Общероссийский математический портал

А. М. Райгородский, Проблема Эрдеша–Хадвигера и хроматические числа конечных геометрических графов, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 1, 123–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1263>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 15:35:47

УДК 519.174 + 514.172.45

А. М. Райгородский

Проблема Эрдеша–Хадвигера и хроматические числа конечных геометрических графов

Настоящая работа посвящена классической проблеме Эрдеша–Хадвигера в комбинаторной геометрии. Эта проблема, состоящая в отыскании минимального числа цветов, в которые можно так раскрасить все точки евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, что точки, отстоящие друг от друга на расстояние единица, получают различные цвета, исследуется в одном из своих наиболее важных частных случаев – в случае раскраски конечных геометрических графов. В работе предложено несколько новых подходов к получению нижних оценок на хроматические числа таких графов. Эти подходы на весьма обширном классе ситуаций позволяют значительно улучшать и обобщать все имевшиеся прежде аналогичные результаты.

Библиография: 31 название.

§ 1. Введение и постановка задачи

Настоящая работа появилась в результате изучения одной из наиболее известных проблем классической комбинаторной геометрии. Эта проблема, возникшая в сороковые годы двадцатого века в трудах П. Эрдеша и Г. Хадвигера (см. [1]) и независимо исследовавшаяся несколько позднее Е. Нелсоном и Дж. Р. Исбелом, состоит в определении минимального числа цветов, в которые можно так раскрасить все n -мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, чтобы точки, отстоящие друг от друга на расстояние единица, оказались раскрашенными в разные цвета. Иными словами, речь идет о нахождении хроматического числа бесконечного графа $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, у которого множество вершин $\mathcal{V}$ совпадает с $\mathbb{R}^n$, а множество ребер $\mathcal{E}$ состоит из тех и только тех пар вершин – векторов из пространства, – евклидово расстояние между которыми равно единице:

$$\mathcal{E} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = 1\}.$$

Искомое хроматическое число, обыкновенно записываемое как $\chi(\mathcal{G})$ (см., например, [2] и [3]), применительно к задаче Эрдеша–Хадвигера принято обозначать $\chi(\mathbb{R}^n)$ и называть хроматическим числом вещественного евклидова пространства. Следует сразу заметить, что, на самом деле, нет никакой необходимости запрещать вершинам нашего графа находиться именно на единичном расстоянии друг

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00912), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-136.2003.1), фонда INTAS (грант № 03-51-5070), фонда Президента РФ поддержки молодых кандидатов (грант № МК-3130.2004.1).

относительно друга: даже если в качестве “запрещенного” (или, как еще говорят, “критического”) расстояния взять произвольную положительную величину $b \in \mathbb{R}$, хроматическое число соответствующего графа будет равняться $\chi(\mathbb{R}^n)$.

В связи с проблемой Эрдеша–Хадвигера были получены многочисленные результаты. Большинство этих результатов может быть найдено в монографии [4], в статье [5] и в недавнем обзоре автора [6], так что здесь мы на их подробном изложении останавливаться не будем. Поскольку в дальнейшем нас, главным образом, будут интересовать оценки хроматических чисел при условии неограниченного роста размерности, то на предыстории вопроса об асимптотическом поведении соответствующих величин мы и сосредоточим теперь наше внимание.

Хронологически первый результат в упомянутом выше направлении был получен в 1971 году Д. Е. Райским, который показал, что $\chi(\mathbb{R}^n) \geq n + 2$ при $n \geq 2$ (см. [7]). Далее, в 1972 году Д. Ларман и К. А. Роджерс совместно с П. Эрдешем и В. Шош установили оценку $\chi(\mathbb{R}^n) \geq c_1 n^2$, где $c_1 > 0$ – некоторая абсолютная постоянная (см. [8]). В 1978 году Д. Ларман продолжил изучение нижних оценок в задаче и обосновал неравенство $\chi(\mathbb{R}^n) \geq c_2 n^3$, $c_2 > 0$ (см. [9]). Наконец, в 1981 году в своей замечательной работе [10] П. Франкл и Р. М. Уилсон доказали, что $\chi(\mathbb{R}^n) \geq (1.207 \dots + o(1))^n$. Этот результат был тем более замечателен, что он позволял подтвердить гипотезу Эрдеша об экспоненциальности роста хроматического числа пространства: еще в 1972 году Ларман и Роджерс нашли верхнюю оценку $\chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^n$ (см. [8]). Лишь в 2000 году автору удалось слегка усилить результат Франкла–Уилсона (см. [11]), и, таким образом, к настоящему времени наилучшие известные асимптотические неравенства выглядят следующим образом:

$$(1.239 \dots + o(1))^n \leq \chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^n.$$

Весьма содержательной и в то же время весьма трудной представляется задача дальнейшего уточнения обоих приведенных нами неравенств, и в этой статье мы будем, в основном, обсуждать вопросы, связанные с нижними оценками хроматических чисел. Заметим сначала, что, уже исходя из общих соображений, естественно пытаться строить такие оценки, выбирая в графе $\mathcal{G}$ тот или иной конечный подграф и доказывая, что его хроматическое число ограничено снизу достаточно большой величиной. Иначе говоря, разумно воспользоваться очевидным неравенством $\chi(\mathbb{R}^n) = \chi(\mathcal{G}) \geq \max_G \chi(G)$, где максимум берется по всем конечным подграфам $G = (V, E)$ графа $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$. Гораздо более существенную мотивировку для подобного, казалось бы, крайне значительного огрубления дает теорема Эрдеша–де Брёйна (см. [12]), утверждающая, что коль скоро хроматическое число бесконечного графа конечно, то оно достигается на некотором конечном подграфе исходного графа. В нашем случае, по крайней мере, $\chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^n$; стало быть, теорема применима и $\chi(\mathbb{R}^n) = \chi(\mathcal{G}) = \max_G \chi(G)$.

Заметим теперь, что в работах [8]–[10] для получения перечисленных выше нижних оценок хроматического числа в качестве конечного подграфа G в графе $\mathcal{G}$ брался некоторый граф с вершинами в $(0, 1)$ -векторах пространства (т.е. векторах, у которых координаты принимают лишь два различных значения – 0 и 1) и с ребрами, отвечающими некоторому запрещенному расстоянию $b > 0$. В свою очередь,

в [11] автору удалось разработать технику, позволившую ему эффективно оценивать хроматические числа аналогичных графов с вершинами в $(-1, 0, 1)$ -векторах в $\mathbb{R}^n$ и, в частности, обосновать неравенство $\chi(\mathbb{R}^n) \geq (1.239 \dots + o(1))^n$. Дальнейшее развитие эта техника получила, например, в статьях [6], [13]–[15]. Тем самым, естественно возникает следующая задача.

Обозначая размерность пространства, как и прежде, через n , зафиксируем произвольные натуральные числа l_{-1} , l_0 и l_1 , удовлетворяющие условию $l_{-1} + l_0 + l_1 = n$. Рассмотрим семейство векторов

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \Sigma(\{-1, 0, 1\}^n; l_{-1}, l_0, l_1) \\ &= \{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_\nu \in \{-1, 0, 1\}, \nu = 1, \dots, n; \\ &\quad \text{card}\{\nu \in \{1, \dots, n\} : x_\nu = i\} = l_i, i \in \{-1, 0, 1\} \}, \end{aligned}$$

где символ card мы понимаем как мощность множества. Таким образом, Σ_1 представляет собой семейство $(-1, 0, 1)$ -векторов в $\mathbb{R}^n$, имеющее заданную наперед координатную структуру своих элементов (l_{-1} есть число минус единиц, l_0 – число нулей и l_1 – число единиц в каждом векторе) и в силу приведенных выше требований определенное корректно.

Обозначим через

$$\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}(\{-1, 0, 1\}^n; l_{-1}, l_0, l_1)$$

класс всех графов $G = (V, E)$, у которых множество вершин V вложено в Σ_1 , а множество ребер E , в зависимости от выбора произвольного вещественного числа $b > 0$, имеет вид $E = E_b(V) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V \times V : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = b\}$, т.е.

$$\mathfrak{G}_1 = \bigcup_{V \subseteq \Sigma_1} \bigcup_{b > 0} \{G\}, \quad G = (V, E), \quad E = E_b(V).$$

Иными словами, здесь мы располагаем двумя “степенями свободы”: с одной стороны, мы вольны взять любое подмножество V в Σ_1 в качестве потенциального множества вершин графа $G \in \mathfrak{G}_1$, а с другой стороны, мы имеем право, зафиксировав такое V , “дополнить” его до графа путем введения на нем произвольной реберной структуры $E = E_b(V)$.

Понятно, что иногда возникают вырожденные соотношения между множествами V и E . Например, даже если $V = \Sigma_1$, то заведомо не имеет смысла варьировать E_b по $b > 2\sqrt{n}$ хотя бы потому, что любое такое b больше диаметра куба $[-1, 1]^n$ (в который, очевидно, вложено семейство векторов Σ_1), а стало быть, E окажется пустым. Аналогичная ситуация возникнет, если b не имеет вид $b = \sqrt{2b'}$, $b' \in \mathbb{N}$, так как ясно, что, каковы бы ни были векторы $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma_1$, квадрат расстояния между ними есть четное целое число.

На классе графов $\mathfrak{G}_1$ введем величину

$$\chi_1 = \chi(\{-1, 0, 1\}^n; l_{-1}, l_0, l_1) = \max_{G \in \mathfrak{G}_1} \chi(G).$$

Заметим, что, во-первых, $\chi(\mathbb{R}^n) \geq \max_{l_{-1}, l_0, l_1} \chi_1$ и, следовательно, получая нетривиальные нижние оценки на значения χ_1 , мы вновь возвращаемся к исходной

проблеме Эрдеша–Хадвигера. Во-вторых, в связи с той же классической проблемой и тем фактом, что наилучшие известные нижние оценки для рассматриваемого в ней хроматического числа доказываются именно с помощью графов из класса $\mathfrak{G}_1$, в серии работ [16]–[18] автором были найдены верхние оценки для хроматических чисел таких графов. Одной из основных целей настоящей работы будет, тем самым, отыскание новых нетривиальных нижних оценок на χ_1 , в существенной степени усиливающих имевшиеся прежде аналогичные неравенства. В результате это позволит нам, с одной стороны, значительно продвинуться в исходной задаче, а с другой стороны, уменьшить зазор между различными оценками на хроматические числа наших конечных геометрических графов (графов из $\mathfrak{G}_1$).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Коль скоро нам известно, что результаты работ [8]–[10] основаны на изучении геометрических графов с вершинами в $(0, 1)$ -векторах n -мерного пространства, то естественно возникает вопрос, почему при постановке задачи об оценивании величины χ_1 мы сразу перешли к рассмотрению систем из $(-1, 0, 1)$ -векторов. На этот вопрос имеется несколько ответов. Во-первых, благодаря последним работам автора [6], [11], [13]–[15] мы знаем, что $(-1, 0, 1)$ -векторная техника сильнее своего “двухкоординатного” предшественника. Во-вторых, задача с нулями и единицами весьма детально была изучена ранее в [16], [17], [19]–[23], так что подробно останавливаться на ней здесь, по-видимому, не имеет смысла. Наконец, в-третьих, можно включить в виде частного случая $(0, 1)$ -задачу в задачу с тремя координатами, полагая формально $l_{-1} = 0$ (хотя мы и считали изначально числа l_{-1} , l_0 и l_1 натуральными): на формулировках новых теорем, которые мы приведем в следующем параграфе, это никак не отразится.

Следует отметить теперь, что геометрические графы, построенные на основе $(0, 1)$ - и $(-1, 0, 1)$ -векторов, безусловно, образуют лишь весьма специальный подкласс в классе всех конечных графов нашего типа. В действительности же, если мы хотим максимально эффективно оценивать величину $\chi(\mathbb{R}^n)$ и в то же время глубже понять структуру бесконечного графа $\mathcal{G}$, нам необходимо научиться как можно точнее оценивать хроматические числа конечных геометрических графов общего вида. Соответствующая постановка задачи естественно обобщает только что описанную, и именно к ее подробному изложению мы сейчас перейдем.

Для каждого значения размерности n зафиксируем набор различных целых чисел $a_1, \dots, a_t$, $t \geq 2$. Подчеркнем сразу, что, вообще говоря, и величина t может зависеть от n , и сами целые числа могут изменяться с ростом размерности. Например, t может оказаться равным n , а набор $\{a_1, \dots, a_t\}$ может совпасть с отрезком натурального ряда $\{1, \dots, n\}$. Или, скажем, $a_1 = [n^{0.1}]$, $a_2 = [n^{0.2}]$, $a_3 = [n^{0.4}]$, т.е. величины a_j растут, а $t = 3$ постоянно. Для удобства мы без ограничения общности будем считать, что числа $a_1, \dots, a_t$ изначально упорядочены по возрастанию величины.

Зафиксируем, далее, набор натуральных чисел $l_{a_1}, \dots, l_{a_t}$, обладающих свойством $l_{a_1} + \dots + l_{a_t} = n$, и рассмотрим семейство векторов

$$\begin{aligned} \Sigma_g &= \Sigma(\{a_1, \dots, a_t\}^n; l_{a_1}, \dots, l_{a_t}) \\ &= \{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_\nu \in \{a_1, \dots, a_t\}, \nu = 1, \dots, n; \\ &\quad \text{card}\{\nu \in \{1, \dots, n\} : x_\nu = i\} = l_i, i \in \{a_1, \dots, a_t\} \}. \end{aligned}$$

Понятно, что Σ_g определено корректно. Ясно, кроме того, что $t \leq n$.

