Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Плотников, Вопросы единственности для кратных рядов Хаара, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 2, 97–116

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1268>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 16:21:24

УДК 517.518.3

М. Г. Плотников

Вопросы единственности для кратных рядов Хаара

В работе рассматриваются вопросы единственности для кратных рядов Хаара, сходящихся по прямоугольникам, а также в смысле ρ -регулярной сходимости. Находится достаточное условие, при котором данное множество является множеством относительной единственности при условиях, являющихся многомерными аналогами условия Арутюняна–Талаляна. Тем самым обобщаются на случай ρ -регулярной сходимости результаты, полученные для сходимости по прямоугольникам Х. О. Мовсисяном и В. А. Скворцовым. При очень общих предположениях доказывается теорема о монотонности для функции двоичного интервала, которая используется для построения многомерного обобщенного интеграла перроновского типа, названного $(P_d^{\rho,*})$ -интегралом. С помощью этого интеграла можно по формулам Фурье восстанавливать коэффициенты кратных рядов Хаара из достаточно широкого класса, включающего, в частности, ряды со степенным ростом частичных сумм в точках, имеющих хотя бы одну двоично-рациональную координату. Отмечается, что уже в двумерном случае основные полученные результаты в определенном смысле неусиливаемы.

Библиография: 14 названий.

Введение

Целью нашей работы является получение, причем в многомерном случае при любой (конечной) размерности достаточно общих результатов о представлении функций рядами Хаара. При этом будут получены результаты для так называемой ρ -регулярной сходимости, являющейся более общей, чем часто используемая сходимость по прямоугольникам. В частности, в работе будет построен N -мерный интеграл перроновского типа, с помощью которого коэффициенты N -мерных рядов Хаара из достаточно широкого класса (в частности, всюду на $[0, 1]^N$ ρ -регулярно сходящихся рядов) восстанавливаются при помощи обычных формул Фурье относительно построенного интеграла. Кроме того, будет получено достаточное условие того, что данное множество есть U -множество для кратных рядов Хаара (см. [1]) при условии, являющемся N -мерным аналогом условия Арутюняна–Талаляна (см. [2]).

Работа состоит из четырех параграфов. В §1 даны основные определения. Вторым параграфом состоит из нескольких вспомогательных теорем. Основная теорема приведена в §3, а приложения этой теоремы, которые и представляют наибольший интерес, приведены в §4.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00428) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1657.2003.1).

§ 1. Основные определения

В связи с тем, что разные авторы используют различные определения (одномерных) функций Хаара (о том, к чему приводят различия в этих определениях, см. [3]), отметим, что мы используем стандартное определение (см. [4]), при котором система Хаара полна в $C[0, 1]$ (см. [3]). То есть мы полагаем, что

$$\chi_1(x) \equiv 1, \quad x \in [0, 1];$$

если же $n = 2^k + i$, $k \geq 0$, $1 \leq i \leq 2^k$, то

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 2^{k/2}, & x \in \left(\frac{2i-2}{2^{k+1}}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}\right); \\ -2^{k/2}, & x \in \left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{2i}{2^{k+1}}\right); \\ 0, & x \notin \left[\frac{2i-2}{2^{k+1}}, \frac{2i}{2^{k+1}}\right]. \end{cases}$$

В точках 0 и 1 функция $\chi_n(x)$ полагается равной пределу справа или слева соответственно, а в остальных точках отрезка $[0, 1]$ $\chi_n(x)$ равна среднему арифметическому правого и левого пределов. Пусть $[a]$ означает целую часть числа a . Если $y = p/2^n$, $n = 1, 2, \dots$, $p = 1, \dots, 2^n - 1$, то при таком определении системы Хаара при достаточно больших N носители функций $\chi_{2^N + [2^N y]}(x)$ и $\chi_{2^N + [2^N y] + 1}(x)$ содержат точку y .

Нам потребуются следующие определения (аналоги которых в одномерном и двумерном случае см. в [1], [5], [6]). Точка $a \in [0, 1]$ вида $p/2^n$, где p, n — целые неотрицательные числа, называется *двоично-рациональной*. Множество таких точек будем обозначать через Q_d . Точки множества $I_d \stackrel{\text{def}}{=} [0, 1] \setminus Q_d$ называются *двоично-иррациональными*.

Пусть $N \in \mathbb{N}$. Для точек $\bar{z} = (z_1, z_2, \dots, z_N) \in [0, 1]^N$ мы введем удобное обозначение, перенумеровав их координаты. Если $z_{n_1}, \dots, z_{n_i} \in Q_d$, $z_{m_1}, \dots, z_{m_j} \in I_d$, причем $n_1 < \dots < n_i$, $m_1 < \dots < m_j$ и $i + j = N$, то обозначим $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$, где $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_i) = (z_{n_1}, z_{n_2}, \dots, z_{n_i})$, а $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_j) = (z_{m_1}, z_{m_2}, \dots, z_{m_j})$. Другими словами, вектор $\bar{x}$ составлен из двоично-рациональных координат вектора $\bar{z}$ (в их естественном порядке), а вектор $\bar{y}$ составлен из двоично-иррациональных координат вектора $\bar{z}$. При этом пару векторов

$$(\bar{n} = (n_k)_{k=1}^i, \bar{m} = (m_l)_{l=1}^j)$$

будем называть *типом точки* $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$. Нас не должно смущать, что при таком обозначении мы меняем порядок координат точки. Отметим также, что одно из чисел j или i может равняться нулю (тогда все координаты точки $\bar{z}$ принадлежат Q_d (I_d соответственно), вектор $\bar{x}$ ($\bar{y}$ соответственно) совпадает с вектором $\bar{z}$, а вектор $\bar{m}$ ($\bar{n}$ соответственно) в типе точки $(\bar{x}, \bar{y})$ является пустым).

Назовем *двоичным интервалом* Δ (замкнутый) N -мерный интервал вида

$$\left[\frac{p_1}{2^{n_1}}, \frac{p_1 + 1}{2^{n_1}}\right] \times \left[\frac{p_2}{2^{n_2}}, \frac{p_2 + 1}{2^{n_2}}\right] \times \dots \times \left[\frac{p_N}{2^{n_N}}, \frac{p_N + 1}{2^{n_N}}\right],$$

где $n_1, \dots, n_N = 0, 1, \dots$, $p_i = 0, \dots, 2^{n_i} - 1$. Вектор $(n_1, \dots, n_N)$ будем называть *рангом* такого двоичного интервала. Если $n_1 = \dots = n_N = n$, то такой двоичный интервал назовем *двоичным кубом*, а его рангом будем считать просто число n .

Следующее определение является одним из важнейших в нашей работе. Пусть $a \in [0, 1]$. Последовательность (одномерных) двоичных интервалов $\{\Delta_k\}_{k=1}^\infty$ назовем *основной для точки a* , если $a \in \Delta_k$ для всех k , ранг Δ_k равен k и $\Delta_k \subset \Delta_{k-1}$, т.е. последовательность $\{\Delta_k\}$ вложенная. Если же $\bar{z} \in [0, 1]^N$, то последовательность $(N\text{-мерных})$ двоичных интервалов $\{\Delta_{k_1, \dots, k_N}\}$ назовем *основной для точки $\bar{z}$* , если

$$\Delta_{k_1, \dots, k_N} = \Delta_{k_1} \times \Delta_{k_2} \times \dots \times \Delta_{k_N}, \quad (1)$$

где $\{\Delta_{k_i}\}$ – последовательность, основная для z_i . Несложно заметить, что для каждой точки $\bar{z} \in [0, 1]^N$ существует ровно 2^M основных последовательностей, где M – число двоично-рациональных координат точки $\bar{z}$, отличных от нуля и единицы.

В связи с переобозначением точек $\bar{z} \in [0, 1]^N$ переобозначим и занумеруем последовательности, основные для точки $\bar{z}$. Пусть $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$ – точка типа $(\bar{n}, \bar{m})$. Пусть $\bar{x} = (x_1, \dots, x_i)$ и $\{\Delta_{k_s}\}$ – (возможно, не единственная) последовательность, основная для x_s . Далее, пусть $\bar{y} = (y_1, \dots, y_j)$ и $\{\Delta_{l_t}\}$ – (единственная) последовательность, основная для y_t . Тогда набор

$$\{\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}\} = \{\Delta_{k_1} \times \dots \times \Delta_{k_i} \times \Delta_{l_1} \times \dots \times \Delta_{l_j}\} \quad (2)$$

является основной для точки $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$ последовательностью в новых обозначениях. При этом по сравнению с формулой (1) в формуле (2) одномерные двоичные интервалы переставлены в полном соответствии с перестановкой координат точки $\bar{z}$.

Так как точка $\bar{z}$ может иметь несколько основных последовательностей, присвоим “номер” каждой из них. Этим номером будет набор $\{T_s\}_{s=1}^i$ из нулей и единиц. А именно, если $\{\Delta_{k_s}\}$ – “левая” (“правая”) основная последовательность для точки x_s , положим $T_s = 0$ ($T_s = 1$ соответственно). Имея набор $\{T_s\}$, будем говорить, что последовательность $\{\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}\}$ основная для точки $\bar{z}$ с номером $\bar{T} = \{T_s\}$.

Мы будем рассматривать N -мерные ряды Хаара

$$\sum_{\bar{q}=1}^\infty b_{\bar{q}} \chi_{\bar{q}}(\bar{z}) = \sum_{q_1=1}^\infty \sum_{q_2=1}^\infty \dots \sum_{q_N=1}^\infty b_{q_1, q_2, \dots, q_N} \chi_{q_1, q_2, \dots, q_N}(z_1, z_2, \dots, z_N), \quad (3)$$

где $\chi_{q_1, q_2, \dots, q_N}(z_1, z_2, \dots, z_N) = \chi_{q_1}(z_1) \cdot \chi_{q_2}(z_2) \cdot \dots \cdot \chi_{q_N}(z_N)$. Мы будем использовать как данное обозначение N -мерных рядов Хаара, так и другое, связанное с изменением порядка координат данной точки. Пусть $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$ – точка типа $(\bar{n}, \bar{m})$. Изменим порядок индексов в общем члене ряда Хаара в полном соответствии с изменением порядка координат точки $\bar{z}$. При этом ряд примет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{q_{n_1}=1}^\infty \dots \sum_{q_{n_i}=1}^\infty \sum_{r_{m_1}=1}^\infty \dots \sum_{r_{m_j}=1}^\infty a_{q_{n_1}, \dots, q_{n_i}, r_{m_1}, \dots, r_{m_j}} \\ & \times \chi_{q_{n_1}}(x_1) \dots \chi_{q_{n_i}}(x_i) \cdot \chi_{r_{m_1}}(y_1) \dots \chi_{r_{m_j}}(y_j), \end{aligned}$$

или просто

$$\sum_{q_{\bar{n}}=1}^{\infty} \sum_{r_{\bar{m}}=1}^{\infty} a_{q_{\bar{n}}, r_{\bar{m}}} \chi_{q_{\bar{n}}}(\bar{x}) \cdot \chi_{r_{\bar{m}}}(\bar{y}), \quad (4)$$

