Общероссийский математический портал

Ю. С. Колесов, А. Е. Харьков, Сходство и различие динамики плоских и трехмерных нелинейных волн, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 2, 57–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1266>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 07:42:26

УДК 517.926

Ю. С. Колесов, А. Е. Харьков

Сходство и различие динамики плоских и трехмерных нелинейных волн

Методом квазинормальных форм устанавливается, что на окружности и торе происходит мягкая потеря устойчивости бегущими волнами. На модельном примере исследуется динамика при малом коэффициенте упругой связи. Полученные результаты и специально под задачу разработанная явная разностная схема используются при проведении серии численных экспериментов. В итоге в пространстве параметров удается выделить такую область, что динамика на торе и окружности своими наиболее важными особенностями связана с режимами самоорганизации, причем режимы самоорганизации на окружности – варианты некоторых аналогичных режимов на торе.

Библиография: 10 названий.

В первых двух параграфах метод квазинормальных форм сочетается с предложенным в [1] специальным приемом построения автомодельных торов. В третьем параграфе исследуется случай, когда относительно мал коэффициент упругой связи. Метод конечномерных аппроксимаций позволяет заключить, что при этом условии динамика плоских и трехмерных волн качественно одинакова – и в том, и в другом случае фазовый хаос типа диффузионного сочетается с регулярными колебаниями. Изложенные в четвертом параграфе численные эксперименты придают требуемую глубину сложной взаимосвязи плоских и трехмерных нелинейных волн. Суммирующий вывод таков: для трехмерных нелинейных волн характерны так называемые режимы самоорганизации, когда при большой энергии имеется хорошо выраженная пространственная и временная упорядоченность.

§ 1. Волновое уравнение на окружности

Итак, начнем с краевой задачи

$$\begin{aligned} u_{tt} - 2\varepsilon u_t + u &= 2\varepsilon \mu u_{xx} + f(u, u_t), \\ u|_{x=0} &= u|_{x=2\pi}, \quad u_x|_{x=0} = u_x|_{x=2\pi}. \end{aligned} \quad (1)$$

В (1) $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $\mu > 0$ – постоянная порядка единицы, гладкая нелинейность f , имеющая в нуле высший порядок малости, такова, что у дифференциального уравнения $\ddot{u} + u = f(u, \dot{u})$ нормированная первая ляпуновская величина d равна $-1 - i\omega^2$, где $\omega \neq 0$.

Автоволны любой сложности краевой задачи (1) назовем *плоскими волнами*. Будем интересоваться свойствами устойчивости так называемых бегущих волн и торов краевой задачи (1). Естественно, речь идет об этом их свойстве в метрике

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-00456).

фазового пространства, т.е. пространства начальных условий; таковым, как обычно, считаем произведение соболевских пространств $\overset{\circ}{W}_2^2 \times \overset{\circ}{W}_2^1$, каждое из которых получается путем замыкания в соответствующих метриках гладких 2π -периодических функций.

Для решения сформулированных задач прибегнем к аппарату метода квазинормальных форм. Напомним его суть.

Решения краевой задачи (1) ищем в виде ряда

$$u = \varepsilon^{1/2} u_1(t, \tau, x) + \varepsilon u_2(t, \tau, x) + \varepsilon^{3/2} u_3(t, \tau, x) + \dots \quad (2)$$

Здесь $\tau = \varepsilon t$, $u_1 = \xi(\tau, x) \exp(it) + k.c.$, где $k.c.$ – стандартное обозначение комплексно-сопряженной добавки, гладкие функции $u_2, u_3, \dots$ гармоничны по t . Подставляя (2) в (1) и приравнявая коэффициенты при ε , приходим к уравнению

$$\ddot{u}_2 + u_2 = f_2(t, \tau, x), \quad (3)$$

где гладкая по t функция f_2 – сумма нулевых и вторых гармоник, что позволяет с той же зависимостью от t однозначно определить u_2 . Итогом выделения коэффициентов при $\varepsilon^{3/2}$ является аналогичное (3) уравнение, в котором неоднородность по t – сумма первых и третьих гармоник. Приравнявая по отдельности к нулю сумму коэффициентов при $\exp(it)$ и $\exp(-it)$, приходим к дифференциальным уравнениям для определения ξ и $\bar{\xi}$. Так как второе получается из первого путем формального использования операции комплексного сопряжения, то ниже выпишем только первое из них.

Таким образом, квазинормальная форма краевой задачи (1) – это уравнение

$$\dot{\xi} = -i\mu\xi'' + \xi + d|\xi|^2\xi, \quad d = -1 - i\omega^2, \quad (4)$$

дополненное периодическими граничными условиями. Отметим, что в (4) точка – дифференцирование по τ , штрих – дифференцирование по x . Существенно, что краевая задача (1) оказывается тесно связанной с просто устроенным уравнением (4), зависящим всего от двух положительных параметров μ и ω^2 .

Уравнение (4) при $k = 1, 2, \dots$ имеет автомодельные циклы

$$\xi_k = \exp(i(\nu_k \tau + kx)), \quad \nu_k = \mu k^2 - \omega^2, \quad (5)$$

которые принято называть *бегущими волнами*. Начнем с решения бифуркационной проблемы, связанной с потерей ими устойчивости.

В этом вопросе полезна замена $\xi = (1 + \eta)\xi_k$, приводящая к уравнению

$$\dot{\eta} = -i\mu\eta'' + 2\mu k\eta' + d(\eta + \bar{\eta} + \dots), \quad (6)$$

в котором выписаны только линейные слагаемые. Напомним, что (6) – это только половина квазинормальной формы. Поэтому система в вариациях имеет вид:

$$\dot{h}_1 = -i\mu h_1'' + 2\mu k h_1' + d(h_1 + h_2), \quad \dot{h}_2 = i\mu h_2'' + 2\mu k h_2' + \bar{d}(h_1 + h_2). \quad (7)$$

При помощи формул

$$h_p = c_p \exp((\lambda + 2i\mu k n)\tau + inx), \quad p = 1, 2, \quad (8)$$

где c_p – произвольные комплексные постоянные, в системе (7) осуществим переход к задаче об устойчивости на отдельной моде. Последнее означает, что замены (8) позволяют перейти к алгебраическим уравнениям

$$\lambda c_p = (-1)^{p+1} i \mu n^2 c_p - (1 + (-1)^{p+1} i \omega^2)(c_1 + c_2), \quad p = 1, 2,$$

нетривиальная разрешимость которых влечет равенства

$$\lambda^2 + 2\lambda - 2\mu\omega^2 n^2 + \mu^2 n^4 = 0. \quad (9)$$

Очевидные свойства (8) и (9) позволяют утверждать следующее.

ЛЕММА 1. *При*

$$\mu < 2\omega^2 \quad (10)$$

все бегущие волны колебательным образом теряют устойчивость.

ЛЕММА 2. *Пусть*

$$\omega^2 = \frac{\mu}{2} + \delta, \quad (11)$$

где $\delta > 0$ мало. Тогда согласно (9)

$$\lambda = \mu\delta + O(\delta^2). \quad (12)$$

Из этих лемм вытекает, что при условии (11) в спектре устойчивости бегущей волны появляется ляпуновский показатель

$$2i\mu k + \mu\delta + O(\delta^2), \quad (13)$$

оправдывающий термин “колебательная потеря устойчивости”.

В дальнейшем считаем, что равенство (11) имеет место. Но понадобится оно нам только на заключительном этапе – трудности при решении бифуркационных задач связаны с анализом критического случая, когда

$$\omega^2 = \frac{\mu}{2}. \quad (14)$$

При этом, в частности, существенное значение имеет способ оформления некоторых свойств линеаризованного уравнения

$$\dot{\eta} = -i\mu\eta'' + 2\mu k\eta' - \left(1 + i\frac{\mu}{2}\right)(\eta + \bar{\eta}), \quad (15)$$

при составлении которого учтено равенство (14).

ЛЕММА 3. *Все $(\pi/(\mu k))$ -периодические решения η_1 уравнения (15) задаются формулой*

$$\eta_1 = (z \exp(is) + \bar{z} \exp(-is)) \exp(-i\alpha), \quad s = 2\mu k\tau + x, \quad (16)$$

где z – произвольное комплексное число, а

$$\exp(-i\alpha) = \frac{\mu - 2i}{\sqrt{\mu^2 + 4}}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}. \quad (17)$$

Для доказательства заметим, что $(\pi/(\mu k))$ -периодические решения системы в вариациях (7) зависят от амплитудной и фазовой переменных. Поэтому достаточно убедиться в очевидном: формулой (16) задается решение уравнения (15).

Сначала рассмотрим проблему с точки зрения качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. При ограничении (14) в окрестности негрубого цикла (5) число критических переменных равно трем. Одна из этих переменных связана с движением вдоль цикла, две другие характеризуют положение точки во вращающемся инвариантном двумерном многообразии. Динамика на последнем описывается подходящим двумерным дифференциальным уравнением. Удобный способ вычисления его главной части, учитывающий специфику задачи, предложен в [1]. Им и воспользуемся.

Соображения симметрии, характерные для теории бегущих волн, подсказывают, что интересующие нас уравнения устроены следующим образом:

$$\dot{\psi} = \beta \rho^2, \quad \dot{\rho} = b \rho^3, \quad \dot{\varphi} = 0, \quad (18)$$

где β, b – вещественные постоянные. Здесь первое уравнение, связанное с вращением траекторий вокруг цикла, выписано с точностью до ρ^4 , среднее уравнение для полярного радиуса ρ составлено с точностью до ρ^5 , уравнение для угловой переменной φ является точным.

При помощи замены $\xi = (1 + \eta)\xi_k \exp(i\psi)$ от уравнения (4), в котором учтено (14), перейдем к уравнению

$$\dot{\eta} = -i\mu\eta'' + 2\mu k\eta' - i(1 + \eta)\dot{\psi} - \left(1 + i\frac{\mu}{2}\right)(\eta + \bar{\eta} + \eta^2 + 2|\eta|^2 + \eta|\eta|^2). \quad (19)$$

В (16) удобно положить $z = (\rho/2) \exp(i\varphi)$, а в уравнении (19) взять s за новую пространственную переменную. Поэтому из (16) вытекает, что с точностью до множителя ρ

$$\eta_1 = \exp(-i\alpha) \cos(s + \varphi). \quad (20)$$

Решение уравнения (19) с точностью до ρ^3 строим в виде

$$\eta = \rho\eta_1 + \rho^2\eta_2 + \rho^3\eta_3. \quad (21)$$

Подставим (21) в (19) и сразу учтем (18) и (20) в левой части при нахождении производной по τ с указанной степенью точности. В итоге получаем

$$\begin{aligned} & i\dot{\rho} \sin \alpha \cos(\varphi + s) \exp(-i\alpha) \\ &= 2\eta'' \cos \alpha + \dot{\psi}(1 + \eta) \sin \alpha + (\eta + \bar{\eta} + \eta^2 + 2|\eta|^2 + \eta|\eta|^2) \exp(-i\alpha), \end{aligned} \quad (22)$$

где параметр μ исключен в соответствии с (17). Напоминаем, что в (22) точка – по-прежнему дифференцирование по τ , а штрих – теперь дифференцирование по s .