Обозначим через

$$\mathfrak{G}_g = \mathfrak{G}(\{a_1, \dots, a_t\}^n; l_{a_1}, \dots, l_{a_t})$$

класс всех графов, который по аналогии с графом $\mathfrak{G}_1$ можно записать в форме

$$\mathfrak{G}_g = \bigcup_{V \subseteq \Sigma_g} \bigcup_{b > 0} \{G\}, \quad G = (V, E), \quad E = E_b(V),$$

$$E_b(V) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V \times V : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = b\}.$$

Наконец, на классе $\mathfrak{G}_g$ определим величину

$$\chi_g = \chi(\{a_1, \dots, a_t\}^n; l_{a_1}, \dots, l_{a_t}) = \max_{G \in \mathfrak{G}_g} \chi(G).$$

Как и прежде, $\chi(\mathbb{R}^n)$, очевидно, ограничено снизу величиной $\max_{l_{a_1}, \dots, l_{a_t}} \chi_g$, и в настоящей работе мы получим новые нетривиальные нижние оценки как раз на χ_g . Заметим, что из-за недостатков существовавших ранее методов доказательства подобных оценок в большинстве ситуаций до сих пор вовсе никакого хорошего результата известно не было. В частности, принципиальные трудности возникали уже при попытке получения экспоненциальных оценок для

$$\chi_2 = \chi(\{-2, -1, 0, 1, 2\}; l_{-2}, l_{-1}, l_0, l_1, l_2).$$

Следующий параграф, посвященный формулировкам старых и новых теорем, мы для удобства разобьем на три части: первую часть мы посвятим результатам, касающимся случая $(-1, 0, 1)$ -векторов; во второй части мы отразим положение дел с оценками для χ_2 ; наконец, в третьей части мы приведем общие результаты.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Несомненно, допустимы и дальнейшие обобщения поставленных задач. Скажем, совершенно не обязательно требовать целочисленности от величин $a_1, \dots, a_t$. Однако значительных изменений как в формулировках результатов, так и в методах их обоснования от подобных обобщений не возникнет; вместе с тем громоздкость изложения возрастет, и потому на новых обобщениях мы останавливаться не будем.

§ 2. Формулировки результатов

2.1. $(-1, 0, 1)$ -задача. Определим сначала некоторые параметры, которые нам позволят в дальнейшем в более компактной и ясной форме привести полученные результаты. При этом все величины, описанные в предыдущем параграфе (n, l_{-1}, l_0, l_1) , мы считаем заранее (произвольно) заданными. Объекты типа $\Sigma_1, \mathfrak{G}_1, \chi_1$ и т. д. также сохраняют свой первоначальный смысл.

Зафиксируем произвольную (каждую) пару величин $i_1, i_2 \in \{-1, 0, 1\}, i_1 < i_2$, обозначим через $l(i_1, i_2)$ величину $l_{i_1} + l_{i_2}$ и рассмотрим семейство векторов

$$\begin{aligned} \Sigma_{i_1, i_2} &= \Sigma(\{i_1, i_2\}^{l(i_1, i_2)}; l_{i_1}, l_{i_2}) \\ &= \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{l(i_1, i_2)}) : x_\nu \in \{i_1, i_2\}, \nu = 1, \dots, l(i_1, i_2); \\ &\quad \text{card}\{\nu \in \{1, \dots, l(i_1, i_2)\} : x_\nu = i\} = l_i, i \in \{i_1, i_2\}\}. \end{aligned}$$

В действительности, Σ_{i_1, i_2} совпадает с Σ_g в том специальном случае, когда размерность равна $l(i_1, i_2)$, целых чисел $a_1, \dots, a_t$ всего два, а сами они суть $a_1 = i_1$, $a_2 = i_2$. Таким образом, понятно, что определение Σ_{i_1, i_2} корректно и что в зависимости от того, какие конкретные значения из множества $\{-1, 0, 1\}$ принимают индексы i_1, i_2 , мы имеем дело либо с семейством $(-1, 0)$ -векторов, либо с семейством $(0, 1)$ -векторов, либо, наконец, с семейством $(-1, 1)$ -векторов. Заметим, что порядок индексов был введен нами исключительно для удобства: ясно ведь, что, по сути, все равно, как назвать семейство — скажем, $\Sigma_{0,1}$ или $\Sigma_{1,0}$. Заметим также, что этот порядок согласован с порядком величин $a_1, \dots, a_t$ в Σ_g (см. § 1).

Положим теперь

$$\bar{s}_{i_1, i_2} = \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma_{i_1, i_2}} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \quad \underline{s}_{i_1, i_2} = \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma_{i_1, i_2}} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle,$$

где угловыми скобками обозначено скалярное произведение векторов в евклидовом пространстве.

Наконец, по той же схеме, но уже без дополнительных пояснений можно определить величины $\bar{s}_{-1,0,1}$, $\underline{s}_{-1,0,1}$:

$$\bar{s}_{-1,0,1} = \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma_1} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \quad \underline{s}_{-1,0,1} = \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma_1} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.1. Разумеется, для величин $\bar{s}_{i_1, i_2}$, $\underline{s}_{i_1, i_2}$, $\bar{s}_{-1,0,1}$, $\underline{s}_{-1,0,1}$ легко написать явные формулы: например, $\bar{s}_{0,1} = l_1$, $\underline{s}_{0,1} = \max\{0, l_1 - l_0\}$, $\bar{s}_{-1,0,1} = l_1 + l_{-1}$, а $\underline{s}_{-1,0,1} = -2 \min\{l_{-1}, l_1\} + \max\{0, |l_1 - l_{-1}| - l_0\}$.

Зададим $p_{0,1}$, $p_{-1,0}$, $p_{-1,1}$ и $p_{-1,0,1}^m$ ($m \geq 2$ — не зависящее от размерности натуральное число) как минимальные нечетные простые числа, удовлетворяющие соотношениям:

$$\begin{aligned} \bar{s}_{0,1} - 2p_{0,1} &< \underline{s}_{0,1}, & \bar{s}_{-1,0} - 2p_{-1,0} &< \underline{s}_{-1,0}, \\ \bar{s}_{-1,1} - 8p_{-1,1} &< \underline{s}_{-1,1}, & \bar{s}_{-1,0,1} - mp_{-1,0,1}^m &< \underline{s}_{-1,0,1}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.2. Как из общих соображений, так и из соображений удобства дальнейших расчетов (см. § 4), было бы интересно задать простые числа $p_{0,1}$, $p_{-1,0}$, $p_{-1,1}$ и $p_{-1,0,1}^m$ в виде явных (хотя бы асимптотических) выражений. Безусловно, сделать это удастся не всегда. В частности, любое из наших простых чисел вполне может оказаться равным тройке (вне зависимости от величины размерности) или какой-либо другой константе: тогда об асимптотике и речь не пойдет. Однако если допустить, скажем, что $l_{-1} \sim l_{-1}^0 n$, $l_1 \sim l_1^0 n$ и $l_0 \sim l_0^0 n$ с $l_{-1}^0, l_1^0, l_0^0 \in (0, 1)$, то возникнут хорошие формулы типа

$$p_{0,1} = \frac{\bar{s}_{0,1} - \underline{s}_{0,1}}{2} + O\left(\left(\frac{\bar{s}_{0,1} - \underline{s}_{0,1}}{2}\right)^{38/61}\right),$$

обеспечиваемые соответствующими результатами в аналитической теории чисел (см. [24]). При этом второе слагаемое в каждой из таких формул заведомо мало по сравнению с первым, ведь понятно, что в наших предположениях величина типа

$\bar{s}_{0,1} - \underline{s}_{0,1}$ имеет порядок n . На самом деле, упомянутые ограничения выделяют на множестве параметров подмножество “общего положения” в том смысле, что в отсутствие этих ограничений хотя бы один из параметров должен быть бесконечно мал по сравнению с размерностью, а такое может происходить лишь на множестве асимптотической меры нуль. В то же время и наиболее интересные эффекты наблюдаются при условии $l_{-1} \asymp n$, $l_1 \asymp n$, $l_0 \asymp n$. В дальнейшем мы будем, как правило, апеллировать именно к этим условиям.

После всего сказанного мы готовы сформулировать теоремы. Единственный результат, который был известен до сих пор, был фактически получен автором в работе [11] (см. также [6]). Однако явно он нигде в интересующем нас виде выписан не был, и здесь мы приводим его в теореме 1.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $l_{-1} \leq l_1$ и $l_1 + l_{-1} \leq n/2$. Положим

$$D_{-1,0,1}^2 = \sum_{k_1, k_2 \in \mathcal{A}_1} \binom{n}{k_1} \binom{n-k_1}{k_2},$$

где

$$\mathcal{A}_1 = \{(k_1, k_2) : k_1 + k_2 \leq n, k_1 + 2k_2 \leq p_{-1,0,1}^2 - 1, k_1, k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Тогда имеет место неравенство

$$\chi_1 \geq \frac{P(l_{-1}, l_0, l_1)}{D_{-1,0,1}^2},$$

где, в свою очередь, $P(u_1, \dots, u_\lambda) = \frac{(u_1 + \dots + u_\lambda)!}{u_1! \dots u_\lambda!}$ — полиномиальный коэффициент.

Теорема 1 допускает одновременно и значительное усиление, и значительное обобщение (удается снять ограничения, наложенные нами на величины l_{-1}, l_0, l_1). Соответствующие новые результаты мы изложим в следующих трех теоремах.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $i_1 < i_2$, $i_1, i_2 \in \{-1, 0, 1\}$, и $i_3 \in \{-1, 0, 1\}$ — число, остающееся в множестве $\{-1, 0, 1\}$ после удаления из него величин i_1, i_2 . Положим

$$D_{i_1, i_2} = \binom{n}{l_{i_3}} \sum_{k_1=0}^{p_{i_1, i_2}-1} \binom{l(i_1, i_2)}{k_1}.$$

Тогда имеет место неравенство

$$\chi_1 \geq \max_{i_1, i_2} \frac{P(l_{-1}, l_0, l_1)}{D_{i_1, i_2}}.$$

ТЕОРЕМА 3. Положим для краткости $q = l(-1, 1)$. Пусть в то же время $q = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, причем $n/2 \leq q \leq sn$, $s \in (1/2, 1)$. Пусть, кроме того, $l_1 \neq l_{-1}$, μ есть количество нечетных чисел на отрезке $[2q - n, q]$, а η — количество четных чисел на отрезке $[2, q - 2]$. Положим, далее,

$$\tilde{D}_{-1,0,1} = \max_{\zeta \in (0, \eta/2)} \binom{n}{\mu + \zeta} \binom{n - \mu - \zeta}{\eta - 2\zeta}.$$

Тогда имеет место неравенство

$$\chi_1 \geq \frac{P(l_{-1}, l_0, l_1)}{Q_1(n) \tilde{D}_{-1,0,1}},$$

где $Q_1(n)$ — некоторый многочлен.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.3. При внимательном рассмотрении становится ясно, что лучше всего применять теорему 3 к случаю, когда $l_1 \approx l_{-1}$. Можно было бы дать более общую формулировку, отразив в ней специфику различных соотношений между l_1 и l_{-1} . Однако теорема и так работает лишь в весьма конкретных предположениях, и потому мы не станем загромождать текст чрезмерной, по-видимому, детализацией.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $m \geq 2$ — натуральное число, не зависящее от размерности. Положим

$$D_{-1,0,1}^m = \sum_{k_1, k_2 \in \mathcal{A}_2} \binom{n}{k_1} \binom{n - k_1}{k_2},$$

где

$$\mathcal{A}_2 = \{(k_1, k_2) : k_1 + k_2 \leq n, k_1 + 2k_2 \leq p_{-1,0,1}^m - 1, k_1, k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Тогда имеет место неравенство

$$\chi_1 \geq \max_m \left(\frac{P(l_{-1}, l_0, l_1)}{D_{-1,0,1}^m} \right)^{\frac{1}{m-1}}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.4. По внешнему виду теорем 1–4 крайне трудно, конечно, определить, в чем и когда проявляется преимущество той или иной из них. Разумеется, было бы по меньшей мере странно оставить подобный аспект проблемы без должного внимания, и в § 4 мы произведем весьма подробный анализ нетривиальных соотношений между областями применимости наших результатов.

2.2. $(-2, -1, 0, 1, 2)$ -задача. Считая, как и в предыдущем пункте, заранее заданными все величины типа $n, l_{-2}, \dots, l_2$, введем некоторые новые параметры.

Зафиксируем натуральное число τ , $2 \leq \tau \leq 5$, и набор индексов $i_1 < \dots < i_\tau$, $i_\nu \in \{-2, \dots, 2\}$, $\nu \in \{1, \dots, \tau\}$. В частности, если $\tau = 5$, то $i_1 = -2, i_2 = -1, \dots, i_5 = 2$. Обозначим через $l = l(i_1, \dots, i_\tau)$ величину $l_{i_1} + \dots + l_{i_\tau}$ и рассмотрим семейство векторов

$$\begin{aligned} \Sigma_{i_1, \dots, i_\tau} &= \Sigma(\{i_1, \dots, i_\tau\}^l; l_{i_1}, \dots, l_{i_\tau}) \\ &= \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_l) : x_\nu \in \{i_1, \dots, i_\tau\}, \nu = 1, \dots, l; \\ &\quad \text{card}\{\nu \in \{1, \dots, l\} : x_\nu = i\} = l_i, i \in \{i_1, \dots, i_\tau\}\}. \end{aligned}$$

Понятно, что $\Sigma_{i_1, \dots, i_\tau}$ при надлежащем определении размерности есть то же самое, что и Σ_g в исследуемой задаче.

