$, то $G_1 \Upsilon G_2 = \emptyset$, а $G_2 \Upsilon G_1$ непусто).

В [4] найден конструктор для множества $\mathcal{T}_-$ всех деревьев, в спектре которых есть минус единица: $\mathcal{T}_- = \langle T_{2,2,2}, T_{2,2,1}, T_{1,1,1} \mid \oplus \rangle$. Теперь мы усилим этот результат, указав конструктор для множества Δ_- .

ТЕОРЕМА 3. *Справедливо равенство:*

$$\Delta_- = \langle T_{2,2,2}^\Delta, T_{2,2,1}^\Delta, T_{2,1,1}^\Delta, T_{1,1,1}^\Delta \mid \oplus, \Upsilon \rangle.$$

Доказательство этого утверждения очень простое, но оно опирается на теорему 2 и на некоторые леммы, использованные при доказательстве последней. Поэтому доказательство теоремы 3 удобно расположить в конце § 5.

ЗАМЕЧАНИЕ. Учитывая замечание из предыдущего параграфа, дельтоиды $T_{2,2,2}^\Delta, T_{2,2,1}^\Delta, T_{2,1,1}^\Delta, T_{1,1,1}^\Delta$ можно записать как $T_{2,2,2}, T_{2,2,1}, T_{2,1,1}, T_{1,1,1}$ или в обозначениях Дынкина: $D_4, A_3, \tilde{A}_2, A_1$. Автору больше нравится первая запись, так как из-за своего единообразия она порождает надежду на дальнейшее развитие результата.

§ 4. Доказательство теоремы 1

ЛЕММА 4.1. *Если $\mathcal{M}$ – модель разложения, удовлетворяющая FP-постулату, то $\tilde{E}$ замкнуто относительно операции $*$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u, v \in \tilde{E}$. Тогда из (1.1) и (1.4) следует, что $F(u * v) = 0$. Кроме того, $u * v \neq \theta$. Поэтому $u * v \in \tilde{E}$.

ЛЕММА 4.2. *Пусть $\mathcal{M}$ – модель разложения, удовлетворяющая FP-постулату. Если $u_1, \dots, u_n \in \tilde{M}$ (где $n \geq 2$), то*

$$F(u_1 * \dots * u_n) = \sum_i F(u_i) \prod_{j \neq i} F(P(u_j)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение легко доказать индукцией по n , используя (1.3) и (1.4). Следует лишь отметить, что $u_1 * \dots * u_k \neq \theta$ для любого k .

Если $I = \{i_1, \dots, i_s\}$, то запись $*_{i \in I} u_i$ означает $u_{i_1} * \dots * u_{i_s}$. Если $I = \{i_1\}$ – одноэлементное множество, то удобно положить $*_{i \in I} u_i = u_{i_1}$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{U} = \{u_i\}_{i=1}^n$ – конечная последовательность элементов из $\tilde{M}$. Непустое подмножество $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ назовем *комплектующим* (из $\mathcal{U}$), если $*_{i \in I} u_i \in \tilde{E}$. Последовательность $\mathcal{U}$ назовем *нормальной*, если существует $r \in \{1, \dots, n\}$ такое, что $u_i \in \tilde{M} \setminus E$ тогда и только тогда, когда $i \leq r$.

ЛЕММА 4.3. *Пусть $\mathcal{M}$ – модель разложения, удовлетворяющая FP-постулату, а $\{u_i\}_{i=1}^n$ – нормальная последовательность. Справедливы следующие утверждения:*

- 1) *если $r = 1$ и множество $\{1, \dots, n\}$ комплектующее, то существует $i \in \{2, \dots, n\}$ такое, что множество $\{1, i\}$ комплектующее;*
- 2) *если $r \geq 2$, то множество $\{1, \dots, n\}$ комплектующее.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Так как $u_1 \in \widetilde{M} \setminus E$ и $\{1, \dots, n\}$ комплектующее, то $n \geq 2$. Так как $P(u_1) \in E$, то $F(P(u_1)) = 0$. Из этого и леммы 4.2 следует, что $0 = F(u_1 * \dots * u_n) = F(u_1)F(P(u_2)) \dots F(P(u_n))$. Значит, $F(P(u_i)) = 0$ для некоторого $i \in \{2, \dots, n\}$. Отсюда $F(u_1 * u_i) = F(u_1)F(P(u_i)) + F(P(u_1))F(u_i) = 0$. Так как $u_1 * u_i \neq \theta$, то $u_1 * u_i \in \widetilde{E}$.

2) Положим $u = u_1 * \dots * u_r$. Используя лемму 4.2, получаем, что $F(u) = 0$. Так как $u \neq \theta$, то $u \in \widetilde{E}$. Если $r = n$, то утверждение доказано. Если $r < n$, то по лемме 4.1 имеем $u_1 * \dots * u_n = u * (u_{r+1} * \dots * u_n) \in \widetilde{E}$.