Отметим также, что в силу (20)

$$\eta_1^2 + 2|\eta_1|^2 = (1 + \cos(2(s + \varphi))) \left(1 + \frac{1}{2} \exp(-2i\alpha)\right). \quad (23)$$

В (22) выделим и приравняем коэффициенты при ρ^2 . В соответствии с (23) получаем

$$2\eta_2'' \cos \alpha + \left(\eta_2 + \bar{\eta}_2 + (1 + \cos(2(s + \varphi))) \left(1 + \frac{1}{2} \exp(-2i\alpha)\right)\right) \exp(-i\alpha) + \beta \sin \alpha = 0, \quad (24)$$

где дополнительно учтено первое равенство (18). Структура неоднородности в (24) такова, что $\eta_2 = \eta_{20} + \eta_{22}(s)$, где η_{22} содержит только вторые гармоники, а постоянная η_{20} вещественна. Эту постоянную и параметр β однозначно находим из комплексного равенства

$$2\eta_{20} + 1 + \frac{1}{2} \exp(-2i\alpha) + \beta \sin \alpha \exp(i\alpha) = 0, \quad (25)$$

имеющего место согласно (24). Из (25) имеем

$$\beta \sin \alpha = \cos \alpha, \quad \eta_{20} = -\frac{1}{4} - \cos^2 \alpha. \quad (26)$$

Функцию $\eta_{22}(s)$ ищем в виде

$$\eta_{22} = A \cos(2(s + \varphi)). \quad (27)$$

Подставляя (27) в (24), получаем комплексное равенство

$$-8A \cos \alpha + \left(A + \bar{A} + 1 + \frac{1}{2} \exp(-2i\alpha) \right) \exp(-i\alpha) = 0. \quad (28)$$

Считаем, что $A = a_1 + ia_2$. Тогда согласно (28)

$$-8a_1 \cos \alpha + 2a_1 \cos \alpha + \cos \alpha + \frac{1}{2} \cos(3\alpha) = 0, \quad -8a_2 \cos \alpha - \sin \alpha - \frac{1}{2} \sin(3\alpha) = 0,$$

а значит,

$$a_1 = \frac{1}{12}(4 \cos^2 \alpha - 1), \quad a_2 = -\frac{1}{16} \operatorname{tg} \alpha (1 + 4 \cos^2 \alpha). \quad (29)$$

Все подготовлено для вычисления ляпуновской величины b . Первый этап этой процедуры – выделение из входящей в (22) нелинейности множителя перед ρ^3 :

$$2\eta_1 \eta_2 + 2\eta_1 \bar{\eta}_2 + 2\bar{\eta}_1 \eta_2 + \eta_1^2 \bar{\eta}_1. \quad (30)$$

Второй этап: используя равенство (20), выделяем в (30) коэффициент перед $\cos(s + \varphi)$. Его полезно записать в виде $D \exp(i\alpha)$, где

$$D = A + 2\eta_{20} + \left(4\eta_{20} + A + \bar{A} + \frac{3}{4} \right) \exp(-2i\alpha). \quad (31)$$

Из η_3 выделим первую гармонику $c \cos(s + \varphi)$, где $c = c_1 + ic_2$. Подставим ее в (22) и учтем в (30) только первую гармонику. Выделяя в получающемся комплексном равенстве вещественные и мнимые части, с учетом (31) получаем формулы

$$b \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha + \operatorname{Re} D, \quad (32)$$

$$b \sin \alpha \cos \alpha = -2c_1 \sin \alpha - 2c_2 \cos \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \operatorname{Im} D. \quad (33)$$

Формула (32) дает искомое выражение для ляпуновской величины. Формула (33) служит для отыскания c_1 и c_2 , но нам они не потребуются.

Из (31) и (32) заключаем, что

$$b \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha + a_1 + 2\eta_{20} + \left(4\eta_{20} + 2a_1 + \frac{3}{4}\right) \cos(2\alpha). \quad (34)$$

Из (26), (29) следует, что формула (34) допускает упрощение:

$$b \sin^2 \alpha = -\frac{20}{3} \left(\cos^4 \alpha - \frac{11}{40} \cos^2 \alpha + \frac{1}{40} \right). \quad (35)$$

Таким образом, ляпуновская величина b отрицательна.

При условии (11) осуществим в (4) замену $\xi = (1 + \eta(s, \delta)) \exp(i\sigma)$, где роль времени выполняет переменная

$$\sigma = \nu_k(\delta)\tau + kx, \quad \nu_k(\delta) = \nu_k + \delta\beta\rho_1^2 + O(\delta^2), \quad (36)$$

а переменная s введена в (16) и, как и ранее, выполняет роль новой пространственной переменной. Поясним выбор постоянной ρ_1 в (36).

Из (13) следует, что при условии (11) первое и третье уравнения (18) не меняются, а в среднем уравнении появляется линейная добавка, т. е.

$$\dot{\rho} = \mu\delta\rho + b\rho^3. \quad (37)$$

Уравнение (37) имеет экспоненциально устойчивое положительное состояние равновесия порядка $\sqrt{\delta}$. Множитель перед ним и есть ρ_1 .

Теперь о строении функции $\eta(s, \delta)$. Ее главный порядок задается первыми двумя слагаемыми формулы (21), в которой ρ — это положительное состояние равновесия уравнения (37).

Перейдем к деталям. В переменных s, σ получается эволюционное уравнение, для которого $\eta(s, \delta)$ — состояние равновесия, правая часть (37) — уравнение разветвления, правая часть в (36) выбирается из условий разрешимости промежуточных уравнений. Поэтому факт существования у уравнения (4) решения заданного вида следует из стандартных методов теории ветвления [2].

Условимся считать положительный параметр δ малым, но отделенным от нуля, т. е. предполагаем, что $0 < \delta_1 < \delta < \delta_2$, где постоянные δ_1, δ_2 хотя и подходящим образом малы, но фиксированы. Другими словами, в рамках краевой задачи (1) малым параметром считается ε , а δ — вспомогательный параметр.

ТЕОРЕМА 1. Пусть фиксировано натуральное число k_0 . Тогда при выполнении условия (11) и при подходящей малости ε и δ_1, δ_2 краевая задача (1) имеет k_0 двумерных орбитально экспоненциально устойчивых торов

$$u_k = u_k(\varphi_0 + kx, \varphi_1 + x, \delta, \varepsilon), \quad k = 1, \dots, k_0, \quad (38)$$

$$\dot{\varphi}_0 = 1 + \varepsilon\nu_k(\delta) + \varepsilon^2\Psi_k(\varphi_0, \varphi_1, \delta, \varepsilon), \quad \dot{\varphi}_1 = 2\mu k\varepsilon + \varepsilon^2\Phi_k(\varphi_0, \varphi_1, \delta, \varepsilon), \quad (39)$$

где все фигурирующие в правых частях (38), (39) функции 2π -периодичны по каждой из независимых переменных φ_0, φ_1, x и являются гладкими по совокупности переменных. При этом асимптотика правой части (38) с точностью до $\varepsilon^{3/2}$ строится с учетом первых двух слагаемых в правой части формулы (2) с заменой t, τ на φ_0, φ_1 соответственно.

Для систем типа реакция-диффузия доказательство аналогичного утверждения содержится в [3]. В [4] изложен способ, позволяющий доказывать такого типа утверждения для сингулярно возмущенных волновых уравнений.

В заключение отметим, что решение $(1 + \eta(s, \delta)) \exp(i\sigma)$ квазинормальной формы (4) уместно назвать [3] *двумерным автомодельным тором с периодически меняющейся амплитудой*. В силу (38), (39) это название оправдано: с физической точки зрения имеем плоскую волну, у которой во времени и пространстве слабо меняется амплитуда.

§ 2. Волновое уравнение на торе

Приступим к анализу волнового уравнения

$$u_{tt} - 2\varepsilon u_t + u = 2\varepsilon \mu \Delta u + f(u, u_t), \quad (40)$$

где Δ – оператор Лапласа, на торе. Последнее означает, что

$$u(t, x + 2\pi, y) \equiv u(t, x, y + 2\pi) \equiv u(t, x, y). \quad (41)$$

Его квазинормальная форма подобна (4):

$$\dot{\xi} = -i\mu \Delta \xi + \xi + d|\xi|^2 \xi. \quad (42)$$

Ясно, что уравнение (42) при $k, m = 1, 2, \dots$ имеет автомодельные циклы

$$\xi_{km} = \exp(i(\nu_{km}\tau + kx + my)), \quad \nu_{km} = \mu(k^2 + m^2) - \omega^2, \quad (43)$$

которые также называют *бегущими волнами* и которые находятся на стыке плоских и трехмерных нелинейных волн.

В (42) выполним подобную использованной в предыдущем параграфе замену $\xi = (1 + \eta)\xi_{km}$ и учтем только первые порядки малости. Приходим к уравнению в вариациях

$$\dot{\eta} = -i\mu \Delta \eta + 2\mu k \eta_x + 2\mu m \eta_y + d(\eta + \bar{\eta}), \quad (44)$$

где η_x, η_y – первые производные по x, y соответственно. Для уравнения (44) справедливы подходящие модификации утверждений, содержащихся в леммах 1–3 из §1. Приведем их формулировки.

При ограничении (14) уравнение (44) имеет два набора периодических решений

$$\eta_1 = \exp(-i\alpha) \cos(\varphi_1 + s_1), \quad \theta_1 = \exp(-i\alpha) \cos(\varphi_2 + s_2), \quad (45)$$

где φ_1, φ_2 – произвольные постоянные, а $s_1 = 2\mu k\tau + x, s_2 = 2\mu m\tau + y$.

Если же имеет место ограничение (11), то спектру устойчивости бегущей волны (43) принадлежат величины $2i\mu k + \mu\delta + O(\delta^2), 2i\mu m + \mu\delta + O(\delta^2)$, т.е. колебательная потеря устойчивости происходит в двух плоскостях.