где

$$\chi_{q_{\bar{n}}}(\bar{x}) = \chi_{q_{n_1}}(x_1) \cdots \chi_{q_{n_i}}(x_i), \quad \chi_{r_{\bar{m}}}(\bar{y}) = \chi_{r_{m_1}}(y_1) \cdots \chi_{r_{m_j}}(y_j).$$

В соответствии с порядком координат в точке $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$ определим (прямоугольные) частичные суммы ряда Хаара. Пусть $\bar{Q} = (Q_1, Q_2, \dots, Q_i)$, а $\bar{R} = (R_1, R_2, \dots, R_j)$. Определим частичную сумму ряда Хаара с “номером” $(\bar{Q}, \bar{R})$ в точке $(\bar{x}, \bar{y})$:

$$S_{\bar{Q}, \bar{R}}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{q_{n_1}=1}^{Q_1} \cdots \sum_{q_{n_i}=1}^{Q_i} \sum_{r_{m_1}=1}^{R_1} \cdots \sum_{r_{m_j}=1}^{R_j} a_{q_{\bar{n}}, r_{\bar{m}}} \chi_{q_{\bar{n}}}(\bar{x}) \cdot \chi_{r_{\bar{m}}}(\bar{y}).$$

Определим сходимость рядов Хаара. Назовем *параметром регулярности интервала* Δ число $\text{reg}(\Delta)$, равное отношению длин минимальной и максимальной сторон интервала, и, аналогично, *параметром регулярности вектора* $\bar{m}$ — число $\text{reg}(\bar{m})$, равное отношению минимальной и максимальной его компонент. Ряд (4) *сходится по прямоугольникам к сумме* $S(\bar{x}, \bar{y})$ *в точке* $(\bar{x}, \bar{y})$, если $S_{\bar{Q}, \bar{R}}(\bar{x}, \bar{y})$ стремится к $S(\bar{x}, \bar{y})$ при

$$\|(\bar{Q}, \bar{R})\| = \min\{Q_1, \dots, Q_i, R_1, \dots, R_j\} \rightarrow \infty.$$

Мы будем также исследовать более общую ρ -регулярную сходимость, при которой ряд (4) сходится к сумме $S(\bar{x}, \bar{y})$ в точке $(\bar{x}, \bar{y})$, если $S_{\bar{Q}, \bar{R}}(\bar{x}, \bar{y})$ стремится к $S(\bar{x}, \bar{y})$ при $\|(\bar{Q}, \bar{R})\| \rightarrow \infty$ и $\text{reg}((\bar{Q}, \bar{R})) \geq \rho$, где $\rho \in (0, 1]$. Обозначать такую сходимость будем через $S_{\bar{Q}, \bar{R}}(\bar{x}, \bar{y}) \xrightarrow{\rho} S(\bar{x}, \bar{y})$. В нашей работе мы будем рассматривать значения ρ , меньшие или равные $\frac{1}{2}$. Отметим, что сходимость или расходимость (по прямоугольникам или ρ -регулярно) не зависит от того, рассматриваем ли мы один и тот же ряд Хаара в виде (3) или в виде (4).

В дальнейшем нам потребуется проводить операции над векторами. Если $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_s)$ и $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_s)$, то сумму этих векторов и произведение вектора на число мы будем понимать в обычном смысле. *Произведением* $\bar{a} \cdot \bar{b}$ мы назовем вектор $(a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_s b_s)$, а вектором $[\bar{a}]$ — вектор $([a_1], [a_2], \dots, [a_s])$, где $[p]$ есть целая часть числа p . Скажем, что $\bar{a} \leq \bar{b}$, если $a_i \leq b_i$ для всех $i = 1, \dots, s$. Если $\bar{k} = (k_1, \dots, k_s)$, то обозначим через $2^{\bar{k}}$ вектор $(2^{k_1}, \dots, 2^{k_s})$. Символом $\bar{1}$ мы обозначим вектор $(1, \dots, 1)$.

§ 2. Вспомогательные утверждения

Исследование рядов Хаара часто удобней вести, изучая аддитивные функции двоичного интервала. Имея ряд Хаара, записанный в форме (3), и введя обозначение $\varphi_{\bar{q}}(\bar{z}) = b_{\bar{q}} \chi_{\bar{q}}(\bar{z})$, можно ввести функцию множества $\Psi(\Delta)$, определяемую для заданного двоичного интервала Δ формулой

$$\Psi(\Delta) = \sum_{q_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{q_N=1}^{\infty} \int \cdots \int_{\Delta} \varphi_{q_1, \dots, q_N}(z_1, \dots, z_N) dz_1 \cdots dz_N. \quad (5)$$

В работе [7] отмечалось, что $\Psi(\Delta)$ – аддитивная функция двоичного интервала, с которой ряд (3) связан формулой

$$\sum_{q_1=1}^{2^{k_1}} \sum_{q_2=1}^{2^{k_2}} \cdots \sum_{q_N=1}^{2^{k_N}} \varphi_{q_1, q_2, \dots, q_N}(\bar{z}) = \frac{\Psi(\Delta_{k_1, k_2, \dots, k_N})}{|\Delta_{k_1, k_2, \dots, k_N}|}, \quad (6)$$

где $\Delta_{k_1, k_2, \dots, k_N}$ – двоичный интервал ранга $(k_1, k_2, \dots, k_N)$, $|\Delta_{k_1, k_2, \dots, k_N}|$ – объем этого интервала, а $\bar{z}$ – любая его внутренняя точка. В той же работе отмечено, что соответствие между рядами (3) и аддитивными функциями двоичного интервала взаимнооднозначно.

Пусть $\bar{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i)$ обозначает вектор размерности i , состоящий только из нулей и единиц, а Σ_i – множество таких векторов. Пусть $|\bar{\sigma}| = \sum_{s=1}^i \sigma_s$. Пользуясь этим обозначением, докажем необходимое условие сходимости N -мерного ряда Хаара в некоторой точке.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$ – точка типа $(\bar{n}, \bar{m})$ и $S_{\bar{Q}, \bar{R}}(\bar{x}, \bar{y}) \xrightarrow{\rho} S(\bar{x}, \bar{y})$ при $\rho \leq \frac{1}{2}$, где сумма $S(\bar{x}, \bar{y})$ конечна. Если $\bar{z} \in (I_d)^N$, т.е. вектор $\bar{n}$ пустой, то для единственной основной для точки $\bar{z}$ последовательности $\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}$ выполняется равенство

$$\lim_{\substack{\|\bar{l}\| \rightarrow \infty \\ \text{reg}(\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}) \geq \rho}} \frac{\Psi(\Delta_{\bar{l}})}{|\Delta_{\bar{l}}|} = S(\bar{z}). \quad (7)$$

Если же число координат точки $\bar{z}$, принадлежащих Q_d , равно $i \geq 1$, то для любой последовательности $\{\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}\}$, основной для точки $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$, выполняется равенство

$$\lim_{\substack{\|(\bar{k}, \bar{l})\| \rightarrow \infty \\ \text{reg}(\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}) \geq 2\rho}} \frac{1}{|\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}|} \sum_{\bar{\sigma} \in \Sigma_i} \left(-\frac{1}{2}\right)^{|\bar{\sigma}|} \Psi(\Delta_{\bar{k}-\bar{\sigma}, \bar{l}}) = 0. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (7) есть следствие формулы (6). Докажем формулу (8) для основной для точки $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$ последовательности $\{\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}\}$ с номером $\bar{T} = \{T_s\}$. Рассмотрим выражение

$$\sum_{\bar{\sigma} \in \Sigma_i} (-1)^{|\bar{\sigma}|} S_{2^{\bar{k}-\bar{1}} + [\bar{x} \cdot 2^{\bar{k}-\bar{1}}] + \bar{T} - \bar{\sigma}, 2^{\bar{l}}}(\bar{z}). \quad (9)$$

В силу сходимости ряда Хаара это выражение стремится к нулю при $\|(\bar{k}, \bar{l})\| \rightarrow \infty$ и $\text{reg}((2^{\bar{k}}, 2^{\bar{l}})) \geq 2\rho$. Покажем, что при больших $k_1, k_2, \dots, k_i$ верна формула

$$\sum_{\bar{\sigma} \in \Sigma_i} (-1)^{|\bar{\sigma}|} S_{2^{\bar{k}-\bar{1}} + [\bar{x} \cdot 2^{\bar{k}-\bar{1}}] + \bar{T} - \bar{\sigma}, 2^{\bar{l}}}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{q_1=1}^{2^{l_1}} \cdots \sum_{q_j=1}^{2^{l_j}} \varphi_{2^{\bar{k}-\bar{1}} + [\bar{x} \cdot 2^{\bar{k}-\bar{1}}] + \bar{T}, \bar{q}}(\bar{z}). \quad (10)$$

Действительно, левая часть формулы (10) есть конечная сумма некоторых членов $\varphi_{\bar{p}, \bar{q}}(\bar{z})$ ряда (3), взятых с некоторыми коэффициентами $c_{\bar{p}, \bar{q}}$. Рассмотрим различные варианты. Если $\bar{q} > 2^{\bar{l}}$, то, очевидно, $c_{\bar{p}, \bar{q}} = 0$. Столь же очевидно, что $c_{\bar{p}, \bar{q}} = 0$, если $\bar{p} > 2^{\bar{k}-\bar{1}} + [\bar{x} \cdot 2^{\bar{k}-\bar{1}}] + \bar{T}$. Остается рассмотреть варианты, когда $\bar{p} \leq 2^{\bar{k}-\bar{1}} + [\bar{x} \cdot 2^{\bar{k}-\bar{1}}] + \bar{T}$ и одновременно $\bar{q} \leq 2^{\bar{l}}$.

Пусть $\bar{q} \leq 2^{\bar{l}}$. Рассмотрим сначала случай, когда $\bar{p} = 2^{\bar{k}-1} + [\bar{x} \cdot 2^{\bar{k}-1}] + \bar{T}$. Тогда выражение $\varphi_{\bar{p}, \bar{q}}(\bar{z})$ содержится лишь в одном слагаемом левой части формулы (10), а именно в слагаемом $S_{2^{\bar{k}-1} + [\bar{x} \cdot 2^{\bar{k}-1}] + \bar{T}, 2^{\bar{l}}}(\bar{x}, \bar{y})$. Значит, в этом случае $c_{\bar{p}, \bar{q}} = 1$. Если же $\bar{p} \neq 2^{\bar{k}-1} + [\bar{x} \cdot 2^{\bar{k}-1}] + \bar{T}$, то пусть $M_1, M_2 \subset \{1, 2, \dots, i\}$ — множества таких номеров, что для любого $s \in M_1$ выполняется неравенство $p_s \leq 2^{k_s-1} + [x_s \cdot 2^{k_s-1}] + T_s - 1$, а для любого $s \in M_2$ выполняется равенство $p_s = 2^{k_s-1} + [x_s \cdot 2^{k_s-1}] + T_s$. В силу выбора $\bar{p}$ $M_1 \sqcup M_2 = \{1, 2, \dots, i\}$, причем множество M_1 непусто (множество M_2 может оказаться пустым). Отметим, что выражение $\varphi_{\bar{p}, \bar{q}}(\bar{z})$ содержится со знаком $(-1)^{|\bar{\sigma}|}$ в некотором слагаемом $(-1)^{|\bar{\sigma}|} S_{2^{\bar{k}-1} + [\bar{x} \cdot 2^{\bar{k}-1}] + \bar{T} - \bar{\sigma}, 2^{\bar{l}}}(\bar{x}, \bar{y})$ левой части формулы (10) тогда и только тогда, когда $\sigma_s = 0$ для всех $s \in M_2$. В силу непустоты множества M_1 число таких слагаемых четно, причем ровно в половине из них это выражение встречается со знаком “+”, а в половине — со знаком “−”. Отсюда $c_{\bar{p}, \bar{q}} = 0$ в этом случае. Из всего вышесказанного следует справедливость формулы (10).