ЛЕММА 4.4. Если $\mathcal{M}$ – модель разложения, удовлетворяющая FP -постулату, то $k(\mathcal{M}) \leq 4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m \geq 4$ и $\{u_i\}_{i=1}^m$ – последовательность элементов из $\widetilde{M}$ такая, что $u_1 * \dots * u_m \in \widetilde{E}$. Докажем, что элемент $u = u_1 * \dots * u_m$ разложимый.

Если $u_i \in \widetilde{E}$ для любого i , то u разложимый. Пусть $u_i \in \widetilde{M} \setminus E$ для некоторого i . Без ограничения общности можно считать, что последовательность $\{u_i\}_{i=1}^m$ нормальная. Для доказательства разложимости u достаточно доказать, что множество $\{1, \dots, m\}$ можно разбить на два комплектующих подмножества.

Пусть $r = 1$. Воспользуемся п. 1) леммы 4.3. Тогда множество $\{1, i\}$ комплектующее. Его дополнение комплектующее (по лемме 4.1).

Пусть $2 \leq r \leq 3$. Из п. 2) леммы 4.3 следует, что множество $\{1, \dots, r\}$ комплектующее. Его дополнение комплектующее (по лемме 4.1).

Пусть $r \geq 4$. Из п. 2) леммы 4.3 следует, что множество $\{1, 2\}$ и его дополнение являются комплектующими.

Пусть, как обычно, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тройка $(\mathbb{N}_0, +, \mathbb{N}_0 \setminus \{1\})$ является моделью разложения. Обозначим ее $\mathcal{N}_0$.

ЛЕММА 4.5. Модель разложения $\mathcal{N}_0$ удовлетворяет FP -постулату.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Единичным элементом является число 0. Поэтому $\widetilde{M} = \mathbb{N}$. Положим $F(n) = \delta_{1,n}$ (здесь $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера), $P(n) = n + 1$. Справедливость соотношений (1.1) и (1.2) очевидна. Далее, если $n, m \in \mathbb{N}$, то

$$F(P(n + m)) = \delta_{1, n+m+1} = 0 = \delta_{1, n+1} \delta_{1, m+1} = F(P(n))F(P(m))$$

и

$$\begin{aligned} F(n + m) &= \delta_{1, n+m} = 0 = \delta_{1, n+1} \delta_{1, m} + \delta_{1, n} \delta_{1, m+1} \\ &= F(P(n))F(m) + F(n)F(P(m)). \end{aligned}$$

ЛЕММА 4.6. Справедливо равенство $k(\mathcal{N}_0) = 4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из лемм 4.4 и 4.5 следует, что $k(\mathcal{N}_0) \leq 4$. Докажем, что $k(\mathcal{N}_0) \geq 4$. Предположим, что $k(\mathcal{N}_0) \leq 3$. Возьмем $u_1 = u_2 = u_3 = 1 \in \widetilde{M}$. Тогда $u_1 + u_2 + u_3 = 3 \in \widetilde{E}$. Значит, элемент 3 разложимый. Отсюда $3 = n + m$, где $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Противоречие.

Леммами 4.4, 4.5 и 4.6 теорема 1 доказана.

§ 5. Доказательство теорем 2 и 3

Сначала сформулируем несколько определений и введем несколько обозначений.

Если L – некоторая матрица, то через $L_{(i)}$ обозначим матрицу, получающуюся из L занулением всех элементов, кроме тех, которые стоят в i -м столбце. Положим $R_i(L) = I - L_{(i)}$. По каждой комплексной $(n \times n)$ -матрице L построим новую матрицу

$$C(L) = R_1(L)R_2(L) \cdots R_n(L).$$

Свяжем преобразование Кокстера с этой конструкцией. Для вершины v графа $G = (V_0, V_1)$ определим взвешивание δ_v так: $\delta_v(u) = \delta_{vu}$ – символ Кронекера. Всякая нумерация вершин индуцирует нумерацию множества $\{\delta_v\}_{v \in V_0}$ и тем самым задает базис в пространстве взвешиваний. Всякой нумерации вершин графа G соответствует матрица S_G , в которой $s_{ij} = 2$ при $i = j$; $s_{ij} = -1$, если $i \neq j$ и i -я вершина соединена ребром с j -й; $s_{ij} = 0$ в остальных случаях. Если вершина v имеет номер i , то матрицей⁵ отражения σ_v в базисе $\{\delta_v\}_{v \in V_0}$ будет $I - S_{(i)}$. Таким образом, если задана нумерация вершин графа G , то матрицей преобразования Кокстера в соответствующем базисе будет $C(S_G)$.