Таким образом, с точки зрения качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений имеем дело с задачей, которая в идейном плане близка к уже изученной. Однако имеются различия алгоритмического характера, вызванные тем обстоятельством, что при ограничении (11) число переменных, близких к критическим, в окрестности цикла (43) квазинормальной формы (42) равно пяти. В связи с этим подробнее остановимся на структуре уравнений, аналогичных (18).

В первом из них, связанном с движением вдоль цикла, ρ^2 следует заменить на $\rho_1^2 + \rho_2^2$. Количество амплитудных уравнений теперь равно двум:

$$\dot{\rho}_1 = (\mu\delta + b_1\rho_1^2 + b_2\rho_2^2)\rho_1, \quad \dot{\rho}_2 = (\mu\delta + b_2\rho_1^2 + b_1\rho_2^2)\rho_2, \quad (46)$$

где $b_1 = b$, а постоянная b_2 подлежит определению. Однако каждая из угловых переменных φ_1, φ_2 по-прежнему удовлетворяет последнему уравнению (18).

Опишем способ вычисления постоянной b_2 . Как и ранее, допустимо ограничиться случаем, когда вместо (11) справедливо ограничение (14). При этом условии в квазинормальной форме (42) выполним замену $\xi = (1 + \eta)\xi_{km} \exp(i\psi)$, подобную использованной ранее, и возьмем за новые пространственные переменные s_1, s_2 . В получившемся уравнении считаем, что

$$\eta = \rho_1 \eta_1 + \rho_2 \theta_1 + \dots + \rho_2^2 \theta_2 + \dots, \quad (47)$$

где не выписаны слагаемые второго и третьего порядков малости по переменным ρ_1, ρ_2 , которые нам не потребуются. Тем самым формула (47) подобна формуле (21). При $\delta = 0$ учтем (46) и опустим слагаемые выше третьего порядка малости относительно ρ_1, ρ_2 . Результатом явится уравнение

$$\begin{aligned} & i \sin \alpha (\dot{\rho}_1 \cos(\varphi_1 + s_1) + \dot{\rho}_2 \cos(\varphi_2 + s_2)) \exp(-i\alpha) \\ & = 2\Delta\eta \cos \alpha + \dot{\psi}(1 + \eta) \sin \alpha + (\eta + \bar{\eta} + \eta^2 + 2|\eta|^2 + \eta|\eta|^2) \exp(-i\alpha), \end{aligned} \quad (48)$$

которое в рассматриваемом нами вопросе выполнит роль уравнения (22).

В нелинейности, входящей в правую часть выражения (48), с учетом (47) выделим коэффициент при $\rho_2^2 \rho_1$:

$$2\eta_1(\theta_2 + \bar{\theta}_2) + 2\bar{\eta}_1\theta_2 + \theta_1^2\bar{\eta}_1 + 2\eta_1|\theta_1|^2. \quad (49)$$

В свою очередь в (49) выделим коэффициент при $\cos(\varphi_1 + s_1)$:

$$B \exp(i\alpha), \quad B = -8p^2 + 3p - 1, \quad p = \cos^2 \alpha. \quad (50)$$

Используем (50) для того, чтобы в (48) приравнять слева и справа действительные части коэффициентов при $\cos(\varphi_1 + s_1)$:

$$b_2 \sin^2 \alpha = p + B = -8 \left(\left(p - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{1}{16} \right). \quad (51)$$

Из (51) следует, что $b_2 < 0$, а значит, согласно (46) и (35) в окрестности рассматриваемого цикла диссипативна квазинормальная форма (42). Более же подробная динамика в его окрестности зависит от неравенств

$$|b_1| < |b_2|, \quad |b_1| > |b_2|. \quad (52)$$

Из (17), (35) и (51) следует, что первое (второе) неравенство (52) имеет место при

$$\mu < 2\sqrt{\frac{5}{3}} \quad \left(\mu > 2\sqrt{\frac{5}{3}} \right). \quad (53)$$

При условии (11) в (42) выполним замену $\xi = (1 + \eta(s_1, s_2, \delta)) \exp(i\sigma)$, где s_1, s_2 — новые пространственные переменные, а переменная σ , выполняющая роль нового времени, определяется структурно подобным (36) равенством

$$\sigma = \nu_{km}(\delta)\tau + kx + my, \quad \nu_{km}(\delta) = \nu_{km} + \delta\beta(\rho_1^2 + \rho_2^2) + O(\delta^2). \quad (54)$$

Постоянные ρ_1, ρ_2 , фигурирующие во второй формуле (54), выбираются из того же соображения, что и аналогичная величина в (36): $\rho_1 = \rho_2 = \rho_0 > 0$, где $\sqrt{\delta} \rho_1, \sqrt{\delta} \rho_2$ – координаты состояния равновесия системы (46).

Наибольший интерес представляет ситуация, когда теряющая устойчивость бегущая волна передает ее трехмерному тору. Покажем, что именно такая бифуркационная задача возникает при условии (53). (При указанном в скобках ограничении (53) справедливо утверждение, почти подобное содержащемуся в теореме 1, но только теперь следует говорить о существовании в окрестности каждой потерявшей устойчивость бегущей волны двух орбитально экспоненциально устойчивых двумерных торов, области притяжения которых разделяет дихотомичный трехмерный тор.)

В новых пространственных переменных s_1, s_2 и новом времени σ проблема существования инвариантного тора (типа автомодельного тора с двоякопериодическим малым изменением амплитуды) у квазинормальной формы (42) сводится к доказательству существования состояния равновесия. Этот факт, как и ранее, позволяет воспользоваться стандартным аппаратом теории ветвления.

Итак, приходим к следующему выводу.

ТЕОРЕМА 2. Пусть фиксировано натуральное число N_0 . Тогда при ограничениях (11), (53) и при подходящей малости ε и δ_1, δ_2 (δ_1, δ_2 введены перед теоремой 1) краевая задача (40), (41) имеет N_0^2 трехмерных орбитально устойчивых торов

$$u_{km} = u_{km}(\varphi_0 + kx + ty, \varphi_1 + x, \varphi_2 + y, \delta, \varepsilon), \quad k, m = 1, \dots, N_0, \quad (55)$$

где φ_0 удовлетворяет уравнению, устроенному подобно первому уравнению (39) (правда, теперь слагаемое порядка ε зависит от k, m , а остаток дополнительно зависит еще и от φ_2), а φ_1, φ_2 удовлетворяют уравнениям типа второго уравнения (39).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО разобьем на три этапа. Предварительно подчеркнем ряд общих мест.

Перед формулировкой теоремы нами показано, что квазинормальная форма (42) имеет автомодельный тор с двухчастотно меняющейся амплитудой. Устроен он достаточно специфично. В частности, из проделанных построений следует, что

$$u_1 = (1 + \eta_{km}(\varphi_1 + x, \varphi_2 + y, \delta)) \exp(i(\varphi_0 + kx + ty)) + k.c., \quad (56)$$

где

$$\dot{\varphi}_0 = 1 + \varepsilon \nu_{km}(\delta), \quad \dot{\varphi}_1 = 2\mu k\varepsilon, \quad \dot{\varphi}_2 = 2\mu t\varepsilon. \quad (57)$$

Напомним, что u_1 – главное слагаемое в аналогичной (2) формуле. Эта же его специфика обязывает u_2 , фигурирующее в следующем по порядку слагаемом из подобного (2) выражения, представить в форме

$$u_2 = u_2(\varphi_0 + kx + ty, \varphi_1 + x, \varphi_2 + y, \delta). \quad (58)$$

Условимся считать, что формула

$$u = \varepsilon^{1/2} u_1 + \varepsilon u_2 \quad (59)$$

вместе с уравнениями (57) доставляют нам приближенный тор исходной краевой задачи (40), (41). Отметим, что данное понятие не является оригинальным – также оно вводится в задаче о бифуркации торov в системах реакция-диффузия [3]. Его универсальность и значимость объясняется просто.

Допустим, что с достаточной степенью подробности удастся разобраться со свойствами устойчивости линеаризованной на приближенном торе краевой задачей. Тогда в его окрестности сначала производится (с подходящей точностью) разделение быстрых и медленных переменных по изложенной, например, в [3], [5] схеме. Затем стандартным способом проблема существования инвариантного тора сводится к разрешимости некоторого интегрального уравнения, к которому применим принцип сжимающих отображений.

Таким образом, фактически доказательство сводится к конкретной проблеме – построению теории устойчивости сингулярно возмущенных линейных волновых уравнений с трехчастотной зависимостью их коэффициентов от временной переменной. В общем случае данная проблема неразрешима. В рассматриваемом случае ее удастся исследовать с требуемой глубиной благодаря специфике вопроса.

Первый этап. Пусть k_0, m_0 – целые числа, связанные с рассматриваемым трехмерным тором. Выпишем линеаризованное на нем уравнение

$$\begin{aligned} h_{tt} - 2\varepsilon h_t + h = & 2\varepsilon\mu\Delta h \\ & + \varepsilon^{1/2}(a_1(\varphi_1 + x, \varphi_2 + y) \exp(i(\varphi_0 + k_0x + m_0y)) + k.c.)h \\ & + \varepsilon^{1/2}(b_1(\varphi_1 + x, \varphi_2 + y) \exp(i(\varphi_0 + k_0x + m_0y)) + k.c.)h_t \\ & + \varepsilon(a_0(\varphi_1 + x, \varphi_2 + y) + a_2(\varphi_1 + x, \varphi_2 + y) \exp(2i(\varphi_0 + k_0x + m_0y)) + k.c.)h \\ & + \varepsilon(b_0(\varphi_1 + x, \varphi_2 + y) + b_2(\varphi_1 + x, \varphi_2 + y) \exp(2i(\varphi_0 + k_0x + m_0y)) + k.c.)h_t, \end{aligned} \quad (60)$$

где a_0, b_0 вещественны.