Но при достаточно малом $\varepsilon > 0$ (зависящем от $\bar{k}$ и $\bar{l}$) правая часть формулы (10) равна (если j — число двоично-иррациональных координат точки $\bar{z}$)

$$\begin{aligned} W \sum_{q_1=1}^{2^{l_1}} \cdots \sum_{q_j=1}^{2^{l_j}} \varphi_{2^{\bar{k}-1} + [\bar{x} \cdot 2^{\bar{k}-1}] + \bar{T}, \bar{q}}(\bar{x} + \varepsilon \cdot (-1)^{\bar{T}+1}, \bar{y}) \\ = W \sum_{\bar{\sigma} \in \Sigma_i} (-1)^{|\bar{\sigma}|} S_{2^{\bar{k}-1} + [\bar{x} \cdot 2^{\bar{k}-1}] + \bar{T} - \bar{\sigma}, 2^{\bar{l}}}(\bar{x} + \varepsilon \cdot (-1)^{\bar{T}+1}, \bar{y}) \\ = W \sum_{\bar{\sigma} \in \Sigma_i} (-1)^{|\bar{\sigma}|} S_{2^{\bar{k}-\bar{\sigma}}, 2^{\bar{l}}}(\bar{x} + \varepsilon \cdot (-1)^{\bar{T}+1}, \bar{y}) \\ = W \sum_{\bar{\sigma} \in \Sigma_i} (-1)^{|\bar{\sigma}|} \frac{\Psi(\Delta_{\bar{k}-\bar{\sigma}, \bar{l}})}{|\Delta_{\bar{k}-\bar{\sigma}, \bar{l}}|} = W \sum_{\bar{\sigma} \in \Sigma_i} \left(-\frac{1}{2}\right)^{|\bar{\sigma}|} \frac{\Psi(\Delta_{\bar{k}-\bar{\sigma}, \bar{l}})}{|\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}|}, \end{aligned}$$

где $W = 1/2^{i_0}$, если i_0 — число двоично-рациональных координат точки $\bar{z}$, не равных нулю или единице. Отсюда, из (10) и из отмеченного выше стремления к нулю выражения (9) следует формула (8). Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$ — точка типа $(\bar{n}, \bar{m})$ и

$$S_{\bar{Q}, \bar{R}}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{\sigma}((Q_1 \cdots Q_i \cdot R_1 \cdots R_j)^{1-\alpha})$$

при $\|(\bar{Q}, \bar{R})\| \rightarrow \infty$ и $\text{reg}((\bar{Q}, \bar{R})) \geq \rho$, $\rho \leq \frac{1}{2}$. Если все координаты точки $\bar{z}$ принадлежат I_d , то для единственной основной для точки $\bar{z}$ последовательности $\Delta_{\bar{T}}$ выполняется равенство

$$\lim_{\substack{\|\bar{l}\| \rightarrow \infty \\ \text{reg}(\Delta_{\bar{T}}) \geq \rho}} \frac{\Psi(\Delta_{\bar{T}})}{|\Delta_{\bar{T}}|^\alpha} = 0. \quad (11)$$

Если же число координат точки $\bar{z}$, принадлежащих Q_d , равно $i \geq 1$, то для любой последовательности $\{\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}\}$, основной для точки $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$, выполняется равенство

$$\lim_{\substack{\|(\bar{k}, \bar{l})\| \rightarrow \infty \\ \text{reg}(\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}) \geq 2\rho}} \frac{1}{|\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}|^\alpha} \sum_{\bar{\sigma} \in \Sigma_i} \left(-\frac{1}{2}\right)^{|\bar{\sigma}|} \Psi(\Delta_{\bar{k}-\bar{\sigma}, \bar{l}}) = 0. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (6) следует, что

$$\begin{aligned} \Psi(\Delta_{\bar{l}}) &= \bar{o}((2^{l_1} \dots 2^{l_N})^{1-\alpha}) |\Delta_{\bar{l}}| = \bar{o}\left(\frac{(2^{l_1} \dots 2^{l_N})^{1-\alpha}}{2^{l_1} \dots 2^{l_N}}\right) \\ &= \bar{o}((2^{l_1} \dots 2^{l_N})^{-\alpha}) = \bar{o}(|\Delta_{\bar{l}}|^\alpha), \end{aligned}$$

что и доказывает формулу (11). Докажем формулу (12) для основной для точки $(\bar{x}, \bar{y})$ последовательности $\{\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}\}$ с номером $\bar{T} = \{T_s\}$. Из формулы (10) и выкладки, приведенной в доказательстве предыдущей теоремы, следует, что

$$\sum_{\bar{\sigma} \in \Sigma_i} \left(-\frac{1}{2}\right)^{|\bar{\sigma}|} \frac{\Psi(\Delta_{\bar{k}-\bar{\sigma}, \bar{l}})}{|\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}|} = W^{-1} \sum_{\bar{\sigma} \in \Sigma_i} (-1)^{|\bar{\sigma}|} S_{2^{\bar{k}-\bar{T}} + [\bar{x} \cdot 2^{\bar{k}-\bar{T}}] + \bar{T} - \bar{\sigma}, 2^{\bar{l}}}(\bar{x}, \bar{y}).$$

Так как правая часть есть по условию $\bar{o}((\prod_{s=1}^i 2^{k_s} \prod_{t=1}^j 2^{l_t})^{1-\alpha})$, то

$$\frac{1}{|\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}|^\alpha} \sum_{\bar{\sigma} \in \Sigma_i} \left(-\frac{1}{2}\right)^{|\bar{\sigma}|} \Psi(\Delta_{\bar{k}-\bar{\sigma}, \bar{l}}) = |\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}|^{1-\alpha} \bar{o}\left(\left(\prod_{s=1}^i 2^{k_s} \prod_{t=1}^j 2^{l_t}\right)^{1-\alpha}\right) = o(1),$$

что и требовалось. Теорема доказана.

Нам потребуется переписать равенство (8) (и равенство (12)) в другой форме. Пусть число координат точки $\bar{z}$, принадлежащих Q_d , равно $i \geq 1$ и $\{\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}\}$ — основная для точки $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$ последовательность. Обозначим $\Delta_{k_i}^0 = \Delta_{k_i}$, а $\Delta_{k_i}^1 = \Delta_{k_{i-1}} \setminus \Delta_{k_i}$. Тогда для каждого $\bar{\sigma} \in \Sigma_i$ положим

$$\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}^{\bar{\sigma}} = \Delta_{k_1}^{\sigma_1} \times \dots \times \Delta_{k_i}^{\sigma_i} \times \Delta_{l_1} \times \dots \times \Delta_{l_j}.$$

Очевидно, $\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}^{\bar{\sigma}}$ есть двоичный интервал ранга $(k_1, \dots, k_i, l_1, \dots, l_j)$. Кроме того, для любого $\bar{\sigma} \in \Sigma_i$ имеет место равенство

$$\Delta_{\bar{k}-\bar{\sigma}, \bar{l}} = \bigcup_{\bar{\sigma}_0 \leq \bar{\sigma}} \Delta_{\bar{k}, \bar{l}}^{\bar{\sigma}_0},$$

где интервалы в последнем объединении попарно не перекрываются. Тогда если функция Ψ аддитивна, то

$$\begin{aligned}
\sum_{\bar{\sigma} \in \Sigma_i} \left(-\frac{1}{2}\right)^{|\bar{\sigma}|} \frac{\Psi(\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}^{\bar{\sigma}})}{|\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}^{\bar{\sigma}}|} &= \sum_{\bar{\sigma} \in \Sigma_i} \left(-\frac{1}{2}\right)^{|\bar{\sigma}|} \frac{\sum_{\bar{\sigma}_0 \leq \bar{\sigma}} \Psi(\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}^{\bar{\sigma}_0})}{|\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}^{\bar{\sigma}}|} \\
&= \frac{1}{|\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}^{\bar{\sigma}_0}|} \sum_{\bar{\sigma}_0 \in \Sigma_i} \sum_{\substack{\bar{\sigma} \in \Sigma_i \\ \bar{\sigma} \geq \bar{\sigma}_0}} \left(-\frac{1}{2}\right)^{|\bar{\sigma}|} \Psi(\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}^{\bar{\sigma}_0}) \\
&= \frac{1}{|\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}^{\bar{\sigma}_0}|} \sum_{\bar{\sigma}_0 \in \Sigma_i} \Psi(\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}^{\bar{\sigma}_0}) \sum_{s=|\bar{\sigma}_0|}^i \left(-\frac{1}{2}\right)^s C_{i-|\bar{\sigma}_0|}^{s-|\bar{\sigma}_0|} \\
&= \frac{1}{|\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}^{\bar{\sigma}_0}|} \sum_{\bar{\sigma}_0 \in \Sigma_i} \Psi(\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}^{\bar{\sigma}_0}) \sum_{s=0}^{i-|\bar{\sigma}_0|} \left(-\frac{1}{2}\right)^{|\bar{\sigma}_0|+s} C_{i-|\bar{\sigma}_0|}^s \\
&= \frac{1}{|\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}^{\bar{\sigma}_0}|} \sum_{\bar{\sigma}_0 \in \Sigma_i} \Psi(\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}^{\bar{\sigma}_0}) \sum_{s=0}^{i-|\bar{\sigma}_0|} \left(-\frac{1}{2}\right)^{|\bar{\sigma}_0|} \left(-\frac{1}{2}\right)^s 1^{i-|\bar{\sigma}_0|-s} C_{i-|\bar{\sigma}_0|}^s \\
&= \frac{1}{|\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}^{\bar{\sigma}_0}|} \sum_{\bar{\sigma}_0 \in \Sigma_i} \Psi(\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}^{\bar{\sigma}_0}) (-1)^{|\bar{\sigma}_0|} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{|\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}^{\bar{\sigma}_0}| 2^i} \sum_{\bar{\sigma}_0 \in \Sigma_i} (-1)^{|\bar{\sigma}_0|} \Psi(\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}^{\bar{\sigma}_0}).
\end{aligned}$$

Таким образом, формулу (8) можно переписать в виде

$$\lim_{\substack{\|(\bar{k}, \bar{l})\| \rightarrow \infty \\ \text{reg}(\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}^{\bar{\sigma}}) \geq 2\rho}} \frac{1}{|\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}^{\bar{\sigma}}|} \sum_{\bar{\sigma} \in \Sigma_i} (-1)^{|\bar{\sigma}|} \Psi(\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}^{\bar{\sigma}}) = 0, \quad (13)$$

а формулу (12) – в виде

$$\lim_{\substack{\|(\bar{k}, \bar{l})\| \rightarrow \infty \\ \text{reg}(\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}^{\bar{\sigma}}) \geq 2\rho}} \frac{1}{|\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}^{\bar{\sigma}}|^\alpha} \sum_{\bar{\sigma} \in \Sigma_i} (-1)^{|\bar{\sigma}|} \Psi(\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}^{\bar{\sigma}}) = 0. \quad (14)$$

§ 3. Теорема о монотонности для функций двоичного интервала

При получении основных результатов для рядов Хаара нам потребуется теорема, служащая для построения многомерного интеграла перроновского типа. Подобные утверждения в теории интеграла Перрона носят названия *теорем о монотонности*.