Положим

$$\bar{s}_{i_1, \dots, i_\tau} = \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma_{i_1, \dots, i_\tau}} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \quad \underline{s}_{i_1, \dots, i_\tau} = \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma_{i_1, \dots, i_\tau}} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2.1. Ясно, что, как это было и в п. 2.1, все значения для величин $\bar{s}_{i_1, \dots, i_\tau}, \underline{s}_{i_1, \dots, i_\tau}$, в зависимости от соотношений между числами $l_{i_1}, \dots, l_{i_\tau}$, могут быть выписаны явно. Однако здесь формулы станут еще более громоздкими, и мы их не приводим.

Определим теперь для каждого $\tau \in \{2, \dots, 5\}$ и для каждого набора индексов $i_1, \dots, i_\tau$ со стандартными свойствами некоторые простые числа, обозначаемые следующим образом: если $\tau = 2$, то простое число имеет вид p_{i_1, i_2} ; если $\tau > 2$, то в обозначение добавляется верхний индекс и простое число записывается как $p_{i_1, \dots, i_\tau}^m$. Здесь $m \geq 2$ – не зависящее от размерности натуральное число. Итак, каждое из упомянутых чисел задается как минимальное простое, удовлетворяющее соответствующему условию:

- Если $\tau = 2$ и $(i_1, i_2) \in \{(-2, 0), (-1, 1), (0, 2)\}$, то $\bar{s}_{i_1, i_2} - 8p_{i_1, i_2} < \underline{s}_{i_1, i_2}$ и p_{i_1, i_2} нечетно.
- Если $\tau = 2$ и $(i_1, i_2) \in \{(-2, 1), (-1, 2)\}$, то $\bar{s}_{i_1, i_2} - 18p_{i_1, i_2} < \underline{s}_{i_1, i_2}$ и $p_{i_1, i_2} > 3$.
- Если $\tau = 2$ и $(i_1, i_2) = (-2, 2)$, то $\bar{s}_{i_1, i_2} - 32p_{i_1, i_2} < \underline{s}_{i_1, i_2}$ и p_{i_1, i_2} нечетно.
- Если $\tau = 2$ и $(i_1, i_2) \in \{(-2, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, 2)\}$, то $\bar{s}_{i_1, i_2} - 2p_{i_1, i_2} < \underline{s}_{i_1, i_2}$.
- Если $\tau = 3$ и $(i_1, i_2, i_3) = (-2, 0, 2)$, то $\bar{s}_{i_1, i_2, i_3} - 4mp_{i_1, i_2, i_3}^m < \underline{s}_{i_1, i_2, i_3}$ и p_{i_1, i_2, i_3} нечетно.
- Если либо $\tau = 3$ и $(i_1, i_2, i_3) \neq (-2, 0, 2)$, либо $\tau > 3$, то $\bar{s}_{i_1, \dots, i_\tau} - mp_{i_1, \dots, i_\tau}^m < \underline{s}_{i_1, \dots, i_\tau}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2.2. Здесь следует повторить все слова, сказанные по поводу простых чисел в замечании 2.1.2. Иначе говоря, практически не ограничивая общность, мы можем считать, что $l_i = l_i^0 n$, где $i \in \{-2, \dots, 2\}$, а $l_i^0 \in (0, 1)$. В результате для величин типа p_{i_1, i_2} мы получим достаточно точные асимптотические выражения, которые позволят нам производить различные асимптотические же расчеты.

Выполнены следующие новые теоремы.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $i_1 < i_2$, $i_1, i_2 \in \{-2, \dots, 2\}$, а $\{i_3, i_4, i_5\} = \{-2, \dots, 2\} \setminus \{i_1, i_2\}$. Положим

$$D_{i_1, i_2} = \binom{n}{l_{i_3}} \binom{n - l_{i_3}}{l_{i_4}} \binom{n - l_{i_3} - l_{i_4}}{l_{i_5}} \sum_{k_1=0}^{p_{i_1, i_2}-1} \binom{l(i_1, i_2)}{k_1}.$$

Тогда имеет место неравенство

$$\chi_2 \geq \max_{i_1, i_2} \frac{P(l_{-2}, \dots, l_2)}{D_{i_1, i_2}}.$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть для краткости $q_1 = l(-1, 1)$, а $n_1 = l(-1, 0, 1)$. Пусть, более того, $q_1 = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, причем $n_1/2 \leq q_1 \leq cn_1$, $c \in (1/2, 1)$. Пусть, наконец, $l_1 \neq l_{-1}$, μ есть количество нечетных чисел на отрезке $[2q_1 - n_1, q_1]$, а η — количество четных чисел на отрезке $[2, q_1 - 2]$. Положим

$$\tilde{D}_{-1,0,1} = \binom{n}{l_{-2}} \binom{n-l_{-2}}{l_2} \max_{\zeta \in (0, \eta/2)} \binom{n_1}{\mu + \zeta} \binom{n_1 - \mu - \zeta}{\eta - 2\zeta}.$$

Тогда имеет место неравенство

$$\chi_2 \geq \frac{P(l_{-2}, \dots, l_2)}{Q_2(n) \tilde{D}_{-1,0,1}},$$

где $Q_2(n)$ — некоторый многочлен.

ТЕОРЕМА 7. Пусть для краткости $q_2 = l(-2, 2)$, а $n_2 = l(-2, 0, 2)$. Пусть, более того, $q_2 = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, причем $n_2/2 \leq q_2 \leq cn_2$, $c \in (1/2, 1)$. Пусть, наконец, $l_2 \neq l_{-2}$, μ есть количество нечетных чисел на отрезке $[2q_2 - n_2, q_2]$, а η — количество четных чисел на отрезке $[2, q_2 - 2]$. Положим

$$\tilde{D}_{-2,0,2} = \binom{n}{l_{-1}} \binom{n-l_{-1}}{l_1} \max_{\zeta \in (0, \eta/2)} \binom{n_2}{\mu + \zeta} \binom{n_2 - \mu - \zeta}{\eta - 2\zeta}.$$

Тогда имеет место неравенство

$$\chi_2 \geq \frac{P(l_{-2}, \dots, l_2)}{Q_3(n) \tilde{D}_{-2,0,2}},$$

где $Q_3(n)$ — некоторый многочлен.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $m \geq 2$ — натуральное число, не зависящее от размерности. Если произвольные три индекса $i_1, i_2, i_3 \in \{-2, \dots, 2\}$ таковы, что $i_1 < i_2 < i_3$, то, беря, как обычно, в качестве i_4, i_5 два недостающих числа из множества $\{-2, \dots, 2\}$, положим

$$D_{i_1, i_2, i_3}^m = \binom{n}{l_{i_4}} \binom{n-l_{i_4}}{l_{i_5}} \sum_{k_1, k_2 \in \mathcal{A}_3} \binom{l(i_1, i_2, i_3)}{k_1} \binom{l(i_1, i_2, i_3) - k_1}{k_2},$$

где

$$\mathcal{A}_3 = \{(k_1, k_2) : k_1 + k_2 \leq l(i_1, i_2, i_3), \\ k_1 + 2k_2 \leq p_{i_1, i_2, i_3}^m - 1, k_1, k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Если, аналогично, даны $i_1 < i_2 < i_3 < i_4$, то положим

$$D_{i_1, i_2, i_3, i_4}^m = \binom{n}{l_{i_5}} \sum_{k_1, k_2, k_3 \in \mathcal{A}_4} \binom{l(i_1, i_2, i_3, i_4)}{k_1} \binom{l(i_1, i_2, i_3, i_4) - k_1}{k_2} \\ \times \binom{l(i_1, i_2, i_3, i_4) - k_1 - k_2}{k_3},$$

где

$$\mathcal{A}_4 = \{(k_1, k_2, k_3) : k_1 + k_2 + k_3 \leq l(i_1, i_2, i_3, i_4), \\ k_1 + 2k_2 + 3k_3 \leq p_{i_1, i_2, i_3, i_4}^m - 1, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Положим, наконец,

$$D_{-2, -1, 0, 1, 2}^m = \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathcal{A}_5} \binom{n}{k_1} \binom{n-k_1}{k_2} \cdots \binom{n-k_1-k_2-k_3}{k_4},$$

где

$$\mathcal{A}_5 = \{(k_1, k_2, k_3, k_4) : k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \leq n, \\ k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4k_4 \leq p_{-2, -1, 0, 1, 2}^m - 1, k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Имеет место неравенство

$$\chi_2 \geq \max_m \max \left\{ \max_{i_1, i_2, i_3} \left(\frac{P(l_{-2}, \dots, l_2)}{D_{i_1, i_2, i_3}^m} \right)^{\frac{1}{m-1}}, \right. \\ \left. \max_{i_1, i_2, i_3, i_4} \left(\frac{P(l_{-2}, \dots, l_2)}{D_{i_1, i_2, i_3, i_4}^m} \right)^{\frac{1}{m-1}}, \left(\frac{P(l_{-2}, \dots, l_2)}{D_{-2, -1, 0, 1, 2}^m} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2.3. Соотношения между теоремами 5–8 столь же неочевидны, как и соотношения между результатами предыдущего пункта. Ясно, однако, что иллюстрации к теоремам 1–4 (см. §4) уже дают представление о нетривиальности пересечений областей действия наших нынешних теорем. Дабы не загромождать статью, мы приведем в четвертом параграфе лишь один показательный пример.

2.3. Общий случай в задаче. Как всегда, полагаем стандартно определенными и изначально зафиксированными все необходимые величины и объекты: n , $t = t(n)$, $a_1 = a_1(n), \dots, a_t = a_t(n)$, $l_{a_1} = l_{a_1}(n), \dots, l_{a_t} = l_{a_t}(n)$, Σ_g, χ_g . Рассмотрим, сверх того, параметр $\tau \in \{2, \dots, t\}$, так что вслед за t этот параметр имеет право зависеть от размерности. Иными словами, $\tau = \tau(n)$ может быть любой целочисленной функцией, значения которой заключены между двойкой и соответствующими значениями функции $t(n)$. Для каждого τ и для каждого набора индексов $i_1 < \dots < i_\tau$, $i_1, \dots, i_\tau \in \{a_1, \dots, a_t\}$, определим величину $l = l(i_1, \dots, i_\tau)$ и семейство векторов $\Sigma = \Sigma_{i_1, \dots, i_\tau}$ в точности так же, как это было сделано в начале предыдущего пункта. Разумеется, определения будут совпадать лишь формально. Далее, коль скоро τ , $i_1, \dots, i_\tau$ фиксированы, а стало быть вместе с ними фиксированы l и Σ , возьмем произвольное целое число v и составим вектор $\mathbf{v} = (v, v, \dots, v) \in \mathbb{Z}^l$. В частности, $\mathbf{v}$ может оказаться и тождественно нулевым. Имея $\mathbf{v}$, положим

$$\bar{s}_{i_1, \dots, i_\tau}^{\mathbf{v}} = \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma_{i_1, \dots, i_\tau}} \langle \mathbf{x} - \mathbf{v}, \mathbf{y} - \mathbf{v} \rangle, \quad \underline{s}_{i_1, \dots, i_\tau}^{\mathbf{v}} = \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma_{i_1, \dots, i_\tau}} \langle \mathbf{x} - \mathbf{v}, \mathbf{y} - \mathbf{v} \rangle.$$

Эквивалентно, мы вольны были сперва породить новое семейство векторов $\Sigma^{\mathbf{v}} = \Sigma_{i_1, \dots, i_\tau}^{\mathbf{v}}$, последовательно вычитая из каждого элемента Σ постоянный вектор $\mathbf{v}$, а потом в качестве $\bar{s}_{i_1, \dots, i_\tau}^{\mathbf{v}}$ и $\underline{s}_{i_1, \dots, i_\tau}^{\mathbf{v}}$ взять соответственно максимум и минимум скалярных произведений элементов $\Sigma^{\mathbf{v}}$. Положим, наконец,

$$d_{i_1, \dots, i_\tau}^{\mathbf{v}} = \max\{d \in \mathbb{N} : d \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma^{\mathbf{v}}\}$$

и зададим $p_{i_1, \dots, i_\tau}^{m, \mathbf{v}}$ как минимальное простое число, удовлетворяющее условию

$$\frac{\bar{s}_{i_1, \dots, i_\tau}^{\mathbf{v}}}{d_{i_1, \dots, i_\tau}^{\mathbf{v}}} - mp_{i_1, \dots, i_\tau}^{m, \mathbf{v}} < \frac{\underline{s}_{i_1, \dots, i_\tau}^{\mathbf{v}}}{d_{i_1, \dots, i_\tau}^{\mathbf{v}}}.$$

Здесь $m \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$, причем, в отличие от аналогичного параметра в предыдущих пунктах, m может зависеть от n , и в надлежащий момент мы поясним необходимость подобного усложнения конструкции. Отметим, что дроби, фигурирующие в определении простого числа, заведомо целочисленные. В дополнение положим

$$p_{i_1, \dots, i_\tau}^m = \min_{\mathbf{v}} p_{i_1, \dots, i_\tau}^{m, \mathbf{v}}.$$

С целью сделать достаточно громоздкое изложение более прозрачным, приведем примеры. Пусть, скажем, $a_1, \dots, a_n$ суть какие-либо нечетные числа. Тогда понятно, что при $\mathbf{v} = (1, \dots, 1)$ выполнена оценка $d_{i_1, \dots, i_\tau}^{\mathbf{v}} \geq 4$. Если же a' есть наибольший общий делитель чисел $a_1, \dots, a_n$, то даже для $\mathbf{v} = (0, \dots, 0)$ имеет место точное равенство $d_{a_1, \dots, a_t}^{\mathbf{v}} = (a')^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3.1. В общем случае, с каковым мы сейчас и работаем, гораздо труднее, чем то было в замечаниях 2.1.2 и 2.2.2, разобраться с асимптотиками для простых чисел. Поскольку никаких расчетов мы здесь производить не станем, то и в подробности мы вдаваться не будем. Заметим только, что в большинстве разумных ситуаций асимптотические формулы также могут быть получены с помощью аналитической техники в духе книги [24].