Пусть

$$\xi_{k_0m_0}(\varphi, \tau) = (1 + \eta_{k_0m_0}(\varphi_1 + x, \varphi_2 + y, \delta)) \exp(i(\nu_{k_0m_0}(\delta)\tau + k_0x + m_0y)) \quad (61)$$

– построенный автомодельный тор квазинормальной формы (42) с двухчастотно меняющейся в медленном времени амплитудой, где, подчеркнем, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ определяется из уравнений (57). Нам потребуются уравнения в вариациях квазинормальной формы на ее автомодельном торе (61):

$$\dot{h}_1 = -i\mu\Delta h_1 + h_1 + d(2|\xi_{k_0m_0}|^2 h_1 + \xi_{k_0m_0}^2 h_2), \quad (62)$$

$$\dot{h}_2 = i\mu\Delta h_2 + h_2 + \bar{d}(\bar{\xi}_{k_0m_0}^2 h_1 + 2|\xi_{k_0m_0}|^2 h_2), \quad (63)$$

где h_1, h_2 – комплексные переменные. Нам понадобится также система (62), (63), записанная в исходном времени и компактнее:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \varepsilon L_0(\varphi, \varepsilon t, \delta)h, \quad h = \text{colon}(h_1, h_2). \quad (64)$$

К уравнению (60) пока на формальном уровне применим изложенный в [3] алгоритм исследования устойчивости эволюционных уравнений с гармоническими по времени коэффициентами. С этой целью введем в рассмотрение матрицу-строку

$$V = V_0(t) + \varepsilon^{1/2}V_1(t, \varphi, x, y) + \varepsilon V_2(t, \varphi, x, y),$$

при условии (53) находятся в левой полуплоскости, причем два из них – всего на расстоянии порядка δ от начала координат.

На этом этапе ограничимся рассмотрением таких целых чисел p, s , из которых одно неотрицательно, что

$$|p| + |s| \leq \varepsilon^{-1/5}. \quad (69)$$

Через $N_0(\varepsilon)$ обозначим наибольшее целое число, удовлетворяющее этому неравенству.

Предположим, что в описанном выше формальном алгоритме исследования устойчивости уравнения (60) решение h уравнения (64) заменено на сумму функций (65), (66), в которых z_{ps} вычисляются в соответствии с (67) или (68), а суммирование проводится по $(p, s) \in \Gamma$, где множество целых чисел Γ определяется следующим образом. Во-первых, $|p| + |s| \leq N_0(\varepsilon)$. Во-вторых, если $(p, s) \in \Gamma$, то $(-p, s), (p, -s) \notin \Gamma$. Введенную таким образом сумму обозначим через h_g .

Вероятно, следует прокомментировать указанный способ определения числового набора Γ . Он достаточно условен: его цель – содержательно разделить функциональные наборы (65) и (66). Предложенный способ решает данную задачу, так как при $\delta = 0$ решения Ляпунова–Флоке состоят из бегущих волн.

Галёркинскую аппроксимацию уравнения (60) осуществим, прибегая к заменам

$$h = V h_g, \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \varepsilon V L_0 \right) h_g. \quad (70)$$

Дифференцируя по t первое равенство и приравнявая результат ко второму, получаем

$$V \left(\frac{\partial h_g}{\partial t} - \varepsilon L_0 h_g \right) = 0. \quad (71)$$

Учитывая затем (70) в (60), приходим к выводу, что

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \varepsilon V L_0 \right) \left(\frac{\partial h_g}{\partial t} - \varepsilon L_0 h_g \right) = \varepsilon^2 D_2 h_g, \quad (72)$$

где структура оператора $D_2(t, x, y, \varepsilon)$, фигурирующего в правой части, пояснится ниже.

Равенства (71), (72) сначала рассматриваем как обычные алгебраические с неизвестной переменной $\partial h_g / \partial t - \varepsilon L_0 h_g$, относительно которой их и разрешаем. Затем результат скалярно умножаем в смысле $L_2 \times L_2$ на каждое из базисных решений Ляпунова–Флоке присоединенного к (64) уравнения, которые, напоминая, образуют с исходными биортогональную систему.

Итогом указанных действий будет система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменных $z_0, z_{ps}, \bar{z}_{ps}$. Так как описание их структуры достаточно громоздко, воспользуемся отражающей суть дела функцией h_g :

$$\frac{\partial h_g}{\partial t} = \varepsilon L_0 h_g + \varepsilon^2 A_2 h_g, \quad (73)$$

где оператор A_2 по силе эквивалентен оператору L_0^2 . Однако в силу (69) $\varepsilon \|A_2\| \leq M \varepsilon^{1/5}$, где M – универсальная постоянная, $\|\cdot\|$ – индуцированная операторная норма в W_2^1 .

В уравнении (73) выполним замену $h_g \mapsto h_g \exp(-\varepsilon \alpha \delta t)$, где α – положительная постоянная. Распорядимся ей таким образом, чтобы у уравнения

$$\frac{\partial h_g}{\partial t} = \varepsilon (L_0 + \alpha \delta I) h_g$$

ранее экспоненциально затухающие решения таковыми и оставались.

Вместе с (73) рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial h_g}{\partial t} = \varepsilon (L_0 + \alpha \delta I) h_g + \varepsilon^2 A_2 h_g. \quad (74)$$

Оценка нормы оператора A_2 приводит к выводу, что при подходящей малости ε для решений уравнения (74) имеет место их экспоненциальная дихотомия, причем подпространство растущих решений трехмерно.

Итак, закончено исследование свойств устойчивости некоторой галёркинской аппроксимации уравнения (60). Снова существенно опираясь на специфику проблемы, в последующем покажем, что с ее помощью существенно отходим от резонансов.

Второй этап. Начнем с некоторых обозначений.

Ниже используются такие целые числа k, m , из которых одно заведомо неотрицательно, что

$$|k| + |m| \leq \varepsilon^{-1/7}. \quad (75)$$

Через $K_0(\varepsilon)$ обозначим наибольшее целое число, удовлетворяющее данной оценке.

По определению $B^2 = I - \varepsilon a^2 \Delta$, причем считаем, что данный оператор дополнен граничными условиями (41). В проводимых здесь построениях этот оператор рассматриваем как единое целое, т.е. не допускается выделение малого параметра ε , что ранее делалось. Через ω_{ps}^2 обозначим его собственное число. Отметим, что

$$\omega_{ps} = \sqrt{1 + \varepsilon a^2 (p^2 + s^2)}, \quad p, s = 0, \pm 1, \dots \quad (76)$$

Отметим также, что каждому собственному значению $\omega_{ps} > 1$ соответствуют две собственные функции:

$$\exp(i(px + sy)), \quad \exp(-i(px + sy)). \quad (77)$$

Разложим каждую функцию из правой части уравнения (60) по переменным x, y в ряд Фурье по системе собственных функций (77). Их свойства гладкости обеспечивают хорошую сходимость указанных рядов. Для нас достаточно, чтобы коэффициенты Фурье убывали по закону

$$\frac{1}{(k^2 + m^2)^4} = \frac{1}{\sqrt{k^2 + m^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(k^2 + m^2)^3}} \cdot \frac{1}{(k^2 + m^2)^2}. \quad (78)$$

Из (78) вытекает, что в разложении в ряд Фурье достаточно оставить слагаемые с такими номерами k, m , которые подчиняются неравенствам $|k| + |m| \leq K_0(\varepsilon)$. Действительно, первые два множителя правой части (78) обеспечивают принадлежность W_2^1 хвостов рядов Фурье, а в силу (75) последний множитель гарантирует (после умножения на $\varepsilon^{1/2}$ или ε) такую их малость, которой пренебрегаем в дальнейших построениях.

При $|p| + |s| \geq N_0(\varepsilon) + 1$ введем комплекснозначные функции

$$h_{ps} = \frac{\exp(i(\omega_{ps}t + px + sy))}{4\pi^2\omega_{ps}} + \varepsilon^{1/2}\vartheta_{ps}(t, x, y, \varepsilon). \quad (79)$$

Второе слагаемое в правой части этой формулы постараемся выбрать так, чтобы с точностью до ε каждая из функций (79) удовлетворяла уравнению (60). Последнее означает, что (79) следует подставить в (60) и приравнять слева и справа коэффициенты при $\varepsilon^{1/2}$. Приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vartheta_{ps}}{\partial t^2} + B^2 \vartheta_{ps} = & \sum_{(k,m) \in \Gamma} c_{km}(\tau) \exp(i((p+k)x + (s+m)y + (\omega_{ps} + 1)t)) \\ & + d_{km}(\tau) \exp(i((p+k)x + (s+m)y + (\omega_{ps} - 1)t)), \end{aligned} \quad (80)$$

где определение числового набора Γ совпадает с приведенным на первом этапе с заменой $N_0(\varepsilon)$ на $K_0(\varepsilon)$. В правой части медленное время τ считается параметром. Поэтому построение ϑ_{ps} проводится при помощи метода комплексных фаз и амплитуд. При этом в знаменателях соответствующих слагаемых появляются выражения $\omega_{p+k, s+m}^2 - (\omega_{ps} \pm 1)^2$. Покажем, что каждое из них равномерно отделено от нуля.

Начнем с доказательства оценки

$$\omega_{p+k, s+m}^2 - (\omega_{ps} - 1)^2 \geq c_0 > 0, \quad (81)$$

где c_0 – универсальная постоянная. Неравенство (81) вытекает из более грубого неравенства

$$\omega_{ps} > c_1 + \varepsilon a^2 \sqrt{k^2 + m^2} \cdot \sqrt{p^2 + s^2}, \quad c_1 = \frac{1}{2}(1 + c_0),$$

которое само – следствие еще более грубого неравенства

$$\omega_{ps} > c_1 + 2\varepsilon^{6/7} a^2 \sqrt{p^2 + s^2}. \quad (82)$$

Здесь использована оценка (75). Введем переменную $z = a\sqrt{\varepsilon(p^2 + s^2)}$, позволяющую (82) записать в виде неравенства

$$1 + z^2 > c_1^2 + 4\varepsilon^{5/14} a c_1 z + 4\varepsilon^{5/7} a^2 z^2,$$

которое при $c_1 < 1$, т.е. при $c_0 < 1$, и при подходящей малости ε выполняется при всех $z \geq 0$.

Аналогичным образом показывается, что

$$\omega_{p+k, s+m}^2 - (\omega_{ps} + 1)^2 \leq -c_0 < 0. \quad (83)$$

Из оценок (81), (83) и формулы (79) следует, что равномерно по рассматриваемым p, s ограничены не только L_2 -нормы функций h_{ps} , но и нормы их первых производных по времени.