Но для начала нам нужны следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция двоичного интервала $\Phi(\Delta)$ называется *супераддитивной* (обозначение $\Phi \in \bar{A}$), если для любого набора двоичных интервалов $\Delta, \Delta_1, \dots, \Delta_p$ таких, что $\Delta = \bigcup_{i=1}^p \Delta_i$, а интервалы Δ_i попарно не перекрываются, имеет место неравенство $\sum_{i=1}^p \Phi(\Delta_i) \leq \Phi(\Delta)$. Функция $\Phi(\Delta)$ называется *субаддитивной* (обозначение $\Phi \in \underline{A}$), если функция $-\Phi$ является супераддитивной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Число a называется *двоичной ρ -регулярной производной функции двоичного интервала Φ в точке $\bar{z}$* , если для любой основной для точки $\bar{z}$ последовательности $\{I_{\bar{k}, \bar{l}}\}$ выполняется равенство

$$\lim_{\substack{\|(\bar{k}, \bar{l})\| \rightarrow \infty \\ \text{reg}(I_{\bar{k}, \bar{l}}) \geq \rho}} \frac{1}{|I_{\bar{k}, \bar{l}}|} \Phi(I_{\bar{k}, \bar{l}}) = a$$

(обозначение $D_d^\rho \Phi(\bar{z}) = a$). Естественным образом определяются верхнее производное число $\overline{D}_d^\rho \Phi(\bar{z})$ и нижнее производное число $\underline{D}_d^\rho \Phi(\bar{z})$.

Введем еще одну характеристику двоичного интервала Δ . Если Δ имеет вид

$$\left[\frac{2p_1 + i_1}{2^{n_1}}, \frac{2p_1 + i_1 + 1}{2^{n_1}} \right] \times \dots \times \left[\frac{2p_N + i_N}{2^{n_N}}, \frac{2p_N + i_N + 1}{2^{n_N}} \right],$$

где $i_j \in \{0, 1\}$, то набор $(i_1, \dots, i_N)$ назовем *типом двоичного интервала Δ* . Отметим следующий очевидный, но очень важный факт.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $\{\Delta_k\}$ – вложенная последовательность двоичных кубов, стягивающаяся к точке $\bar{z} = (z_1, \dots, z_N)$, причем ранг Δ_k равен k . Пусть $(i_1^k, i_2^k, \dots, i_N^k)$ – тип куба Δ_k . Тогда $z_j \in Q_d$ тогда и только тогда, когда в последовательности i_j^k одно из чисел 0 или 1 встречается лишь конечное число раз.

В теории единственности (одномерных) рядов Хаара важную роль играет условие Арутюняна–Талаляна (см. [2]). Рассмотрим его аналоги в N -мерном случае. Они будут иметь вид (в точке $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$):

$$a_{\bar{q}} \chi_{\bar{q}}(\bar{z}) = \bar{o}(q_1 \dots q_N), \quad \|\bar{q}\| \rightarrow \infty, \quad (15)$$

$$a_{\bar{q}} \chi_{\bar{q}}(\bar{z}) = \bar{o}(q_1 \dots q_N), \quad \|\bar{q}\| \rightarrow \infty, \quad \text{reg}(\bar{q}) \geq 2\rho, \quad (16)$$

где “ $\bar{o}$ ” – “свое” для каждого $\bar{z}$.

В дальнейшем нам потребуется следующее условие:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\bar{\sigma} \in \Sigma_N} (-1)^{|\bar{\sigma}|} \Phi(\Delta_{n, \bar{1}}^{\bar{\sigma}}) = 0. \quad (17)$$

Докажем, что если для ряда (3) выполняется одно из условий (15) или (16), то для функции $\Psi(\Delta)$, построенной для ряда (3) по формуле (5), для любой точки $\bar{z} \in [0, 1]^N$ и для каждой последовательности двоичных кубов $\{\Delta_{n, \bar{1}}\}$, основной для этой точки, выполняется равенство (17). Пусть носитель функции $\chi_{\bar{q}}(\bar{z})$ имеет ранг $\bar{n} - \bar{1}$. Выберем точку $\bar{z}_0$, лежащую внутри этого носителя и такую, что расстояние между точками $\bar{z}$ и $\bar{z}_0$ было меньше чем $\prod_{s=1}^N 2^{n_s+2}$. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_{\bar{q}}(\bar{z}) &= W \varphi_{\bar{q}}(\bar{z}_0) = W \sum_{\bar{\sigma} \in \Sigma_N} (-1)^{|\bar{\sigma}|} S_{2^{\bar{n}-\bar{\sigma}}}(\bar{z}_0) = W \sum_{\bar{\sigma} \in \Sigma_N} (-1)^{|\bar{\sigma}|} \frac{\Psi(\Delta_{\bar{n}-\bar{\sigma}})}{|\Delta_{\bar{n}-\bar{\sigma}}|} \\ &= \frac{W}{|\Delta_{\bar{n}}|} \sum_{\bar{\sigma} \in \Sigma_N} \left(-\frac{1}{2}\right)^{|\bar{\sigma}|} \Psi(\Delta_{\bar{n}-\bar{\sigma}}) = \frac{W}{2^N |\Delta_{\bar{n}}|} \sum_{\bar{\sigma} \in \Sigma_N} (-1)^{|\bar{\sigma}|} \Psi(\Delta_{\bar{n}}^{\bar{\sigma}}) \end{aligned}$$

(последнее равенство доказывалось при выводе формулы (13)). Так как величина есть $\bar{o}(q_1 \dots q_N)$ тогда и только тогда, когда эта величина есть $\bar{o}(\prod_{s=1}^N 2^{n_s+1})$, то из последних соотношений видно, что равенство (17) есть следствие равенств (15) и (16).

Рассмотрим еще одно условие на поведение ряда Хаара:

$$S_{\bar{Q}, \bar{R}}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{o}(Q_1 \cdots Q_i \cdot R_1 \cdots R_j), \quad \|(\bar{Q}, \bar{R})\| \rightarrow \infty, \quad \text{reg}((\bar{Q}, \bar{R})) \geq \rho. \quad (18)$$

Отметим, что условие (16) следует из условия (18), так как левая часть равенства (18) есть частичная сумма ряда Хаара, а левая часть равенства (16) является общим членом этого ряда. Ясно, что если первая есть “о” при соответствующем стремлении, то и вторая тоже.

Основной в этом параграфе будет следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Пусть заданы $\rho \leq \frac{1}{2}$ и функция $\Phi(\Delta) \in \bar{A}$ такая, что для каждой точки $\bar{z} \in [0, 1]^N$ и для каждой последовательности двоичных кубов $\{\Delta_{n, \bar{1}}\}$, основной для этой точки, выполняется равенство (17). Пусть существует такое множество B , не содержащее совершенных подмножеств, что выполняются следующие условия:

- 1) если все координаты точки $\bar{z} \in [0, 1]^N$ принадлежат I_d и $\bar{z} \notin B$, то $D_d^\rho \Phi(\bar{z}) \geq 0$;
- 2) если же число координат точки $\bar{z}$, принадлежащих Q_d , равно $i \geq 1$ и $\bar{z} \notin B$, то для любой последовательности $\{\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}\}$, основной для точки $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$, выполняется условие (14) при $\alpha = 1 - i/N$, т.е. равенство

$$\lim_{\substack{\|(\bar{k}, \bar{l})\| \rightarrow \infty \\ \text{reg}(\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}) \geq 2\rho}} \frac{1}{|\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}|^{1-i/N}} \sum_{\bar{\sigma} \in \Sigma_i} (-1)^{|\bar{\sigma}|} \Phi(\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}^{\bar{\sigma}}) = 0. \quad (19)$$

Тогда $\Phi(\Delta) \geq 0$ для любого двоичного интервала Δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что утверждение теоремы неверно и для некоторого двоичного интервала Δ_0 $\Phi(\Delta_0) < 0$. Разбив Δ_0 на конечное число двоичных кубов, получим в силу супераддитивности функции Φ , что $\Phi(\Delta) < 0$ для некоторого двоичного куба $\Delta \subset \Delta_0$. Поэтому с самого начала мы можем считать Δ_0 двоичным кубом. Введем новую функцию $\Phi_1(\Delta) = \Phi(\Delta) + \varepsilon|\Delta|$, где $\varepsilon > 0$ настолько мало, что $\Phi_1(\Delta_0) < 0$. Очевидно, $\Phi_1 \in \bar{A}$.

Назовем двоичный интервал $\Delta \subset \Delta_0$ *правильным для функции $\Phi_0(\Delta)$* , если $\Phi_0(\Delta) < 0$. Нам потребуется доказать ряд лемм.

ЛЕММА 1. Пусть для функции $\Phi_0 \in \bar{A}$ выполняется условие (17) и Δ — правильный для функции $\Phi_0(\Delta)$ двоичный куб. Тогда существуют неперекрывающиеся правильные для функции $\Phi_0(\Delta)$ двоичные кубы Δ^1 и Δ^2 , лежащие в Δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Разобьем куб Δ ранга n_0 на 2^N неперекрывающихся двоичных кубов вдвое меньшего линейного размера. Так как $\Phi_0 \in \bar{A}$, то хотя бы один из них (назовем его Δ_{n_0+1}) является правильным. Если таких кубов больше одного, то утверждение леммы доказано. Если это не так, то точно так же мы можем разбить куб Δ_{n_0+1} на 2^N меньших и т.д. Короче говоря, либо мы на конечном шаге приходим к утверждению леммы, либо построим вложенную последовательность правильных двоичных кубов $\{\Delta_n\}$, причем ранг Δ_n равен n и каждый из этих кубов содержит ровно один правильный куб вдвое меньшего линейного размера. Тогда последовательность $\{\Delta_n\}$ можно дополнить до последовательности

$\{\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}\}$, основной для некоторой точки $\bar{z}$, причем $\Delta_{n, n, \dots, n} = \Delta_n$. Обозначим через $\Delta_n^{\bar{\sigma}}$ двоичный куб $\Delta_{n, n, \dots, n}^{\bar{\sigma}}$. С одной стороны, для последовательности $\{\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}\}$ должно выполняться условие (17). С другой стороны,

$$\Phi_0(\Delta_n) = \Phi_0\left(\bigcup_{\bar{\sigma} \in \Sigma_N} \Delta_{n+1}^{\bar{\sigma}}\right) \geq \sum_{\bar{\sigma} \in \Sigma_N} \Phi_0(\Delta_{n+1}^{\bar{\sigma}}) \geq \Phi_0(\Delta_{n+1})$$

(мы воспользовались тем, что $\Phi_0(\Delta_{n+1}^{\bar{\sigma}}) \geq 0$ для всех кубов $\Delta_{n+1}^{\bar{\sigma}}$, не совпадающих с Δ_{n+1}). Таким образом, $\Phi_0(\Delta_n) \leq \Phi_0(\Delta_{n+1}) < 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{\sigma} \in \Sigma_N} (-1)^{|\bar{\sigma}|} \Phi_0(\Delta_{n+1}^{\bar{\sigma}}) &= \sum_{\bar{\sigma} \in \Sigma_N} \Phi_0(\Delta_{n+1}^{\bar{\sigma}}) - 2 \cdot \sum_{\substack{\bar{\sigma} \in \Sigma_N \\ |\bar{\sigma}| \equiv 1 \pmod{2}}} \Phi_0(\Delta_{n+1}^{\bar{\sigma}}) \\ &\leq \Phi_0(\Delta_n) - 2 \cdot 2^{N-1} \cdot 0 = \Phi_0(\Delta_n) \leq \Phi_0(\Delta_{n+1}) < 0. \end{aligned}$$

Условие (17) не выполнено. Это противоречие доказывает лемму.