Следующие два результата являются новыми.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $2 \leq \tau = \tau(n) \leq t = t(n)$, $i_1 < \dots < i_\tau$, $i_1, \dots, i_\tau \in \{a_1, \dots, a_t\}$, $l = l(i_1, \dots, i_\tau)$ и $m = m(n) \geq 2$. Пусть, кроме того,

$$\{i_{\tau+1}, \dots, i_t\} = \{a_1, \dots, a_t\} \setminus \{i_1, \dots, i_\tau\}.$$

Положим

$$D_{i_1, \dots, i_\tau}^m = \binom{n}{l_{i_{\tau+1}}} \binom{n - l_{i_{\tau+1}}}{l_{i_{\tau+2}}} \dots \binom{n - l_{i_{\tau+1}} - \dots - l_{i_{t-1}}}{l_{i_t}} \\ \times \sum_{k_1, \dots, k_{\tau-1} \in \mathcal{A}_6} \binom{l}{k_1} \binom{l - k_1}{k_2} \dots \binom{l - k_1 - \dots - k_{\tau-2}}{k_{\tau-1}},$$

где

$$\mathcal{A}_6 = \{(k_1, \dots, k_{\tau-1}) : k_1 + \dots + k_{\tau-1} \leq l, \\ k_1 + 2k_2 + \dots + (\tau - 1)k_{\tau-1} \leq p_{i_1, \dots, i_\tau}^m - 1, \ k_1, \dots, k_{\tau-1} \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Имеет место неравенство

$$\chi_g \geq \max_m \max_{\tau} \max_{i_1, \dots, i_{\tau}} \left(\frac{P(l_{a_1}, \dots, l_{a_t})}{D_{i_1, \dots, i_{\tau}}^m} \right)^{\frac{1}{m-1}}.$$

Заметим, что в определении величины $D_{i_1, \dots, i_{\tau}}^m$ мы неявно предполагали, что $\tau + 1 < t - 1$. Ясно, однако же, как устроены остальные случаи: при $\tau + 1 = t - 1$ мы имеем лишь один “биномиальный” множитель у суммы, а при $\tau = t$ такого множителя вовсе нет. Ситуация с $\tau = 2$ и $\tau = 3$ при записи слагаемых в сумме аналогична (ср., например, теорему 4).

ТЕОРЕМА 10. Пусть для некоторого $v \in \mathbb{Z}$ среди чисел $a_1 - v, \dots, a_t - v$ есть тройка вида $-a, 0, a$, $a > 0$. Пусть, далее, $q_a = l(-a, a)$, $n_a = l(-a, 0, a)$, причем $q_a = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, и $n_a/2 \leq q_a \leq cn_a$, $c \in (1/2, 1)$. Пусть, наконец, μ есть количество нечетных чисел на отрезке $[2q_a - n_a, q_a]$, а η — количество четных чисел на отрезке $[2, q_a - 2]$. Положим

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{-a, 0, a} &= \binom{n}{l_{i_1}} \binom{n - l_{i_1}}{l_{i_2}} \dots \binom{n - l_{i_1} - \dots - l_{i_{t-4}}}{l_{i_{t-3}}} \\ &\times \max_{\zeta \in (0, \eta/2)} \binom{n_a}{\mu + \zeta} \binom{n_a - \mu - \zeta}{\eta - 2\zeta}, \end{aligned}$$

где $\{i_1, \dots, i_{t-3}\} = \{a_1, \dots, a_t\} \setminus \{-a, 0, a\}$. Имеет место неравенство

$$\chi_g \geq \frac{P(l_{a_1}, \dots, l_{a_t})}{Q_4(n) \tilde{D}_{-a, 0, a}},$$

где, в свою очередь, $Q_4(n)$ — некоторый многочлен.

Ясно, что при $t = 3$ множители перед знаком максимума в выражении для $\tilde{D}_{-a, 0, a}$ пропадают, а при $t = 4$ остается только один такой множитель (ср. теоремы 3, 6 и 7).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3.2. Естественно, если в условиях теоремы 10 троек с известными свойствами окажется несколько, то теорема будет применима к каждой из них, так что в окончательной оценке правильнее брать максимум по всем подходящим наборам $-a, 0, a$. На самом деле, возможны дальнейшие обобщения сформулированного результата, но мы остановимся здесь лишь на уже приведенных утверждениях.

§ 3. Доказательства результатов

Прежде чем непосредственно переходить к доказательствам теорем, сделаем несколько общих замечаний. В теории графов хорошо известно следующее понятие (см. [2] и [3]): *числом независимости графа* $G = (V, E)$ называется максимальная мощность такого подмножества множества его вершин, в котором ни одна пара вершин не соединена ребром. Часто число независимости обозначают через $\alpha(G)$. Из

принципа Дирихле мгновенно вытекает неравенство $\chi(G) \geq \frac{\text{card } V}{\alpha(G)}$. Таким образом, имея хорошую *верхнюю* оценку на число независимости графа, можно автоматически получить хорошую *нижнюю* оценку на хроматическое число. Отметим, что, в действительности, оценка и впрямь оказывается “хорошей” (т.е. достаточно точной): с одной стороны, в этом можно убедиться “эмпирически” – сравнивая установленные нами различные границы для значений χ_1 , χ_2 и χ_g , а с другой стороны, это обусловлено многими близкими наблюдениями теоретического характера. В частности, это хорошо видно в модели случайного графа (см. [25]–[27]).

Понятно, что в нашей – геометрической – терминологии отсутствие ребра в том или ином множестве вершин означает отсутствие некоторого “запрещенного” расстояния между соответствующими векторами. Более того, в евклидовом пространстве, с которым мы здесь работаем, расстояние однозначно определяется скалярным произведением. В конечном счете именно в терминах запрещенных расстояний и скалярных произведений мы и будем формулировать понятие независимости. Иными словами, типичной для нас будет

ЛЕММА. *Каково бы ни было семейство векторов $Q \subset V$, в котором расстояние между любыми двумя различными векторами не равно b (скалярное произведение любых двух векторов не равно b'), его мощность не превосходит D .*

Ясно, что лемма как раз влечет оценки $\alpha(G) \leq D$ и $\chi(G) \geq \frac{\text{card } V}{D}$.

3.1. Доказательство теоремы 2. Все параметры, необходимые для формулировки теоремы, мы считаем по-прежнему определенными и изначально зафиксированными. Рассмотрим сначала случай, когда $i_1 = 0$, $i_2 = 1$. Дабы обосновать результат, мы должны показать существование такого графа $G = (V, E) \in \mathfrak{G}_1$, что $\chi(G) \geq \frac{P(l_{-1}, l_0, l_1)}{D_{0,1}}$. Положим $V = \Sigma_1$, а в качестве запрещенного расстояния, порождающего на V реберную структуру, возьмем величину $b = \sqrt{2p_{0,1}}$. Сразу можно заметить, что $G = (V, E) \in \mathfrak{G}_1$, $E = E_b$, и что в то же время $\text{card } V = P(l_{-1}, l_0, l_1)$. Стало быть, ввиду наших общих предпосылок остается доказать лемму:

ЛЕММА. *Каково бы ни было семейство векторов $Q = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_h\} \subset V$, в котором расстояние между любыми двумя различными векторами не равно b , его мощность не превосходит $D_{0,1}$.*

Для доказательства рассмотрим совокупность всех l_{-1} -элементных подмножеств множества $\mathfrak{R}_n = \{1, \dots, n\}$:

$$\mathcal{M} = \left\{ M_1, \dots, M_{\binom{n}{l_{-1}}} \right\} \subset 2^{\mathfrak{R}_n}.$$

Разобьем множество вершин нашего графа G на части:

$$V = F_1 \sqcup \dots \sqcup F_{\binom{n}{l_{-1}}},$$

где

$$F_j = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in V : \{\nu = 1, \dots, n : x_\nu = -1\} = M_j\}.$$

Иначе говоря, $F_j, j = 1, \dots, \binom{n}{l-1}$, состоит из тех векторов, у которых множество координатных позиций с минус единицами фиксировано, а нули и единицы располагаются произвольно на оставшихся местах. Построенное разбиение индуцирует, в свою очередь, разбиение семейства Q : $Q = (Q \cap F_1) \sqcup \dots \sqcup (Q \cap F_{\binom{n}{l-1}})$. Наша цель будет достигнута, если мы сумеем убедиться в том, что для всякого j выполнена оценка

$$\text{card}(Q \cap F_j) \leq \sum_{k_1=0}^{p_{0,1}-1} \binom{l(0,1)}{k_1}.$$

Мы знаем, что все векторы из F_j и из $Q \cap F_j$ имеют общий набор координатных позиций, на которых стоят минус единицы. Следовательно, отбрасывая эти позиции, мы можем понизить размерность и перейти от F_j и $Q \cap F_j$ к новым, $l(0,1)$ -мерным, семействам $(0,1)$ -векторов F'_j и $Q_j \subset F'_j$, в которых расстояние между любыми двумя векторами совпадает с расстоянием между их прообразами в F_j и $Q \cap F_j$ соответственно. Тем самым, в Q_j запрещено то же расстояние $b = \sqrt{2p_{0,1}}$, что и в Q , причем $\text{card } Q_j = \text{card}(Q \cap F_j)$, а стало быть, нас интересует неравенство

$$\text{card } Q_j \leq \sum_{k_1=0}^{p_{0,1}-1} \binom{l(0,1)}{k_1}.$$

Нетрудно проверить, что в F'_j тогда и только тогда $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = b$, когда $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \bar{s}_{0,1} - p_{0,1}$. Каждому вектору $\mathbf{x} \in F'_j$ сопоставим многочлен

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathbf{x}} &\in \mathbb{Z}/p_{0,1}\mathbb{Z}[y_1, \dots, y_{l(0,1)}], \\ \mathcal{P}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) &= \prod_{\lambda} (\lambda - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle), \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{l(0,1)}), \end{aligned}$$

λ пробегает все вычеты по модулю $p_{0,1}$, кроме $\bar{s}_{0,1} \pmod{p_{0,1}}$. Легко видеть, что коль скоро $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in F'_j$, $\mathcal{P}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \not\equiv 0 \pmod{p_{0,1}}$ в том и только том случае, когда $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \equiv \bar{s}_{0,1} \pmod{p_{0,1}}$. Более того, $p_{0,1}$ было определено так, что последнее сравнение возможно лишь при условии, что либо $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \bar{s}_{0,1}$, т.е. $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, либо $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \bar{s}_{0,1} - p_{0,1}$, т.е. $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = b$.

Последовательно применяя соотношение $y_\nu^2 = y_\nu, \nu = 1, \dots, l(0,1)$, верное для всех координат $(0,1)$ -векторов $\mathbf{y} \in F'_j$, к стандартному представлению многочлена $\mathcal{P}_{\mathbf{x}}$ в виде линейной комбинации мономов, образуем новый многочлен $\tilde{\mathcal{P}}_{\mathbf{x}}$, обладающий всеми перечисленными выше арифметическими свойствами многочлена $\mathcal{P}_{\mathbf{x}}$. Если считать, что $Q_j = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{h'}\}$, то исходя из этих свойств и условия леммы ($\langle \mathbf{x}_{\nu_1}, \mathbf{x}_{\nu_2} \rangle \neq \bar{s}_{0,1} - p_{0,1}$) можно показать линейную независимость над полем $\mathbb{Z}/p_{0,1}\mathbb{Z}$ всех многочленов $\tilde{\mathcal{P}}_{\mathbf{x}_1}, \dots, \tilde{\mathcal{P}}_{\mathbf{x}_{h'}}$ (например, действуя от противного и подставляя в потенциальную вырожденную линейную комбинацию этих многочленов векторы $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{h'}$ в качестве аргументов). Но тогда $\text{card } Q_j = h'$ не

превосходит размерности пространства многочленов степени $p_{0,1} - 1$ от $l(0, 1)$ переменных, у которых к тому же степень по любой переменной не больше единицы. Таким образом,

$$\text{card } Q_j \leq \sum_{k_1=0}^{p_{0,1}-1} \binom{l(0,1)}{k_1}$$

и лемма полностью доказана.

Заметим, что в процессе доказательства мы использовали так называемый линейно-алгебраический метод в комбинаторике. Подробно с этим методом можно ознакомиться в работах [6], [28] и [29]. В дальнейшем мы еще не раз прибегнем к его помощи, но столь детально проводить необходимые в его рамках (стандартные) рассуждения мы уже не станем.

Если теперь $i_1 = -1$, а $i_2 = 0$, то в такой ситуации доказательство теоремы проходит по сценарию, который вполне идентичен уже прописанному. В качестве графа $G = (V, E) \in \mathfrak{G}_1$ с большим хроматическим числом мы берем граф, у которого множество вершин V снова в точности равно Σ_1 , а множество ребер $E = E_b$ порождено расстоянием $b = \sqrt{2p_{-1,0}}$. Лемма с оценкой числа независимости этого графа тождественно совпадает с только что доказанной ($D_{0,1}$ заменяется на $D_{-1,0}$), причем для ее обоснования можно использовать сразу два подхода. С одной стороны, достаточно сослаться на уже разобранный случай, заметив, что сохраняющее расстояние домножение всех векторов в V на -1 немедленно возвращает нас к нему. С другой стороны, можно дословно повторить наши рассуждения: рассмотреть совокупность l_1 -элементных подмножеств в $\mathfrak{R}_n$, произвести разбиение V на соответствующие $\binom{n}{l_1}$ частей F_j , организовать редукцию размерности к величине $l(-1, 0)$, построить многочлены над $\mathbb{Z}/p_{-1,0}\mathbb{Z}$, свободные от сомножителя $\bar{s}_{-1,0} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \pmod{p_{-1,0}}$, уменьшить их степень по каждой переменной за счет кратного применения соотношения $y_\nu^2 = -y_\nu$ и доказать линейную независимость окончательно полученных полиномов, коль скоро они в совокупности отвечают интересующим нас векторам (принадлежащим семейству $(-1, 0)$ -векторов, аналогичному Q_j).

