Общероссийский математический портал

Ю. А. Алхутов, О гёльдеровой непрерывности $p(x)$ -гармонических функций, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 2, 3–28

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1264>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 06:36:49

УДК 514.946

Ю. А. Алхутов

О гёльдеровой непрерывности $p(x)$ -гармонических функций

Изучается вопрос о гёльдеровости решений уравнения p -Лапласа с измеримым показателем суммируемости $p = p(x)$, отделенным от единицы и бесконечности. Доказано, что если область $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, в которой задано уравнение, разделена гиперплоскостью Σ на две части $D^{(1)}$, $D^{(2)}$ и функция $p(x)$ имеет логарифмический модуль непрерывности в фиксированной точке $x_0 \in D \cap \Sigma$ со стороны каждой из этих частей, то решения уравнения непрерывны по Гёльдеру в x_0 . Отдельно рассмотрен случай, когда $p(x)$ обладает логарифмическим модулем непрерывности в $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$. Установлено, что множество гладких в D функций плотно в классе решений.

Библиография: 15 названий.

§ 1. Введение

Рассмотрим в области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, уравнение

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) = 0 \quad (1.1)$$

с измеримой в D функцией $p(x)$, удовлетворяющей условию

$$1 < p_1 \leq p(x) \leq p_2. \quad (1.2)$$

Для определения решения уравнения (1.1) введем два класса функций, связанных с показателем $p(x)$:

$$W_{\text{loc}}(D) = \{u : u \in W_{1,\text{loc}}^1(D), |\nabla u|^{p(x)} \in L_{1,\text{loc}}(D)\},$$

где $W_{1,\text{loc}}^1(D)$ – соболевское пространство функций, локально суммируемых в D вместе с обобщенными производными первого порядка, и

$$W_0(D) = \{\psi : \psi \in W_{\text{loc}}(D), \psi = 0 \text{ вне компактного подмножества } D\}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № № 03-01-00138, 04-01-00717).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Функция $u \in W_{\text{loc}}(D)$ называется W -решением уравнения (1.1), если интегральное тождество

$$\int_D |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla \psi \, dx = 0 \quad (1.3)$$

выполнено на пробных функциях $\psi \in W_0(D)$.

Настоящая работа посвящена вопросу о внутренней гёльдеровости решений уравнения (1.1). Уравнения вида (1.1) впервые возникли в работах В. В. Жикова в связи с усреднением интегрантов вида $|\nabla u|^{p(x)}$ (см. [1], [2]). В последние годы выяснилось, что данное уравнение имеет и практический интерес: к необходимости его изучения приводят задачи математической физики, описывающие процессы в материалах и жидкостях, которые могут изменять свойства под действием электромагнитного поля или температуры (задача о термисторе [3], нелинейная система Стокса [4], [5] и др.). Уравнение (1.1) представляет и самостоятельный интерес, являясь естественным обобщением аналогичного уравнения, для которого $p(x) \equiv \text{const}$. Уравнения такого вида хорошо изучены. В частности, для них внутренняя гёльдеровость решений доказана О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой в работе [6].

Для уравнения (1.1) важную роль играет вопрос о плотности гладких функций в классе $W_{\text{loc}}(D)$. В работе В. В. Жикова [7] показано, что если

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{L}{\ln |x - y|^{-1}} \quad \forall x, y \in D, \quad |x - y| \leq \frac{1}{2}, \quad (1.4)$$

то

$$\begin{aligned} \forall u \in W_{\text{loc}}(D) \quad \exists u_j \in C^\infty(D): \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \|u - u_j\|_{W_1^1(D')} = 0, \\ \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{D'} |\nabla u_j|^{p(x)} \, dx = \int_{D'} |\nabla u|^{p(x)} \, dx \quad \forall D' \Subset D. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Условие (1.4) является точным для справедливости этого утверждения, и при выполнении (1.4) в интегральном тождестве (1.3) можно ограничиться пробными функциями $\psi \in C_0^\infty(D)$.

В работах [8] и [9] показано, что условие (1.4) обеспечивает внутреннюю априорную оценку нормы Гёльдера решений уравнения (1.1). Точность данного условия подтверждается контрпримером, построенном в [7].

Уравнение с кусочно непрерывным показателем $p(x)$ рассмотрено в [9]. Здесь гёльдеровость решений доказана в предположении, что область D разделена гиперплоскостью на две части, в каждой из которых $p(x)$ удовлетворяет условиям (1.2), (1.4), и скачок $p(x)$ при переходе через гиперплоскость не обращается в нуль. Ранее аналогичный результат для кусочно постоянного показателя $p(x)$ установлен в работе [10]. Отметим, что в рассмотренных выше случаях гладкие функции плотны в классе $W_{\text{loc}}(D)$ в смысле соотношения (1.5). Для кусочно постоянного показателя этот результат содержится в монографии [11], а в случае кусочно непрерывного показателя с ненулевым скачком на гиперплоскости вытекает из работы [7].

В работе [12] гёльдеровость решений исследована в фиксированной точке $x_0 \in D$ в предположении, что показатель $p(x)$ в окрестности этой точки удовлетворяет условию

$$|p(x) - p(x_0)| \leq \frac{L}{\ln |x - x_0|^{-1}} \quad \forall x \in D, \quad |x - x_0| \leq \frac{1}{2}.$$

Поскольку на характер разрыва функции $p(x)$ при $x \neq x_0$ не налагается никаких ограничений, то свойство (1.5), вообще говоря, не выполнено. Поэтому наряду с понятием W -решения естественно определить другой тип решений. Для этого введем класс функций $H_{\text{loc}}(D)$: $u \in H_{\text{loc}}(D)$, если $u \in W_{\text{loc}}(D)$ и для функции $u(x)$ выполнено свойство (1.5).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Функция $u \in H_{\text{loc}}(D)$ называется *H -решением уравнения* (1.1), если интегральное тождество (1.3) выполнено на пробных функциях $\psi \in C_0^\infty(D)$.

Отметим, что W -решения и H -решения были введены В.В. Жиковым в [2] под названием решений задач первого и второго типов. В этой работе вариационные задачи для интегранта $|\nabla u|^{p(x)}/p(x)$ исследовались в классах

$$W(D) = \{u : u \in W_1^1(D), |\nabla u|^{p(x)} \in L_1(D)\}$$

и соответствующем $W(D)$ классе $H(D)$, порожденном гладкими функциями: $u \in H(D)$, если $u \in W(D)$ и существует последовательность $u_j \in W(D) \cap C^\infty(D)$ такая, что $u_j \rightarrow u$ в $W_1^1(D)$ и

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_D |\nabla u_j|^{p(x)} dx = \int_D |\nabla u|^{p(x)} dx.$$

Здесь же были рассмотрены и некоторые промежуточные задачи. Следуя [2], дадим некоторую классификацию решений уравнения (1.1). Функция $u \in W(D)$ есть *слабое решение*, если интегральное тождество (1.3) выполнено на пробных функциях $\psi \in C_0^\infty(D)$, т.е. уравнение (1.1) выполнено в смысле распределений. Слабое решение называется *вариационным*, если интегральное тождество выполнено не только для $\psi \in C_0^\infty(D)$, но и для $\psi(x) = u(x)\varphi(x)$, где $u(x)$ – само решение, а $\varphi \in C_0^\infty(D)$. Примерами вариационных решений служат W - и H -решения. Если коразмерность класса $H(D)$ в $W(D)$ больше единицы, то существуют и другие вариационные решения. Уравнение (1.1) относится к обширному классу эллиптических уравнений с нестандартными условиями роста. Соответствующие вариационные задачи изучались в работах [1], [2] на предмет усреднения и эффекта Лаврентьева. Для интегрантов вида $|\nabla u|^{p(x)}$ наличие эффекта Лаврентьева эквивалентно тому, что гладкие функции не плотны в классе $W_{\text{loc}}(D)$. Логарифмическое условие (1.4) широко используется в теории пространств Соболева–Орлича, теоремах вложения и др.

Сформулируем полученные результаты. Предполагается, что область D разделена гиперплоскостью $\Sigma = \{x : x_n = 0\}$ на две части

$$D^{(1)} = D \cap \{x : x_n > 0\}, \quad D^{(2)} = D \cap \{x : x_n < 0\}$$

и функция $p(x)$ непрерывна в фиксированной точке $x_0 \in \Sigma \cap D$ со стороны каждой из частей $D^{(i)}$, $i = 1, 2$, причем

$$|p(x) - p^{(i)}(x_0)| \leq \frac{L}{\ln|x - x_0|^{-1}} \quad \forall x \in D^{(i)}, \quad |x - x_0| \leq \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \quad (1.6)$$

где $p^{(i)}(x_0)$ – предельное значение $p(x)$ при $x \rightarrow x_0$, $x \in D^{(i)}$.

В лемме 2.2 показано, что в предположениях (1.2), (1.6) все W -решения и H -решения ограничены в шаре B_{R_0} с центром в точке x_0 достаточно малого радиуса R_0 , зависящего только от размерности пространства n , постоянных p_1, p_2, L из условий (1.2), (1.6) и расстояния $\text{dist}(x_0, \partial D)$ от точки x_0 до границы ∂D области D .

Основной целью работы является доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 1. *Если выполнены условия (1.2), (1.6), то все W -решения и все H -решения уравнения (1.1) непрерывны по Гёльдеру в точке x_0 .*

В действительности теорема 1 справедлива для любых вариационных решений. Показатель Гёльдера в сформулированной теореме определяется только величинами n, p_1, p_2, L и максимумом модуля решения в обозначенном выше шаре B_{R_0} , а норма Гёльдера дополнительно зависит еще и от $\text{dist}(x_0, \partial D)$.

Теорема 1 позволяет исследовать и уравнения с кусочно непрерывным в D показателем суммируемости $p(x)$, удовлетворяющим условию (1.4) в каждой из частей $D^{(i)}$, $i = 1, 2$, без дополнительного предположения о знакопостоянстве скачка $p(x)$ при переходе через гиперплоскость Σ . Отказ от этого предположения значительно усложняет изучение уравнения. В лемме 4.2 установлено, что в этом случае множество $C^\infty(D)$ плотно в $W_{\text{loc}}(D)$ в смысле соотношения (1.5), так что уравнение (1.1) имеет только один тип решений.

ТЕОРЕМА 2. *Если показатель суммируемости $p(x)$ удовлетворяет условию (1.2) в области D и условию (1.4) в каждой из частей $D^{(i)}$, $i = 1, 2$, то все решения уравнения (1.1) непрерывны по Гёльдеру в области D .*

Сформулированные теоремы остаются в силе и для решений уравнения

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) |\nabla u|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0$$

с измеримыми ограниченными в D коэффициентами и равномерно положительно определенной матрицей $\|a_{ij}(x)\|$.