ЛЕММА 2. Пусть для функции $\Phi_0 \in \bar{A}$ выполняется условие (17) и Δ — правильный для функции $\Phi_0(\Delta)$ двоичный куб. Тогда выполняется хотя бы одно из двух условий.

1) Существует набор правильных для функции $\Phi_0(\Delta)$ двоичных кубов Δ_n^i , $n = 0, 1, \dots$, $i = 1, \dots, 2^n$, причем $\Delta_0^1 = \Delta$, $\Delta_{n+1}^{2^i-1} \subset \Delta_n^i$, $\Delta_{n+1}^{2^i} \subset \Delta_n^i$. Наконец, каждая точка множества $L = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^n} \Delta_n^i$ имеет только двоично-иррациональные координаты.

2) Существуют натуральное i_0 , $1 \leq i_0 \leq N-1$, правильный двоичный куб $\Delta' \subset \Delta$, набор попарно неравных чисел $k_1, k_2, \dots, k_{i_0}$, лежащих в множестве $\{1, 2, \dots, N\}$, набор чисел $u_1, u_2, \dots, u_{i_0}$, равных нулю или единице, для которых выполняется следующее свойство. В любой паре двоичных кубов Δ_1 и Δ_2 , $\Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \Delta'$, таких, что куб Δ_1 является правильным для функции $\Phi_0(\Delta)$, выполняется условие, состоящее в том, что в типе куба Δ_2 на k_s -м месте стоит число u_s , $s = 1, \dots, i_0$. При этом любая вложенная последовательность правильных кубов, лежащих в Δ' , стягивается к точке, у которой ровно i_0 координат принадлежат Q_d , причем это в точности координаты с номерами $k_1, k_2, \dots, k_{i_0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2 опирается на возможность реализации одного из следующих логически возможных случаев (в дальнейшем, если не оговаривается противного, под сочетанием “правильный двоичный куб” будем иметь в виду правильный для функции $\Phi_0(\Delta)$ двоичный куб).

- А) Для любого номера $k \in \{1, 2, \dots, N\}$, для любого $u \in \{0, 1\}$ и для любого правильного двоичного куба $\Delta'_1 \subset \Delta$ существует пара двоичных кубов Δ_1 и Δ_2 , $\Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \Delta'_1$, такая, что куб Δ_1 правильный, а в типе куба Δ_2 на k -м месте стоит число u .
- В) Существуют номер $k_1 \in \{1, 2, \dots, N\}$, число $u_1 \in \{0, 1\}$ и правильный двоичный куб $\Delta'_1 \subset \Delta$ такие, что в любой паре двоичных кубов Δ_1 и Δ_2 , $\Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \Delta'_1$, такой, что в типе куба Δ_2 на k_1 -м месте стоит число $(u_1 + 1) \pmod{2}$, куб Δ_1 не является правильным.

Отметим, что один из случаев А) или В) реализуется обязательно.

Покажем, что если имеет место случай А), то выполняется первое условие леммы. Построим искомый набор Δ_n^i по индукции. Пусть $\Delta_0^1 = \Delta$. Пусть построен набор Δ_n^i при $n = 0, 1, \dots, N_1$, $N_1 \leq N-1$, $i = 1, \dots, 2^n$. Имея правильный куб $\Delta_{N_1}^i$, построим правильные кубы $\Delta_{N_1+1}^{2i-1}$ и $\Delta_{N_1+1}^{2i}$. По лемме 1 существуют правильные кубы Δ^1 и Δ^2 , лежащие в $\Delta_{N_1}^i$. Рассмотрим куб Δ^1 , заметим, что в силу того, что реализуется случай А), существуют кубы $\Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \Delta^1$ такие, что куб Δ_1 правильный, а в типе куба Δ_2 на N_1 -м месте стоит число 0. Положим $\Delta_{N_1+1}^{2i-1} = \Delta_1$. Аналогично, рассмотрев куб Δ^2 , найдем другую пару кубов $\Delta_3 \subseteq \Delta_4 \subseteq \Delta^2$ такую, что куб Δ_3 правильный, а в типе куба Δ_4 на N_1 -м месте стоит число 0, и положим $\Delta_{N_1+1}^{2i} = \Delta_3$. Таким образом, мы построим набор Δ_n^i при $n = 0, \dots, N$. Набор Δ_n^i при $n = N+1, \dots, 2N$ мы построим аналогичным образом, считая кубы Δ_2 и Δ_4 в рассуждениях выше такими, что в их типах на $(N_1 - N)$ -м месте стоит число 1.

Таким образом, мы построили набор Δ_n^i при $n = 0, \dots, 2N$, причем он обладает следующим свойством. Рассмотрим любую вложенную последовательность $\{\Delta_n^{i(n)}\}$ при $n = 0, \dots, 2N$, можно дополнить ее до последовательности двоичных кубов $\{\Delta'_n\}$, в которой ранг куба Δ'_{n+1} на единицу больше ранга куба Δ'_n . Эта последовательность по построению будет обладать тем свойством, что для любого номера $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ и для любого $u \in \{0, 1\}$ в этой последовательности будет существовать куб, в типе которого на k -м месте стоит число u . Продолжая, мы построим набор Δ_n^i при $n = 2N+1, \dots, 4N$, затем при $n = 4N+1, \dots, 6N$ и т.д. При этом для каждой такой “порции” будет выполняться условие, состоящее в том, что если рассмотреть любую вложенную последовательность $\{\Delta_n^{i(n)}\}$ при $n = 2kN+1, \dots, (2k+2)N$, то можно дополнить ее до последовательности двоичных кубов $\{\Delta'_n\}$, в которой ранг куба Δ'_{n+1} на единицу больше ранга куба Δ'_n и обладающую тем свойством, что для любого номера $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ и для любого $u \in \{0, 1\}$ в этой последовательности будет существовать куб, в типе которого на k -м месте стоит число u . Из этого следует, что для построенного набора Δ_n^i , где $n = 0, 1, \dots$, $i = 1, \dots, 2^n$, выполняется следующее условие. Если мы рассмотрим любую вложенную последовательность $\{\Delta_n^{i(n)}\}$ при $n = 0, 1, \dots$, то можно дополнить ее до последовательности двоичных кубов $\{\Delta'_n\}$, в которой ранг каждого куба Δ'_{n+1} на единицу больше ранга куба Δ'_n , причем для любого номера $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ и для любого $u \in \{0, 1\}$ эта последовательность будет содержать бесконечное число кубов, в типе которых на k -м месте стоит число u . Отсюда следует, что любая такая последовательность (а следовательно, и последовательность $\{\Delta_n^{i(n)}\}$) согласно утверждению 1 будет стягиваться к точке, у которой все координаты двоично-иррациональны. Это и означает, что все точки множества $L = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^n} \Delta_n^i$ двоично-иррациональны. Тем самым выполняется условие 1) леммы 2.

Если же реализуется случай В), будем рассуждать следующим образом. Существуют номер $k_1 \in \{1, 2, \dots, N\}$, число $u_1 \in \{0, 1\}$ и правильный двоичный куб $\Delta'_1 \subset \Delta$ такие, что в любой паре двоичных кубов Δ_1 и Δ_2 , $\Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \Delta'_1$, такой, что в типе куба Δ_2 на k_1 -м месте стоит число $(u_1 + 1) \pmod{2}$, куб Δ_1 не является правильным.

При этом либо для любого номера $k \in \{1, 2, \dots, N\}$, $k \neq k_1$, для любого $u \in \{0, 1\}$ и для любого правильного двоичного куба $\Delta'_2 \subset \Delta'_1$ существует пара

двоичных кубов Δ_3 и Δ_4 , $\Delta_3 \subseteq \Delta_4 \subseteq \Delta'_2$, такая, что куб Δ_3 правильный, а в типе куба Δ_4 на k -м месте стоит число u ; либо существуют номер $k_2 \in \{1, 2, \dots, N\}$, $k_2 \neq k_1$, число $u_2 \in \{0, 1\}$ и правильный двоичный куб $\Delta'_2 \subseteq \Delta'_1$ такие, что в любой паре двоичных кубов Δ_3 и Δ_4 , $\Delta_3 \subseteq \Delta_4 \subseteq \Delta'_2$, такой, что в типе куба Δ_4 на k_2 -м месте стоит число $(u_2 + 1) \pmod{2}$, куб Δ_3 не является правильным.

Продолжая рассуждения дальше, получим, что существуют натуральное $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, набор попарно неравных чисел $k_1, k_2, \dots, k_i$, лежащих в множестве $\{1, 2, \dots, N\}$, набор чисел $u_1, u_2, \dots, u_i$, равных нулю или единице, а также правильный двоичный куб $\Delta'_i \subseteq \Delta$, для которых выполняется следующее свойство. В любой паре двоичных кубов Δ_{2i-1} и Δ_{2i} , $\Delta_{2i-1} \subseteq \Delta_{2i} \subseteq \Delta'_i$, такой, что в типе куба Δ_{2i-1} на k_s -м месте стоит число $(u_s + 1) \pmod{2}$, $s = 1, \dots, i$, куб Δ_{2i} не является правильным.

Пусть i_0 максимально возможное из тех i , которые удовлетворяют условиям предыдущего абзаца. Это значит, что для любого $l \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus \{k_1, k_2, \dots, k_{i_0}\}$, для любого $u \in \{0, 1\}$, для любого правильного двоичного куба $\Delta \subseteq \Delta'_{i_0}$ выполняется следующее свойство. Существует пара двоичных кубов Δ^1 и Δ^2 , $\Delta^1 \subseteq \Delta^2 \subseteq \Delta$, такая, что в типе куба Δ^1 на l -м месте стоит число u , а куб Δ^2 является правильным. Это гарантирует нам то, что любая вложенная последовательность правильных кубов, лежащих в Δ'_{i_0} , стягивается к точке, у которой ровно i координат принадлежат Q_d , причем это в точности координаты с номерами $k_1, k_2, \dots, k_{i_0}$.

Отметим, что при этом i_0 не может равняться N . Если бы это было не так, т.е. если $i_0 = N$, то, разбив Δ'_{i_0} на 2^N неперекрывающихся двоичных кубов, получим, что ровно один из них является правильным (тип которого есть $(u_1, u_2, \dots, u_N)$). Продолжая этот процесс дальше, мы не сможем получить пару неперекрывающихся правильных двоичных кубов, что нам гарантирует лемма 1. Значит, $i \neq N$, т.е. $i \leq N - 1$.