Введем в рассмотрение формулы

$$h_{oc} = \sum_{(p,s) \in \Gamma} z_{ps} h_{ps} + \bar{z}_{ps} \bar{h}_{ps}, \quad \frac{\partial h_{oc}}{\partial t} = \sum_{(p,s) \in \Gamma} z_{ps} \frac{\partial h_{ps}}{\partial t} + \bar{z}_{ps} \frac{\partial \bar{h}_{ps}}{\partial t}, \quad (84)$$

где множество Γ имеет смысловую нагрузку, подобную использованной на первом этапе (правда, теперь $|p| + |s| \geq N_0(\varepsilon) + 1$). Эти формулы учтем в уравнении (60) и проведем проектирование на функции (77) с подходящими индексами. Придем к счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменных $z_{ps}, \bar{z}_{ps}$. По той же причине, что и на предыдущем этапе, соответствующую систему запишем, прибегая к символике:

$$\frac{\partial h_{oc}}{\partial t} = \varepsilon A_{oc}(t, \tau, \varepsilon, \delta) h_{oc}. \quad (85)$$

Отметим два обстоятельства. Во-первых, в силу свойств замен (84) фигурирующий в (85) оператор A_{oc} является равномерно по своим переменным ограниченным оператором в W_2^1 . Во-вторых, сама форма записи уравнения (85) такова, что напрашивается использование принципа усреднения (именно это и осуществлено в рассмотренном в [4] плоском варианте краевой задачи). Однако здесь он не срабатывает по принципиальным причинам – не удастся в должной степени нейтрализовать влияние малых знаменателей.

Третий этап. Итак, труден вопрос об усреднении уравнения (85). Обойдем его, используя специфику задачи.

По построению оператор A_{oc} непрерывно зависит от фонового малого параметра δ . Поэтому достаточно показать, что при $\delta = 0$ решения уравнения (85) экспоненциально затухают с универсальным показателем экспоненты порядка ε . Собственно, данное заключение – итоговое для второго этапа.

При $\delta = 0$ в уравнении (60) введем новые переменные

$$t' = t + \varepsilon \nu_{k_0 m_0}(\delta) t + k_0 x + m_0 y, \quad x' = x, \quad y' = y. \quad (86)$$

Опуская штрихи у переменных, выпишем получившееся в итоге уравнение

$$\begin{aligned} h_{tt} - 2\varepsilon h_t + h &= 2\varepsilon \mu \left(\Delta h + 2 \frac{\partial}{\partial t} \left(k_0 \frac{\partial h}{\partial x} + m_0 \frac{\partial h}{\partial y} \right) + (k_0^2 + m_0^2) h_{tt} \right) \\ &+ \varepsilon^{1/2} (a_{10} \exp(it) + k.c.) h + \varepsilon^{1/2} (b_{10} \exp(it) + k.c.) h_t \\ &+ \varepsilon (a_{00} + a_{20} \exp(2it) + k.c.) h + \varepsilon (b_{00} + b_{20} \exp(2it) + k.c.) h_t. \end{aligned} \quad (87)$$

Его правая часть зависит только от времени (такова, собственно, роль замены (86)). Это важное обстоятельство позволяет, прибегая к методу Фурье, свести проблему к анализу свойств устойчивости счетного числа обыкновенных дифференциальных уравнений.

Итак, в (87) заменим вещественную функцию h на комплексную $h \exp(i(px + sy))$. Получаем обыкновенное дифференциальное уравнение только с одним комплексным коэффициентом

$$\begin{aligned} \ddot{h} - 2\varepsilon \dot{h} + h + 2\varepsilon \mu(p^2 + s^2)h - 4\varepsilon \mu i(k_0 p + m_0 s) \dot{h} - 2\varepsilon \mu(k_0^2 + m_0^2) \ddot{h} \\ = a(t, \varepsilon)h + b(t, \varepsilon) \dot{h}, \end{aligned} \quad (88)$$

в котором правая часть остается прежней. В уравнении (88) выполним замену $h \mapsto h \exp(2\varepsilon \mu i(k_0 p + m_0 s))$. Опуская заведомо несущественные слагаемые, приходим к уравнению со всеми вещественными коэффициентами

$$\ddot{h} - 2\varepsilon \dot{h} + h + \varkappa \varepsilon^{1/2} h = a(t, \varepsilon)h + b(t, \varepsilon)\dot{h}, \quad \varkappa = 2\mu \varepsilon^{1/2}(p^2 + s^2). \quad (89)$$

Подчеркнем два обстоятельства. Во-первых, теперь переменную h можно считать вещественной. Во-вторых, так как $|p| + |s| \geq N_0(\varepsilon) + 1$, то

$$p^2 + s^2 \geq \gamma_0 \varepsilon^{-2/5}, \quad (90)$$

где $\gamma_0 > 0$ — универсальная постоянная.

Начнем процесс выявления свойств устойчивости решений уравнения (89) со случая, когда

$$C_1 \geq \varkappa \geq c_1 \varepsilon^{3/10}, \quad C_1 > c_1 > 0. \quad (91)$$

Здесь правая часть составлена с учетом неравенства (90). А левая часть выбрана так, чтобы оставалась содержательной форма записи (89) рассматриваемого уравнения.

При ограничении (91) применим к (89) описанный на первом этапе алгоритм исследования устойчивости. Достаточно ясно, что в данном случае он приводит к системе

$$\dot{\eta} = -\frac{i}{2}\varepsilon^{1/2}\varkappa\eta - \varepsilon(1 + i\omega^2)(\eta + \bar{\eta}), \quad \dot{\bar{\eta}} = \frac{i}{2}\varepsilon^{1/2}\varkappa\bar{\eta} - \varepsilon(1 - i\omega^2)(\eta + \bar{\eta}),$$

в которой опущены слагаемые порядка $\varepsilon^{3/2}$. Выполняя в ней замены

$$\eta \mapsto \eta \exp\left(-\frac{i}{2}\varepsilon^{1/2}\varkappa t\right), \quad \bar{\eta} \mapsto \bar{\eta} \exp\left(\frac{i}{2}\varepsilon^{1/2}\varkappa t\right),$$

приходим к системе, к которой применим принцип усреднения.

Заключительный вывод: при ограничении (91) найдутся такие постоянные $C, \gamma > 0$, что каждое решение уравнения (89) при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и подходящей малости ε_0 удовлетворяет неравенству

$$|h(t)| + |\dot{h}(t)| \leq C(|h(t_0)| + |\dot{h}(t_0)|) \exp(-\varepsilon\gamma(t - t_0)).$$

Перейдем к случаю, когда $\varkappa \geq C_1$, считая постоянную C_1 достаточно большой. При этом ограничении уравнение (89) перепишем так:

$$\ddot{h} - 2\varepsilon \dot{h} + M^2 h = a(t, \varepsilon)h + b(t, \varepsilon)\dot{h}, \quad (92)$$

где $M^2 = 1 + \varepsilon^{1/2}\varkappa$. К нему также применим изложенный на первом этапе алгоритм исследования устойчивости. Правда, теперь считаем, что

$$V_0(t) = \left[\frac{1}{M} \exp(iMt), \frac{1}{M} \exp(-iMt) \right].$$

Пусть

$$V = V_0 + \varepsilon^{1/2}V_1 + \varepsilon V_2, \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & \bar{d}_2 \\ d_2 & \bar{d}_1 \end{pmatrix}.$$

Выражение $V \exp(\varepsilon D t)$ подставим в (92) и последовательно приравняем коэффициенты при степенях $\varepsilon^{1/2}$ и ε .

На этом пути в силу (87) и (89) сначала приходим к уравнению

$$\ddot{\vartheta}_1 + M^2 \vartheta_1 = \frac{a_{10}}{M} \exp(i(M+1)t) + \frac{\bar{a}_{10}}{M} \exp(i(M-1)t) + i(b_{10} \exp(i(M+1)t) + \bar{b}_{10} \exp(i(M-1)t)), \quad (93)$$

где ϑ_1 – первый элемент матрицы-строки $V_1 = [\vartheta_1, \bar{\vartheta}_1]$. Из (93) вытекает, что

$$\vartheta_1 = \frac{c_{11} + c_{12}M}{M(2M+1)} \exp(i(M+1)t) + \frac{c_{21} + c_{22}M}{M(2M-1)} \exp(i(M-1)t), \quad (94)$$

где явный вид комплексных постоянных c_{km} нам не потребуется.

Затем получаем уравнение для отыскания ϑ_2

$$\begin{aligned} \ddot{\vartheta}_2 + M^2 \vartheta_2 + 2i(d_1 - 1) \exp(iMt) - 2id_2 \exp(-iMt) \\ = (a_{10} \exp(it) + k.c.)\vartheta_1 + (b_{10} \exp(it) + k.c.)\dot{\vartheta}_1 \\ + (a_{00} + a_{20} \exp(2it) + k.c.)\vartheta_0 + (b_{00} + b_{20} \exp(2it) + k.c.)\dot{\vartheta}_0, \end{aligned} \quad (95)$$

где ϑ_0 – первая компонента матрицы-строки V_0 . Из (94), (95) вытекает, что $d_2 = 0$, а

$$\begin{aligned} 2i(d_1 - 1) = a_{10} \frac{c_{21} + c_{22}M}{M(2M-1)} + \bar{a}_{10} \frac{c_{11} + c_{12}M}{M(2M+1)} \\ + ib_{10}(M+1) \frac{c_{21} + c_{22}M}{M(2M-1)} + i\bar{b}_{10}(M-1) \frac{c_{11} + c_{12}M}{M(2M+1)}. \end{aligned}$$

Понятно, что данная формула работает и на границе уже рассмотренного ранее случая, а значит, в силу инвариантности следа при используемых нами заменах $\operatorname{Re} d_1 = -1$.

Выпишем аналогичные (70) формулы перехода от уравнения (89) к эквивалентной ему системе.

Имеем

$$h = V\eta, \quad \dot{h} = (\dot{V} + \varepsilon V D)\eta, \quad (96)$$

где комплексно сопряжены координаты вектора η . Действуем, как и на первом этапе: подставляем (96) в (89), что приводит к аналогичным (71) и (72) равенствам

$$V(\dot{\eta} - \varepsilon D\eta) = 0, \quad (\dot{V} + \varepsilon V D)(\dot{\eta} - \varepsilon D\eta) = \varepsilon^{3/2} D_1(t, \varepsilon)\eta, \quad (97)$$

где D_1 – матрица-строка. Остановимся на важных для нас особенностях данных соотношений.

Заметим, что ϑ_2 содержит слагаемые типа $(M-1)^{-1} \exp(i(M-2)t)$. Однако при рассматриваемых значениях ε по модулю они оцениваются величиной типа $1/C_1 \varepsilon^{1/2}$.