Для комплексного λ и матрицы L через $\lambda * L$ обозначим матрицу, получающуюся из L прибавлением $(\lambda - 1)$ к каждому диагональному элементу и умножением на λ каждого элемента, стоящего выше главной диагонали. В [1; гл. V, § 6, упражнение 3] доказано, что

$$|\lambda I - C(L)| = |\lambda * L|.$$

Характеристический многочлен преобразования Кокстера, ассоциированного с дельтоидом G , обозначим $\Phi_G(\lambda)$. Итак,

$$\Phi_G(\lambda) = |\lambda * S_G|. \quad (5.1)$$

Например,

$$\Phi_{A_2}(\lambda) = \begin{vmatrix} (\lambda + 1) & -\lambda \\ -1 & (\lambda + 1) \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 1 \quad \text{и} \quad \Phi_{A_1}(\lambda) = \lambda + 1.$$

Если F и G – дельтоиды, то очевидно, что

$$\Phi_{F \sqcup G}(\lambda) = \Phi_F(\lambda)\Phi_G(\lambda). \quad (5.2)$$

Для введения некоторых операций над графами удобно слегка расширить понятие “граф”, считая графом и пару $\text{Emp} = (\emptyset, \emptyset)$, называемую пустым графом. Пустой граф будем считать дельтоидом, но, сохраняя предыдущие обозначения, мы не включаем пустой граф в множество Δ (которое с этого места описывается как множество всех *непустых* связных дельтоидов). Пустой граф пунктировать нельзя. Положим $\Phi_{\text{Emp}}(\lambda) \equiv 1$. Значит, спектр пустого графа есть пустое множество.

⁵ Говоря о матрице оператора в некотором базисе, мы имеем в виду правостороннее соглашение: вектор-строка справа умножается на матрицу оператора.

Через $\mathcal{P}_2(U)$ обозначим множество всех двухэлементных подмножеств множества U . Таким образом, граф – это пара (V_0, V_1) , где V_0 – конечное множество и $V_1 \subseteq \mathcal{P}_2(V_0)$.

Пусть U_0 – некоторое множество вершин графа $G = (V_0, V_1)$. Через $G - U_0$ обозначим граф, получающийся из G удалением всех вершин множества U_0 : вершины графа $G - U_0$ составляют множество $V_0 \setminus U_0$, а ребра – множество $V_1 \cap \mathcal{P}_2(V_0 \setminus U_0)$. Операция $G \mapsto G - U_0$ называется *удалением вершин множества U_0* .

Пусть U_1 – некоторое множество ребер графа $G = (V_0, V_1)$. Через $G - U_1$ обозначим граф, получающийся из G удалением всех ребер множества U_1 : вершины графа $G - U_1$ составляют множество V_0 , а ребра – множество $V_1 \setminus U_1$. Операция $G \mapsto G - U_1$ называется *удалением ребер множества U_1* .

Если G – пунктированный граф, то через $\check{G}$ обозначим граф, получающийся удалением из G отмеченной вершины. Пусть u и v – вершины графа A_2 , причем u – отмеченная вершина в $\check{A}_2$. В $G \oplus \check{A}_2$ отменим пунктирование, затем отметим вершину v . Полученный пунктированный граф обозначим $G + A_2$.

Характеристическим многочленом пунктированного дельтоида считается характеристический многочлен соответствующего непунктированного дельтоида.

Если F и G – пунктированные дельтоиды, то справедлива формула

$$\Phi_{F \oplus G}(\lambda) = \Phi_{\check{F}}(\lambda) \Phi_G(\lambda) + \Phi_F(\lambda) \Phi_{\check{G}}(\lambda) - (\lambda + 1) \Phi_{\check{F}}(\lambda) \Phi_{\check{G}}(\lambda). \quad (5.3)$$

Эта простая формула тривиально следует из утверждения леммы 5 работы [3] и формулы (5.1).

Если F и G – пунктированные графы, то через $F \ominus G$ обозначим граф, получающийся из F и G соединением отмеченных вершин ребром, после чего отмеченность вершин забывается.

Если F и G – пунктированные дельтоиды, то справедлива формула

$$\Phi_{F \ominus G}(\lambda) = \Phi_F(\lambda) \Phi_G(\lambda) - \lambda \Phi_{\check{F}}(\lambda) \Phi_{\check{G}}(\lambda). \quad (5.4)$$

Действительно, применяя формулу (5.3), получаем:

$$\begin{aligned} \Phi_{F \ominus G}(\lambda) &= \Phi_{(F+A_2) \oplus G}(\lambda) \\ &= \Phi_F(\lambda) \Phi_G(\lambda) + \Phi_{F+A_2}(\lambda) \Phi_{\check{G}}(\lambda) - (\lambda + 1) \Phi_F(\lambda) \Phi_{\check{G}}(\lambda) \\ &= \Phi_F(\lambda) \Phi_G(\lambda) + (\Phi_{\check{F}}(\lambda) \Phi_{\check{A}_2}(\lambda) + \Phi_F(\lambda) \Phi_{A_1}(\lambda) \\ &\quad - (\lambda + 1) \Phi_{\check{F}}(\lambda) \Phi_{A_1}(\lambda)) \Phi_{\check{G}}(\lambda) - (\lambda + 1) \Phi_F(\lambda) \Phi_{\check{G}}(\lambda) \\ &= \Phi_F(\lambda) \Phi_G(\lambda) - \lambda \Phi_{\check{F}}(\lambda) \Phi_{\check{G}}(\lambda). \end{aligned}$$