Полагая $\Delta' = \Delta'_{i_0}$, получаем, что условие 2) выполнено. Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Если выполняется условие 2) леммы 2, то при $i = i_0$ (см. лемму 2) существует $(N-i)$ -мерное линейное многообразие S на границе куба Δ' , задаваемое уравнениями $\{x_{k_1} = a_1, x_{k_2} = a_2, \dots, x_{k_i} = a_i\}$, такое, что любой правильный для функции $\Phi_0(\Delta)$ двоичный куб $\Delta_1 \subseteq \Delta'$ таков, что $\Delta_1 \cap S \neq \emptyset$. Кроме того, любая вложенная последовательность правильных для функции $\Phi_0(\Delta)$ двоичных кубов стягивается к точке $\bar{z} \in S$, у которой к тому же только координаты с номерами $k_1, k_2, \dots, k_i$ двоично-рациональны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Лемма 3 легко следует из леммы 2. Действительно, из условия 2) леммы 2 вытекает, что в типе любого двоичного куба $\Delta \subseteq \Delta'$, который содержит некоторый правильный двоичный куб, на k_s -м месте стоит число u_s . Тем самым в любой вложенной последовательности двоичных кубов $\{\Delta^n\}$, содержащей бесконечное число правильных кубов и лежащей в Δ' , выполняется то же свойство, т.е. в типе любого куба Δ^n на k_s -м месте стоит число u_s . Отсюда ясно, что существует $(N-i)$ -мерное линейное многообразие S на границе куба Δ' , задаваемое уравнениями $\{x_{k_1} = a_1, x_{k_2} = a_2, \dots, x_{k_i} = a_i\}$, такое, что $\Delta^n \cap S \neq \emptyset$ для любого n . Так как любой правильный двоичный куб $\Delta_1 \subseteq \Delta'$ содержится во вложенной последовательности двоичных кубов $\{\Delta^n\}$, содержащей бесконечное число правильных кубов и лежащей в Δ' (это следует из леммы 1), то $\Delta_1 \cap S \neq \emptyset$. Из леммы 2 также следует, что любая вложенная последовательность правильных

двоичных кубов стягивается к точке $\bar{z} \in S$, у которой к тому же только координаты с номерами $k_1, k_2, \dots, k_i$ двоично-рациональны.

Вернемся к доказательству теоремы. Применим леммы 1–3 к функции $\Phi_1(\Delta)$ и к интервалу Δ_0 . Пусть выполняется условие 1) леммы 2. Возьмем любую точку $\bar{z}$ множества L . Тогда $\underline{D}_d^\rho \Phi(\bar{z}) = \underline{D}_d^\rho \Phi_1(\bar{z}) - \varepsilon \leq 0 - \varepsilon < 0$. В силу условия 1) теоремы $L \subset B$. Это противоречит тому, что множество B не содержит совершенных подмножеств.

Если же выполняется условие 2) леммы 2, то рассмотрим двоичный интервал I ранга $\bar{\tau}$, где $\bar{\tau}$ – вектор, у которого на k_1 -м, k_2 -м, $\dots$, k_i -м местах стоят нули, а на остальных – единицы. Очевидно, параметр регулярности такого интервала равняется $\frac{1}{2}$. Назовем два двоичных интервала *подобными*, если один получается из другого преобразованием подобия, исключающим поворот.

Так как куб Δ' правильный для функции $\Phi_1(\Delta)$, то $\Phi_1(\Delta') < 0$. Введем новую функцию $\Phi_2(\Delta) = \Phi_1(\Delta) + \varepsilon' \cdot \text{mes}_{N-i}(\Delta \cap S)$, где $\text{mes}_{N-i}(A) - (N-i)$ -мерная лебегова мера множества A , а число $\varepsilon' > 0$ настолько мало, что $\Phi_2(\Delta') < 0$. Из геометрических соображений ясно, что функция $\varepsilon' \cdot \text{mes}_{N-i}(\Delta \cap S)$ аддитивна, следовательно, $\Phi_2 \in \bar{A}$.

Кроме того, для $\Phi_1(\Delta)$ и $\varepsilon' \cdot \text{mes}_{N-i}(\Delta \cap S)$ выполнено условие (17), откуда следует, что и для функции $\Phi_2(\Delta)$ выполняется это условие.

Так как $\Phi_2(\Delta') < 0$, то куб Δ' является правильным для функции $\Phi_2(\Delta)$. Разобьем куб Δ' на 2^{N-i} двоичных интервалов, подобных I . В силу супераддитивности функции $\Phi_2(\Delta)$ хотя бы один из этих интервалов, назовем его I_0^1 , является правильным. Докажем следующее утверждение.

ЛЕММА 4. *В условиях нашего доказательства можно построить набор правильных для функции $\Phi_2(\Delta)$ двоичных интервалов I_n^i , $n = 0, 1, 2, \dots$, $i = 1, \dots, 2^n$, со следующими свойствами:*

- 1) *каждый из интервалов I_n^i подобен I ;*
- 2) *$I_{n+1}^{2^i-1} \subset I_n^i$ и $I_{n+1}^{2^i} \subset I_n^i$ для всех возможных n, i , при этом оба включения строгие.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4 напоминает некоторые этапы доказательства лемм 1 и 2. Интервал I_0^1 уже построен. Его можно разбить на 2^i двоичных кубов, хотя бы один из которых в силу супераддитивности функции $\Phi_2(\Delta)$ является правильным. Применим к этому кубу и этой функции лемму 1. Тогда найдутся правильные для функции $\Phi_2(\Delta)$ неперекрывающиеся двоичные кубы Δ_1 и Δ_2 . Каждый из этих кубов разобьем на 2^{N-i} двоичных интервалов, подобных I . В силу супераддитивности функции $\Phi_2(\Delta)$ хотя бы два интервала, назовем их I_1^1 и I_2^1 , $I_1^1 \subset \Delta_1$, $I_2^1 \subset \Delta_2$, являются правильными. Продолжая этот процесс бесконечно, мы можем построить набор правильных для функции $\Phi_2(\Delta)$ двоичных интервалов I_n^i с указанными свойствами. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы. Рассмотрим совершенное множество $T = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^n} I_n^i$. Очевидно, к каждой точке $\bar{z} \in T$ стягивается вложенная последовательность правильных для функции $\Phi_2(\Delta)$ двоичных интервалов, подобных I . Так как любой интервал I_n^i содержит правильный для функции $\Phi_2(\Delta)$ двоичный куб, то к любой точке $\bar{z} \in T$ стягивается и вложенная последовательность правильных для функции $\Phi_2(\Delta)$ двоичных кубов. Заметим, что если двоичный куб Δ

правильный для функции $\Phi_2(\Delta)$, то он является правильным и для функции $\Phi_1(\Delta)$. Это следует из того, что $\Phi_1(\Delta) \leq \Phi_2(\Delta)$. Следствием этого является тот факт, что $T \subset S$. Что означает, в частности, что у любой точки $\bar{z} \in T$ только координаты с номерами $k_1, k_2, \dots, k_i$ двоично-рациональны.

Покажем, что для любой точки $\bar{z} \in T$ не выполняется условие (19), чем и докажем теорему. Для этого зафиксируем точку $\bar{z} \in T$. К ней стягивается некоторая вложенная последовательность двоичных интервалов $\{I_n^{i(n, \bar{z})}\}_{n=0}^\infty$. Дополним эту последовательность до основной для точки $\bar{z}$ последовательности $\{\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}\}$. По последовательности $\{\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}\}$ построим последовательность $\{\Delta_{\bar{k}, \bar{l}}^{\bar{\sigma}}\}$. Заметим, что $I_n^i = \bigcup_{\bar{\sigma} \in \Sigma_i} \Delta_{l_n, \bar{1}}^{\bar{\sigma}}$ для некоторого l_n . Отметим важный факт: из двоичных кубов $\Delta_{l_n, \bar{1}}^{\bar{\sigma}}$ лишь один, а именно соответствующий $\bar{\sigma} = \bar{0}$, имеет непустое пересечение с линейным многообразием S . Отсюда следует, что при $\bar{\sigma} \neq \bar{0}$ кубы $\Delta_{l_n, \bar{1}}^{\bar{\sigma}}$ не являются правильными для функции $\Phi_2(\Delta)$.

Имеет место следующая цепочка соотношений (мы используем, что $\Phi_2 \in \bar{A}$):

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{\sigma} \in \Sigma_i} (-1)^{|\bar{\sigma}|} \Phi_2(\Delta_{l_n, \bar{1}}^{\bar{\sigma}}) &= \sum_{\bar{\sigma} \in \Sigma_i} \Phi_2(\Delta_{l_n, \bar{1}}^{\bar{\sigma}}) - 2 \cdot \sum_{\substack{\bar{\sigma} \in \Sigma_i \\ |\bar{\sigma}| \equiv 1 \pmod{2}}} \Phi_2(\Delta_{l_n, \bar{1}}^{\bar{\sigma}}) \\ &\leq \Phi_2\left(\bigcup_{\bar{\sigma} \in \Sigma_i} \Delta_{l_n, \bar{1}}^{\bar{\sigma}}\right) - 2 \cdot \sum_{\substack{\bar{\sigma} \in \Sigma_i \\ |\bar{\sigma}| \equiv 1 \pmod{2}}} \Phi_2(\Delta_{l_n, \bar{1}}^{\bar{\sigma}}) \\ &= \Phi_2(I_n^{i(n, \bar{z})}) - 2 \cdot \sum_{\substack{\bar{\sigma} \in \Sigma_i \\ |\bar{\sigma}| \equiv 1 \pmod{2}}} \Phi_2(\Delta_{l_n, \bar{1}}^{\bar{\sigma}}) \leq 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим цепочку соотношений

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\Delta_{l_n, \bar{1}}|^{1-i/N}} \sum_{\bar{\sigma} \in \Sigma_i} (-1)^{|\bar{\sigma}|} \Phi(\Delta_{l_n, \bar{1}}^{\bar{\sigma}}) &= \frac{1}{|\Delta_{l_n, \bar{1}}|^{1-i/N}} \left(\sum_{\bar{\sigma} \in \Sigma_i} (-1)^{|\bar{\sigma}|} \Phi_2(\Delta_{l_n, \bar{1}}^{\bar{\sigma}}) \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon \sum_{\bar{\sigma} \in \Sigma_i} (-1)^{|\bar{\sigma}|} |(\Delta_{l_n, \bar{1}}^{\bar{\sigma}})| - \varepsilon' \sum_{\bar{\sigma} \in \Sigma_i} (-1)^{|\bar{\sigma}|} \text{mes}_{N-i}(\Delta_{l_n, \bar{1}}^{\bar{\sigma}} \cap S) \right). \end{aligned}$$

Согласно предыдущей выкладке первая сумма в скобках неположительна. Вторая, очевидно, равна нулю. Найдем третью сумму. Так как при $\bar{\sigma} \neq \bar{0}$ $\Delta_{l_n, \bar{1}}^{\bar{\sigma}} \cap S = \emptyset$, т.е. $\text{mes}_{N-i}(\Delta_{l_n, \bar{1}}^{\bar{\sigma}} \cap S) = 0$, то от третьей суммы остается одно слагаемое $\text{mes}_{N-i}(\Delta_{l_n, \bar{1}}^{\bar{0}} \cap S)$, равное $(1/2^{l_n})^{N-i}$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\Delta_{l_n, \bar{1}}|^{1-i/N}} \sum_{\bar{\sigma} \in \Sigma_i} (-1)^{|\bar{\sigma}|} \Phi(\Delta_{l_n, \bar{1}}^{\bar{\sigma}}) &\leq -\varepsilon' \frac{1}{|\Delta_{l_n, \bar{1}}|^{1-i/N}} \cdot \left(\frac{1}{2^{l_n}} \right)^{N-i} \\ &= -\varepsilon' \cdot \frac{(2^{l_n N})^{1-i/N}}{2^{l_n N - l_n i}} = -\varepsilon' < 0. \end{aligned}$$

Тем самым в точках множества T не выполняется условие (19), т.е. $T \subset B$. Это противоречит тому, что множество B не содержит совершенных подмножеств, что и доказывает теорему.