§ 2. Локальная ограниченность решений и вспомогательные оценки

В дальнейшем $u(x)$ означает W - или H -решение уравнения (1.1), $x_0 \in \Sigma \cap D$ – точка, в окрестности которой выполнено условие (1.6), $B_R = B_R^{x_0}$ – открытый шар с центром x_0 радиуса R , $B_R^{(i)} = D^{(i)} \cap B_R$, $i = 1, 2$, – полушары, $|E|$ – n -мерная мера Лебега измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ и

$$\oint_E f(x) dx = \frac{1}{|E|} \int_E f(x) dx.$$

Доказательство всех утверждений настоящего и следующего параграфов справедливо для обоих типов решений уравнения (1.1). Это связано со следующим свойством локальности функций $\psi \in W_{\text{loc}}(D)$ ($\psi \in H_{\text{loc}}(D)$) в малой окрестности точки x_0 : если $B_R \subset D$ и $\eta \in C_0^\infty(B_R)$, то $\psi \cdot \eta \in W_0(D)$ ($\psi \cdot \eta \in H_0(D)$). Действительно, достаточно проверить, что $|\psi|^{p(x)} \in L_1(B_R)$ для достаточно малого R . Очевидно,

$$\int_{B_R^{(i)}} |\nabla \psi|^{\sigma_i} dx \leq |B_R| + \int_{B_R^{(i)}} |\nabla \psi|^{p(x)} dx, \quad \sigma_i = \inf_{B_R^{(i)}} p(x), \quad i = 1, 2.$$

Отсюда по теореме вложения следует, что функция $\psi(x)$ интегрируема в $B_R^{(i)}$ со степенью $k \cdot \sigma_i$, $k = n/(n-1)$. Так как $k \cdot \sigma_i > p(x)$ в $B_R^{(i)}$ при малых R , то $|\psi|^{p(x)} \in L_{1+\delta}(B_R)$ для $\delta = \delta(n) > 0$, что и требовалось. Нетрудно видеть, что величина радиуса шара, в котором выполнено свойство локальности, оценивается сверху постоянной, зависящей только от n, p_1, p_2, L и $\text{dist}(x_0, \partial D)$.

В последующем будем применять теорему вложения Соболева

$$\left(\int_{B_R} |\varphi|^{kq} dx \right)^{1/k} \leq C r^q \int_{B_R} |\nabla \varphi|^q dx, \quad q \geq 1, \quad k = \frac{n}{n-1}, \quad \varphi \in C_0^\infty(B_R), \quad (2.1)$$

где $C = C(n, q)$, которая влечет соответствующее неравенство в полушарах:

$$\left(\int_{B_R^{(i)}} |\varphi|^{kq} dx \right)^{1/k} \leq C r^q \int_{B_R^{(i)}} |\nabla \varphi|^q dx, \quad q \geq 1, \quad k = \frac{n}{n-1}, \quad \varphi \in C_0^\infty(B_R). \quad (2.2)$$

В следующих двух утверждениях

$$w(x) = \max\{u(x) + 1, 1\}$$

и B_{R_0} означает фиксированный шар такой, что в $B_{3R_0} \subset D$ выполнены отмеченное выше свойство $|u|^{p(x)} \in L_{1+\delta}(B_{3R_0})$ для $\delta = \delta(n) > 0$ и неравенства

$$p(x) \leq k s_i, \quad x \in B_{3R_0}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (2.3)$$

с постоянной k из теоремы вложения (2.2). В формулировке приводимой ниже леммы полагается $l = \sup_{B_{3R_0}} p(x)$.

ЛЕММА 2.1. *Если выполнены условия (1.2), (1.6), то для любых $R_0 \leq \rho < r \leq 3R_0$ и $\gamma \geq 0$ справедливо неравенство*

$$\left(\int_{B_\rho} w^{k\gamma+p(x)} dx \right)^{1/k} \leq C(n, p, R_0) (1 + \gamma)^l \left(\frac{r}{r - \rho} \right)^l \int_{B_r} w^{\gamma+p(x)} dx. \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s_i = \inf_{B_{3R_0}^{(i)}} p(x)$, $i = 1, 2$. Выберем $\eta \in C_0^\infty(B_r)$, $0 \leq \eta(x) \leq 1$, и для $\beta \geq 1$ и натурального j положим

$$h_j(\xi) = \begin{cases} \xi^\beta, & \xi \in [0, j]; \\ j^\beta + \beta j^{\beta-1}(\xi - j), & \xi \geq j, \end{cases} \quad H_{ij}(\xi) = \int_1^\xi (h'_j(\zeta))^{s_i} d\zeta.$$

Рассмотрим пробную функцию $\psi = H_{ij}(w)\eta^l$, являющуюся допустимой. В силу интегрального тождества (1.3)

$$\int_{B_r} (h'_j(w))^{s_i} |\nabla w|^{p(x)} \eta^l dx \leq C(p) \int_{B_r} H_{ij}(w) |\nabla w|^{p(x)-1} |\nabla \eta| \eta^{l-1} dx.$$

Из неравенства Юнга

$$\begin{aligned} & H_{ij}(w) |\nabla w|^{p(x)-1} |\nabla \eta| \eta^{l-1} \\ & \leq \varepsilon (h'_j(w))^{s_i} |\nabla w|^{p(x)} \eta^l + C(p, \varepsilon) (h'_j(w))^{s_i(1-p(x))} H_{ij}^{p(x)}(w) |\nabla \eta|^{p(x)} \end{aligned}$$

после соответствующего выбора $\varepsilon > 0$ найдем, что

$$\int_{B_r^{(i)}} (h'_j(w))^{s_i} |\nabla w|^{p(x)} \eta^l dx \leq C(p) \int_{B_r} (h'_j(w))^{s_i(1-p(x))} H_{ij}^{p(x)}(w) |\nabla \eta|^{p(x)} dx.$$

Поскольку $|\nabla w|^{s_i} \leq |\nabla w|^{p(x)} + 1$ и $0 \leq \eta \leq 1$, то

$$\begin{aligned} & \int_{B_r^{(i)}} (h'_j(w))^{s_i} |\nabla w|^{s_i} \eta^l dx \\ & \leq \int_{B_r} (h'_j(w))^{s_i} dx + C(p) \int_{B_r} (h'_j(w))^{s_i(1-p(x))} H_{ij}^{p(x)}(w) |\nabla \eta|^{p(x)} dx. \end{aligned}$$

Или, так как $\eta^{ls_i} \leq \eta^l$,

$$\begin{aligned} & \int_{B_r^{(i)}} |\nabla(h_j(w)\eta^l)|^{s_i} dx \leq C(p) \left(\int_{B_r^{(i)}} (h_j(w))^{s_i} |\nabla \eta|^{s_i} dx \right. \\ & \quad \left. + \int_{B_r} (h'_j(w))^{s_i} (1 + (h'_j(w))^{-s_i p(x)} H_{ij}^{p(x)}(w) |\nabla \eta|^{p(x)}) dx \right). \end{aligned}$$

Применим к левой части теорему вложения (2.2). После перехода к пределу при $j \rightarrow \infty$ и замены нижнего предела интегрирования в определении функции $H_{ij}(\xi)$ на нуль придем к неравенству

$$\begin{aligned} & \left(\int_{B_r^{(i)}} (w^\beta \eta^l)^{ks_i} dx \right)^{1/k} \leq C(n, p) (1 + \beta)^l r^{s_i} \left(\int_{B_r^{(i)}} (w^\beta |\nabla \eta|)^{s_i} dx \right. \\ & \quad \left. + \int_{B_r} (w^{(\beta-1)s_i} + w^{(\beta-1)s_i + p(x)}) |\nabla \eta|^{p(x)} dx \right). \end{aligned}$$

Выберем здесь $\eta = 1$ в B_ρ , $|\nabla \eta| \leq Cr(R_0(r - \rho))^{-1}$ и, замечая, что $w \geq 1$, воспользуемся неравенствами

$$w^{\beta s_i} \leq w^{(\beta-1)s_i+p(x)} \quad \text{в } B_r^{(i)}, \quad w^{(\beta-1)s_i} \leq w^{(\beta-1)s_i+p(x)} \quad \text{в } B_r.$$

В результате получим

$$\left(\int_{B_\rho^{(i)}} w^{k\beta s_i} dx \right)^{1/k} \leq C(n, p, R_0)(1 + \beta)^l \left(\frac{r}{r - \rho} \right)^l \int_{B_r} w^{(\beta-1)s_i+p(x)} dx.$$

Далее, в силу (2.3) $k(\beta - 1)s_i + p(x) \leq k\beta s_i$ в $B_{3R_0}^{(i)}$ и

$$\left(\int_{B_\rho^{(i)}} w^{k(\beta-1)s_i+p(x)} dx \right)^{1/k} \leq C(n, p, R_0)(1 + \beta)^l \left(\frac{r}{r - \rho} \right)^l \int_{B_r} w^{(\beta-1)s_i+p(x)} dx.$$

Полагая здесь $\beta = 1 + \gamma/s_i$ и складывая полученные неравенства для $i = 1, 2$, придем к (2.4). Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. *Если выполнены условия (1.2), (1.6), то все W -решения и H -решения ограничены в шаре B_{R_0} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $|u|^{p(x)} \in L_{1+\delta}(B_{3R_0})$, то $|u|^{p(x)+\lambda} \in L_1(B_{3R_0})$ для некоторого $\lambda > 0$. Проитерлируем неравенство (2.4). Пусть $j = 0, 1, \dots$, $\chi_j = k^j$ и $r_j = R_0 + 2^{-j}R_0$. Положим в (2.4) $\gamma = \lambda\chi_j$, $r = r_j$, $\rho = r_{j+1}$ и обозначим $\alpha_j(x) = \lambda\chi_j + p(x)$,

$$\Phi_j = \left(\int_{B_{r_j}} w^{\alpha_j(x)} dx \right)^{1/\chi_j}.$$

Тогда $\Phi_{j+1} \leq (C2^{jl})^{1/\chi_j} \Phi_j$, где $C = C(n, p, R_0)$, и по индукции

$$\Phi_j \leq C(n, p, R_0) \Phi_0.$$

Или так как $w^{\lambda\chi_j+\sigma} \leq w^{\alpha_j(x)}$, где σ — точная нижняя грань $p(x)$ в B_{3R_0} , то

$$\left(\int_{B_{r_j}} w^{\lambda\chi_j+\sigma} dx \right)^{1/(\lambda\chi_{j+1}+\sigma)} \leq C(n, p, R_0) \left(\int_{B_{2R_0}} w^{\lambda+p(x)} dx \right)^{\chi_j/(\lambda\chi_j+\sigma)}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $j \rightarrow \infty$, получаем оценку

$$\sup_{B_{R_0}} w \leq C(n, p, R_0) \left(\int_{B_{2R_0}} w^{\lambda+p(x)} dx \right)^{1/\lambda}.$$

В силу выбора λ интеграл в правой части сходится. Аналогичное неравенство имеет место и для функции $w(x) = \max\{-u(x) + 1, 1\}$. Лемма доказана.