Рассмотрим граф Дынкина $\tilde{A}_2$ (это трехвершинный цикл). Пусть u и v – две из его вершин. Отметим вершину u . К этому пунктированному графу и произвольному пунктированному графу G применим операцию $\oplus$. В полученном пунктированном графе отменим пунктирование и затем отметим вершину v . Такой пунктированный граф обозначим $G + \tilde{A}_2$.

Для дельтоида (или для пунктированного дельтоида) G положим

$$\Theta_G = \Phi_G(-1).$$

Например, $\Theta_{A_1} = 0$, $\Theta_{A_2} = 1$.

ЛЕММА 5.1. 1) Если в дельтоиде G нечетное число вершин, то $\Theta_G = 0$.

2) Если G – пунктированный дельтоид и $\Theta_G \neq 0$, то $\Theta_{\check{G}} = \Theta_{G+A_2} = 0$.

3) Если F и G – дельтоиды, то $\Theta_{F \sqcup G} = \Theta_F \Theta_G$.

4) Если F и G – пунктированные дельтоиды, то справедливы равенства

$$\begin{aligned}\Theta_{F \oplus G} &= \Theta_{\check{F}} \Theta_G + \Theta_F \Theta_{\check{G}}, \\ \Theta_{f \ominus G} &= \Theta_F \Theta_G + \Theta_{\check{F}} \Theta_{\check{G}}, \\ \Theta_{G+A_2} &= \Theta_{\check{G}}, \quad \Theta_{G+A_2+A_2} = \Theta_G, \quad \Theta_{G+\tilde{A}_2} = \Theta_G.\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Так как $(-1) * S_G$ – кососимметрическая матрица нечетного порядка, то $\Theta_G = |(-1) * S_G| = 0$.

2) Это утверждение очевидно следует из п. 1) доказываемой леммы.

3) Это очевидно следует из формулы (5.2).

4) Первые две формулы следуют из (5.3) и (5.4) соответственно. Третья, четвертая и пятая формулы следуют из первых двух (при доказательстве пятой формулы используется равенство $\Theta_{\tilde{A}_2} = 0$, которое следует из п. 1) доказываемой леммы).

Пусть M – множество всех пунктированных дельтоидов, E – множество всех пунктированных дельтоидов G , для которых $\Theta_G = 0$. Очевидно, что тройка $(M, \oplus, E)$ является моделью разложения. Обозначим ее $\mathcal{M}_1$.

ЛЕММА 5.2. Модель разложения $\mathcal{M}_1$ удовлетворяет FP -постулату.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим отображения F и P . Пусть $F(G) = \Theta_G$, а $P(G)$ есть $\check{G}$, пунктированный некоторым образом. Равенство (1.1) очевидно. Из пп. 2)–4) леммы 5.1 следует, что выполнены (соответственно) условия (1.2)–(1.4).

СЛЕДСТВИЕ. Если $H_1, \dots, H_n \in \dot{\Delta}$ и $H \oplus \dots \oplus H_n \in \dot{\Delta}_{-}^{\text{Irr}}$, то $n \leq 3$.

Доказательство очевидно вытекает из леммы 5.2 и теоремы 1.

Через Δ_+ обозначим множество всех связных дельтоидов, отличных от Emp , в спектре которых нет минус единицы. Если $\mathcal{G}$ – некоторое множество графов, то через $\check{\mathcal{G}}$ обозначим множество всех пунктированных графов, получающихся всевозможными пунктированиями элементов из $\mathcal{G}$. При помощи этой операции из множеств Δ , Δ_- и Δ_+ получаются соответственно $\dot{\Delta}$, $\dot{\Delta}_-$ и $\dot{\Delta}_+$.

Пунктированный дельтоид $H \in \dot{\Delta}_-$ назовем *разложимым* (соответственно *неразложимым*), если его можно (соответственно нельзя) представить в виде $F \oplus G$, где $F, G \in \dot{\Delta}_- \setminus \{H\}$. Множество всех неразложимых элементов из $\dot{\Delta}_-$ обозначим $\dot{\Delta}_{-}^{\text{Irr}}$.

Через $\dot{\Delta}_{-}^{\circ}$ обозначим множество всех пунктированных дельтоидов $G \in \dot{\Delta}_-$, для которых $\Theta_{\check{G}} = 0$.

Положим $\dot{Z}_n = \dot{A}_2 \oplus \dots \oplus \dot{A}_2$ (n раз), $\dot{Z}_1 = \dot{A}_2$ и $\dot{Z}_0 = \dot{A}_1$.