Пусть, наконец, $i_1 = -1$, $i_2 = 1$. Здесь граф $G \in \mathfrak{G}_1$ таков, что $V = \Sigma_1$, $b = \sqrt{8p_{-1,1}}$. Все дальнейшие шаги совершенно стандартны. Тонкость заключается лишь в том, что про $(-1, 1)$ -векторы из $l(-1, 1)$ -мерного семейства, возникающего в результате редукции размерности (аналога семейства F'_j), можно дополнительно сказать, что их попарные скалярные произведения сравнимы с $\bar{s}_{-1,1}$ по модулю 4. В самом деле, если мы возьмем два произвольных элемента $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ из этого семейства и из каждого из них вычтем вектор $\mathbf{v} = (1, 1, \dots, 1)$ (ср. п. 2.3), то

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x} - \mathbf{v}, \mathbf{y} - \mathbf{v} \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - 2(l_1 - l_{-1}) + (l_1 + l_{-1}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - l_1 + 3l_{-1} \end{aligned}$$

(предпоследнее равенство выполнено, так как и в $\mathbf{x}$, и в $\mathbf{y}$ по построению l_1 координат величины 1 и l_{-1} координат величины -1). Векторы $\mathbf{x} - \mathbf{v}, \mathbf{y} - \mathbf{v}$ состоят, в свою очередь, из нулей и минус двоек, так что $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - l_1 + 3l_{-1} \equiv 0 \pmod{4}$. В то же время $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - l_1 + 3l_{-1} \equiv \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - (l_1 + l_{-1}) \pmod{4}$ и, стало быть, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \equiv l_1 + l_{-1}$

(mod 4), где, как мы знаем, $l_1 + l_{-1} = \bar{s}_{-1,1}$. Исходя из установленного сравнения, из нечетности числа $p_{-1,1}$ и из неравенства, которому оно удовлетворяет, замечаем, что запрещенное скалярное произведение $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \bar{s}_{-1,1} - 4p_{-1,1}$ (отвечающее запрещенному расстоянию b) достигается тогда и только тогда, когда оно сравнимо с $\bar{s}_{-1,1}$ по модулю $p_{-1,1}$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$). Значит, и впрямь можно использовать обычные полиномы (над $\mathbb{Z}/p_{-1,1}\mathbb{Z}$ с $l(-1, 1)$ переменными без сомножителя $\bar{s}_{-1,1} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ (mod $p_{-1,1}$) и с $y_\nu^2 = 1$) и, доказывая их линейную независимость, обосновывать, тем самым, изначальное утверждение.

Все случаи разобраны, и доказательство теоремы 2 завершено.

3.2. Доказательство теоремы 3. Здесь, как и в предыдущем пункте, мы образуем граф $G \in \mathfrak{G}_1$, рассматривая $V = \Sigma_1$; однако в качестве запрещенного расстояния мы берем величину $b = \sqrt{2\bar{s}_{-1,0,1}}$. Понятно, что такому b отвечает скалярное произведение $(-1, 0, 1)$ -векторов, равное $b' = 0$. Понятно также, что соответствующая лемма об оценке числа независимости обязана иметь следующий вид:

ЛЕММА. Каково бы ни было семейство векторов $Q = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_h\} \subset V$, в котором скалярное произведение любых двух различных векторов не равно b' , его мощность не превосходит $Q_1(n)\tilde{D}_{-1,0,1}$.

В действительности, эта лемма была доказана автором в работе [14]. По существу, она тоже базируется на линейно-алгебраическом методе. Тем не менее для ее обоснования необходимо использовать нетривиальную модификацию этого метода, которая становится возможной благодаря специфическому выбору параметров. Отсылая читателя к процитированной выше работе, мы не станем повторять здесь проделанные в ней выкладки.

До сих пор для построения графа с большим хроматическим числом мы использовали исключительно “полное” множество вершин, т.е. $V = \Sigma_1$. Естественно, может возникнуть вопрос, а нужно ли вообще в рамках нашей техники изучать собственные подсемейства в Σ_1 ? В следующем пункте мы дадим положительный ответ на этот вопрос.

3.3. Доказательство теоремы 4. В отличие от всех предыдущих доказательств, нынешнее будет в некотором смысле неконструктивным: мы лишь предложим список графов из $\mathfrak{G}_1$ – кандидатов на роль того графа, на котором достигается интересующая нас оценка величины χ_1 , – и убедимся, что по крайней мере один из этих графов действительно имеет большое хроматическое число.

Как обычно, считаем все параметры заранее заданными. Обозначим дополнительно через ρ величину, стоящую в правой части неравенства, которое мы стремимся обосновать:

$$\rho = \left(\frac{P(l_{-1}, l_0, l_1)}{D_{-1,0,1}^m} \right)^{1/(m-1)}.$$

Ясно, что ρ зависит от m , но $m \geq 3$ уже зафиксировано (при $m = 2$ мы попадаем, по сути, в условия старой теоремы 1 (ср. § 4), и с целью уменьшения громоздкости изложения эту ситуацию мы здесь не обсуждаем). Положим для краткости $P = P(l_{-1}, l_0, l_1)$. Построением обещанного списка графов мы займемся в рамках

следующего конечного процесса, образованного вложенными друг в друга “альтернативами”. В целом логическая структура такова: если $\chi(G^0) \geq \rho$ для некоторого (конкретного) G^0 , то делать нечего; иначе, быть может, $\chi(G^1) \geq \rho$ для некоторого (конкретного) G^1 ; если и тут фиаско, то, вероятно, с G^2 оценка выйдет, и т.д.; однако коль скоро и с G^0 , и с G^1 , и с прочими графами вплоть до $(m-3)$ -го (разумеется, мы неявно допускаем при записи, что $m \geq 5$, но это исключительно для удобства) мы терпим поражение, то заведомо с некоторым (конкретным) G^{m-2} мы добьемся успеха.

Рассмотрим граф $G^0 = (V^0, E^0) \in \mathfrak{G}_1$, у которого множество вершин V^0 совпадает с Σ_1 , а множество ребер $E^0 = E_{b_0}^0$ порождено запрещенным расстоянием $b_0 = \sqrt{2p_{-1,0,1}^m}$. Понятно, что между векторами из V^0 расстояние b_0 достигается тогда и только тогда, когда скалярное произведение этих векторов есть $b'_0 = \bar{s}_{-1,0,1} - p_{-1,0,1}^m$. Выполнена *альтернатива*, состоящая из двух взаимоисключающих вариантов:

- *Вариант 1.* Мощность всякого семейства векторов $Q \subset V^0$, в котором скалярное произведение любых двух различных элементов не равно b'_0 , не превосходит P/ρ . В этом случае мы имеем аналог стандартной леммы с оценкой числа независимости. Однако мы его не доказываем, а лишь постулируем как, возможно, правильный. Если наш постулат и впрямь верен, то $\chi_1 \geq \rho$ (так как $\text{card } V^0 = \text{card } \Sigma_1 = P$) и все в порядке (т.е. “кандидатура” G^0 нас удовлетворила, посредством нее теорема доказана и список “кандидатур” на ней обрывается). Иначе переходим ко второму пункту альтернативы.
- *Вариант 2.* Найдется семейство векторов $Q \subset V^0$, в котором скалярное произведение любых двух различных элементов не равно b'_0 и у которого тем не менее мощность больше чем P/ρ . Рассмотрим тогда граф $G^1 = (V^1, E^1) \in \mathfrak{G}_1$ с $V^1 = Q$ и E^1 , порожденным запретом $b_1 = \sqrt{4p_{-1,0,1}^m}$ ($b'_1 = \bar{s}_{-1,0,1} - 2p_{-1,0,1}^m$).

Если $m = 3$, то процесс завершен и в дальнейшем работать нам предстоит с кандидатурой графа G^1 (доказывать, что уж она-то нас непременно удовлетворит). В противном случае снова возникает альтернатива, почти дословно повторяющая прописанную выше:

- *Вариант 1.* Мощность всякого семейства векторов $Q \subset V^1 \subset V^0$, в котором скалярное произведение любых двух различных элементов не равно b'_1 , не превосходит P/ρ^2 . В такой ситуации опять-таки $\chi_1 \geq \rho$ (так как в силу нашего допущения $\text{card } V^1 \geq P/\rho$). Стало быть, если не G^0 , то G^1 нас устраивает и другие кандидатуры нам не понадобятся.
- *Вариант 2.* Существует такое семейство векторов $Q \subset V^1 \subset V^0$, что скалярное произведение любых двух различных элементов в нем не равно b'_1 и что в то же время его мощность больше чем P/ρ^2 . Рассмотрим граф $G^2 = (V^2, E^2) \in \mathfrak{G}_1$ с $V^2 = Q$ и E^2 , отвечающим запрету $b_2 = \sqrt{6p_{-1,0,1}^m}$ ($b'_2 = \bar{s}_{-1,0,1} - 3p_{-1,0,1}^m$). Заметим, что V^2 свободно не только от пар векторов, имеющих скалярное произведение b'_1 , но и от пар с произведением b'_0 , поскольку $V^2 \subset V^1$.

При $m = 4$ процедура останавливается (т.е. нам остается разобраться

с кандидатурой G^2), а при $m > 4$ уже понятно, как действовать дальше. В самом деле, производя очередную альтернативу, мы будем рассматривать семейства векторов $Q \subset V^\nu \subset V^{\nu-1} \subset \dots \subset V^0$ с запрещенным скалярным произведением $b'_\nu = \bar{s}_{-1,0,1} - (\nu+1)p_{-1,0,1}^m$ ($\nu \geq 2$) и сравнивать их мощности с величиной $P/\rho^{\nu+1}$. При этом если мы вообще добрались до шага с номером ν и процесс не прекратился, то это, во-первых, означает, что $\nu \leq m-3$, а во-вторых, — что ни один граф из списка $G^0, \dots, G^{\nu-1}$ нас еще не “устроил” (т.е. не подпал под первый вариант своей альтернативы). Последнее обстоятельство, в частности, показывает, что $\text{card } V^\nu \geq P/\rho^\nu$ и что в V^ν отсутствуют пары векторов со скалярными произведениями из множества $\bar{s}_{-1,0,1} - p_{-1,0,1}^m, \dots, \bar{s}_{-1,0,1} - \nu p_{-1,0,1}^m$. Таким образом, либо в результате упомянутого выше сопоставления мощностей семейств Q с величиной $P/\rho^{\nu+1}$ мы докажем теорему при помощи графа $G^\nu = (V^\nu, E^\nu) \in \mathfrak{G}_1$, либо у нас возникнет новый граф $G^{\nu+1} = (V^{\nu+1}, E^{\nu+1})$, где $E^{\nu+1} = E_{b_{\nu+1}'}^{\nu+1}$, $b'_{\nu+1} = \bar{s}_{-1,0,1} - (\nu+2)p_{-1,0,1}^m$. В любом случае процедура заканчивается на шаге с номером $\nu \leq m-3$, причем если $\nu < m-3$, то окончание носит лишь условный характер. Поэтому для полного обоснования корректности процесса необходимо убедиться в том, что последний построенный граф G^{m-2} уже безусловно обладает хроматическим числом большим ρ .

Итак, рассмотрим граф $G^{m-2} = (V^{m-2}, E^{m-2}) \in \mathfrak{G}_1$. В силу своей конструкции граф G^{m-2} обладает тем свойством, что

$$\text{card } V^{m-2} \geq \frac{P}{\rho^{m-2}} = D_{-1,0,1}^m \rho.$$

Значит, как и прежде, искомую оценку можно вывести из следующей леммы.

ЛЕММА. *Каково бы ни было семейство векторов $Q = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_h\} \subset V^{m-2}$, в котором скалярное произведение любых двух различных элементов не равно b'_{m-2} , его мощность не превосходит $D_{-1,0,1}^m$.*

Опять-таки в силу конструкции графа $(V^{m-2} \subset \dots \subset V^0)$ последнее утверждение можно заменить следующим:

ЛЕММА'. *Каково бы ни было семейство векторов $Q = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_h\} \subset V^0 = \Sigma_1$, в котором скалярное произведение любых двух различных элементов не принадлежит множеству чисел $b'_0, \dots, b'_{m-2}$, его мощность не превосходит $D_{-1,0,1}^m$.*

Лемма' доказывается, в свою очередь, с помощью линейной алгебры в комбинаторике. А именно, каждому вектору $\mathbf{x} \in \Sigma_1$ сопоставляется многочлен $\mathcal{P}_{\mathbf{x}} \in \mathbb{Z}/p_{-1,0,1}^m \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_n]$:

$$\mathcal{P}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \prod_{\lambda} (\lambda - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle), \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n), \quad \lambda \not\equiv \bar{s}_{-1,0,1} \pmod{p_{-1,0,1}^m}.$$

Важное свойство многочлена состоит в том, что его значения на векторах из Σ_1 сравнимы с нулем по модулю нашего простого числа тогда и только тогда, когда

значения соответствующих скалярных произведений суть не $\bar{s}_{-1,0,1} \pmod{p_{-1,0,1}^m}$. Это свойство сохранится, если кратно применить тождество $y_\nu^3 = y_\nu$, $\nu = 1, \dots, n$, верное для координат $(-1, 0, 1)$ -векторов, и образовать, тем самым, новые многочлены $\tilde{\mathcal{P}}_{\mathbf{x}}$. Тогда стандартными средствами нетрудно показать, используя условия леммы', что многочлены $\tilde{\mathcal{P}}_{\mathbf{x}_1}, \dots, \tilde{\mathcal{P}}_{\mathbf{x}_h}$, отвечающие векторам из Q , линейно независимы над $\mathbb{Z}/p_{-1,0,1}^m\mathbb{Z}$. Легко, наконец, убедиться в том, что размерность пространства всех таких многочленов (от n переменных, суммарной степени $p_{-1,0,1}^m - 1$ и степени не выше двух по каждой переменной), которая теперь, естественно, ограничивает сверху величину h , как раз совпадает с $D_{-1,0,1}^m$. Лемма' и теорема 4 доказаны полностью.