Всюду далее $M = \sup_{B_{R_0}} |u(x)|$, где $B_{R_0} \subset D$, $R_0 \leq 1/4$, и для $R \leq R_0/6$ полагаем

$$l = \sup_{B_{6R}} p(x), \quad s = \inf_{B_{6R}} p(x), \quad s_i = \inf_{B_{6R}^{(i)}} p(x), \quad i = 1, 2, \quad (2.5)$$

$$M_6 = \sup_{B_{6R}} u, \quad m_6 = \inf_{B_{6R}} u, \quad v(x) = \ln \frac{M_6 - m_6 + 2R}{M_6 - u(x) + R}. \quad (2.6)$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{R}{4(M+1)} \leq v(x) \leq \frac{2(M+1)}{R}, \quad x \in B_{6R}. \quad (2.7)$$

Четное продолжение функции f из $D^{(2)}$ в $D^{(1)}$ относительно гиперплоскости Σ обозначается через $\tilde{f}$ и предполагается, что предельные значения $p(x)$ в условии (1.6) связаны неравенством $p^{(2)}(x_0) \geq p^{(1)}(x_0)$.

Следующее утверждение является одним из основных в доказательстве теоремы 1.

ЛЕММА 2.3. *Если выполнены условия (1.2), (1.6), то для любых $R \leq \rho < r \leq 3R$ имеет место неравенство*

$$\sup_{B_\rho} v \leq C(n, p, M) \left(\frac{r}{r-\rho} \right)^a \left(\int_{B_r} v^l dx \right)^{1/l} \quad (2.8)$$

с постоянной $a(n, p) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем различать два случая:

$$p^{(2)}(x_0) - p^{(1)}(x_0) > 2L \ln (12R)^{-1}, \quad (2.9)$$

$$p^{(2)}(x_0) - p^{(1)}(x_0) \leq 2L \ln (12R)^{-1}. \quad (2.10)$$

Пусть сначала выполнено предположение (2.9), влекущее в силу условия (1.6) неравенство $s_2 > s_1$. Выбирая в интегральном тождестве (1.3) пробную функцию $\psi(x) = v^{\gamma+s_1-s_2}(x)(M_6 - u(x) + R)^{1-s_2}\eta^l(x)$, где

$$\gamma \geq 1 + s_2 - s_1, \quad (2.11)$$

$\eta \in C_0^\infty(B_{4R})$, $0 \leq \eta(x) \leq 1$, найдем, что

$$\begin{aligned} & (\gamma + s_1 - s_2) \int_{B_{4R}} |\nabla u|^{p(x)} (M_6 - u + R)^{-s_2} v^{\gamma+s_1-s_2-1} \eta^l dx \\ & + (s_2 - 1) \int_{B_{4R}} |\nabla u|^{p(x)} (M_6 - u + R)^{-s_2} v^{\gamma+s_1-s_2} \eta^l dx \\ & \leq l \int_{B_{4R}} |\nabla u|^{p(x)-1} (M_6 - u + R)^{1-s_2} v^{\gamma+s_1-s_2} \eta^{l-1} |\nabla \eta| dx. \end{aligned}$$

После отбрасывания второго слагаемого в левой части и применения к подынтегральному выражению в правой части неравенства Юнга с соответствующим ϵ приходим к оценке

$$\begin{aligned} & \int_{B_{4R}} |\nabla u|^{p(x)} (M_6 - u + R)^{-s_2} v^{\gamma+s_1-s_2-1} \eta^l dx \\ & \leq C(p) \int_{B_{4R}} (M_6 - u + R)^{p(x)-s_2} v^{\gamma+s_1-s_2+p(x)-1} |\nabla \eta|^{p(x)} dx. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Сузим область интегрирования в левой части до полушара $B_{4R}^{(2)}$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{B_{4R}^{(2)}} |\nabla u|^{p(x)} (M_6 - u + R)^{-s_2} v^{\gamma+s_1-s_2-1} \eta^l dx \\ & \leq C(p) \int_{B_{4R}} (M_6 - u + R)^{p(x)-s_2} v^{\gamma+s_1-s_2+p(x)-1} |\nabla \eta|^{p(x)} dx. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Согласно (2.7) и условию (1.6) в $B_{4R}^{(1)}$ выполнены неравенства

$$(M_6 - u + R)^{p(x)-s_2} \leq C(p, M) R^{s_1-s_2}, \quad v^{p(x)} \leq C(p, M) R^{s_1-s_2} v^{s_2},$$

а в $B_{4R}^{(2)}$ — неравенства

$$\begin{aligned} (M_6 - u + R)^{-s_2} & \geq C(p, M) (M_6 - u + R)^{-p(x)}, \\ (M_6 - u + R)^{p(x)-s_2} & \leq C(p, M), \quad v^{p(x)} \leq C(p, M) v^{s_2}. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$|\nabla v| = \frac{|\nabla u|}{M_6 - u + R}, \quad (2.14)$$

и из (2.13) с учетом перечисленных выше соотношений вытекает оценка

$$\begin{aligned} & \int_{B_{4R}^{(2)}} |\nabla v|^{p(x)} v^{\gamma+s_1-s_2-1} \eta^l dx \leq C(p, M) \left(R^{s_1-s_2} \int_{B_{4R}^{(1)}} v^{\gamma+s_1-1} |\nabla \eta|^{p(x)} dx \right. \\ & \quad \left. + \int_{B_{4R}^{(2)}} v^{\gamma+s_1-1} |\nabla \eta|^{p(x)} dx \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Теперь из неравенства $|\nabla v|^{s_2} \leq |\nabla v|^{p(x)} + 1$, примененного к подынтегральному выражению в левой части (2.15), следует

$$\begin{aligned} & \int_{B_{4R}^{(2)}} |\nabla v|^{s_2} v^{\gamma+s_1-s_2-1} \eta^l dx \leq C(p, M) \left(R^{s_1-s_2} \int_{B_{4R}^{(1)}} v^{\gamma+s_1-1} |\nabla \eta|^{p(x)} dx \right. \\ & \quad \left. + \int_{B_{4R}^{(2)}} v^{\gamma+s_1-s_2-1} \eta^l dx + \int_{B_{4R}^{(2)}} v^{\gamma+s_1-1} |\nabla \eta|^{p(x)} dx \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

По теореме вложения Соболева (2.2) в полушаре $B_{4R}^{(2)}$

$$\begin{aligned} \left(\int_{B_{4R}^{(2)}} (v^{\gamma+s_1-1} \eta^l)^k dx \right)^{1/k} &\leq C(\gamma + s_1 - 1)^l \left(R^{s_1} \int_{B_{4R}^{(1)}} v^{\gamma+s_1-1} |\nabla \eta|^{p(x)} dx \right. \\ &\quad \left. + R^{s_2} \int_{B_{4R}^{(2)}} v^{\gamma+s_1-s_2-1} \eta^l dx + R^{s_2} \int_{B_{4R}^{(2)}} v^{\gamma+s_1-1} (|\nabla \eta|^{p(x)} + |\nabla \eta|^{s_2}) dx \right), \end{aligned}$$

где $C = C(n, p, M)$. Выберем здесь радиально-симметричную относительно x_0 срезающую функцию $\eta = 1$ в B_ρ , $|\nabla \eta| \leq Cr(R(r - \rho))^{-1}$. Используя неравенства $v^{-s_2} \leq C(p, M)R^{-s_2}$ и

$$R^{-p(x)} \leq C(p)R^{-s_1}, \quad x \in B_{4R}^{(1)}, \quad R^{-p(x)} \leq C(p)R^{-s_2}, \quad x \in B_{4R}^{(2)},$$

вытекающие из (2.7) и (1.6), имеем

$$\left(\int_{B_\rho^{(2)}} v^{(\gamma+s_1-1)k} dx \right)^{1/k} \leq C(n, p, M)(\gamma + s_1 - 1)^l \left(\frac{r}{r - \rho} \right)^l \int_{B_r} v^{\gamma+s_1-1} dx. \quad (2.17)$$

Получить аналогичную оценку в полушаре $B_{4R}^{(1)}$ столь простым способом уже нельзя. Пусть

$$G_R = B_{4R}^{(1)} \cap \{x : v(x) > \tilde{v}(x)\}. \quad (2.18)$$

Возьмем в (1.3) пробную функцию

$$\psi(x) = \begin{cases} (v^\gamma(x) - \tilde{v}^\gamma(x))(M_6 - u(x) + R)^{1-s_1} \eta^l(x) & \text{в } G_R; \\ 0 & \text{в } B_{4R} \setminus G_R, \end{cases}$$

где $\gamma > 1$ удовлетворяет условию (2.11), а радиально-симметричная функция $\eta(x)$ обладает теми же свойствами, что и выше. Имеем

$$\begin{aligned} &\gamma \int_{G_R} |\nabla u|^{p(x)} v^{\gamma-1} (M_6 - u + R)^{-s_1} \eta^l dx \\ &\leq \gamma \int_{G_R} |\nabla u|^{p(x)-1} |\nabla \tilde{v}| \tilde{v}^{\gamma-1} (M_6 - u + R)^{1-s_1} \eta^l dx \\ &\quad + l \int_{G_R} |\nabla u|^{p(x)-1} (v^\gamma + \tilde{v}^\gamma) (M_6 - u + R)^{1-s_1} |\nabla \eta| \eta^{l-1} dx. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Так как $\tilde{v}(x) < v(x)$ при $x \in G_R$ и $0 \leq \eta \leq 1$, то по неравенству Юнга, примененному к подынтегральным выражениям в правой части (2.19),

$$\begin{aligned} &|\nabla u|^{p(x)-1} |\nabla \tilde{v}| \tilde{v}^{\gamma-1} (M_6 - u + R)^{1-s_1} \eta^l \\ &\leq \varepsilon |\nabla u|^{p(x)} v^{\gamma-1} (M_6 - u + R)^{-s_1} \eta^l \\ &\quad + C(\varepsilon, p) |\nabla \tilde{v}|^{p(x)} \tilde{v}^{\gamma-1} (M_6 - u + R)^{p(x)-s_1} \eta^l, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& |\nabla u|^{p(x)-1} (v^\gamma + \tilde{v}^\gamma) (M_6 - u + R)^{1-s_1} |\nabla \eta| \eta^{l-1} \\
& \leq \varepsilon |\nabla u|^{p(x)} v^{\gamma-1} (M_6 - u + R)^{1-s_1} \eta^l \\
& \quad + C(\varepsilon, p) v^{\gamma+p(x)-1} (M_6 - u + R)^{p(x)-s_1} |\nabla \eta|^{p(x)}.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (2.19) после соответствующего выбора ε найдем, что

$$\begin{aligned}
& \int_{G_R} |\nabla v|^{p(x)} v^{\gamma-1} (M_6 - u + R)^{-s_1} \eta^l dx \\
& \leq C(p) \left(\int_{G_R} |\nabla \tilde{v}|^{p(x)} \tilde{v}^{\gamma-1} (M_6 - u + R)^{p(x)-s_1} \eta^l dx \right. \\
& \quad \left. + \int_{G_R} v^{\gamma+p(x)-1} (M_6 - u + R)^{p(x)-s_1} |\nabla \eta|^{p(x)} dx \right). \quad (2.20)
\end{aligned}$$