Отметим, что в качестве множества B в теореме 3 можно взять любое не более чем счетное множество.

§ 4. Теоремы единственности для кратных рядов Хаара

Здесь будут приведены основные результаты работы, касающиеся единственности для кратных рядов Хаара. Воспользуемся следующей терминологией. Множество $A \subset [0, 1]^N$ назовем M -множеством для рядов (3) с некоторым условием (α) , если существует ряд (3), не все коэффициенты которого нулевые, удовлетворяющий условию (α) и сходящийся к нулю (при некоторой сходимости) на множестве $[0, 1]^N \setminus A$. Если такого ряда не существует, т.е. если из сходимости к нулю вне множества A ряда (3), удовлетворяющего условию (α) , следует, что все его коэффициенты нулевые, то множество A назовем U -множеством для рядов (3) с условием (α) .

ТЕОРЕМА 4. Пусть A является M -множеством для рядов (3) с условием (16), (15) или (18) при ρ -регулярной сходимости, $\rho \leq \frac{1}{2}$, или при сходимости по прямоугольникам. Тогда множество A содержит совершенное подмножество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим условие (16) и ρ -регулярную сходимость. Раз A является M -множеством для рядов (3) с условием (16), то существует ряд (3), удовлетворяющий условию (16), не все коэффициенты которого нулевые, ρ -регулярно сходящийся к нулю вне A . Построим по формуле (5) аддитивную функцию двоичного интервала $\Psi(\Delta)$. Так как по предположению не все коэффициенты ряда Хаара нулевые, функция $\Psi(\Delta)$ не равна нулю тождественно. Таким образом, существует двоичный интервал Δ_0 такой, что $\Psi(\Delta_0) \neq 0$. Без ограничения общности можем считать, что $\Psi(\Delta_0) < 0$ (иначе можно поменять знаки у всех коэффициентов данного ряда).

Предположим, что утверждение теоремы неверно и множество A не содержит совершенных подмножеств. Так как данный ряд удовлетворяет условию (16), то для этой функции в каждой точке $\bar{z} \in [0, 1]^N$ для каждой последовательности двоичных кубов $\{\Delta_{n, \bar{I}}\}$, основной для этой точки, выполняется равенство (17). Так как наш ряд сходится ρ -регулярно к нулю вне множества A , то из теоремы 1 следует, что в точках $\bar{z} \in [0, 1]^N \setminus A$, все координаты которых принадлежат I_d , выполняется равенство $D_d^\rho \Psi(\bar{z}) = 0$. Если же $\bar{z} \in [0, 1]^N \setminus A$ и точка $\bar{z}$ имеет $i \geq 1$ двоично-рациональных координат, то для любой последовательности $\{\Delta_{\bar{k}, \bar{I}}\}$, основной для точки $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$, выполняется условие (13), а значит, и условие (17). Таким образом, функция $\Psi(\Delta)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 3. Тогда $\Psi(\Delta) \geq 0$ для любого двоичного интервала Δ , что противоречит тому, что $\Psi(\Delta_0) < 0$. Итак, множество A содержит совершенное подмножество.

Но из условий (15) или (18) вытекает условие (16), а из сходимости по прямоугольникам следует ρ -регулярная сходимость, поэтому утверждение теоремы верно для таких условий и для такой сходимости (ясно, что чем шире условие на ряды (3) или чем шире сходимость, тем “больше” M -множеств для рядов (3) с соответствующим условием при соответствующей сходимости). Теорема доказана.

Часть теоремы 4, касающаяся условия (15) и сходимости по прямоугольникам, была доказана В. А. Скворцовым (см. [1; теорема 4]), в двумерном случае этот результат также следует из работы Х. О. Мовсисяна [8]. Аналогичная теорема в двумерном случае для условия (16) и для ρ -регулярной сходимости была получена автором (см. [9; следствие 1 теоремы 1.3]). В одномерном случае подобный результат

установлен Г.М. Мушегяном (см. [10; теорема 1]). Часть теоремы 4, касающаяся условия (16) и ρ -регулярной сходимости, обобщает в различных направлениях указанные выше результаты.

Прямым следствием теоремы 4 является

ТЕОРЕМА 5. Пусть множество B не содержит совершенных подмножеств. Пусть N -мерный ряд Хаара удовлетворяет одному из условий (16), (15) или (18) и вне множества B сходится к нулю ρ -регулярно при $\rho \leq \frac{1}{2}$ или по прямоугольникам. Тогда все коэффициенты этого ряда нулевые. В частности, теорема верна, если B – не более чем счетное множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 4 множество B является U -множеством для рядов (3) с условием (16), (15) или (18) для ρ -регулярной сходимости или для сходимости по прямоугольникам. Следовательно, если ряд (3) удовлетворяет условию (16), (15) или (18) и сходится к нулю ρ -регулярно или по прямоугольникам вне множества B , то его коэффициенты нулевые. Так как любое не более чем счетное множество не содержит совершенных подмножеств, то утверждение теоремы верно для таких множеств B (для борелевских множеств верно и обратное: если борелевское множество не содержит совершенных подмножеств, то оно не более чем счетно, см., например, [11]).

Однако теорема 3 позволяет доказать утверждения гораздо более сильные, чем теоремы 4 или 5. С помощью теоремы 3 можно построить интеграл перроновского типа, позволяющий восстанавливать при помощи формул Фурье коэффициенты кратных рядов Хаара из достаточно широкого класса функций. Дадим следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть заданы число $\rho \leq \frac{1}{2}$ и не более чем счетное множество $B \subset [0, 1]^N$. Пусть на кубе $[0, 1]^N$ или по крайней мере в точках множества $(I_d)^N \setminus B$ определена конечная функция $f(\bar{z})$. Скажем, что функция $f(\bar{z})$ $(P_d^{\rho,*})$ -интегрируема на $[0, 1]^N$, если $\forall \varepsilon > 0$ найдутся функции $F_1(\Delta) \in \bar{A}$ и $F_2(\Delta) \in \underline{A}$ со следующими свойствами:

- 1) если $\bar{z} \in (I_d)^N \setminus B$, то $\underline{D}_d^\rho F_1(\bar{z}) \geq f(\bar{z}) \geq \overline{D}_d^\rho F_2(\bar{z})$;
- 2) если точка $\bar{z} \notin B$ и число ее координат, принадлежащих Q_d , равно $i \geq 1$, то для любой последовательности $\{\Delta_{\bar{k}, l}\}$, основной для точки $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$, и для функций F_1 и F_2 выполняется условие (19);
- 3) для каждой точки $\bar{z} \in [0, 1]^N$ и для каждой последовательности двоичных кубов $\{\Delta_{n, \bar{l}}\}$, основной для этой точки, выполняется равенство (17);
- 4) $F_1([0, 1]^N) - F_2([0, 1]^N) < \varepsilon$.

Тогда определим $(P_d^{\rho,*})$ -интеграл от функции $f(\bar{z})$ на любом двоичном интеграле Δ

$$(P_d^{\rho,*}) \int_{\Delta} f(\bar{z}) d\bar{z} = \inf_{F_1} F_1(\Delta) = \sup_{F_2} F_2(\Delta).$$

Теорема 3 гарантирует нам корректность введенного определения, понимаемую в том смысле, что для любых функций $F_1(\Delta) \in \bar{A}$ и $F_2(\Delta) \in \underline{A}$, удовлетворяющих условиям 1)–3) данного определения, невозможна ситуация, когда $F_1(\Delta) < F_2(\Delta)$ для некоторого интервала Δ . Тем самым невозможна ситуация, когда

$$\inf_{F_1} F_1(\Delta) < \sup_{F_2} F_2(\Delta).$$

Действительно, функция $\Phi(\Delta) = F_1(\Delta) - F_2(\Delta)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 3, следовательно, $\Phi(\Delta) \geq 0$ для любого двоичного интервала Δ .

Рассмотрим функцию $F(\Delta) = (P_d^{\rho,*}) \int_{\Delta} f(\bar{z}) d\bar{z}$. Как и для многих других интегралов перроновского типа, несложно показать (см., например, [12]), что функция $F(\Delta)$ – аддитивная функция двоичного интервала.

Сформулируем следующий результат.

ТЕОРЕМА 6. Пусть множество B не более чем счетно и ряд (3) всюду на $[0, 1]^N$ удовлетворяет одному из условий (16), (15) или (18). Пусть этот ряд во всех точках множества $(I_d)^N \setminus B$ сходится ρ -регулярно, $\rho \leq \frac{1}{2}$, или по прямоугольникам к конечной функции $f(\bar{z})$, а во всех точках $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$ множества $[0, 1]^N \setminus B$, имеющих ровно $i \geq 1$ координат, принадлежащих Q_d , для этого ряда выполняется одно из следующих условий:

$$S_{\bar{Q}, \bar{R}}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{o}((Q_1 \cdots Q_i \cdot R_1 \cdots R_j)^{i/N}), \quad \|(\bar{Q}, \bar{R})\| \rightarrow \infty, \quad (20)$$

$$S_{\bar{Q}, \bar{R}}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{o}((Q_1 \cdots Q_i \cdot R_1 \cdots R_j)^{i/N}), \quad \|(\bar{Q}, \bar{R})\| \rightarrow \infty, \quad \text{reg}((\bar{Q}, \bar{R})) \geq \rho. \quad (21)$$

Тогда ряд (3) является рядом Фурье относительно $(P_d^{\rho,*})$ -интеграла, т.е. его коэффициенты восстанавливаются при помощи обычных формул Фурье:

$$a_{q_1, q_2, \dots, q_N} = (P_d^{\rho,*}) \int_{[0, 1]^N} f(\bar{z}) \chi_{q_1, q_2, \dots, q_N}(\bar{z}) d\bar{z}. \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем теорему для ρ -регулярной сходимости (из сходимости по прямоугольникам эта сходимость следует) и для условия (21) (из (20) это условие следует). Построим для ряда (3) по формуле (5) аддитивную функцию двоичного интервала $\Psi(\Delta)$. Положим $F_1(\Delta) = F_2(\Delta) \equiv \Psi(\Delta)$. Покажем, что функции F_1 и F_2 удовлетворяют всем условиям определения $(P_d^{\rho,*})$ -интеграла.