3.4. Доказательство теорем 5–10. В предыдущих пунктах мы уже доказали несколько новых результатов относительно частного случая задачи. При этом, на самом деле, мы успели изложить в неявном виде все основные подходы, необходимые нам для работы и с общей ситуацией тоже. Было бы неестественно, таким образом, проводить рассуждения для каждой из последующих теорем в отдельности: это бы чрезмерно увеличило объем статьи, при том что в существенной степени такие рассуждения оказались бы параллельны друг другу. Дабы избежать необоснованной громоздкости текста, мы явно выпишем теперь те ингредиенты, которые помогли нам обосновать теоремы 2–4 и которые еще послужат нам для обоснования остальных результатов. С одной стороны, это позволит нам получать соответствующие доказательства путем простого перечисления требующихся для них ингредиентов, смешать которые в надлежащем порядке уже не составит труда. С другой стороны, это сделает более прозрачной суть нашего метода.

Ингредиент 1 (“редукция размерности”). Пусть V – это множество вершин некоторого конечного геометрического графа G , который мы можем считать принадлежащим $\mathfrak{G}_2$ или $\mathfrak{G}_g$, т.е. мы предполагаем, что набор значений координат $\{a_1, \dots, a_t\}$ зафиксирован и что числа $l_{a_1}, \dots, l_{a_t}$, отвечающие количествам компонент того или иного вида в каждом из $\mathbf{x} \in V$, заранее определены. Пусть, далее, $i_1 < \dots < i_\theta$, $\{i_1, \dots, i_\theta\} \subset \{a_1, \dots, a_t\}$. Положим

$$S = \binom{n}{l_{i_1}} \binom{n - l_{i_1}}{l_{i_2}} \dots \binom{n - l_{i_1} - \dots - l_{i_{\theta-1}}}{l_{i_\theta}}.$$

Рассмотрим совокупность

$$\mathcal{M} = \{(M_1^1, \dots, M_1^\theta), \dots, (M_S^1, \dots, M_S^\theta)\},$$

состоящую из всевозможных упорядоченных наборов попарно непересекающихся множеств $M_\nu^1, \dots, M_\nu^\theta \subset \mathbb{R}_n = \{1, \dots, n\}$, у которых $\text{card } M_\nu^\mu = l_{i_\mu}$ для любого $\nu \in \{1, \dots, S\}$ и для каждого $\mu \in \{1, \dots, \theta\}$. Построим разбиение $V = F_1 \sqcup \dots \sqcup F_S$, где

$$F_j = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in V : \{\nu = 1, \dots, n : x_\nu = i_\mu\} = M_j^\mu, \mu = 1, \dots, \theta\},$$

т.е. в F_j , $j = 1, \dots, S$, координаты, величины которых принадлежат множеству $\{i_1, \dots, i_\theta\}$, заморожены и на расстояния между векторами влияния не оказывают. В результате если множество ребер графа $G = (V, E)$ порождено запретом b ,

то мощность произвольного семейства векторов $Q \subset V$, свободного от пар элементов, отстоящих друг от друга на расстояние b , можно оценивать сверху следующим способом: можно представить Q как $Q = (Q \cap F_1) \sqcup \dots \sqcup (Q \cap F_S)$, отсечь в каждом из векторов семейства $Q \cap F_j$ все замороженные координаты, получив, тем самым, новое семейство $Q_j \subset F'_j$ меньшей (“редуцированной”) размерности $n - l_{i_1} - \dots - l_{i_\theta}$, также свободное от запрещенного расстояния, и ограничить $\text{card } Q$ величиной $S \max_j \text{card } Q_j$. Более того, если по какой-либо причине известно, что в Q дополнительно отсутствует еще несколько расстояний, то применима та же процедура редукции и в Q_j аналогично не будет ни одного из этих расстояний.

В более простой формулировке описанная процедура возникала у нас при доказательстве теоремы 2, где θ была равна единице.

Ингредиент 2 (“альтернирование”). Пусть $V^0 \subset \Sigma_g$, где природа множества Σ_g для нас значения не имеет. Пусть, кроме того, $m \geq 3$ и $b_0, \dots, b_{m-2}$ суть различные положительные вещественные числа. Пусть, наконец, при некотором D выполнена

ЛЕММА. *Каково бы ни было семейство векторов $Q \subset V^0$, в котором расстояние между любыми двумя различными элементами не принадлежит множеству чисел $b_0, \dots, b_{m-2}$, его мощность не превосходит D .*

Положим $P = \text{card } V^0$. Тогда $\chi_g \geq \rho = (P/D)^{1/(m-1)}$. Для доказательства утверждения достаточно повторить дословно все рассуждения из п. 3.3, касающиеся процесса построения списка графов $G^0, \dots, G^{m-2}$ за счет вложенных друг в друга альтернатив. Скажем, $G^0 = (V^0, E_{b_0}^0)$ и либо $\alpha(G^0) \leq P/\rho$, а стало быть, $\chi(G^0) \geq \rho$, либо существует $V^1 \subset V^0$ с $\text{card } V^1 \geq P/\rho$ и без расстояния b_0 . И так далее вплоть до $G^{m-2} = (V^{m-2}, E_{b_{m-2}}^{m-2})$, у которого $V^{m-2} \subset \dots \subset V^0$, $\text{card } V^{m-2} \geq P/\rho^{m-2}$, причем в V^{m-2} нет ни одного из расстояний $b_0, \dots, b_{m-3}$, так что благодаря постулированной выше лемме $\alpha(G^{m-2}) \leq D$, а $\chi(G^{m-2}) \geq P/D\rho^{m-2} = \rho$.

Ингредиент 3 (“линейно-алгебраический метод”). Пусть даны различные целые числа $i_1, \dots, i_\theta$, натуральные числа $l_{i_1}, \dots, l_{i_\theta}$, число $l = l_{i_1} + \dots + l_{i_\theta}$ и семейство векторов

$$\Sigma = \{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_l) : x_\nu \in \{i_1, \dots, i_\theta\}, \nu = 1, \dots, l; \\ \text{card}\{\nu \in \{1, \dots, l\} : x_\nu = i\} = l_i, i \in \{i_1, \dots, i_\theta\} \}.$$

Положим $\bar{s} = \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$. Пусть $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \equiv \bar{s} \pmod{p}$, где p – некоторое простое число, тогда и только тогда, когда либо $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, либо $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \{b'_0, \dots, b'_{m-2}\}$, где, в свою очередь, $b'_\nu \in \mathbb{Z}$ и $b'_{\nu_1} \equiv b'_{\nu_2} \pmod{p}$, $\nu, \nu_1, \nu_2 \in \{0, \dots, m-2\}$, $m \geq 2$. Тогда выполнена

ЛЕММА. *Каково бы ни было семейство векторов $Q \subset \Sigma$, в котором скалярное произведение любых двух различных элементов не принадлежит множеству чисел $b'_0, \dots, b'_{m-2}$, его мощность не превосходит*

$$D = \sum_{k_1, \dots, k_{\theta-1} \in \mathcal{A}} \binom{l}{k_1} \binom{l-k_1}{k_2} \dots \binom{l-k_1-\dots-k_{\theta-2}}{k_{\theta-1}},$$

где

$$\mathcal{A} = \{(k_1, \dots, k_{\theta-1}) : k_1 + \dots + k_{\theta-1} \leq l, \\ k_1 + 2k_2 + \dots + (\theta-1)k_{\theta-1} \leq p-1, k_1, \dots, k_{\theta-1} \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Лемма вытекает из линейной независимости многочленов $\tilde{P}_{\mathbf{x}}$ над $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, где $\mathbf{x}$ пробегает Q , а $\tilde{P}_{\mathbf{x}}$ получается из многочлена

$$\mathcal{P}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \prod_{\lambda} (\lambda - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle), \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_l), \quad \lambda \not\equiv \bar{s} \pmod{p},$$

за счет кратного применения тождества $(y_{\nu} - i_1) \dots (y_{\nu} - i_{\theta}) = 0$, $\nu = 1, \dots, l$, верного для всякого $\mathbf{y} \in \Sigma$. В самом деле, D есть просто размерность пространства всех полиномов от l переменных суммарной степени $p-1$ и степени не выше $\theta-1$ по каждой переменной.

Ингредиент 4 (“инвариантность относительно сдвигов и сжатий”). Пусть $i_1, \dots, i_{\theta}$, $l_{i_1}, \dots, l_{i_{\theta}}$, l и Σ те же, что и в третьем ингредиенте. Пусть, далее, $\mathbf{v} = (v, v, \dots, v) \in \mathbb{Z}^l$, а $\Sigma^{\mathbf{v}} = \{\mathbf{x} - \mathbf{v} : \mathbf{x} \in \Sigma\}$. Предположим, что $d \in \mathbb{N}$ делит $i_{\nu} - v$, $\nu = 1, \dots, \theta$. Рассмотрим $\Sigma^{\mathbf{v}, d} = \frac{1}{d}\Sigma^{\mathbf{v}}$. Иными словами, $\Sigma^{\mathbf{v}, d} \subset \mathbb{Z}^l$ получается из Σ путем сдвига на вектор $\mathbf{v}$ и сжатия каждого из новых векторов в d раз. Подчеркнем, кстати, что при этом скалярное произведение уменьшается квадратично по d . Понятно, что если для некоторых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma^{\mathbf{v}, d}$ известно, что их скалярное произведение равно b'' , то скалярное произведение b' их прообразов в Σ однозначно восстанавливается. Это, с очевидностью, позволяет доказать следующую лемму.

ЛЕММА. *Если для всякого $Q' \subset \Sigma^{\mathbf{v}, d}$, в котором скалярное произведение любых двух различных элементов не принадлежит множеству чисел $b''_0, \dots, b''_{m-2}$, выполнена оценка $\text{card } Q' \leq D$, то та же самая оценка имеет место для произвольного $Q \subset \Sigma$, свободного от скалярных произведений $b'_0, \dots, b'_{m-2}$.*

Заметим, что аналогичный ингредиент мы уже использовали при доказательстве теоремы 2 в случае, когда $i_1 = -1$, $i_2 = 1$. Там мы полагали фактически $v = (1, \dots, 1)$, а $d = 2$.

По существу, список необходимых ингредиентов завершен, и мы готовы перейти собственно к доказательствам. Однако теперь, как это и было обещано, мы не станем вдаваться в какие-либо детали, но лишь вкратце перечислим те составляющие, которыми надлежит воспользоваться при обосновании наших результатов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Пусть все параметры, введенные при формулировке теоремы, заранее заданы. Будем считать, например, что $i_1 = -1$, $i_2 = 2$. Рассмотрим граф $G = (V, E) \in \mathfrak{G}_2$, у которого $V = \Sigma_2$, а $E = E_b$, $b = \sqrt{18p-1,2}$. Сначала применяем редукцию размерности, замораживая на тех или иных позициях координаты величины i_3, i_4, i_5 и получая, в частности,

$$S = \binom{n}{l_{i_3}} \binom{n-l_{i_3}}{l_{i_4}} \binom{n-l_{i_3}-l_{i_4}}{l_{i_5}}.$$

Затем апеллируем к четвертому ингредиенту с $\Sigma = F'_j$, $\mathbf{v} = (-1, -1, \dots, -1)$ и $d = 3$. При этом для отыскания постулированной в нем оценки мы, в свою очередь, обращаемся к линейно-алгебраическому методу с $\theta = 2$ и $p = p_{-1,2}$, который за счет условий $\overline{s}_{-1,2} - 18p_{-1,2} = \overline{s}_{-1,2} - 2d^2p_{-1,2} < \underline{s}_{-1,2}$ и $p_{-1,2} > 3$ (т.е. $p_{-1,2}$ и d^2 взаимно просты) стандартным образом добавляет к S недостающий сомножитель, так что в произведении мы имеем $D_{-1,2}$, а в целом – интересующее нас неравенство. Ясно, что при других значениях i_1, i_2 рассуждение будет полностью аналогичным: изменения претерпят только $\mathbf{v}$, d и индексы у параметров.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 6 И 7. В этом случае ингредиентов требуется совсем мало, а именно: если мы работаем с теоремой 6, то, полагая $G = (V, E) \in \mathfrak{G}_2$, где $V = \Sigma_2$, а $E = E_b$, $b = \sqrt{2\overline{s}_{-1,0,1}}$, мы вольны применить редукцию размерности, замораживая координаты величины -2 и 2 , а затем прибегнуть к модификации линейно-алгебраического метода, которая была описана автором в статье [14]. Если же речь идет о теореме 7, то для G с тем же V и с $b = \sqrt{2\overline{s}_{-2,0,2}}$ в промежутке между двумя упомянутыми ингредиентами нужно применить еще инвариантность относительно сжатия в $d = 2$ раз.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8. В данной ситуации мы не можем явно указать тот граф, хроматическое число которого оценивается снизу надлежащим образом. Поэтому, полагая для определенности $m \geq 3$ и $i_1 = -2$, $i_2 = 0$, $i_3 = 2$ (остальные случаи совершенно аналогичны), применяем альтернирование с $V^0 = \Sigma_2$ и $b_0 = \sqrt{2p_{-2,0,2}^m}$, $b_1 = \sqrt{4p_{-2,0,2}^m}, \dots, b_{m-2} = \sqrt{2(m-1)p_{-2,0,2}^m}$. При этом для отыскания величины D , которая в конечном итоге должна оказаться равной $D_{-2,0,2}^m$, мы используем последовательно редукцию размерности до значения $l(-2, 0, 2)$, инвариантность каждого F'_j относительно сжатия в два раза и линейно-алгебраический метод с $\theta = 3$, $p = p_{-2,0,2}^m$ и подходящими $m-1$ скалярными произведениями.