В силу условия (1.6) при $x \in G_R$ имеет место оценка $(M_6 - u + R)^{-s_1} \geq C(p) (M_6 - u + R)^{-p(x)}$. Пользуясь еще (2.14), неравенством $(M_6 - u + R)^{p(x)-s_1} \leq C(p, M)$ и распространяя интегралы в правой части (2.20) на более широкое множество $B_{4R}^{(1)}$, перепишем (2.20) в виде

$$\begin{aligned}
& \int_{G_R} |\nabla v|^{p(x)} v^{\gamma-1} \eta^l dx \\
& \leq C \left(\int_{B_{4R}^{(1)}} |\nabla \tilde{v}|^{p(x)} \tilde{v}^{\gamma-1} \eta^l dx + \int_{B_{4R}^{(1)}} v^{\gamma+p(x)-1} |\nabla \eta|^{p(x)} dx \right), \quad (2.21)
\end{aligned}$$

где $C = C(p, M)$.

Мы не можем оценить градиент $v(x)$ по множеству $B_{4R}^{(1)} \setminus G_R$. Но это не столь важно. Рассмотрим вспомогательную функцию $w(x) = \max\{v(x), \tilde{v}(x)\}$. Поскольку $w(x) = v(x)$ при $x \in G_R$, $w(x) = \tilde{v}(x)$ при $x \in B_{4R}^{(1)} \setminus G_R$, то

$$\begin{aligned}
& \int_{B_{4R}^{(1)}} |\nabla w|^{s_1} w^{\gamma-1} \eta^l dx \leq \int_{B_{4R}^{(1)}} |\nabla w|^{p(x)} w^{\gamma-1} \eta^l dx + \int_{B_{4R}^{(1)}} w^{\gamma-1} \eta^l dx \\
& \leq \int_{G_R} |\nabla v|^{p(x)} v^{\gamma-1} \eta^l dx + \int_{B_{4R}^{(1)}} |\nabla \tilde{v}|^{p(x)} \tilde{v}^{\gamma-1} \eta^l dx \\
& \quad + \int_{B_{4R}^{(1)}} (\tilde{v}^{\gamma-1} + v^{\gamma-1}) \eta^l dx
\end{aligned}$$

и с учетом (2.21)

$$\begin{aligned}
& \int_{B_{4R}^{(1)}} |\nabla w|^{s_1} w^{\gamma-1} \eta^l dx \leq C(p, M) \left(\int_{B_{4R}^{(1)}} |\nabla \tilde{v}|^{p(x)} \tilde{v}^{\gamma-1} \eta^l dx \right. \\
& \quad \left. + \int_{B_{4R}^{(1)}} v^{\gamma+p(x)-1} |\nabla \eta|^{p(x)} dx + \int_{B_{4R}^{(1)}} (\tilde{v}^{\gamma-1} + v^{\gamma-1}) \eta^l dx \right). \quad (2.22)
\end{aligned}$$

Преобразуем подынтегральные выражения в правой части (2.22). Пользуясь условием (1.6) и соотношением (2.7), имеем

$$\begin{aligned} v^{\gamma+p(x)-1} &\leq C(p, M)v^{\gamma+s_1-1}, \\ \tilde{v}^{\gamma-1} + v^{\gamma-1} &\leq C(p, M)R^{-s_1}(\tilde{v}^{\gamma+s_1-1} + v^{\gamma+s_1-1}). \end{aligned}$$

Далее, в силу предположения (2.9) и условия (1.6) $\tilde{p}(x) > p(x)$ в $B_{4R}^{(1)}$ и по неравенству Юнга

$$|\nabla \tilde{v}|^{p(x)} \tilde{v}^{\gamma-1} < R^{\tilde{p}(x)-p(x)} |\nabla \tilde{v}|^{\tilde{p}(x)} \tilde{v}^{\gamma+p(x)-\tilde{p}(x)-1} + R^{-p(x)} \tilde{v}^{\gamma+p(x)-1}. \quad (2.23)$$

Функции, участвующие в правой части (2.23), оцениваются с помощью тех же соображений, что и выше:

$$\begin{aligned} R^{\tilde{p}(x)-p(x)} v^{\gamma+p(x)-\tilde{p}(x)-1} &\leq C(p, M)R^{s_2-s_1} \tilde{v}^{\gamma+s_1-s_2-1}, \\ R^{-p(x)} \tilde{v}^{\gamma+p(x)-1} &\leq C(p, M)R^{-s_1} \tilde{v}^{\gamma+s_1-1}. \end{aligned}$$

Учитывая перечисленные соотношения в (2.22), получаем

$$\begin{aligned} \int_{B_{4R}^{(1)}} |\nabla w|^{s_1} w^{\gamma-1} \eta^l dx &\leq C(p, M) \left(R^{s_2-s_1} \int_{B_{4R}^{(1)}} |\nabla \tilde{v}|^{\tilde{p}(x)} \tilde{v}^{\gamma+s_1-s_2-1} \eta^l dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{B_{4R}^{(1)}} v^{\gamma+s_1-1} |\nabla \eta|^{p(x)} dx + R^{-s_1} \int_{B_{4R}^{(1)}} (\tilde{v}^{\gamma+s_1-1} + v^{\gamma+s_1-1}) \eta^l dx \right). \quad (2.24) \end{aligned}$$

Поскольку $\tilde{v}(x)$ есть четное продолжение $v(x)$ из $D^{(2)}$ в $D^{(1)}$ и срезающая функция $\eta(x)$ радиально-симметрична, то

$$\int_{B_{4R}^{(1)}} (\tilde{v}^{\gamma+s_1-1} + v^{\gamma+s_1-1}) \eta^l dx = \int_{B_{4R}} v^{\gamma+s_1-1} \eta^l dx,$$

а в силу неравенства (2.15)

$$\begin{aligned} \int_{B_{4R}^{(1)}} |\nabla \tilde{v}|^{\tilde{p}(x)} \tilde{v}^{\gamma+s_1-s_2-1} \eta^l dx &= \int_{B_{4R}^{(2)}} |\nabla v|^{p(x)} v^{\gamma+s_1-s_2-1} \eta^l dx \\ &\leq C(p, M) \left(R^{s_1-s_2} \int_{B_{4R}^{(1)}} v^{\gamma+s_1-1} |\nabla \eta|^{p(x)} dx + \int_{B_{4R}^{(2)}} v^{\gamma+s_1-1} |\nabla \eta|^{p(x)} dx \right). \end{aligned}$$

Поэтому из (2.24) придем к оценке

$$\begin{aligned} \int_{B_{4R}^{(1)}} |\nabla w|^{s_1} w^{\gamma-1} \eta^l dx &\leq C(p, M) \left(\int_{B_{4R}^{(1)}} v^{\gamma+s_1-1} |\nabla \eta|^{p(x)} dx \right. \\ &\quad + R^{s_2-s_1} \int_{B_{4R}^{(2)}} v^{\gamma+s_1-1} |\nabla \eta|^{p(x)} dx + \int_{B_{4R}^{(1)}} v^{\gamma+s_1-1} |\nabla \eta|^{p(x)} dx \\ &\quad \left. + R^{-s_1} \int_{B_{4R}} v^{\gamma+s_1-1} \eta^l dx \right). \end{aligned}$$

Повторяя теперь рассуждения, использующие теорему вложения Соболева (2.2) в полушаре $B_{4R}^{(1)}$, с помощью которых из соотношения (2.16) было выведено неравенство (2.17), найдем, что

$$\left(\int_{B_\rho^{(1)}} v^{(\gamma+s_1-1)k} dx \right)^{1/k} \leq C(n, p, M)(\gamma + s_1 - 1)^l \left(\frac{r}{r-\rho} \right)^l \int_{B_r} v^{\gamma+s_1-1} dx. \quad (2.25)$$

Складывая (2.17) и (2.25), имеем

$$\left(\int_{B_\rho} v^{(\gamma+s_1-1)k} dx \right)^{1/k} \leq C(n, p, M)(\gamma + s_1 - 1)^l \left(\frac{r}{r-\rho} \right)^l \int_{B_r} v^{\gamma+s_1-1} dx. \quad (2.26)$$

Проитерируем это неравенство. Пусть $j = 0, 1, \dots$. Обозначим $r_j = \rho + 2^{-j}(r-\rho)$, $\chi_j = s_2 k^j$ и положим в (2.26) $r = r_j$, $\rho = r_{j+1}$, $\gamma = \chi_j + 1 - s_1$. Отметим, что при таком выборе γ сделанное выше предположение (2.11) окажется выполненным. В результате для

$$\Phi_j = \left(\int_{B_{r_j}} v^{\chi_j} dx \right)^{1/\chi_j}$$

получим рекуррентное соотношение

$$\Phi_{j+1} \leq C^{1/\chi_j}(n, p, M)(2^j(1 + \chi_j))^{l/\chi_j} \left(\frac{r}{r-\rho} \right)^{l/\chi_j} \Phi_j,$$

из которого вытекает (см. [13]) оценка

$$\sup_{B_\rho} v \leq C(n, p, M) \left(\frac{r}{r-\rho} \right)^a \left(\int_{B_r} v^{s_2} dx \right)^{1/s_2}, \quad a = a(p) > 0,$$

приводящая к (2.8).