Отменяя пунктирование, получаем граф-звезду Z_k ($k \in \mathbb{N}_0$).

- ЛЕММА 5.3. 1) Множество $\dot{\Delta}_-$ замкнуто относительно операции $\oplus$.
 2) Если $F, G \in \dot{\Delta}_+$, то $F \oplus G \in \dot{\Delta}_+$.
 3) Звезда Z_n принадлежит $\dot{\Delta}_+$, если и только если $n = 1$.
 4) Если $G \in \dot{\Delta}_-$ и $F \in \dot{\Delta}$, то $G \oplus F \in \dot{\Delta}_-$, $G + A_2 \in \dot{\Delta}_-$, $G \oplus F \in \dot{\Delta}_-$.
 5) Если $n \geq 2$, то $\dot{Z}_n \in \dot{\Delta}_-$.
 6) Если $F, G \in \dot{\Delta}_-$ и $F \oplus G \in \dot{\Delta}_-$, то $F \in \dot{\Delta}_-$ или $G \in \dot{\Delta}_-$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Это следует из п. 4) леммы 5.1.

2) Это следует из пп. 4) и 2) леммы 5.1.

3) Из формулы (5.1) следует, что при $n \geq 2$ имеем

$$\Theta_{Z_n} = \det \begin{pmatrix} 0 & l \\ -l^t & O_n \end{pmatrix},$$

где $l = (1, \dots, 1)$. Очевидно, что указанный определитель равен нулю. Если $n \in \{0; 1\}$, то см. пример перед леммой.

4) Это следует из пп. 4)–6) леммы 5.1.

5) Это следует из п. 3) доказываемой леммы.

6) Это следует из п. 5) леммы 5.1.

Леммы 5.1 и 5.3 содержат “мелкие”, но полезные утверждения. Ниже мы будем их использовать очень часто. Неудобно, однако, в каждой строке ссылаться на тот или иной пункт лемм 5.1 и 5.3, поэтому мы будем предполагать, что читатель хорошо помнит содержание этих лемм.

Ребро связного графа называется *разделяющим*, если после удаления этого ребра получается несвязный граф.

Степенью $\deg_G u$ вершины u в графе G называется мощность множества вершин, инцидентных вершине u . Ребро $\{u, v\}$ принято обозначать $\overline{uv}$. Ребро $\overline{uv}$ графа G называется *концевым*, если $\deg_G u = 1$ или $\deg_G v = 1$.

ЛЕММА 5.4. Если дельтоид G неразложимый, то всякое разделяющее ребро этого дельтоида является концевым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\overline{uv}$ – разделяющее ребро. Удалим его. В полученном дельтоиде две компоненты связности. Отметим в них вершины u и v . Полученные пунктированные дельтоиды обозначим F и H . Так как $F \oplus H = G \in \dot{\Delta}_-$, то $F \in \dot{\Delta}_-$ или $H \in \dot{\Delta}_-$. Без ограничения общности можно считать, что $F \in \dot{\Delta}_-$.

Пусть $H \in \dot{\Delta}_+$. Тогда $H + A_2 \in \dot{\Delta}_-$. Так как $(H + A_2) \oplus F \in \dot{\Delta}_{-}^{\text{irr}}$, то $F = \dot{A}_1$. Значит, ребро $\overline{uv}$ концевое.

Пусть $H \in \dot{\Delta}_-$. Тогда $F \in \dot{\Delta}_-$ или $H \in \dot{\Delta}_-$. Без ограничения общности можно считать, что $H \in \dot{\Delta}_-$. Отсюда $H + A_2 \in \dot{\Delta}_-$. Так как $(H + A_2) \oplus F \in \dot{\Delta}_{-}^{\text{irr}}$, то $F = \dot{A}_1$. Значит, ребро $\overline{uv}$ концевое.

Простым путем длины $k \geq 1$ в графе называется последовательность $\{v_i\}_{i=0}^k$ попарно различных вершин таких, что v_{i-1} инцидентна v_i для любого $i = 1, \dots, k$. Говорят, что v_0 и v_k – концы этого пути. Внутренними вершинами этого пути называются вершины v_i , где $0 < i < k$.

ЛЕММА 5.5. Пусть дельтоид G неразложимый и $G \neq \tilde{A}_2$. Тогда в каждом простом цикле дельтоида G имеется ровно одна вершина степени 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Сначала докажем, что в каждом простом цикле есть вершина, степень которой (в графе G) равна 2.

Пусть $\{u, v, w\}$ – простой цикл в дельтоиде G . Через $(u; vw)$ обозначим множество всех вершин x , удовлетворяющих условию: любой простой путь с концами u и x содержит v или w . Так как G связный, то и $G - (u; vw)$ связный. Положим $G_1 = G - (u; vw)$, $G_2 = G - (v; wu)$, $G_3 = G - (w; uv)$. Отметим в них вершины u, v и w соответственно.