Из сказанного следует, что система (97) приводит к уравнению

$$\dot{\eta} = \varepsilon \begin{pmatrix} -1 + i \operatorname{Im} d_1 & 0 \\ 0 & -1 - i \operatorname{Im} d_1 \end{pmatrix} \eta + \varepsilon D_2(t, \varepsilon)\eta, \quad (98)$$

где в силу сказанного выше норма матрицы D_2 оценивается величиной типа $1/C_1$. Поэтому при подходящем выборе C_1 решения уравнения (98) экспоненциально затухают.

Если в исходном уравнении (60) одновременно перейти к переменным h_g и h_{oc} , то, как и в [4], выйдут слабо связанные системы. Тем самым закончено выявление его свойств устойчивости, а значит, и доказательство теоремы 2.

Полагаем, в полной мере стала понятна роль вспомогательного параметра δ : он помогает не только установить существование и устойчивость автомодельного тора у квазинормальной формы (42), но и доказать, что она в определенных пределах действительно малое возмущение исходной краевой задачи (40), (41).

Последнее замечание. Если граничное условие (41) несколько трансформировать, считая, что

$$u\left(t, x + \frac{2\pi}{\omega_1}, y\right) \equiv u\left(t, x, y + \frac{2\pi}{\omega_2}\right) \equiv u(t, x, y),$$

где $\omega_1, \omega_2 > 0$, то в общем случае колебательная потеря устойчивости бегущей волной происходит только в одной плоскости, а значит, при локальном рассмотрении совпадает динамика плоской и трехмерной волны. Однако, как нам представляется, некоторое усложнение динамики при $\omega_1 = \omega_2$ отражает также ситуацию, возникающую при уменьшении коэффициента упругости.

Тонкие особенности динамики трехмерных волн в дальнейшем предполагаем выявить, прибегая к численным экспериментам. Поэтому важно заранее знать диапазон изменения параметров, при которых ожидается наиболее интересная динамика. Из теоремы 2 следует, что целесообразно проводить анализ в предположении, что при ограничении (53)

$$\omega^2 > \sqrt{\frac{5}{3}}. \quad (99)$$

§3. Осцилляторы Гюйгенса, бегущие волны, хаос

Единичную окружность поделим на n равных частей. Аппроксимируя обычным образом вторую производную по x , выпишем конечномерный вариант краевой задачи (1):

$$\ddot{u}_k - 2\varepsilon \dot{u}_k + u_k = 2\varepsilon \mu (u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1}) + f(u_k, \dot{u}_k), \quad (100)$$

где $k = 1, \dots, n$, $n \geq 3$, $u_0 = u_n$, $u_{n+1} = u_1$. В (100) в целях простоты за параметром μ сохранено обозначение – на самом деле его следует поделить на квадрат шага, т.е. на $4\pi^2/n^2$.

Более трехсот лет назад Х. Гюйгенс экспериментально обнаружил интересное физическое явление: если два одинаковых маятника слабо взаимодействуют, то с течением времени устанавливаются противофазные колебания. Очевидно, задача о динамике уравнений (100) – дальнейшее развитие наблюдения Гюйгенса. Поэтому уместно говорить об уравнениях (100) как об одной из возможных математических моделей осцилляторов Гюйгенса.

Напомним, что в (100) малый положительный параметр ε характеризует надкритичность, а положительный параметр μ – глубину связи осцилляторов. Его малость a priori не предполагается.

Система (100) интересна тем, что при малом μ разумно надеяться, что колебания осцилляторов примерно противофазны. Однако столь же разумно предположение, что малость взаимодействия большого числа одинаковых осцилляторов препятствует любой их синхронизации, т.е. приводит к хаосу.

Главная часть нормальной формы системы (100), пропущенная через нормировки $\xi_k \mapsto \sqrt{\varepsilon} \xi_k$, $\varepsilon t = \tau$, имеет вид

$$\frac{d\xi}{d\tau} = i\mu D\xi + \xi + d\xi|\xi|^2, \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \quad |\xi|^2 = \begin{pmatrix} |\xi_1|^2 \\ \vdots \\ |\xi_n|^2 \end{pmatrix}, \quad (101)$$

где, напомним, $d = -1 - i\omega^2$, а

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

умножение векторов по координатное.

Положим

$$g_k = (\exp(iskh))\big|_{s=1}^n, \quad h = \frac{2\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (102)$$

Имеем

$$Dg_k = \lambda_k g_k, \quad \lambda_k = 2(1 - \cos(kh)) = 4\sin^2 \frac{kh}{2}. \quad (103)$$

Отметим, что

$$\lambda_{n-k} = \lambda_k, \quad g_k g_r = g_{k+r}, \quad g_k^{-1} = \bar{g}_k = g_{n-k}. \quad (104)$$

Из второго равенства (103) следует, что λ_k различны при $k \leq k_0$, где k_0 — верхняя грань положительных k , удовлетворяющих неравенству $k \leq n/2$.

Согласно (102) и (103) уравнение (101) имеет автомодельные циклы

$$g_k \exp(i\nu_k \tau), \quad \nu_k = \mu\lambda_k - \omega^2, \quad k = 0, 1, \dots, k_0, \quad (105)$$

которые при $k > 0$ естественно назвать *бегущими волнами*. Если же $k = 0$, то цикл естественно назвать *синхронным*. При малых значениях ε и при некоторой грубости циклов (105) им соответствуют циклы уравнений (100), причем с наследованием свойств устойчивости. Поэтому представляет интерес проблема устойчивости циклов (105) уравнения (101).

Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. *При уменьшении μ теряют устойчивость синхронный цикл и те бегущие волны, у которых $k < n/4$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тем самым неявно предполагается, что очевиден вопрос об устойчивости циклов (105) при относительно больших μ . Из приводимого ниже обоснования теоремы данное положение следует.

Уравнение в вариациях содержит компоненты h_1 и h_2 . Для компоненты h_1 имеем уравнение

$$\dot{h}_1 = i\mu D h_1 + h_1 + d(2h_1 + h_2 g_k^2 \exp(2i\nu_k \tau)). \quad (106)$$

Уравнение для h_2 получается, если в (106) перейти к комплексно-сопряженным коэффициентам и заменить h_1 на h_2 , а h_2 на h_1 .

В (106) выполним замены $h_1 = \eta_1 \exp(i\nu_k \tau)$, $h_2 = \eta_2 \exp(-i\nu_k \tau)$. В силу (105) вместо (106) получим уравнение

$$\dot{\eta}_1 = i\mu D \eta_1 - i\mu \lambda_k \eta_1 + d(\eta_1 + \eta_2 g_k^2). \quad (107)$$

В свою очередь, в (107) положим $\eta_1 = g_k p_1$, $\eta_2 = g_k^{-1} p_2$. Приходим к уравнениям

$$\dot{p}_1 = i\mu g_k^{-1} D g_k p_1 - i\mu \lambda_k p_1 + d(p_1 + p_2), \quad (108)$$

$$\dot{p}_2 = -i\mu g_k D g_k^{-1} p_2 + i\mu \lambda_k p_2 + \bar{d}(p_1 + p_2). \quad (109)$$

В уравнениях (108), (109) переменные p_1 , p_2 разложим по собственным векторам (102) матрицы D . Последнее эквивалентно выявлению и последующему суммированию ответов на вопросы об устойчивости по направлениям $p_1 = g_r z_1$, $p_2 = g_r z_2$, $k + r \leq k_0$, где z_1 , z_2 — комплексные переменные.

Согласно (103), (104) из (108), (109) выводим

$$\dot{z}_1 = i\mu(\lambda_{k+r} - \lambda_k) z_1 + d(z_1 + z_2), \quad \dot{z}_2 = i\mu(\lambda_k - \lambda_{k-r}) z_2 + \bar{d}(z_1 + z_2). \quad (110)$$

В (110) положим $z_1 = c_1 \exp(\gamma \tau)$, $z_2 = c_2 \exp(\gamma \tau)$, где γ — искомое характеристическое число. Отсюда и из (110) следует, что

$$\begin{aligned} \gamma^2 + 2 \left(1 - i\mu \frac{\lambda_{k+r} - \lambda_{k-r}}{2} \right) \gamma - i\mu(\lambda_{k+r} - \lambda_{k-r}) \\ - \mu\omega^2((\lambda_{k+r} - \lambda_k) - (\lambda_k - \lambda_{k-r})) - \mu^2(\lambda_{k+r} - \lambda_k)(\lambda_k - \lambda_{k-r}) = 0. \end{aligned} \quad (111)$$

При $r = 0$ уравнение (111) вырождается в уравнение $\gamma^2 + 2\gamma = 0$, а значит, по собственному направлению бегущая волна устойчива. При $k = 0$ из (111) следует, что

$$\gamma^2 + 2\gamma - 2\mu\omega^2 \lambda_r + \mu^2 \lambda_r^2 = 0,$$

а значит, синхронный цикл дивергентно теряет устойчивость при $2\omega^2 > \mu\lambda_1$.

При $k, r \neq 0$ уравнение (111) не может иметь нулевого решения. Пусть $\gamma = i\sigma$. Тогда из (111) последовательно выводим

$$\sigma = \mu \frac{\lambda_{k+r} - \lambda_{k-r}}{2}, \quad \mu = \frac{4\omega^2}{\lambda_{k+r} - 2\lambda_k + \lambda_{k-r}}. \quad (112)$$

В силу второго равенства (103) второе равенство (112) записывается следующим образом:

$$\mu = \frac{\omega^2}{2 \sin^2(rh/2) \cos(kh)}. \quad (113)$$

Если знаменатель в (113) отрицателен или равен нулю, то рассматриваемая бегущая волна устойчивость терять не может.

Итак, при

$$k \geq \frac{n}{4} \quad (114)$$

бегущая волна устойчива при любом μ . Если же одновременно

$$\mu < \frac{\omega^2}{2 \sin^2(h/2) \cos(kh)}, \quad k < \frac{n}{4}, \quad (115)$$

то данная бегущая волна неустойчива. Отметим, что при $k = 0$ первое неравенство (115) совпадает с критерием, полученным ранее для синхронного цикла. Доказательство закончено.

Отдельно остановимся на задаче о динамике уравнений (101) при малых μ , т.е. на прямом обобщении задачи Гюйгенса.

Напомним, что при $\mu = 0$ осцилляторы не взаимодействуют. Поэтому первый шаг на пути решения проблемы очевиден: n -мерный тор

$$\xi = g_0 \exp(i\varphi), \quad \dot{\varphi} = -\omega^2 g_0, \quad (116)$$

где φ — вектор с компонентами $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, является единственным орбитально экспоненциально устойчивым объектом. Ясно, что при малых $\mu > 0$ данное свойство сохраняется, но тор (116), естественно, несколько деформируется.