Если справедливо предположение (2.10), то доказательство (2.8) много проще. В этом случае, выбирая в интегральном тождестве (1.3) пробную функцию $\psi(x) = v^\gamma(x)(M_6 - u(x) + R)^{1-s}\eta^l(x)$, где $\eta \in C_0^\infty(B_{4R})$, $\gamma \geq 1$, а s определено в (2.5), так же, как при выводе (2.12), приходим к оценке

$$\begin{aligned} & \int_{B_{4R}} |\nabla u|^{p(x)} (M_6 - u + R)^{-s} v^{\gamma-1} \eta^l dx \\ & \leq C(p) \int_{B_{4R}} (M_6 - u + R)^{p(x)-s} v^{\gamma+p(x)-1} |\nabla \eta|^{p(x)} dx. \end{aligned}$$

Так как $p^{(1)}(x_0) \leq p^{(2)}(x_0)$, то в силу условия (1.6) и предположения (2.10)

$$(M_6 - u + R)^{-s} \geq C(p, M)(M_6 - u + R)^{-p(x)}, \quad (M_6 - u + R)^{p(x)-s} \leq C(p, M)$$

и из (2.14) следует, что

$$\int_{B_{4R}} |\nabla v|^{p(x)} v^{\gamma-1} \eta^l dx \leq C(p, M) \int_{B_{4R}} v^{\gamma+s-1} |\nabla \eta|^{p(x)} dx.$$

Пользуясь еще неравенством $v^{\gamma-1} \leq C(p, M)R^{-s}v^{\gamma+s-1}$ (см. (2.7)), получаем

$$\begin{aligned} \int_{B_{4R}} |\nabla v|^s v^{\gamma-1} \eta^l dx &\leq \int_{B_{4R}} |\nabla v|^{p(x)} v^{\gamma-1} \eta^l dx + \int_{B_{4R}} v^{\gamma-1} \eta^l dx \\ &\leq \int_{B_{4R}} (R^{-s} v^{\gamma+s-1} \eta^l + v^{\gamma+s-1} |\nabla \eta|^{p(x)}) dx. \end{aligned}$$

После выбора срезающей функции и применения теоремы вложения (2.1) в шаре B_{4R} , как и выше, найдем, что

$$\left(\int_{B_\rho} v^{(\gamma+s-1)k} dx \right)^{1/k} \leq C(n, p, M)(\gamma + s - 1)^l \left(\frac{r}{r - \rho} \right)^l \int_{B_r} v^{\gamma+s-1} dx.$$

Итерирование этого соотношения приводит к оценке

$$\sup_{B_\rho} v \leq C(n, p, M) \left(\frac{r}{r - \rho} \right)^a \left(\int_{B_r} v^s dx \right)^{1/s},$$

влекущей (2.8). Лемма доказана.

Доказательство следующего утверждения использует схему рассуждений работы [14].

ЛЕММА 2.4. *Если для любых $R \leq \rho < r \leq 3R$ справедливо неравенство (2.8), то*

$$\sup_{B_R} v \leq C(n, p, M) \int_{B_{2R}} v dx. \quad (2.27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, будем считать

$$\int_{B_{2R}} v dx = 1. \quad (2.28)$$

Обозначим через $B(t)$ концентрический B_R шар радиуса $3Rt$ и пусть

$$J(t) = \left(\int_{B(t)} v^l dx \right)^{1/l}.$$

Полагая $r = 3Rt$, $\rho = 3R\tau$, перепишем (2.8) в виде

$$\sup_{B(\tau)} v(x) \leq C(n, p, M)(t - \tau)^{-a} J(t), \quad \frac{1}{3} \leq \tau < t \leq 1. \quad (2.29)$$

В частности, $\sup_{B_R} v \leq C(n, p, M)J(\frac{1}{2})$, и для доказательства леммы достаточно установить оценку $J(\frac{1}{2}) \leq C(n, p, M)$. Так как в силу (2.28)

$$J(\tau) \leq C(n, p, M) \left(\sup_{B(\tau)} v \right)^\delta, \quad \delta = 1 - l^{-1},$$

то согласно (2.29)

$$J(\tau) \leq C^\delta (t - \tau)^{-a\delta} J^\delta(t), \quad \frac{1}{3} \leq \tau < t \leq 1,$$

и

$$\ln J(\tau) \leq \delta \ln C + a\delta \ln \frac{1}{t - \tau} + \delta \ln J(t).$$

Положим здесь $\tau = t^b$, где $b > 1$. Как нетрудно видеть,

$$\int_{(1/2)^{1/b}}^1 \frac{\ln J(t^b)}{t} dt \leq C(n, p, b, M) + \delta \int_{1/2}^1 \frac{\ln J(t)}{t} dt.$$

Делая замену переменных $\xi = t^b$, получаем

$$\left(\frac{1}{b} - \delta\right) \int_{1/2}^1 \frac{\ln J(\xi)}{\xi} d\xi \leq C(n, p, b, M).$$

Выберем здесь постоянную $b > 1$, удовлетворяющую неравенству $\frac{1}{b} - \delta > 0$. Поскольку $J(\xi) \geq C(n, p)J(\frac{1}{2})$ при $\xi \in [\frac{1}{2}, 1]$, то

$$\ln \left(C(n, p)J\left(\frac{1}{2}\right) \right) \leq \frac{C(n, p, b, M)}{(1/b - \delta) \ln 2},$$

что приводит к требуемой оценке для $J(\frac{1}{2})$. Лемма доказана.

Неравенство (2.27) будет применяться в несколько измененном виде. Обозначим через Q_r , $r \geq 3R$, шары с центром в $D^{(2)}$, получающиеся параллельным переносом шара B_r с центром в x_0 вдоль нормали к Σ на расстояние R , и положим $Q_r^{(i)} = D^{(i)} \cap Q_r$, $i = 1, 2$. Пусть еще $w(x) = \max\{v(x), \tilde{v}(x)\}$ при $x \in B_{4R}^{(1)}$ и $w(x) = v(x)$ при $x \in B_{4R}^{(2)}$. Распространяя интеграл в правой части (2.27) на более широкое множество и заменяя в части $D^{(1)}$ функцию $v(x)$ на $w(x)$, получаем

$$\sup_{B_R} v(x) \leq C(n, p, M) \left(\int_{Q_{3R}} w dx + \int_{Q_{3R}^{(2)}} v dx \right). \quad (2.30)$$

§ 3. Гёльдеровость в точке W - и H -решений

Пусть, как и выше, M означает точную верхнюю грань модуля решения в шаре $B_{R_0} \subset D$ радиуса $R_0 \leq \frac{1}{2}$ и $\text{osc}\{u, B_r\} = \sup_{B_r} u(x) - \inf_{B_r} u(x)$, где B_r — шары с центром в x_0 . Доказательство теоремы 1 следует из “леммы об осцилляции”:

$$\text{osc}\{u, B_R\} \leq (1 - \delta) \text{osc}\{u, B_{6R}\} + R, \quad \delta = \delta(n, p, M) > 0, \quad R \leq \frac{R_0}{6}. \quad (3.1)$$

Из этой леммы (см., например, [15]) вытекает оценка

$$\text{osc}\{u, B_r\} \leq Cr^\alpha (R_0^{-\alpha} \text{osc}\{u, B_{R_0}\} + 1), \quad r \leq R_0, \quad (3.2)$$

с положительными постоянными $C = C(\delta)$ и $\alpha = \alpha(\delta)$. В частности,

$$|u(x) - u(x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha (R_0^{-\alpha} \operatorname{osc}\{u, B_{R_0}\} + 1), \quad |x - x_0| \leq R_0, \quad (3.3)$$

что устанавливает гёльдеровость решения в точке x_0 .

Пользуясь обозначениями (2.6), рассмотрим два множества:

$$\begin{aligned} F &= \left\{ x \in Q_{3R} : u(x) \leq \frac{M_6 + m_6}{2} \right\}, \\ G &= \left\{ x \in Q_{3R} : M_6 + m_6 - u(x) \leq \frac{M_6 + m_6}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Всегда справедливо по крайней мере одно из неравенств

$$|F| \geq \frac{1}{2}|Q_{3R}| \quad (3.5)$$

или

$$|G| \geq \frac{1}{2}|Q_{3R}|. \quad (3.6)$$

Если мы покажем, что из условия (3.5) для $u(x)$ следует

$$\sup_{B_R} u(x) \leq M_6 - \delta \operatorname{osc}\{u, B_{6R}\} + R, \quad \delta > 0, \quad (3.7)$$

то этот результат, примененный к функции $M_6 + m_6 - u(x)$, гарантирует при условии (3.6) оценку

$$\sup_{B_R} (M_6 + m_6 - u(x)) \leq M_6 - \delta \operatorname{osc}\{u, B_{6R}\} + R,$$

и в обоих случаях мы приходим к (3.1).

Ниже применяются обозначения из (2.5) и используется теорема вложения

$$\begin{aligned} \int_{B_r} |\varphi| dx &\leq C(n, \gamma) \int_{B_r} |\nabla \varphi| dx, \\ \varphi &\in C^\infty(\overline{B_r}), \quad \varphi|_E = 0, \quad |E| \geq \gamma|B_r|, \quad \gamma > 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Отметим, что данная теорема вложения имеет место и в усеченных шарах $B_r \cap D^{(2)}$ с центром в $D^{(2)}$. В этом случае требуется, чтобы $\varphi|_E = 0$, где $E \subset B_r \cap D^{(2)}$ и $|E| \geq \gamma|B_r \cap D^{(2)}|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Предполагая для определенности выполненным условие (3.5), рассмотрим функцию $v(x)$, введенную в (2.6). Нашей целью будет оценка

$$\sup_{B_R} v(x) \leq c_0(n, p, M). \quad (3.9)$$

Из нее, очевидно, следует свойство осцилляции (3.7) (с $\delta = e^{-c_0}$), влекущее гёльдеровость решения в точке x_0 . Для вывода (3.9) требуется оценить интегралы в правой части (2.30). Оценка этих интегралов основана на неравенствах

$$\int_{Q_{3R}^{(2)}} |\nabla v| dx \leq C(n, p, M) R^{n-1}, \quad (3.10)$$

$$\int_{Q_{3R}} |\nabla w| dx \leq C(n, p, M) R^{n-1}, \quad (3.11)$$

которые мы сейчас установим.