Пусть $j \in \{1; 2\}$. Из G_j, G_{j+1} и $\tilde{A}_2$ построим пунктированный дельтоид следующим образом. Одну вершину дельтоида $\tilde{A}_2$ отождествим с отмеченной вершиной дельтоида G_j . Другую вершину дельтоида $\tilde{A}_2$ отождествим с отмеченной вершиной дельтоида G_{j+1} . Полученный дельтоид обозначим H_j . Третью вершину дельтоида $\tilde{A}_2$ будем считать отмеченной в H_j .

Так как $\tilde{A}_2 \in \Delta_-$ и G неразложимый, то $G_i \in \dot{\Delta}_+$ для некоторого i . Без ограничения общности можно считать, что $G_3 \in \dot{\Delta}_+$. Тогда $\Theta_G = \Theta_{\tilde{G}_3} \Theta_{H_1} + \Theta_{G_3} \Theta_{G_1 \oplus G_2}$. Так как $\Theta_G = 0 = \Theta_{\tilde{G}_3}$, то $\Theta_{G_1 \oplus G_2} = 0$. Поэтому $G_1 \in \dot{\Delta}_-$ или $G_2 \in \dot{\Delta}_-$. Без ограничения общности можно считать, что $G_1 \in \dot{\Delta}_-$.

Пусть $G_2 \in \dot{\Delta}_+$. Тогда G_2 и G_3 имеют четное число вершин. Отсюда $H_2 \in \dot{\Delta}_-$. Так как $G_1 \oplus H_2 \in \dot{\Delta}_-^{\text{irr}}$, то $G_1 = \dot{A}_1$. Поэтому $\deg_G u = 2$.

Пусть $G_2 \in \dot{\Delta}_-$. Тогда $G_1 \in \dot{\Delta}_-$ или $G_2 \in \dot{\Delta}_-$. Без ограничения общности можно считать, что $G_2 \in \dot{\Delta}_-$. Тогда $H_2 \in \dot{\Delta}_-$. Так как $G_1 \oplus H_2 \in \dot{\Delta}_-^{\text{irr}}$, то $G_1 = \dot{A}_1$. Поэтому $\deg_G u = 2$.

2) Теперь покажем, что вершин степени 2 в каждом простом цикле имеется ровно одна. Если бы в некотором простом цикле было хотя бы две вершины степени 2, то дельтоид G , пунктированный некоторым образом, был бы равен $X + \tilde{A}_2$ для некоторого $X \in \dot{\Delta}$. Отсюда $X \in \dot{\Delta}_-$. Так как $X + \tilde{A}_2 \in \dot{\Delta}_-^{\text{irr}}$, то $X = \dot{A}_1$. Отсюда $G = \tilde{A}_2$.

ЛЕММА 5.6. Если дельтоид G неразложимый, то $G = F^\Delta$ для некоторого дерева F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $G = \tilde{A}_2$, то $G = T_{2,1,1}^\Delta$. Далее в доказательстве этой леммы будем считать, что $G \neq \tilde{A}_2$. По лемме 5.5 в каждом простом цикле дельтоида G имеется ровно одна вершина степени 2. Всякую такую вершину назовем *специальной*. Если $\{u, v, w\}$ – простой цикл в G , а вершина u специальная, то ребра $\overline{uv}$ и $\overline{uw}$ назовем *специальными ребрами*, а $\overline{vw}$ – *базовым ребром*.

Множество всех ребер дельтоида G разобьем на три подмножества. Пусть $M_1(G)$ – множество всех концевых ребер, $M_2(G)$ – множество всех специальных ребер, а $M_3(G)$ – множество всех базовых ребер. Всякое ребро дельтоида G принадлежит одному из множеств $M_i(G)$ (если ребро входит в некоторый простой цикл, то оно либо специальное, либо базовое; если ребро не входит ни в какой простой цикл, то оно разделяющее, а из леммы 5.4 следует, что оно концевое).

Удалим из дельтоида G все специальные вершины (вместе с ними удалятся все специальные ребра, а ребра из множеств $M_1(G)$ и $M_3(G)$ останутся). Все простые циклы разрушились. Получившийся граф связный. Значит, он является деревом. Это дерево обозначим F .

Множество всех ребер дерева F разбито на два подмножества $M_1(G)$ и $M_3(G)$.

Для доказательства равенства $G = F^\Delta$ достаточно убедиться в том, что $M_1(G)$ – множество всех периферийных ребер дерева F .

Если u – вершина дельтоида G , то через $\deg_i u$ обозначим мощность множества тех ребер из $M_i(G)$, которые одним из своих концов имеют вершину u . Тогда $\deg_G u = \deg_1 u + \deg_2 u + \deg_3 u$, а $\deg_F u = \deg_1 u + \deg_3 u$. Если u – вершина F , то $\deg_2 u = \deg_3 u$.