По-видимому, уже не имеет смысла приводить доказательства теорем 9 и 10: ясно, что соответствующие ингредиенты легко восстановить, исходя из проделанных выше рассуждений, являющихся частными случаями по отношению к последним результатам. Тем самым, все теоремы полностью доказаны.

§ 4. Соотношения между полученными результатами

Этот параграф мы посвятим исследованию всевозможных нетривиальных соотношений между результатами теорем, доказанных нами в предыдущем параграфе. Поскольку теоремы 1–4, с одной стороны, носят наименее громоздкий с точки зрения необходимых вычислений характер, а с другой стороны, их сопоставления уже в значительной степени достаточно для понимания общей картины, мы, главным образом, на них и остановимся. Следуя сказанному в замечании 2.1.2, мы будем полагать, что $l_1 \sim l_1^0 n$, $l_{-1} \sim l_{-1}^0 n$ и $l_0 \sim l_0^0 n$ с $l_1^0, l_{-1}^0, l_0^0 \in (0, 1)$, так что и все простые числа асимптотически окажутся равными $\pi^0 n$ при подходящих $\pi^0 \in (0, 1)$. Тогда нетрудно проверить, пользуясь формулой Стирлинга, что оценки из теорем 1–4, в конечном итоге, имеют вид $\chi_1 \geq (\delta_i + o(1))^n$, где δ_i – некоторая константа, а индекс $i \in \{1, \dots, 4\}$ указывает на номер теоремы, которой она отвечает.

Сразу же возникает вопрос о том, какие значения могут принимать величины δ_i . Ясно, конечно же, что $\delta_i \leq 3$, так как мы знаем, что $\chi_1 \leq \chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^n$ (и по-тому всего различных $(-1, 0, 1)$ -векторов 3^n штук!). Существенно более важно, тем самым, разобраться с условием осмысленности оценок, т.е. с реализацией неравенства $\delta_i > 1$. Легко убедиться в том, что условия $\delta_1 > 1$ и $\delta_2 > 1$ выполняются всегда. В частности, при $l_1^0 \approx 0.3$, $l_{-1}^0 \approx 0.06$ возникает константа из работы [11]: $\delta_1 \approx 1.239$. Изучим более внимательно ситуацию с δ_3 и δ_4 .

В замечании 2.1.3 мы говорили о том, что теорема 3 наиболее интересна при $l_1 \approx l_{-1}$. Всюду далее мы будем считать, что, стало быть, в рамках теоремы 3 $l_1^0 = l_{-1}^0$, хотя при этом $l_1 \neq l_{-1}$. Понятно, что при таких ограничениях $l_1^0 \in (0, 1/2)$. Оказывается, что $\delta_3 > 1$, коль скоро $l_1^0 \in (0, 0.454 \dots)$.

Совсем тонко дело обстоит с константой из теоремы 4. Во-первых, можно заметить, что с ростом числа $m \geq 2$ “исключительная область” (область, где $\delta_4 < 1$) постоянно уменьшается. При $m = 2$ эта область изображена на рис. 1. Координаты на рисунке отвечают двум независимым параметрам в теореме — l_1^0 (ось абсцисс) и l_{-1}^0 (ось ординат). Разумеется, и l_1^0 , и l_{-1}^0 меняются в пределах от нуля до единицы. Картинка ограничена сверху естественной прямой $l_1^0 + l_{-1}^0 = 1$, так как заведомо $l_1^0 + l_{-1}^0 \leq 1$. На рис. 2 проиллюстрирован случай $m = 3$ в тех же координатах. Источение (и без того, впрочем, весьма узкой) области очевидно. Можно показать, что при $m \geq 7$ искомое неравенство $\delta_4 > 1$ никогда не нарушается, а при $m = 6$ найдутся исключения типа $l_1^0 = l_{-1}^0 = 0.499$ (между прочим, к точке $(0.5, 0.5)$ рисунки 2, 3 как раз и притягиваются). Таким образом, уже сейчас виден пафос теоремы 4 (и “альтернирования”): чем больше m , тем в определенном отношении результат сильнее.

Рис. 1

Перейдем теперь, собственно, к сопоставлению констант $\delta_1, \dots, \delta_4$. Посмотрим сначала на пару (δ_1, δ_4) . Заметим, что при $m = 2$ и при $l_1^0 + l_{-1}^0 \leq 1/2$ элементы

Рис. 2

Рис. 3

этой пары совпадают, т.е. теорема 1 является частным случаем теоремы 4. В то же время $\delta_4 = \delta_4(m)$ и если мы будем сравнивать значения $\delta_4(m)$ при различных m , то и δ_1 окажется вовлеченной в этот процесс. На рис. 3 в стандартных координатах ($l_1^0 \in (0, 1)$ – абсцисса, $l_{-1}^0 \in (0, 1)$ – ордината) изображено множество тех пар (l_1^0, l_{-1}^0) , при которых $\delta_4(3) > \delta_4(2)$. Видно, что над прямой $l_1^0 + l_{-1}^0 = 1/2$, которая отделяет теорему 1 от своего обобщения (теоремы 4 при $m = 2$), упомянутое неравенство выполнено практически всегда и это отлично коррелирует с наблюдением из конца предыдущего абзаца. Более того, под этой прямой закрашенная

область тоже весьма велика, а значит, теорема 4 не только обобщает теорему 1, но и нетривиально уточняет ее. Так, если $l_1^0 = l_{-1}^0 = 0.25$, то $\delta_1 = \delta_4(2) = 1.148\dots$, а $\delta_4(3) = 1.169\dots$. Зазор, казалось бы, небольшой, но мы напомним тот факт, что, как правило, они и должны измеряться если не сотыми, то уж во всяком случае десятными долями единицы. Можно привести и обратный пример: $l_1^0 = 0.35, l_{-1}^0 = 0.15$; тогда $\delta_1 = \delta_4(2) = 1.211\dots, \delta_4(3) = 1.197\dots$. Наконец, из области, где теорема 1 не работает: $l_1^0 = 0.35, l_{-1}^0 = 0.25$; тогда $\delta_4(2) = 1.15\dots$, а $\delta_4(3) = 1.169\dots$.

Рис. 4

Рис. 5

Четвертый рисунок представляет собой множество точек на плоскости, где $\delta_4(4) > \delta_4(2)$. Таких точек уже несколько меньше, чем точек на рис. 3. Тем не менее даже под прямой $l_1^0 + l_{-1}^0 = 1/2$ их еще довольно много. Скажем, имеется точка $(0.0505, 0.0495)$, в которой $\delta_1 = \delta_4(2) = 1.067\dots$, но $\delta_4(4) = 1.072\dots$; имеется также точка $(0.24, 0.24)$, где $\delta_1 = \delta_4(2) = 1.152\dots < \delta_4(4)$, хотя различие возникает лишь в четвертом знаке после запятой.

Далее, при любых параметрах из условия теоремы 1 $\delta_4(4) < \delta_4(3)$, $\delta_4(5) < \delta_4(4)$ и $\delta_4(6) < \delta_4(2)$, т.е. пафос альтернирования в этих ситуациях проявляется исключительно над прямой $l_1^0 + l_{-1}^0 = 1/2$. Что касается $\delta_4(5)$, то очень редко оно превосходит δ_1 : например, в $(0.01, 0.01)$ имеем $\delta_4(5) = 1.017\dots$, $\delta_1 = 1.015\dots$.

Рис. 6

Следующая пара констант, которую мы детально изучим, – это (δ_2, δ_4) . Здесь мы не забываем, что $\delta_4 = \delta_4(m)$, так что и сопоставлений будет несколько. Изображены они на рис. 5–8: на первых трех рисунках закрашенные области суть множества точек (l_1^0, l_{-1}^0) , в которых $\delta_2 > \delta_4(m)$ с $m = 2, m = 3$ и $m = 4$ соответственно; на рис. 8 мы как бы суммируем накопленный материал и закрашиваем ту часть плоскости, где $\delta_2 > \max_{m=2,3,4} \delta_4(m)$. Понятно, что в последнем случае картинка получается самая “тошная”, хотя с ростом m она и утолщается. Если посмотреть одновременно на все рисунки, начиная с третьего, то видно, как нетривиально соотносятся результаты: ни про один из них нельзя сказать, что он *всегда* сильнее другого, т.е. для каждой пары независимых параметров (l_1^0, l_{-1}^0) необходимо подыскивать свой оптимум, перебирая все доказанные нами теоремы. Можно было бы привести еще немало иллюстраций, но мы выпишем лишь несколько примеров конкретных значений, отвечающих рис. 5–7. Итак:

- Если $l_1^0 = l_{-1}^0 = 0.35$, то $\delta_2 = 1.102\dots > \delta_4(2) = 1.068\dots$. Если же $l_1^0 = 0.35$, а $l_{-1}^0 = 0.25$, то $\delta_2 = 1.121\dots < \delta_4(2) = 1.15\dots$.

Рис. 7

Рис. 8

- Если $l_1^0 = l_{-1}^0 = 0.33$, то $\delta_2 = 1.094\dots < \delta_4(3) = 1.133\dots$. Если же $l_1^0 = l_{-1}^0 = 0.41$, то $\delta_2 = 1.117\dots > \delta_4(3) = 1.052\dots$.
- Если $l_1^0 = 0.2$, $l_{-1}^0 = 0.4$, то $\delta_2 = 1.118\dots < \delta_4(3) = 1.157\dots$. Если же $l_1^0 = 0.7$, $l_{-1}^0 = 0.2$, то $\delta_2 = 1.176\dots > \delta_4(3) = 1.077\dots$.

Этот абзац мы посвятим константам δ_3 и δ_4 . Поскольку для первой из них мы считаем $l_1^0 = l_{-1}^0$, то и в процессе сравнения мы будем полагать это равенство выполненным. На рис. 9 начерчены графики кривых, образуемых величинами δ_3 и $\delta_4(2)$. Здесь по оси абсцисс откладывается $l_1^0 \in (0, 1/2)$, причем при $l_1^0 < 1/4$

Рис. 9

мы ничего не делаем, ведь в теореме 3 $l_1^0 + l_{-1}^0 = 2l_1^0 > 1/2$. Ординатами являются, в свою очередь, значения наших констант. На рисунке δ_3 представляет собою “горбик”, а $\delta_4(2)$ – монотонный “спуск”. Например, если $l_1^0 = 0.35$, то $\delta_3 = 1.095\dots > \delta_4(2) = 1.068\dots$. Наконец, рис. 10 отражает ситуацию с δ_3 и $\delta_4(3)$. Опять-таки δ_3 – “горбик”, а δ_4 – “спуск”. Только тут “горбик” плотнее примыкает к “спуску”, хотя и остается, как правило, выше него. В частности, при $l_1^0 = 0.4$ мы имеем $\delta_3 = 1.083\dots > \delta_4(3) = 1.066\dots$.

Рис. 10

Мы говорили в начале параграфа, что $\delta_i < 3$. В действительности, про верхние

оценки на наши константы можно сказать гораздо больше. Именно такого рода результаты были получены автором в работах [16]–[18]. Мы не будем здесь вдаваться в какие-либо детали, но заметим лишь, что из упомянутых работ уже вытекают оценки типа $\delta_i < 1.35$, так что наши неравенства весьма точны.

Теперь несколько слов о теоремах 5–8. Существует огромное количество ситуаций, когда без этих теорем никакой содержательной оценки на χ_2 получить не удастся. В числе таких ситуаций есть, скажем, следующая: $l_{-2} = l_{-1} = l_1 = l_2 = n/8$, $l_0 = n/2$. До сих пор про нее ничего известно не было; однако сейчас любая из теорем 5–8 дает в ее рамках экспоненциальную оценку на χ_2 . Поскольку при пяти параметрах, из которых четыре – независимые, рисовать рисунки явно затруднительно, мы не станем здесь этого делать. Заметим только, что соотношения между результатами оказываются не менее нетривиальным, чем для $(-1, 0, 1)$ -случая.

Прокомментируем напоследок общую теорему 9. Как мы помним, в ней m априори не есть постоянная величина. Зачем это нужно? Приведем такой пример. Пусть $a_1 = 1$, $a_2 = 2, \dots, a_n = n$. Ясно, что, тем самым, $l_1 = \dots = l_n = 1$, $t = n$. Положим в теореме 9 $m = \text{const}$, $\tau = t = n$. Понятно сразу же, что, во-первых, $P(l_1, \dots, l_n) = n!$ и что, во-вторых, $p = p_{1, \dots, n}^m \asymp n^3$. Рассмотрим величину

$$D = D_{1, \dots, n}^m = \sum_{k_1, \dots, k_{n-1} \in \mathcal{A}_6} \binom{n}{k_1} \binom{n-k_1}{k_2} \dots \binom{n-k_1-\dots-k_{n-2}}{k_{n-1}},$$

где, как и прежде,

$$\mathcal{A}_6 = \{(k_1, \dots, k_{n-1}) : k_1 + \dots + k_{n-1} \leq n, \\ k_1 + 2k_2 + \dots + (n-1)k_{n-1} \leq p-1, k_1, \dots, k_{n-1} \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Эту величину очень легко оценить *снизу*. Действительно, возьмем $k_1 = \dots = k_{n-1} = 1$. Очевидно, такой набор $(k_1, \dots, k_{n-1})$ принадлежит $\mathcal{A}_6$. Стало быть, $D > \binom{n}{1} \binom{n-1}{1} \dots \binom{n-(n-2)}{1} = n!$, т.е. неравенство в теореме 9 не имеет смысла.