Сначала рассмотрим случай (2.9). Выбирая в интегральном тождестве (1.3)

$$\psi(x) = (M_6 - u(x) + R)^{1-s_2} \eta^l(x),$$

где $\eta \in C_0^\infty(Q_{4R})$ – радиально-симметричная относительно центра шара Q_{4R} срезающая функция, удовлетворяющая условиям $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta = 1$ в Q_{3R} и $|\nabla \eta| \leq CR^{-1}$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{Q_{4R}} |\nabla u|^{p(x)} (M_6 - u + R)^{-s_2} \eta^l dx \\ \leq C(p) \int_{Q_{4R}} |\nabla u|^{p(x)-1} (M_6 - u + R)^{1-s_2} \eta^{l-1} |\nabla \eta| dx. \end{aligned}$$

Из неравенства Юнга с соответствующим ε , применного к подынтегральному выражению в правой части, вытекает, что

$$\int_{Q_{4R}} |\nabla u|^{p(x)} (M_6 - u + R)^{-s_2} \eta^l dx \leq C(p) \int_{Q_{4R}} (M_6 - u + R)^{p(x)-s_2} |\nabla \eta|^{p(x)} dx. \quad (3.12)$$

Повторяя теперь рассуждения леммы 2.3, использованные при выводе (2.15) из (2.13), имеем

$$\int_{Q_{4R}^{(2)}} |\nabla v|^{p(x)} \eta^l dx \leq C(p, M) \left(R^{s_1-s_2} \int_{Q_{4R}^{(1)}} |\nabla \eta|^{p(x)} dx + \int_{Q_{4R}^{(2)}} |\nabla \eta|^{p(x)} dx \right).$$

Отсюда в силу выбора срезающей функции и условия (1.6) следует оценка

$$\int_{Q_{3R}^{(2)}} |\nabla v|^{s_2} dx \leq \int_{Q_{4R}^{(2)}} |\nabla v|^{p(x)} \eta^l dx + |Q_{3R}^{(2)}| \leq C(n, p, M) R^{n-s_2}, \quad (3.13)$$

приводящая к (3.10). В частности, поскольку $\tilde{p}(x) > p(x)$ в $Q_{3R}^{(1)}$, то

$$|\nabla \tilde{v}|^{p(x)} < R^{\tilde{p}(x)-p(x)} |\nabla \tilde{v}|^{\tilde{p}(x)} + R^{-p(x)} \leq C(p) (R^{s_2-s_1} |\nabla \tilde{v}|^{\tilde{p}(x)} + R^{-s_1})$$

при $x \in Q_{3R}^{(1)}$, и из (3.13) и радиальной симметрии η найдем, что

$$\int_{Q_{4R}^{(1)}} |\nabla \tilde{v}|^{p(x)} \eta^l dx \leq R^{s_2-s_1} \int_{Q_{4R}^{(1)}} |\nabla \tilde{v}|^{\tilde{p}(x)} \tilde{\eta}^l dx + R^{n-s_1} \leq C(n, p, M) R^{n-s_1}. \quad (3.14)$$

Для доказательства оценки (3.11) используем более сложную пробную функцию. Напомним, что $u(x) > \tilde{u}(x)$ на множестве $G_R \subset B_{4R}^{(1)}$ (см. (2.18)), и выберем в интегральном тождестве (1.3)

$$\psi(x) = \begin{cases} ((M_6 - u(x) + R)^{1-s_1} - (M_6 - \tilde{u}(x) + R)^{1-s_1}) \eta^l(x) & \text{в } G_R; \\ 0 & \text{в остальных точках } Q_{4R}, \end{cases}$$

где η имеет тот же смысл, что и выше. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{G_R} |\nabla u|^{p(x)} (M_6 - u + R)^{-s_1} \eta^l dx &\leq \int_{G_R} |\nabla u|^{p(x)-1} |\nabla \tilde{u}| (M_6 - \tilde{u} + R)^{-s_1} \eta^l dx \\ &+ \frac{l}{s_1 - 1} \int_{G_R} |\nabla u|^{p(x)-1} (M_6 - u + R)^{-s_1} |\nabla \eta| \eta^{l-1} dx. \end{aligned}$$

Применяя к подынтегральным выражениям в правой части неравенство Юнга и пользуясь определением G_R , получаем

$$\begin{aligned} \int_{G_R} |\nabla u|^{p(x)} (M_6 - u + R)^{-s_1} \eta^l dx &\leq C(p) \left(\int_{G_R} |\nabla \tilde{u}|^{p(x)} (M_6 - \tilde{u} + R)^{-s_1} \eta^l dx \right. \\ &\left. + \int_{G_R} (M_6 - \tilde{u} + R)^{p(x)-s_1} |\nabla \eta|^{p(x)} dx \right). \end{aligned}$$

Поэтому в силу условия (1.6), соотношения (2.14) и выбора срезающей функции

$$\int_{G_R} |\nabla v|^{p(x)} \eta^l dx \leq C(n, p, M) \left(\int_{G_R} |\nabla \tilde{v}|^{p(x)} \eta^l dx + R^{n-s_1} \right).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_{Q_{4R}^{(1)}} |\nabla w|^{p(x)} \eta^l dx &= \int_{Q_{4R}^{(1)} \setminus G_R} |\nabla \tilde{v}|^{p(x)} \eta^l dx + \int_{G_R} |\nabla v|^{p(x)} \eta^l dx \\ &\leq C(n, p, M) \left(\int_{B_{4R}^{(1)}} |\nabla \tilde{v}|^{p(x)} \eta^l dx + R^{n-s_1} \right) \end{aligned}$$

и с учетом (3.14)

$$\int_{Q_{3R}^{(1)}} |\nabla w|^{s_1} dx \leq \int_{Q_{3R}^{(1)}} |\nabla w|^{p(x)} dx + |Q_{3R}^{(1)}| \leq C(n, p, M) R^{n-s_1},$$

что вместе с (3.10) влечет (3.11).

Если выполнено предположение (2.10), то нетрудно получить оценку

$$\int_{B_{4R}} |\nabla v| dx \leq C(n, p, M) R^{n-1}, \quad (3.15)$$

приводящую к (3.10) и (3.11). Действительно, полагая в (1.3)

$$\psi(x) = (M_6 - u(x) + R)^{1-s} \eta^l(x),$$

где $\eta \in C_0^\infty(B_{5R})$, $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta = 1$ в B_{4R} , $|\nabla \eta| \leq CR^{-1}$, как и при выводе (3.12) приходим к неравенству

$$\int_{B_{5R}} |\nabla u|^{p(x)} (M_6 - u + R)^{-s} \eta^l dx \leq C(p) \int_{B_{5R}} (M_6 - u + R)^{p(x)-s} |\nabla \eta|^{p(x)} dx.$$

Следовательно, в силу условия (1.6), соотношения (2.14) и выбора η

$$\int_{B_{4R}} |\nabla v|^{p(x)} dx \leq C(n, p, M) R^{n-s},$$

что приводит к (3.15).

Теперь оценим интегралы в правой части (2.30). Начнем с первого из них. Воспользуемся предположением (3.5) и заметим, что $|F \cap Q_{3R}^{(2)}| \geq \text{const} \cdot |Q_{3R}|$ (см. (3.4)). Так как $v(x) \leq \ln 2$ на F и $w(x) = v(x)$ в $Q_{3R}^{(2)}$, то для $E = \{x \in Q_{3R} : w(x) \leq \ln 2\}$ имеем оценку $|E| \geq \text{const} \cdot |Q_{3R}|$. Поэтому по неравенству (3.8) в шаре Q_{3R}

$$\int_{Q_{3R} \setminus E} |w - \ln 2| dx \leq C(n) R \int_{Q_{3R}} |\nabla w| dx$$

и согласно (3.11)

$$\int_{Q_{3R}} w dx \leq C(n, p, M) R^n.$$

Второй интеграл в (2.30) оценивается аналогично. Действительно, $|E \cap Q_{3R}^{(2)}| \geq \text{const} \cdot |Q_{3R}|$ и снова по неравенству (3.8) в усеченном шаре $Q_{3R}^{(2)}$

$$\int_{Q_{3R}^{(2)} \setminus E} |v - \ln 2| dx \leq C(n) R \int_{Q_{3R}^{(2)}} |\nabla v| dx.$$

Неравенство (3.10) приводит к оценке

$$\int_{Q_{3R}^{(2)}} v dx \leq C(n, p, M) R^n,$$

которая влечет (3.1). Теорема доказана.

§ 4. Уравнения с кусочно непрерывным показателем суммируемости

4.1. Плотность гладких функций в классе $W_{\text{loc}}(D)$. Пусть показатель суммируемости $p(x)$ удовлетворяет условию (1.2) в области D и условию (1.4) в каждой из частей $D^{(i)}$, $i = 1, 2$. Продолжим $p(x)$ во все пространство с сохранением условия (1.2) в $\mathbb{R}^n$ и логарифмического условия (1.4) в каждом из полупространств $\mathbb{R}_+^n = \{x : x_n > 0\}$, $\mathbb{R}_-^n = \{x : x_n < 0\}$.

Сначала построим вспомогательную функцию, которая нам потребуется для доказательства плотности гладких функций в классе $W_{\text{loc}}(D)$. Положим $x = (x', x_n)$, где $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$. Фиксируя $\varepsilon \in (0, 1]$, определим $(n-1)$ -мерные открытые множества:

$$\begin{aligned} G_1(\varepsilon) &= \{x' : x' \in \Sigma, p(x', x_n) < p(x', -x_n) \forall x_n \in [0, 4\varepsilon]\}, \\ G_2(\varepsilon) &= \{x' : x' \in \Sigma, p(x', x_n) > p(x', -x_n) \forall x_n \in [0, 4\varepsilon]\}. \end{aligned}$$

Под значениями функции $p(x', x_n)$ при $x_n = 0$ здесь понимаются предельные значения $p(x)$ на Σ со стороны соответствующего полупространства. Введем еще открытые множества $G'_i(\varepsilon)$ и $G''_i(\varepsilon)$, $i = 1, 2$, состоящие из точек $G_i(\varepsilon)$, которые отстоят от границы $G_i(\varepsilon)$ на расстояние, большее чем $2\sqrt{\varepsilon}$ и $3\sqrt{\varepsilon}$ соответственно. Полагая $\delta_i = 1$, если $G''_i(\varepsilon) \neq \emptyset$, и $\delta_i = 0$, если $G''_i(\varepsilon) = \emptyset$, с помощью ядра

$$\tilde{\omega} \geq 0, \quad \tilde{\omega} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1}), \quad \tilde{\omega}(x') \equiv 0 \text{ при } |x'| \geq 1, \quad \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tilde{\omega}(x') dx' = 1,$$

определим функцию

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon(x') &= -\delta_1 \int_{G'_1(\varepsilon)} \tilde{\omega}_\varepsilon(x' - y') dy' + \delta_2 \int_{G'_2(\varepsilon)} \tilde{\omega}_\varepsilon(x' - y') dy', \\ \tilde{\omega}_\varepsilon(x') &= \varepsilon^{-(n-1)/2} \tilde{\omega}(\varepsilon^{-1/2} x'). \end{aligned}$$

Ясно, что $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, $|\varphi_\varepsilon(x')| \leq 1$, $|\nabla \varphi_\varepsilon| \leq C\varepsilon^{-1/2}$ и

$$\varphi_\varepsilon(x') = \begin{cases} -\delta_1, & x' \in G''_1(\varepsilon); \\ \delta_2, & x' \in G''_2(\varepsilon). \end{cases}$$