Ни для какой вершины u не может быть, что $\deg_1 u = 0$ и $\deg_2 u = \deg_3 u = 1$. Поэтому $\deg_F u = 1$ тогда и только тогда, когда $\deg_1 u = 1$ и $\deg_2 u = \deg_3 u = 0$. Очевидно, что $\deg_G u = 1$ тогда и только тогда, когда $\deg_1 u = 1$ и $\deg_2 u = \deg_3 u = 0$. Итак, условия $\deg_F u = 1$ и $\deg_G u = 1$ равносильны. Это значит, что $M_1(G)$ – множество всех концевых ребер дерева F .

Осталось доказать, что всякое ребро из $M_1(G)$ является периферийным в F . Если бы в $M_1(G)$ существовало ребро $\overline{uv}$, не являющееся периферийным в F , то мы имели бы $\deg_F u = \deg_F v = 1$. Поэтому $\deg_G u = \deg_G v = 1$, т.е. $G = A_2$, но $A_2 \notin \Delta_-$.

ЛЕММА 5.7. *Для любого дерева F имеем $F^\Delta \in \Delta_-$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение докажем индукцией по числу вершин дерева F .

Если в F одна вершина, то $F = A_1$ и $F^\Delta = A_1 \in \Delta_-$.

Если в F две вершины, то $F = A_2$ и $F^\Delta = \tilde{A}_2 \in \Delta_-$.

Пусть утверждение леммы верно для всякого дерева с n вершинами, где $n \geq 2$. Рассмотрим дерево F , имеющее $n + 1$ вершину.

Пусть $F = Z_n$. Так как $n \neq 1$, то $F^\Delta = Z_n \in \Delta_-$.

Пусть $F \neq Z_n$. Вершина степени 1 называется *концевой*. *Предконцевой* назовем вершину, инцидентную хотя бы одной концевой и ровно одной не концевой. Так как $F \neq Z_n$, то в F есть предконцевая вершина. Обозначим ее u . Пусть u_0 – неконцевая вершина, инцидентная u , а $u_1, \dots, u_s$ – концевые вершины, инцидентные u . Тогда $\deg_F u = s + 1 \geq 2$ и $\deg_F u_0 \geq 2$. В F^Δ отметим вершину u . Тогда полученный пунктированный дельтоид равен $X \oplus \dot{Z}_s$ для некоторого $X \in \dot{\Delta}$. Если $s \geq 2$, то $F^\Delta \in \dot{\Delta}_-$ (см. пп. 4) и 5) леммы 5.3).

Пусть $s = 1$. Удалим из F вершину u_1 . Полученное дерево обозначим H . Тогда $\deg_H u = 1$ и $\deg_H u_0 = \deg_F u_0 \geq 2$. Ребро $\overline{uu_0}$ периферийное в H . Поэтому $H^\Delta \simeq \check{X}$. С другой стороны, если в F^Δ отметить вершину u_1 , то полученный пунктированный дельтоид есть $X + A_2$. Отсюда $\Theta_{F^\Delta} = \Theta_{X+A_2} = \Theta_{\check{X}} = \Theta_{H^\Delta}$. По предположению индукции $H^\Delta \in \Delta_-$. Значит, и $F^\Delta \in \Delta_-$.

ЛЕММА 5.8. *Если дельтоид F^Δ неразложимый, то F – трилистник.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из следствия леммы 5.2 видно, что все вершины дерева F имеют степень ≤ 3 .

Докажем, что число вершин степени 3 в дереве F не больше чем 1. Предположим противное. Тогда в F существуют вершины u и v такие, что $\deg_F u = \deg_F v = 3$ и простой путь с концами u и v не содержит внутренних вершин степени 3. Если простой путь с концами u и v имеет внутренние вершины, то удалим их, а если внутренних вершин нет, то удалим ребро $\overline{uv}$. Получится лес, состоящий из двух компонент. Отметим в них вершины u и v . Полученные пунктированные деревья

обозначим H_1 и H_2 . Тогда $F^\Delta = (H_1^\Delta + \tilde{A}_2 + \dots + \tilde{A}_2) \oplus H_2^\Delta$. Из леммы 5.7 и п. 4) леммы 5.1 следует, что $H_1^\Delta + \tilde{A}_2 + \dots + \tilde{A}_2 \in \dot{\Delta}_-$ и $H_2^\Delta \in \dot{\Delta}_-$. Значит, дельтоид F^Δ разложимый. Противоречие.

ЛЕММА 5.9. *Если F – трилистник, то дельтоид F^Δ неразложимый.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть n – натуральное число и $n \geq 3$. Через u обозначим вершину дельтоида A_n^Δ , имеющую степень 1, а через v – инцидентную вершину u . В A_n^Δ удалим вершину u , а вершину v отметим. Получившийся пунктированный дельтоид обозначим $(A_n^\Delta)'$.