В (101) подставим выражения

$$\xi = (g_0 + \mu \Phi_1(\varphi) + \mu^2 \Phi_2(\varphi) + \dots) \exp(i\varphi), \quad (117)$$

$$\dot{\varphi} = -\omega^2 g_0 + \mu \Pi_1(\varphi) + \mu^2 \Pi_2(\varphi) + \dots, \quad (118)$$

где гладкие вещественные отображения $\Phi_1, \Phi_2, \dots$ и $\Pi_1, \Pi_2, \dots$ периодичны по векторному аргументу φ с периодом 2π .

Ниже будет полезно обозначение

$$A_1(\varphi) + iA_2(\varphi) = \exp(-i\varphi)(D \exp(i\varphi)). \quad (119)$$

Теперь подставим (117), (118) в (101). Приравняем в получившемся равенстве коэффициенты при μ . Придем к соотношению

$$-\omega^2 \Phi_1' g_0 + i\Pi_1 = -A_2 + iA_1 - 2(1 + i\omega^2)\Phi_1,$$

эквивалентному двум вещественным равенствам

$$\omega^2 \Phi_1' g_0 = A_2 + 2\Phi_1, \quad \Pi_1 = A_1 - 2\omega^2 \Phi_1. \quad (120)$$

Из (119) вытекает, что $A_2 = \cos \varphi (D \sin \varphi) - \sin \varphi (D \cos \varphi)$, а значит, $A_2' g_0 = 0$. Поэтому из (120) выводим

$$\Phi_1 = -\frac{1}{2} A_2, \quad \Pi_1 = A_1 + \omega^2 A_2. \quad (121)$$

Аналогичным образом строятся Φ_2, Π_2 и т.д. На самом деле, однако, достаточно формул (121), из которых вытекает, что с точностью до μ^2

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_p &= -\omega^2 + \mu \omega^2 (\sin(\varphi_p - \varphi_{p-1}) - \sin(\varphi_{p+1} - \varphi_p)) \\ &\quad - \mu (\cos(\varphi_p - \varphi_{p-1}) - 2 + \cos(\varphi_{p+1} - \varphi_p)), \end{aligned} \quad (122)$$

где $p = 1, \dots, n$, $\varphi_0 = \varphi_n$, $\varphi_{n+1} = \varphi_1$.

В системе (122) последовательно выполним замены

$$\varphi_p \mapsto -\omega^2 t + \varphi_p, \quad \mu t \mapsto t, \quad \psi_p = \varphi_{p+1} - \varphi_p,$$

что приведет к системе для разности фаз

$$\dot{\psi}_p = -\omega^2 (\sin \psi_{p+1} - 2 \sin \psi_p + \sin \psi_{p-1}) + \cos \psi_{p-1} - \cos \psi_{p+1}, \quad (123)$$

где теперь $p = 1, \dots, n-1$, а $\psi_0 = \psi_n = -\psi_1 - \dots - \psi_{n-1}$.

Ясно, что система (123) имеет состояние равновесия

$$\psi_p = 2\frac{k}{n}\pi, \quad p = 1, \dots, n-1, \quad (124)$$

с равными компонентами. Из них неустойчивы те, у которых координаты меньше $\pi/2$. Из (124) следует, что таковые появляются только при $n \geq 5$. Остановимся кратко на динамике системы (123) в этом случае.

Численные эксперименты показывают, что область притяжения каждого из устойчивых состояний равновесия (124) относительно мала и ограничена поверхностью типа сферы, причем от каждой такой поверхности траектории системы (123) отталкиваются по экспоненциальному закону. С физической точки зрения наиболее естественное поведение каждой траектории – влипание в одно из устойчивых состояний равновесия (124), но этому препятствуют окружающие их экспоненциально неустойчивые поверхности. Поэтому каждая траектория, находящаяся вне упомянутых областей, вынуждена неупорядоченно блуждать по фазовому пространству, т.е. имеем хорошо выраженную хаотическую динамику.

Аналогичная динамика имеет место и для уравнений, являющихся конечномерным вариантом краевой задачи (40), (41).

Из изложенного следует, что (в данном приближении) при подходящем уменьшении коэффициента упругости основная область притяжения принадлежит диффузионному хаосу, общие свойства которого одинаковы для плоских и трехмерных волн. Однако остается открытым вопрос о сходстве и различии динамики плоских и трехмерных волн при промежуточных значениях коэффициента упругости.

Разумеется, самостоятельный интерес представляет проблема выявления тонких особенностей динамики системы осцилляторов Гюйгенса. Нас же данный вопрос интересовал с иной точки зрения: в какой степени разностные модели наследуют динамику исходных распределенных. Суммирующий вывод не слишком обнадеживает: исследование аттракторов, структура которых связана с высокими модами (простейший пример – соответствующие бегущие волны), требует существенного увеличения количества аппроксимирующих уравнений.

В заключение приведем одну историческую справку. Ранее аналогичные (123) фазовые уравнения для сингулярно возмущенных систем реакция-диффузия другим способом вывел А.Ю. Колесов (например, см. [3]). Однако его конструкция в рассматриваемом нами случае не проходит: им выполнены такие нормировки, что некоторые величины стремятся к бесконечности при переходе к волновому уравнению. В [3] отмечены также результаты численного анализа, выполненного С.Д. Глызиным. Их общий вывод прост: с увеличением n линейно растет ляпуновская размерность странного аттрактора системы фазовых уравнений. Тривиализирует данное положение изложенная выше теория и очевидные свойства распределенного варианта фазовых уравнений, полученного в [6].

Специально уравнению (4) при периодических граничных условиях посвящена статья [7]. В основу кладется предположение, что при выполнении противоположного (10) неравенства единственным аттрактором является синхронный цикл. Аналитическими средствами показывается процедура его десинхронизации. Численными методами выявляются некоторые особенности перехода к хаотической динамике. Содержащиеся в ней итоговые выводы не полны.

§ 4. Схема и результаты численного интегрирования волнового варианта уравнения Ван-дер-Поля

В одном важном частном случае краевую задачу (40), (41) удобно записать короче:

$$u_{tt} + f(u)u_t + B^2u = 0, \quad (125)$$

где $f = -2\varepsilon + bu + 2u^2$, константа $b > 0$, $B^2 = I - 2\varepsilon\mu\Delta$. Уравнение (125) естественно назвать *волновым вариантом уравнения Ван-дер-Поля*. Начнем, однако, с утверждения, связанного с квазинормальной формой (42) краевой задачи (40), (41) и (125).

ЛЕММА 4. Пусть начальные условия некоторого решения принадлежат аттрактору квазинормальной формы (42). Тогда при всех τ

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\xi(\tau, x, y)|^2 dx dy \leq 4\pi^2. \quad (126)$$

Обозначим через ϑ левую часть (126). Умножим уравнение (42) на $\bar{\xi}$, результат сложим с его комплексным сопряжением, затем выполним интегрирование по x, y , где $0 \leq x, y \leq 2\pi$. В итоге получим

$$\frac{1}{2} \frac{d\vartheta}{d\tau} = \vartheta - w, \quad w = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\xi(\tau, x, y)|^4 dx dy.$$

Очевидно, $\vartheta^2 \leq 4\pi^2 w$, а значит, имеем дифференциальное неравенство

$$\frac{1}{2} \frac{d\vartheta}{d\tau} \leq \vartheta - \frac{1}{4\pi^2} \vartheta^2,$$

из которого неравенство (126) следует.

Очередное утверждение уже опирается на специфику уравнения (125). Чтобы смысл формулируемого утверждения воспринимался проще, начнем с предположения, что $f = 0$. Тогда у получившегося линейного уравнения на решениях постоянна функция времени

$$E(t) = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} ((u_t)^2 + (Bu)^2) dx dy, \quad (127)$$

называемая обычно *интегралом энергии*.

ЛЕММА 5. Для решений уравнения (125) справедливо равенство

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u)(u_t)^2 dx dy. \quad (128)$$

Доказательство то же, что и в линейном случае: уравнение (125) умножается на u_t , результат сначала интегрируется по t , затем по x, y , попутно выполняется определенное интегрирование по частям, получившееся выражение дифференцируется по t , результатом явится формула (128).

Разделим квадрат $0 \leq x, y \leq 2\pi$ на равные части с шагом $h = 2\pi/n$ (в численных экспериментах берется $n = 50$). Удобно ввести матрицу

$$U(t) = (u_{km}(t))_{k,m=1}^n, \quad u_{km} = u(t, kh, mh), \quad (129)$$

при помощи которой функция $u(t, x, y)$ задается в узлах сетки. Оператор $-\Delta$ аппроксимируем по каждой из переменных x, y матрицей D , фигурирующей в правой части уравнения (101). Используем также обозначение

$$f(U(t)) = (f(u_{km}(t)))_{k,m=1}^n. \quad (130)$$

В итоге получается, что конечномерное приближение уравнения (125) внешне записывается в том же виде:

$$\ddot{U} + f(U)\dot{U} + B^2U = 0, \quad (131)$$

где теперь

$$B^2U = U + 2\varepsilon\mu(DU + UD), \quad f(U)\dot{U} = \left(f(u_{km})\frac{du_{km}}{dt}\right)_{k,m=1}^n, \quad (132)$$

т.е. умножение матриц $f(U)$ и $\dot{U}$ производится поэлементно. В дальнейшем данный способ перемножения матриц каждый раз будет оговариваться.

Условимся буквой τ (в численных экспериментах $\tau = 10^{-3}$) обозначать шаг по временной переменной.

Уравнение (131) проинтегрируем по времени в пределах от t до $t + \tau$. В силу (130)–(132) получаем

$$\dot{U}(t + \tau) - \dot{U}(t) + F(U(t + \tau)) - F(U(t)) + \frac{\tau}{2}B^2(U(t + \tau) + U(t)) = 0, \quad (133)$$

где

$$F(\nu) = \int_0^\nu f(s) ds = -2\varepsilon\nu + \frac{b}{2}\nu^2 + \frac{2}{3}\nu^3,$$

а интеграл от $U(t)$ аппроксимируется при помощи метода трапеций. Последнее означает, что формула (133) получена с точностью до $O(\tau^3)$.