Ниже $F_i(\varepsilon)$, $i = 1, 2$, означает открытое множество (которое может быть и пустым), состоящее из точек $G''_i(\varepsilon)$, отстоящих от границы $\partial G''_i(\varepsilon)$ на расстояние, большее чем ε , Q_ε^x — открытый куб с центром в точке x и ребрами длины 4ε , параллельными осям координат, и полагается $y_\varepsilon = (y', y_n + \varepsilon \varphi_\varepsilon(y'))$,

$$p_\varepsilon(x) = \begin{cases} \inf_{z \in Q_\varepsilon^x \cap \mathbb{R}_+^n} p(z), & \text{если } x \in \mathbb{R}_+^n, x' \in F_1(\varepsilon) \cup F_2(\varepsilon) \text{ и } x_n \in (0, 3\varepsilon); \\ \inf_{z \in Q_\varepsilon^x \cap \mathbb{R}_-^n} p(z), & \text{если } x \in \mathbb{R}_-^n, x' \in F_1(\varepsilon) \cup F_2(\varepsilon) \text{ и } x_n \in (-3\varepsilon, 0); \\ \inf_{z \in Q_\varepsilon^x} p(z), & \text{если } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Sigma \text{ и } x' \in \Sigma \setminus (F_1(\varepsilon) \cup F_2(\varepsilon)) \\ & \text{или } |x_n| \geq 3\varepsilon. \end{cases}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Если $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Sigma$, то

$$p_\varepsilon(x) \leq p(y_\varepsilon) \quad \text{для всех } y_\varepsilon \in \mathbb{R}^n \setminus \Sigma \text{ таких, что } |y - x| < \varepsilon. \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $|x - y| < \varepsilon$ и $|\varphi_\varepsilon(y')| \leq 1$, то во всех рассматриваемых случаях $y_\varepsilon \in Q_\varepsilon^x$. Пусть $x \in \mathbb{R}_+^n$ и $x_n \in (0, 3\varepsilon)$. Если $x' \in F_1(\varepsilon)$, то $y' \in G_1(\varepsilon)$ и при $y_\varepsilon \in Q_\varepsilon^x \cap \mathbb{R}_+^n$ неравенство (4.1) очевидно, а при $y_\varepsilon \in Q_\varepsilon^x \cap \mathbb{R}_-^n$ оно вытекает из строения множества $G_1(\varepsilon)$. Если же $x' \in F_2(\varepsilon)$, то $y' \in F_2(\varepsilon)$, $\varphi_\varepsilon(y') = 1$ и $y_\varepsilon \in Q_\varepsilon^x \cap \mathbb{R}_+^n$, что сразу влечет (4.1). Аналогичными рассуждениями исчерпываются и случаи, когда $x \in \mathbb{R}_-^n$, $x' \in F_1(\varepsilon) \cup F_2(\varepsilon)$ и $-3\varepsilon < x_n < 0$. При остальных предположениях относительно точки x требуемое утверждение следует только из определения точной нижней грани. Предложение доказано.

Нетрудно видеть, что имеет место неравенство

$$|p(x) - p_\varepsilon(x)| \leq C |\ln \varepsilon|^{-1}, \quad \varepsilon \in \left(0, \frac{1}{8}\right], \quad x \in D \setminus \Sigma, \quad (4.2)$$

в котором C зависит только от постоянной L из условия (1.4).

Рассмотрим теперь функцию $u \in W_0(D)$ с компактным носителем в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Продолжим $u(x)$ нулем вне D и с помощью ядра

$$\omega \geq 0, \quad \omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \omega(x) \equiv 0 \quad \text{при } |x| \geq 1, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \omega(x) dx = 1,$$

определим усредненные функции

$$u_\varepsilon(x) = \int_D u(y_\varepsilon) \omega_\varepsilon(x - y) dy, \quad \omega_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \omega(\varepsilon^{-1}x),$$

принадлежащие множеству $C_0^\infty(D)$ для достаточно малых $\varepsilon > 0$. Так как

$$\varepsilon(\varphi_\varepsilon + |\nabla \varphi_\varepsilon|) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

то, пользуясь стандартными рассуждениями, нетрудно показать, что $\nabla u_\varepsilon \rightarrow \nabla u$ в $\overset{\circ}{W}_{p_1}^1(D)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, где p_1 — постоянная из условия (1.2). Точно так же, если положить

$$g_\varepsilon(x) = \int_D |\nabla u(y_\varepsilon)|^{p(y_\varepsilon)} \omega_\varepsilon(x - y) dy, \quad (4.3)$$

то $g_\varepsilon \rightarrow |\nabla u|^{p(x)}$ в $L_1(D)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Кроме того, при $\varepsilon \in (0, 1]$

$$|\nabla u_\varepsilon(x)| \leq C \int_D |\nabla u(y_\varepsilon)| \omega_\varepsilon(x - y) dy \quad (4.4)$$

с постоянной C , не зависящей от ε .

Доказательство следующей леммы основано на схеме рассуждений, использованной в работе [7].

ЛЕММА 4.1. Для любой функции $u \in W_0(D)$ существует последовательность ее усреднений $u_{\varepsilon_j} \in C_0^\infty(D)$ такая, что $|\nabla(u - u_{\varepsilon_j})|^{p(x)} \rightarrow 0$ в $L_1(D)$ при $\varepsilon_j \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что для всех $x \in D \setminus \Sigma$ при $\varepsilon \leq \varepsilon_0 \leq \frac{1}{8}$ имеет место неравенство

$$|\nabla u_\varepsilon(x)|^{p(x)} \leq C \left(1 + \int_D |\nabla u(y_\varepsilon)|^{p(y_\varepsilon)} \omega_\varepsilon(x-y) dy \right) = C(1 + g_\varepsilon(x)) \quad (4.5)$$

с постоянной C , не зависящей от ε . Из (4.4) по неравенству Йенсена

$$|\nabla u_\varepsilon(x)|^{p_\varepsilon(x)} \leq C(p) \int_D |\nabla u(y_\varepsilon)|^{p(y_\varepsilon)} \omega_\varepsilon(x-y) dy, \quad x \in D^{(i)}, \quad (4.6)$$

а из (4.1) и неравенства Юнга следует, что

$$|\nabla u(y_\varepsilon)|^{p_\varepsilon(x)} \leq |\nabla u(y_\varepsilon)|^{p(y_\varepsilon)} + 1, \quad x \in D \setminus \Sigma, \quad |x-y| < \varepsilon, \quad y_\varepsilon \notin \Sigma. \quad (4.7)$$

Сопоставляя (4.6) и (4.7), при $x \in D \setminus \Sigma$ имеем

$$|\nabla u_\varepsilon(x)|^{p_\varepsilon(x)} \leq C(p) \left(\int_D |\nabla u(y_\varepsilon)|^{p(y_\varepsilon)} \omega_\varepsilon(x-y) dy + 1 \right). \quad (4.8)$$

Оценим снизу выражение в левой части (4.8). Ясно, что $u \in \overset{\circ}{W}_{p_1}^1(D)$, где p_1 — постоянная из условия (1.2), и согласно (4.4)

$$|\nabla u_\varepsilon(x)| \leq C(p) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(y_\varepsilon)|^{p_1} dy \right)^{1/p_1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon^{p'_1}(x-y) dy \right)^{1/p'_1},$$

где $p'_1 = p_1/(p_1 - 1)$. После замены переменных

$$z_i = y_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad z_n = y_n + \varepsilon \varphi_\varepsilon(y'),$$

в первом интеграле получаем, что

$$|\nabla u_\varepsilon(x)| \leq C(p) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(z)|^{p_1} dz \right)^{1/p_1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon^{p'_1}(x-y) dy \right)^{1/p'_1} \leq M \varepsilon^{-n/p_1}. \quad (4.9)$$

Пусть $\sigma_\varepsilon(x) = |p(x) - p_\varepsilon(x)|$ для $x \in D \setminus \Sigma$. Так как в силу (4.2) $\sigma_\varepsilon(x) \leq C|\ln \varepsilon|^{-1}$, то из неравенства Юнга и (4.9) вытекает, что при $\varepsilon \leq \varepsilon_0(M)$ выполнена оценка

$$\begin{aligned} |\nabla u_\varepsilon(x)|^{p_\varepsilon(x)} &\geq -1 + |\nabla u_\varepsilon(x)|^{p(x) - \sigma_\varepsilon(x)} \geq -1 + |\nabla u_\varepsilon(x)|^{p(x)} M^{-\sigma_\varepsilon(x)} \varepsilon^{n\sigma_\varepsilon(x)/p_1} \\ &\geq -1 + C|\nabla u_\varepsilon(x)|^{p(x)} \quad \forall x \in D \setminus \Sigma, \end{aligned} \quad (4.10)$$

в которой постоянная C не зависит от ε . Сопоставляя (4.10) и (4.8), приходим к требуемому соотношению (4.5). Преобразуем (4.5) к виду

$$|\nabla u_\varepsilon(x) - \nabla u|^{p(x)} \leq C(1 + g_\varepsilon(x) + |\nabla u|^{p(x)}). \quad (4.11)$$

Как уже отмечалось выше, $u_\varepsilon \rightarrow u$ в $\mathring{W}_{p_1}^1(D)$ и, переходя к подпоследовательности $u_j = u_{\varepsilon_j}$, можно считать, что $\nabla u_j \rightarrow \nabla u$ при $j \rightarrow \infty$ почти всюду в D . Кроме того, $g_\varepsilon(x)$ (см. (4.3)) сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к $|\nabla u|^{p(x)}$ в $L_1(D)$. Поэтому последовательность в левой части (4.11), взятая для $\varepsilon = \varepsilon_j$, равномерно интегрируема, и из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла вытекает сходимость u_j в $W_0(D)$. Лемма доказана.

Действуя как и при доказательстве свойства локальности для функций из класса $W_{\text{loc}}(D)$ (см. § 2), нетрудно показать, что если показатель суммируемости $p(x)$, удовлетворяющий условию (1.2), непрерывен в каждой из частей $\overline{D}^{(i)}$, $i = 1, 2$, и $u \in W_{\text{loc}}(D)$, $\eta \in C_0^\infty(D)$, то $u \cdot \eta \in W_0(D)$.