Пусть $T_{p,q,r} \notin \{A_1, A_2\}$. Предположим, что дельтоид $T_{p,q,r}^\Delta$ не принадлежит $\dot{\Delta}_{\text{Irr}}$. Тогда этот дельтоид можно пунктировать так, что полученный пунктированный дельтоид равен $X \oplus Y$, причем $X, Y \in \dot{\Delta}_-$. Кроме того, X или Y имеет вид $(A_n^\Delta)'$. Если $n = 3$, то $(A_n^\Delta)' = \dot{A}_2$. Если $n > 3$, то $(A_n^\Delta)' = \dot{A}_2 + \tilde{A}_2 + \dots + \tilde{A}_2$. В любом случае $(A_n^\Delta)' \in \dot{\Delta}_+$. Противоречие.

Пусть $T_{p,q,r} \in \{A_1, A_2\}$. Тогда $T_{p,q,r}^\Delta \in \{A_1, \tilde{A}_2\}$. Дельтоиды A_1 и $\tilde{A}_2$ неразложимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2 состоит из лемм 5.6, 5.8 и 5.9.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Из п. 1) леммы 5.3 следует, что множество Δ_- замкнуто относительно операции $\oplus$.

Докажем, что множество Δ_- замкнуто относительно операции Υ . Пусть $G \in G_1 \Upsilon G_2$. Это означает, что G получается из $G_1 \sqcup G_2$ добавлением одной вершины, определенным образом соединенной ребрами с вершинами дельтоидов G_1 и G_2 . Отметим в G упомянутую вершину. Из п. 4) леммы 5.1 следует, что $\Theta_G = \Theta_{G_1} \Theta_X + \Theta_Y \Theta_{G_2}$ для некоторых дельтоидов X и Y . Значит, если $\Theta_{G_1} = \Theta_{G_2} = 0$, то $\Theta_G = 0$.

Через T^Δ обозначим множество всех дельтоидов вида $T_{p,q,r}^\Delta$.

Так как $\mathsf{T}^\Delta \subseteq \Delta_-$ (см. лемму 5.7), а множество Δ_- замкнуто относительно $\oplus$ и Υ , то $\langle T_{2,2,2}^\Delta, T_{2,2,1}^\Delta, T_{2,1,1}^\Delta, T_{1,1,1}^\Delta \mid \oplus, \Upsilon \rangle \subseteq \Delta_-$.

Из теоремы 2 следует, что

$$\Delta_- \subseteq \langle \mathsf{T}^\Delta \mid \oplus \rangle. \quad (5.5)$$

Если $\mathcal{U}$ – конечная последовательность действительных чисел, то через $\underline{\mathcal{U}}$ обозначим последовательность, состоящую из тех же членов, но расположенных в порядке невозрастания. Если $p \geq 3$, то $T_{p,q,r}^\Delta \in \underline{T_{p-1,q,r}^\Delta} \Upsilon T_{1,1,1}^\Delta = \underline{T_{p-1,q,r}^\Delta} \Upsilon A_1$. Поэтому

$$\mathsf{T}^\Delta \subseteq \langle T_{2,2,2}^\Delta, T_{2,2,1}^\Delta, T_{2,1,1}^\Delta, T_{1,1,1}^\Delta \mid \Upsilon \rangle. \quad (5.6)$$

Совмещая (5.5) и (5.6), получаем

$$\Delta_- \subseteq \langle T_{2,2,2}^\Delta, T_{2,2,1}^\Delta, T_{2,1,1}^\Delta, T_{1,1,1}^\Delta \mid \oplus, \Upsilon \rangle.$$

Теорема 3 доказана.

Список литературы

1. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней. М.: Мир, 1972.
2. Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М., Пономарев В. А. Функторы Кокстера и теорема Габриеля // УМН. 1973. Т. 28. №2 (170). С. 19–33.
3. Колмыков В. А. Преобразования Кокстера и геометрия матрицы данных // Матем. сб. 2003. Т. 194. №7. С. 119–126.
4. Колмыков В. А. Преобразование Кокстера и число “ -1 ” // Матем. сб. 2000. Т. 191. №10. С. 51–56.
5. Колмыков В. А. Преобразование Кокстера и спектры операций // Матем. сб. 2002. Т. 193. №3. С. 37–50.
6. Manin Yu. I. A course in mathematical logic. New York: Springer-Verlag, 1977.
7. Кац В. Бесконечномерные алгебры Ли. М.: Мир, 1993.
8. Колмыков В. А. Нулевой конус формы Картана–Титса и графы Дынкина // Сборник трудов семинара И. Р. Шафаревича. №2. М.: Фондматем. образ. и просвещ., 2000. С. 3–14.

Воронежский государственный университет
E-mail: kolmykov@vak.vsu.ru

Поступила в редакцию
22.09.2003 и 21.04.2004