Равенство (133) проинтегрируем по временной переменной в тех же пределах, причем при вычислении интегралов воспользуемся методом трапеций. Убеждаемся, что с точностью до $O(\tau^4)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} & U(t + 2\tau) - 2U(t + \tau) + U(t) + \frac{\tau}{2}(F(U(t + 2\tau)) - F(U(t))) \\ & + \frac{\tau^2}{4}B^2(U(t + 2\tau) + 2U(t + \tau) + U(t)) = 0. \end{aligned} \quad (134)$$

Чтобы с сохранением точности из (134) вывести явную разностную схему, отметим три равенства.

Во первых,

$$\left(I + \frac{\tau^2}{4}B^2\right)^{-1} = I - \frac{\tau^2}{4}B^2 + \frac{\tau^4}{16}B^4\left(I + \frac{\tau^2}{4}B^2\right)^{-1}. \quad (135)$$

Во вторых, если $\nu(t)$ – гладкая функция, то

$$\begin{aligned} F(\nu(t+2\tau)) - F(\nu(t)) &= F(\nu(t+\tau)) - F(\nu(t)) + f(\nu(t+\tau))\delta_2\nu \\ &+ \frac{1}{2}f'(\nu(t+\tau))(\delta_2\nu)^2 + O((\delta_2\nu)^3), \quad \delta_2\nu = \nu(t+2\tau) - \nu(t+\tau). \end{aligned} \quad (136)$$

В третьих,

$$(\delta_2\nu)^2 - (\delta_1\nu)^2 = O(\tau^3). \quad (137)$$

Из (134), принятых обозначений (129), (130), (132) и вспомогательных формул (135)–(137) выводим, что с точностью до $O(\tau^4)$

$$\begin{aligned} \delta_2 U &= \left(I_0 - \frac{\tau}{2}f(U(t+\tau)) \right) \left(\left(I_0 + \frac{\tau^2}{4}f^2(U(t+\tau)) \right) \delta_1 U \right. \\ &\quad \left. - \frac{\tau}{4}f'(U(t+\tau))(\delta_1 U)^2 - \frac{\tau}{2}\delta_1 F - \tau^2 B^2 U(t+\tau) \right), \\ \delta_1 F &= F(U(t+\tau)) - F(U(t)). \end{aligned} \quad (138)$$

Здесь I_0 – матрица $n \times n$, у которой все элементы единичные, все матричные произведения поэлементные, исключая произведение B^2 и $U(t+\tau)$, которое вычисляется в соответствии с формулой (132).

ТЕОРЕМА 4. Пусть произвольно фиксировано число $T > 0$. Тогда каждое решение $U(t)$ уравнения (131) на отрезке $0 \leq t \leq T$ с точностью до $O(\tau^4)$ удовлетворяет равенству (138).

Доказательство следует из материала, изложенного выше.

Пусть некоторое решение уравнения (125) притягивается аттрактором. Из формулы (128) вытекает, что $E(t)$ – сумма трех слагаемых. Первое из них стремится к нулю при возрастании времени, второе – осциллирующая около нуля функция с нулевым средним значением, третье – некоторая положительная константа E_0 , которую назовем *энергией рассматриваемого аттрактора*.

Пусть A и B – матрицы $n \times n$ с элементами a_{km} и b_{km} соответственно. Их скалярное произведение определим равенством

$$(A, B) = \frac{1}{n^2} \sum_{k,m=1}^n a_{km} b_{km}. \quad (139)$$

Для конечномерного приближения (131) уравнения (125) интеграл энергии $E(t)$ задается формулой

$$E(t) = \frac{1}{2}(\dot{U}(t), \dot{U}(t)) + \frac{1}{2}(U(t), B^2 U(t)), \quad (140)$$

где, естественно, скалярное произведение – введенное выше равенство (139).

Для разностного варианта (138) уравнения (131) интеграл энергии также вычисляется по формуле (140). Однако в этом случае t дискретно и при $t = p\tau$, $p = 0, 1, \dots$, производная по времени заменяется ее разностным приближением

$$\frac{U(t+\tau) - U(t)}{\tau}. \quad (141)$$

Ясно, что все сказанное выше о строении функции $E(t)$ справедливо для ее дискретного варианта (140), в котором производная определяется формулой (141). Заходящей в ее формирование константой сохраняется прежнее обозначение E_0 .

При проведении численных экспериментов считаем, что

$$\varepsilon = 0.2, \quad b = 4. \quad (142)$$

Объясним содержательный смысл этого выбора.

Несложная выкладка убеждает, что при нулевом значении малого параметра ε мнимая часть ляпуновской величины уравнения (125) равна $-b^2/3$. Поэтому выбранное значение b с запасом обеспечивает справедливость неравенства (99).

Теперь замечания общего характера. Из результатов предыдущего параграфа вытекает, что при выбранном b уравнение (131) имеет большое число аттракторов. Однако, что представляется отнюдь нетривиальным, малы области притяжения каждого из стационарных режимов, получающихся из тех, о которых говорится в теореме 2. Основная же область притяжения принадлежит аттракторам, которые назовем *режимами самоорганизации*, одновременно просто и сложно устроенным по пространственным и временным переменным. Их количественная характеристика — энергия каждого из них много больше энергии стационарных режимов, связанных с теоремой 2.

Отчасти свойства режимов самоорганизации близки к выявленным в статье [8]. Однако теперь каждый из них (при своем обычно большом значении μ) возникает из “бесконечности”, причем, вероятно, с бесконечно большой энергией, которая затем монотонно убывает вместе с уменьшением μ . Другое важное свойство: разные режимы самоорганизации, различающиеся главным образом мерой пространственной сложности, сосуществуют в широком диапазоне изменения μ .

При выполнении (142) на каждом аттракторе решение $u(t, x, y) < 1.3$, но $u(t, x, y) < -1.3$ при некоторых x, y . Последние участки на приводимых ниже рисунках окрашены черным цветом, что делает наглядным движение пика волны, вращающейся на торе (стрелками обозначены направления движения этих пиков).

Например, на рис. 1 при $\mu = 233$ показаны три разных режима самоорганизации, которые энергетически различаются. С ростом μ это различие возрастает. Например, при $\mu = 10^4$ энергия каждого из них соответственно равна:

$$\text{а) } E_0 = 951; \quad \text{б) } E_0 = 1461; \quad \text{в) } E_0 = 3436.$$

Рис. 1

Рис. 2

На рис. 2 при том же значении $\mu = 233$ показаны два разных режима самоорганизации на окружности. Отметим, что первая волна движется влево, две вторые – вправо. Указанные на рис. 2 значения E_0 естественно возрастают при увеличении μ . Например, для структурно подобных показанным на рис. 2 режимам при $\mu = 10^4$ имеем

$$\text{а) } E_0 = 530; \quad \text{б) } E_0 = 1154.$$

При заметном уменьшении μ каждый из выявленных режимов самоорганизации теряет пространственную и временную упорядоченность, трансформируясь в хаос типа диффузионного. При $\mu = 0.003$ характерные особенности последнего показаны на рис. 3.

Рис. 3

В действительности ситуация не столь прямолинейна: на торе и при $\mu = 0.003$ существуют режимы самоорганизации с очень большим значением E_0 и очень большим числом оборотов волны вокруг тора. Проверка данного положения упирается в проведение численных экспериментов, связанных с весьма малыми шагами по пространственным и временной переменным. Некоторое теоретическое обоснование этой гипотезы содержится в [9].

§ 5. Заключение

Итак, изложенные в первых трех параграфах теоретические рассуждения приводят к парадоксальному выводу: наиболее интересные положения теории нелинейных автоволн принципиально связаны с нелокальными эффектами. При этом (в совокупности с ранее установленными результатами) можно надеяться, что выявленные режимы самоорганизации – некоторый фундаментальный факт природы.

Разумеется, отдельные их свойства зависят от выбора граничных условий и конфигурации плоской области. Однако по тенденции сохраняются отмеченные выше их характерные особенности.

Выделим еще одно важное обстоятельство. При стандартных граничных условиях практически в любой плоской области режимы самоорганизации (в определенном диапазоне изменения параметров) структурно подобны описанным в [8] — это одна или несколько вращающихся волн. Понятно, что образования такого рода не проектируются на отрезок. Однако наши численные эксперименты показали, что на торе реализуются такие режимы самоорганизации, при которых волна не вращается, а только движется вдоль тора. Ясно, что ее можно интерпретировать как движение волны по окружности. Собственно только по этой причине на окружности возникают режимы самоорганизации. Представляется любопытным, что их можно интерпретировать как одну или несколько уединенных волн.

Таким образом, плоские волны обладают некоторыми чертами трехмерных, являясь их особым вариантом.

Из (125) следует, что возрастание нормированного μ до столь больших значений удобно интерпретировать следующим образом: параметр μ считаем фиксированным, а при периодических граничных условиях рассматриваемая область — это квадрат $0 \leq x, y \leq 2\pi/l$, где велика постоянная l . Последнее означает, что динамика связана с тором, стягивающимся в точку. Ранее сингулярный характер близкого вопроса отмечался в [10]. Впрочем, возможно режимы самоорганизации возникают за счет специфически проявляемой “градиентной катастрофы”: особенность стыкуется с выраженной упорядоченностью.

Список литературы

1. Колесов Ю. С. Устойчивость и бифуркация бегущих волн // Нелинейные колебания в задачах экологии / ред. Ю. С. Колесов. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 1985. С. 11–22.
2. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
3. Мищенко Е. Ф., Колесов Ю. С., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М.: Физматлит, 1995.
4. Колесов Ю. С. Асимптотика и устойчивость нелинейных параметрических колебаний сингулярно возмущенного телеграфного уравнения // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 10. С. 57–72.
5. Самойленко А. М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. М.: Наука, 1987.
6. Колесов Ю. С. Природа буферности // Матем. заметки. 2003. Т. 74. № 2. С. 238–241.
7. Malomed B. A., Scheuer J. Stable and chaotic solutions of the complex Ginzburg–Landau equation with periodic boundary conditions // Physica D. 2002. V. 161. P. 102–115.
8. Колесов Ю. С., Майоров В. В. Пространственная и временная самоорганизация в одновидовом биоценозе // Динамика биологических популяций / ред. В. Д. Горяченко. Горький: Изд-во Горьковского ун-та, 1986. С. 3–18.
9. Колесов Ю. С. Парадоксальные свойства аттракторов нелинейных волновых уравнений в плоских областях // Докл. РАН. 2002. Т. 187. № 3. С. 443–445.
10. Колесов Ю. С. Особенности бифуркационной проблемы для волнового уравнения в узкой щели // Докл. РАН. 1999. Т. 367. № 4. С. 442–444.