ЛЕММА 4.2. *Если показатель суммируемости удовлетворяет условию (1.2) в области D и условию (1.4) в каждой из частей $D^{(i)}$, $i = 1, 2$, то множество $C^\infty(D)$ плотно в $W_{\text{loc}}(D)$ в смысле соотношения (1.5).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u \in W_{\text{loc}}(D)$, $\{\mathcal{B}_{r_k}\}$ – локально конечное покрытие области D шарами $\overline{\mathcal{B}_{r_k}} \subset D$, $k = 1, 2, \dots$, и $\{\eta_k\}$ – подчиненное этому покрытию разбиение единицы. Кратность покрытия будем считать конечной, зависящей только от размерности пространства n . Обозначим $v_k = \eta_k u$ и рассмотрим усреднение v_k , положив

$$w_k(x) = \int_D \omega_{\varepsilon_k}(x - y) v_k(y_{\varepsilon_k}) dy.$$

Радиус усреднения ε_k выберем столь малым, что $w_k \in C_0^\infty(\mathcal{B}_{r_k})$. Поскольку $v_k \in W_0(D)$, то в силу леммы 4.1 и свойства усреднения по заданному $j = 1, 2, \dots$ найдется $\varepsilon_k = \varepsilon_k(j)$, для которого

$$\int_D (|v_k - w_k| + |\nabla(v_k - w_k)|^{p(x)}) dx \leq j^{-k}. \quad (4.12)$$

Положим $u_j = \sum_k w_k$. Ясно, что $u_j \in C^\infty(D)$. В любой подобласти $D' \Subset D$ имеет место равенство $u = \sum_k v_k$, в котором сумма содержит конечное число слагаемых. Пусть $\tilde{D}'$ означает объединение шаров $\mathcal{B}_{r_k}$, имеющих непустое пересечение с D' . Из (4.12) и конечной кратности покрытия вытекает неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{D'} (|u - u_j| + |\nabla(u - u_j)|^{p(x)}) dx \\ & \leq C(n) \sum_k \int_{\tilde{D}'} (|v_k - w_k| + |\nabla(v_k - w_k)|^{p(x)}) dx \leq C(n, p) j^{-1}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Таким образом, $u_j \rightarrow u$ в $W_1^1(D')$ при $j \rightarrow \infty$ и осталось показать, что $|\nabla u_j|^{p(x)} \rightarrow |\nabla u|^{p(x)}$ в $L_1(D')$. Пользуясь неравенством

$$||\xi|^p - |\zeta|^p| \leq p|\xi - \zeta|(|\xi|^{p-1} + |\zeta|^{p-1})$$

и неравенством Юнга, для любого $\delta > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{D'} ||\nabla u|^{p(x)} - |\nabla u_j|^{p(x)}| dx \\ \leq C(\delta, p) \int_{D'} |\nabla(u - u_j)|^{p(x)} dx + \delta \int_{D'} (|\nabla u|^{p(x)} + |\nabla u_j|^{p(x)}) dx. \end{aligned}$$

В силу (4.13) последовательность $\{|\nabla u_j|^{p(x)}\}$ равномерно ограничена в $L_1(D')$, а так как $|\nabla(u - u_j)|^{p(x)} \rightarrow 0$ в $L_1(D')$, то ввиду произвольности δ приходим к требуемому утверждению. Лемма доказана.

4.2. Доказательство теоремы 2. Из сделанного предположения относительно показателя суммируемости $p(x)$ и леммы 2.2 вытекает локальная ограниченность в D решения $u \in W_{\text{loc}}(D)$ уравнения (1.1), а из теоремы 1 следует, что это решение гёльдерово на $\Sigma \cap D$ и внутри $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$. Покажем гёльдеровость решения внутри D .

Пусть Ω означает какую-либо связную компоненту одного из множеств $D^{(i)}$, $i = 1, 2$, $B_{R_0}^y \Subset D$ — произвольный шар с центром $y \in \Omega$ радиуса $R_0 \leq \frac{1}{4}$ и M — точная верхняя грань модуля решения в $B_{R_0}^y$. Достаточно установить, что имеет место оценка

$$|u(x) - u(y)| \leq C(n, p, M) R_0^{-\alpha} |x - y|^\alpha \quad \forall x \in \Omega \cap B_{R_0}^y \quad (4.14)$$

с постоянной $\alpha = \alpha(n, p, M) > 0$. Если $R_0/8 \leq |x - y| < R_0$, то требуемое соотношение очевидно и будем считать, что $x \in \Omega \cap B_{R_0/8}^y$.

Обозначим через $\rho(x)$ расстояние от точки x до Σ , а через $\tilde{x}$ — ее проекцию на Σ . Рассмотрим два случая:

- а) $\max\{\rho(x), \rho(y)\} \leq 2|x - y|$,
- б) $\max\{\rho(x), \rho(y)\} > 2|x - y|$.

Пусть выполнено предположение а). Тогда

$$|x - \tilde{y}| \leq 3|x - y|, \quad |y - \tilde{y}| \leq 2|x - y|, \quad (4.15)$$

и поскольку $x \in B_{R_0/8}^y$, то $B_{R_0/8}^y \subset B_{R_0/2}^{\tilde{y}} \subset B_{R_0}^y$. Применяя в шаре $B_{R_0/2}^{\tilde{y}}$ оценку (3.3) к каждому слагаемому в правой части неравенства

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - u(\tilde{y})| + |u(y) - u(\tilde{y})|,$$

имеем

$$|u(x) - u(y)| \leq C(n, p, M) (|x - \tilde{y}|^\alpha + |y - \tilde{y}|^\alpha) (R_0^{-\alpha} \text{osc}\{u, B_{R_0/2}^{\tilde{y}}\} + 1).$$

Теперь (4.14) вытекает из (4.15) и соотношения $\text{osc}\{u, B_{R_0/2}^{\bar{y}}\} \leq 2M$.

Оставшийся случай б) будем рассматривать в предположении $B_{R_0/8}^y \cap \Sigma \neq \emptyset$, поскольку иначе (4.14) является следствием оценки (3.3), примененной в шаре $B_{R_0/8}^y \subset \Omega$. Сначала покажем, что

$$\begin{aligned} B_{\rho(x)}^x &\subset B_{R_0}^y \cap \Omega, & B_{2\rho(x)}^{\bar{x}} &\subset B_{R_0/2}^{\bar{x}} \subset B_{R_0}^y, \\ B_{\rho(y)}^y &\subset B_{R_0}^y \cap \Omega, & B_{2\rho(y)}^{\bar{y}} &\subset B_{R_0/2}^{\bar{y}} \subset B_{R_0}^y. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Действительно, как нетрудно видеть, $\rho(x) < R_0/4$ и $|x - y| < R_0/8$ согласно предположению б). Поэтому если $z \in B_{\rho(x)}^x$, то

$$|z - y| \leq |z - x| + |x - y| < \rho(x) + \frac{R_0}{4} < R_0.$$

Таким образом, $z \in B_{R_0}^y$, а так как $B_{\rho(x)}^x \cap \Sigma = \emptyset$, то $z \in \Omega$. Включение $B_{2\rho(x)}^{\bar{x}} \subset B_{R_0/2}^{\bar{x}}$ сразу вытекает из неравенства $\rho(x) < R_0/4$. Если же $z \in B_{R_0/2}^{x_0}$, то

$$|z - y| \leq |z - \tilde{x}| + |x - \tilde{x}| + |x - y| < \frac{R_0}{2} + \frac{R_0}{4} + \frac{R_0}{8} < R_0$$

и $z \in B_{R_0}^y$. Точно так же устанавливаются и остальные включения.

Перейдем к доказательству (4.14). Возможны два случая: либо $\rho(x) \geq \rho(y)$, либо $\rho(x) < \rho(y)$. Предположим, что $\rho(x) \geq \rho(y)$. Тогда $y \in B_{\rho(x)}^x$ в силу б) и из оценки (3.3), примененной в шаре $B_{\rho(x)}^x \subset B_{2\rho(x)}^{\bar{x}}$, будем иметь

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq C(n, p, M)|x - y|^\alpha (\rho^{-\alpha}(x) \text{osc}\{u, B_{\rho(x)}^x\} + 1) \\ &\leq C(n, p, M)|x - y|^\alpha (\rho^{-\alpha}(x) \text{osc}\{u, B_{2\rho(x)}^{\bar{x}}\} + 1). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Пользуясь теперь оценкой (3.2) в шарах $B_{2\rho(x)}^{\bar{x}}$ и $B_{R_0/2}^{\bar{x}} \subset B_{R_0}^y$, получаем, что

$$\text{osc}\{u, B_{2\rho(x)}^{\bar{x}}\} \leq C(n, p, M)\rho^\alpha(x)(R_0^{-\alpha} \text{osc}\{u, B_{R_0/2}^{\bar{x}}\} + 1). \quad (4.18)$$

Сопоставляя (4.17) и (4.18), приходим к требуемому соотношению (4.14). В случае, когда $\rho(x) < \rho(y)$, доказательство ничем не отличается от приведенного выше. Нужно, воспользовавшись второй парой включений в (4.16), применить соответствующие оценки в шарах $B_{\rho(y)}^y$ и $B_{2\rho(y)}^{\bar{y}}$. Теорема доказана.

Список литературы

1. Жиков В. В. Вопросы сходимости, двойственности и усреднения для функционалов вариационного исчисления // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. №5. С. 961–995.
2. Жиков В. В. Усреднение функционалов вариационного исчисления и теории упругости // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50. №4. С. 675–711.
3. Zhikov V. V. On some variational problems // Russian J. Math. Phys. 1996. V. 5. №1. P. 105–116.
4. Жиков В. В. Оценки типа Майерса для решения нелинейной системы Стокса // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. №1. С. 107–114.

5. *Ruzicka M.* Electrorheological fluids: Modeling and mathematical theory. Berlin: Springer-Verlag, 2000. (Lecture Notes in Math. V. 1748.)
6. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Квазилинейные эллиптические уравнения и вариационные задачи со многими независимыми переменными // УМН. 1961. Т. 16. № 1. С. 19–90.
7. *Zhikov V. V.* On Lavrentiev's phenomenon // Russian J. Math. Phys. 1994. V. 3. № 2. P. 249–269.
8. *Fan Xian-Ling.* A class of de Giorgi type and Hölder continuity of minimizers of variational with $m(x)$ -growth condition // Preprint. Lanzhou, China: Lanzhou Univ., 1995.
9. *Алхутов Ю. А.* Неравенство Харнака и гёльдеровость решений нелинейных эллиптических уравнений с нестандартным условием роста // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 12. С. 1651–1660.
10. *Acerbi E., Fusco N.* A transmission problem in the calculus of variation // Calc. Var. Partial Differential Equations. 1994. V. 2. P. 1–16.
11. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. М.: Физматлит, 1993.
12. *Крашенинникова О. В.* О непрерывности в точке решений эллиптических уравнений с нестандартным условием роста // Труды МИАН. 2002. Т. 236. С. 204–212.
13. *Moser J.* On Harnack's theorem for elliptic differential equations // Comm. Pure Appl. Math. 1961. V. 14. P. 577–591.
14. *Fabes E. B., Stroock D. W.* The L^p -integrability of Green's functions and fundamental solutions for elliptic and parabolic equations // Duke Math. J. 1984. V. 51. № 4. P. 99–1016.
15. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.

Владимирский государственный
педагогический университет
E-mail: alkhutov@vgpu.vladimir.ru

Поступила в редакцию
28.04.2004