§ 5. Приложение: графы с несколькими запрещенными расстояниями

В настоящем параграфе мы рассмотрим еще одну классическую задачу о хроматических числах конечных геометрических графов. Эта задача тоже, по существу, восходит к Эрдешу и Хадвигеру; и главный вопрос, на который здесь необходимо будет ответить, является прямым обобщением вопроса, подробно изученного нами в основной части статьи.

Говоря вкратце о предистории проблемы, следует в первую очередь упомянуть Эрдеша, который для случая плоскости определил (в несколько иных обозначениях) величину $\chi(\mathbb{R}^2, b_1, \dots, b_r)$ как хроматическое число графа $\mathcal{G}_r = (\mathcal{V}_r, \mathcal{E}_r)$ с множеством вершин $\mathcal{V}_r = \mathbb{R}^n$ и множеством ребер

$$\mathcal{E}_r = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \in \{b_1, \dots, b_r\}\},$$

где $r \geq 1$ – произвольное натуральное число, а множество $\{b_1, \dots, b_r\}$ состоит из различных положительных вещественных чисел. Заметим, что при $r = 1$ мы вновь получаем $\chi(\mathbb{R}^n)$, независимо от того, каким было значение b_1 . Более того, для всякого $r \geq 1$ величина $\chi(\mathbb{R}^2, b_1, \dots, b_r)$ реально зависит лишь от выбора $r - 1$ параметра, так как за счет надлежащей нормировки раскраски можно всегда добиться равенства $b_1 = 1$.

Работая в размерности 2, Эрдеш показал, что, во всяком случае, для каждого r найдутся такие $b_1, \dots, b_r$, что $\chi(\mathbb{R}^2, b_1, \dots, b_r) \geq cr\sqrt{\log r}$, $c > 0$ – абсолютная постоянная (см. [5]). Этот результат до сих пор никем усилен не был. Соответственно, наилучшая известная нам верхняя оценка имеет вид: $\chi(\mathbb{R}^2, b_1, \dots, b_r) \leq c'r^2$, $c' > 0$. Зазор очевиден, и следует подчеркнуть, что даже при $r = 1$ (т.е. в максимально исследованной ситуации) неравенства выглядят весьма обескураживающе: $4 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$ (см. [5], [6], [30] и [31]). Впрочем, в дальнейшем нас будут в большей степени интересовать оценки аналогичных хроматических чисел в растущей размерности, и потому мы не станем вдаваться в детали. Отметим только, что более подробно с историей двумерной задачи можно ознакомиться по замечательному обзору Л. Секей (см. [5]).

Чисто формально заменяя в определении величины $\chi(\mathbb{R}^2, b_1, \dots, b_r)$ пространство $\mathbb{R}^2$ пространством произвольной размерности, приходим к хроматическому числу $\chi(\mathbb{R}^n, b_1, \dots, b_r)$. Полагаем

$$\chi(\mathbb{R}^n, r) = \max_{b_1, \dots, b_r} \chi(\mathbb{R}^n, b_1, \dots, b_r),$$

где максимум берется по всем наборам различных положительных вещественных чисел. Про асимптотическое поведение $\chi(\mathbb{R}^n, r)$ известно довольно мало. Прежде чем формулировать соответствующие результаты, подчеркнем, что под асимптотикой здесь можно понимать как асимптотику по n , так и асимптотику по r . В целом, разумно предполагать, что $r = r(n)$, где $r(n)$ имеет право быть и константой, и сколь угодно быстро возрастающей функцией. Что касается оценок, то выглядят они так: $(c_1 r)^{c_2 n} \leq \chi(\mathbb{R}^n, r) \leq (3 + o(1))^{rn}$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$. Первая из них принадлежит автору (см. [6]), а вторая мгновенно вытекает из работы Лармана–Роджерса (см. [8]) и неравенства $\chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^n$. Понятно, что если $r = \text{const}$, то оценки (или, вернее, их аналоги в “логарифмической шкале”) сравнительно точны: зазор ведет себя принципиально так же, как это было в случае $\chi(\mathbb{R}^n)$. Иное дело, если $r(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. По-видимому, в некотором смысле нижняя оценка автора является точной. Тем не менее она заведомо подлежит дальнейшему усилению – например с помощью разработанного нами метода. Окончательной целью этого параграфа будет, таким образом, правильная постановка задачи для конечных подграфов графа $\mathcal{G}_r$: при этом опять-таки огрубление не возникнет благодаря наличию верхней оценки и теоремы Эрдеша–де Брёйна. Разумеется, в рамках нашей постановки мы сформулируем новую теорему.

Итак, пусть величины $n, t, a_1, \dots, a_t, l_{a_1}, \dots, l_{a_t}$ и семейство векторов Σ_g определены и связаны между собой в точности так же, как это было для одноименных объектов из первого параграфа. Продолжая аналогию, обозначим через

$$\mathfrak{G}_{g,r} = \mathfrak{G}(\{a_1, \dots, a_t\}^n; l_{a_1}, \dots, l_{a_t}; r)$$

класс всех графов, который можно записать в форме

$$\mathfrak{G}_{g,r} = \bigcup_{V \subseteq \Sigma_g} \bigcup_{b_1, \dots, b_r} \{G\}, \quad G = (V, E), \quad E = E_{b_1, \dots, b_r}(V),$$

$$E_{b_1, \dots, b_r}(V) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V \times V : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \in \{b_1, \dots, b_r\}\},$$

где $r \in \mathbb{N}$, а $b_1, \dots, b_r$ – всевозможные различные положительные вещественные числа. На классе $\mathfrak{G}_{g,r}$ введем величину

$$\chi_{g,r} = \chi(\{a_1, \dots, a_t\}^n; l_{a_1}, \dots, l_{a_t}; r) = \max_{G \in \mathfrak{G}_{g,r}} \chi(G).$$

Ясно, что $\chi(\mathbb{R}^n, r)$ оценивается снизу величиной $\max_{l_{a_1}, \dots, l_{a_t}} \chi_{g,r}$. Следующая теорема будет посвящена, в свою очередь, нижней оценке для $\chi_{g,r}$. В самом деле, апеллируя к п. 2.3 и сохраняя данные в нем определения параметров $(\tau, i_1, \dots, i_\tau, l = l(i_1, \dots, i_\tau), \mathbf{v} = (v, \dots, v) \in \mathbb{Z}^l, \bar{s}_{i_1, \dots, i_\tau}^{\mathbf{v}}, \underline{s}_{i_1, \dots, i_\tau}^{\mathbf{v}}, d_{i_1, \dots, i_\tau}^{\mathbf{v}}$ и $m)$, рассмотрим минимальное простое число $p_{i_1, \dots, i_\tau}^{m,r,\mathbf{v}}$, обладающее свойством

$$\frac{\bar{s}_{i_1, \dots, i_\tau}^{\mathbf{v}}}{d_{i_1, \dots, i_\tau}^{\mathbf{v}}} - rmp_{i_1, \dots, i_\tau}^{m,r,\mathbf{v}} < \frac{\underline{s}_{i_1, \dots, i_\tau}^{\mathbf{v}}}{d_{i_1, \dots, i_\tau}^{\mathbf{v}}}.$$

Положим

$$p_{i_1, \dots, i_\tau}^{m,r} = \min_{\mathbf{v}} p_{i_1, \dots, i_\tau}^{m,r,\mathbf{v}}.$$

Имеет место

ТЕОРЕМА 11. Пусть $\{i_{\tau+1}, \dots, i_t\} = \{a_1, \dots, a_t\} \setminus \{i_1, \dots, i_\tau\}$. Положим

$$D_{i_1, \dots, i_\tau}^{m,r} = \binom{n}{i_{\tau+1}} \binom{n - i_{\tau+1}}{i_{\tau+2}} \dots \binom{n - i_{\tau+1} - \dots - i_{t-1}}{i_t} \\ \times \sum_{k_1, \dots, k_{\tau-1} \in \mathcal{A}_7} \binom{l}{k_1} \binom{l - k_1}{k_2} \dots \binom{l - k_1 - \dots - k_{\tau-2}}{k_{\tau-1}},$$

где

$$\mathcal{A}_7 = \{(k_1, \dots, k_{\tau-1}) : k_1 + \dots + k_{\tau-1} \leq l, \\ k_1 + 2k_2 + \dots + (\tau-1)k_{\tau-1} \leq p_{i_1, \dots, i_\tau}^{m,r} - 1, k_1, \dots, k_{\tau-1} \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Выполнено неравенство

$$\chi_{g,r} \geq \max_m \max_{\tau} \max_{i_1, \dots, i_\tau} \left(\frac{P(l_{a_1}, \dots, l_{a_t})}{D_{i_1, \dots, i_\tau}^{m,r}} \right)^{\frac{1}{m-1}}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Отметим, что значительный интерес представляет решение задачи о нескольких запрещенных расстояниях даже в случае, когда $n = 1$. Здесь имеются, например, результаты Ружи, Кацнельсона и Мошевитина–Ахунжанова, касающиеся ситуации с бесконечными наборами запретов, образующих “лакунарные последовательности”. Однако наши вопросы, по существу, многомерны, и мы здесь на этом не останавливаемся.

Список литературы

1. *Hadwiger H.* Ein Überdeckungssatz für den Euklidischen Raum // *Portugal. Math.* 1944. V. 4. P. 140–144.
2. *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1973.
3. *Дистель Р.* Теория графов. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002.
4. *Klee V., Wagon S.* Old and new unsolved problems in plane geometry and number theory. Washington: Math. Association of America, 1991.
5. *Székely L. A.* Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems // *Paul Erdős and his mathematics*. Berlin: Springer, 2002. P. 649–666. (Bolyai Soc. Math. Stud. V. 11.)
6. *Райгородский А. М.* Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств // *УМН.* 2001. Т. 56. №1. С. 107–146.
7. *Райский Д. Е.* Реализация всех расстояний при разбиении пространства $\mathbb{R}^n$ на $n + 1$ часть // *Матем. заметки.* 1970. Т. 7. С. 319–323.
8. *Larman D. G., Rogers C. A.* The realization of distances within sets in Euclidean space // *Matematika.* 1972. V. 19. P. 1–24.
9. *Larman D. G.* A note on the realization of distances within sets in Euclidean space // *Comment. Math. Helv.* 1978. V. 53. P. 529–535.
10. *Frankl P., Wilson R.* Intersection theorems with geometric consequences // *Combinatorica.* 1981. V. 1. P. 357–368.
11. *Райгородский А. М.* О хроматическом числе пространства // *УМН.* 2000. Т. 55. №2. С. 147–148.
12. *de Bruijn N. G., Erdős P.* A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations // *Nederl. Acad. Wet., Proc., Ser. A.* 1951. V. 54. №5. P. 371–373.
13. *Райгородский А. М.* Об одной оценке в проблеме Борсука // *УМН.* 1999. Т. 54. №2. С. 185–186.
14. *Райгородский А. М.* Задачи Борсука и Хадвигера и системы векторов с запретами на скалярные произведения // *УМН.* 2002. Т. 57. №3. С. 159–160.
15. *Raigorodskii A. M.* The Borsuk partition problem // *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* (to appear).
16. *Райгородский А. М.* Проблема Борсука для $(0, 1)$ -многогранников и кросс-политопов // *Докл. РАН.* 2000. Т. 371. №5. С. 600–603.
17. *Райгородский А. М.* Проблема Борсука для $(0, 1)$ -многогранников и кросс-политопов // *Докл. РАН.* 2002. Т. 384. №5. С. 593–597.
18. *Райгородский А. М.* Проблемы Борсука, Хадвигера и Грюнбаума для некоторых классов многогранников и графов // *Докл. РАН.* 2003. Т. 388. №6. С. 738–742.
19. *Ziegler G. M.* Lectures on 0/1-polytopes // *Polytopes – combinatorics and computation* / ed. G. Kalai et al. Basel: Birkhäuser, 2000. P. 1–44. (DMV Sem. V. 29.)
20. *Ziegler G. M.* Coloring Hamming graphs, optimal binary codes, and the 0/1-Borsuk problem in low dimensions // *Lecture Notes in Comput. Sci.* 2001. V. 2122. P. 159–171.
21. *Payan C.* On the chromatic number of cube-like graphs // *Discrete Math.* 1992. V. 103. P. 271–277.
22. *Schiller F.* Zur Berechnung und Abschätzung von Färbungszahlen und der ϑ -Funktion von Graphen // *Diplomarbeit.* Berlin: Technische Universität, 1999.
23. *Linial N., Meshulam R., Tarsi M.* Matroidal bijections between graphs // *J. Combin. Theory Ser. B.* 1988. V. 45. №1. P. 31–44.
24. *Прахар К.* Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967.
25. *Bollobás B.* Random graphs. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001.
26. *Bollobás B.* The chromatic number of random graphs // *Combinatorica.* 1988. V. 8. P. 49–56.

27. *Alon N., Spencer J.* The probabilistic method. Chichester: Wiley, 2000.
28. *Babai L., Frankl P.* Linear algebra methods in combinatorics. Part 1. Chicago: The University of Chicago, 1992.
29. *Alon N., Babai L., Suzuki H.* Multilinear polynomials and Frankl–Ray–Chaudhuri–Wilson type intersection theorems // J. Combin. Theory. Ser. A. 1991. V. 58. P. 165–180.
30. *Hadwiger H.* Ungelöste Probleme № 40 // Elem. Math. 1961. V. 16. P. 103–104.
31. *Moser L., Moser W.* Solution to problem 10 // Canad. Math. Bull. 1961. V. 4. P. 187–189.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: araigor@avangard.ru

Поступила в редакцию
23.09.2003