Действительно, если $\bar{z} \in (I_d)^N \setminus B$, то раз ряд (3) сходится в этой точке к конечной функции $f(\bar{z})$, по теореме 1 для функции Ψ выполняется равенство (7), откуда следует выполнение первого условия из определения $(P_d^{\rho,*})$ -интеграла. Если же точка $\bar{z} \in [0, 1]^N \setminus B$ имеет ровно $i \geq 1$ двоично-рациональных координат, то раз для нее выполняется равенство (21), по теореме 2 для функции Ψ (а значит, и для функций F_1 и F_2) выполняется равенство (19). Тем самым и второе условие определения $(P_d^{\rho,*})$ -интеграла выполнено. Третье условия данного определения выполнено в силу того, что равенство (17) вытекает из любого из трех равенств (15), (16) или (18). Наконец, выполнение четвертого условия определения очевидно. Таким образом, функция $f(\bar{z})$ является $(P_d^{\rho,*})$ -интегрируемой.

Мы имеем следующую цепочку соотношений:

$$(P_d^{\rho,*}) \int_{\Delta} f(\bar{z}) d\bar{z} = \sup_{F_2} F_2(\Delta) \geq \Psi(\Delta) \geq \inf_{F_1} F_1(\Delta) = (P_d^{\rho,*}) \int_{\Delta} f(\bar{z}) d\bar{z}.$$

Получается, что $(P_d^{\rho,*}) \int_{\Delta} f(\bar{z}) d\bar{z} = \Psi(\Delta)$.

Остается доказать формулу (22). Рассмотрим функцию Хаара $\chi_{\bar{q}}(\bar{z})$. Пусть W – множество номеров $\{i_m\}_{m=1}^{N_0}$ (возможно, пустое) таких, что $q_{i_m} \neq 1$ для

любого m . Если $i \in W$, то $2^{n_i-1} + 1 \leq q_i \leq 2^{n_i}$. Тогда носителем функции $\chi_{\bar{q}}(\bar{z})$ будет двоичный интервал $I = I_1 \times \cdots \times I_N$, где $I_i = [p_i/2^{n_i-1}, (p_i + 1)/2^{n_i-1}]$, если $i \in W$, и $I_i = [0, 1]$, если $i \notin W$.

Рассмотрим множество $\Sigma' = \{\bar{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)\}$ наборов из N нулей и единиц, причем если $i \notin W$, то $\sigma_i = 0$. Разобьем интервал I на 2^{N_0} неперекрывающихся двоичных интервалов $I^{\bar{\sigma}} = I_1^{\bar{\sigma}} \times \cdots \times I_N^{\bar{\sigma}}$, $\bar{\sigma} \in \Sigma'$. При этом если $i \notin W$, то $I_i^{\bar{\sigma}} = [0, 1]$, а если $i \in W$, то

$$I_i^{\bar{\sigma}} = \left[\frac{2p_i + \sigma_i}{2^{n_i}}, \frac{2p_i + \sigma_i + 1}{2^{n_i}} \right].$$

Выберем произвольную точку $\bar{z}$, лежащую внутри двоичного интервала $I^{\bar{\sigma}}$. Имеем следующую цепочку соотношений:

$$\begin{aligned} a_{\bar{q}} &= \frac{a_{\bar{q}} \chi_{\bar{q}}(\bar{z})}{\chi_{\bar{q}}(\bar{z})} = \frac{\sum_{\bar{\sigma} \in \Sigma'} (-1)^{|\bar{\sigma}|} S_{2^{\bar{n}} - \bar{\sigma}}(\bar{z})}{\chi_{\bar{q}}(\bar{z})} = \frac{1}{\chi_{\bar{q}}(\bar{z})} \sum_{\bar{\sigma} \in \Sigma'} (-1)^{|\bar{\sigma}|} \frac{\Psi(\bigcup_{\bar{\sigma}_0 \leq \bar{\sigma}} I^{\bar{\sigma}_0})}{|\bigcup_{\bar{\sigma}_0 \leq \bar{\sigma}} I^{\bar{\sigma}_0}|} \\ &= \frac{1}{\chi_{\bar{q}}(\bar{z})} \sum_{\bar{\sigma} \in \Sigma'} (-1)^{|\bar{\sigma}|} \frac{\sum_{\bar{\sigma}_0 \leq \bar{\sigma}} \Psi(I^{\bar{\sigma}_0})}{\sum_{\bar{\sigma}_0 \leq \bar{\sigma}} |I^{\bar{\sigma}_0}|} \\ &= \frac{1}{\chi_{\bar{q}}(\bar{z})} \sum_{\bar{\sigma} \in \Sigma'} \left(-\frac{1}{2}\right)^{|\bar{\sigma}|} \frac{1}{(\prod_{i \in W} 2^{n_i})^{-1}} \sum_{\bar{\sigma}_0 \leq \bar{\sigma}} \Psi(I^{\bar{\sigma}_0}) \\ &= \frac{\prod_{i \in W} 2^{n_i}}{\chi_{\bar{q}}(\bar{z})} \sum_{\bar{\sigma} \in \Sigma'} \sum_{\bar{\sigma}_0 \leq \bar{\sigma}} \left(-\frac{1}{2}\right)^{|\bar{\sigma}|} \Psi(I^{\bar{\sigma}_0}) \\ &= \frac{\prod_{i \in W} 2^{n_i}}{(\prod_{i \in W} 2^{n_i-1})^{1/2}} \sum_{\bar{\sigma} \geq \bar{\sigma}_0} \left(-\frac{1}{2}\right)^{|\bar{\sigma}|} \Psi(I^{\bar{\sigma}_0}) \\ &= \left(\prod_{i \in W} 2^{n_i}\right)^{1/2} \cdot 2^{N_0} \cdot \sum_{\bar{\sigma}_0 \in \Sigma'} \Psi(I^{\bar{\sigma}_0}) \sum_{\substack{\bar{\sigma} \in \Sigma' \\ \bar{\sigma} \geq \bar{\sigma}_0}} \left(-\frac{1}{2}\right)^{|\bar{\sigma}|} \\ &= \chi_{\bar{q}}(\bar{z}) \cdot 2^{N_0} \cdot \sum_{\bar{\sigma}_0 \in \Sigma'} \Psi(I^{\bar{\sigma}_0}) \sum_{s=|\bar{\sigma}_0|}^{N_0} \left(-\frac{1}{2}\right)^s C_{N_0-|\bar{\sigma}_0|}^{s-|\bar{\sigma}_0|} \\ &= \chi_{\bar{q}}(\bar{z}) \cdot 2^{N_0} \cdot \sum_{\bar{\sigma}_0 \in \Sigma'} \Psi(I^{\bar{\sigma}_0}) \sum_{s=0}^{N_0-|\bar{\sigma}_0|} \left(-\frac{1}{2}\right)^{|\bar{\sigma}_0|+s} C_{N_0-|\bar{\sigma}_0|}^s \\ &= \chi_{\bar{q}}(\bar{z}) \cdot 2^{N_0} \cdot \sum_{\bar{\sigma}_0 \in \Sigma'} \left(-\frac{1}{2}\right)^{|\bar{\sigma}_0|} \Psi(I^{\bar{\sigma}_0}) \sum_{s=0}^{N_0-|\bar{\sigma}_0|} \left(-\frac{1}{2}\right)^s 1^{N_0-|\bar{\sigma}_0|-s} C_{N_0-|\bar{\sigma}_0|}^s \\ &= \chi_{\bar{q}}(\bar{z}) \cdot 2^{N_0} \cdot \sum_{\bar{\sigma}_0 \in \Sigma'} \Psi(I^{\bar{\sigma}_0}) (-1)^{|\bar{\sigma}_0|} \frac{1}{2^{N_0}} \\ &= \chi_{\bar{q}}(\bar{z}) \sum_{\bar{\sigma}_0 \in \Sigma'} \Psi(I^{\bar{\sigma}_0}) (-1)^{|\bar{\sigma}_0|} = \sum_{\bar{\sigma}_0 \in \Sigma'} (-1)^{|\bar{\sigma}_0|} \chi_{\bar{q}}(\bar{z}) \int_{I^{\bar{\sigma}_0}} f(\bar{z}') d\bar{z}' \\ &= (P_d^{\rho,*}) \int_I f(\bar{z}') \chi_{\bar{q}}(\bar{z}') d\bar{z}' = (P_d^{\rho,*}) \int_{[0,1]^N} f(\bar{z}') \chi_{\bar{q}}(\bar{z}') d\bar{z}'. \end{aligned}$$

Теорема полностью доказана.

В одномерном случае коэффициенты рядов Хаара из достаточно широкого класса восстанавливаются при помощи так называемого (HD) -интеграла, построенного В. А. Скворцовым (см. [6]). В двумерном случае интеграл, восстанавливающий коэффициенты рядов Хаара, был построен автором (см. [13]) и назван P_R^ρ -интегралом, однако этот интеграл применялся для восстановления коэффициентов лишь всюду сходящихся рядов Хаара. $(P_d^{\rho,*})$ -интеграл, построенный в нашей работе, обобщает на N -мерный случай упомянутые интегралы. Из теоремы 6 видно, что чем больше двоично-рациональных координат у точки $\bar{z}$, тем более слабые условия на поведение частичных сумм ряда Хаара в этой точке можно наложить, чтобы не нарушить единственность.

Отметим, что уже в двумерном случае аналоги теорем 4–6 перестают быть верными, если вместо ρ -регулярной сходимости с $\rho \leq \frac{1}{2}$ рассмотреть значения ρ , близкие к единице. А именно, автором был доказан следующий факт (см. [14; теорема 1]).

ТЕОРЕМА А. *Для любого $\rho \in (\sqrt{2}/2; 1]$ существует ρ -регулярно сходящийся к нулю всюду на $[0, 1]^2$ двумерный ряд Хаара, не все коэффициенты которого нулевые.*

Список литературы

1. Скворцов В. А. О множествах единственности для многомерных рядов Хаара // Матем. заметки. 1973. Т. 14. № 6. С. 789–798.
2. Арутюнян Ф. Г., Талалян А. А. О единственности рядов по системам Хаара и Уолша // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28. С. 1391–1408.
3. Ульянов П. Л. О рядах по системе Хаара // Матем. сб. 1964. Т. 63(105). № 3. С. 356–391.
4. McLaughlin J., Price J. Comparison of Haar series with gaps with trigonometric series // Pacific J. Math. 1969. V. 28. № 3. P. 333–371.
5. Скворцов В. А. Дифференцирование относительно сетей и ряды Хаара // Матем. заметки. 1968. Т. 4. № 1. С. 33–40.
6. Скворцов В. А. Вычисление коэффициентов всюду сходящегося ряда Хаара // Матем. сб. 1968. Т. 75(117). № 3. С. 349–360.
7. Скворцов В. А., Талалян А. А. Некоторые вопросы единственности кратных рядов по системе Хаара и тригонометрической системе // Матем. заметки. 1973. Т. 13. № 3. С. 104–113.
8. Мовсисян Х. О. О единственности двойных рядов по системам Хаара и Уолша // Изв. АН АрмССР. Сер. матем. 1974. Т. 9. № 1. С. 40–61.
9. Плотников М. Г. Обобщенные интегралы и вопросы единственности для двумерных рядов Хаара и Уолша // Дисс. . . . канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 2001.
10. Мушегян Г. М. О множествах единственности для системы Хаара // Изв. АН АрмССР. Сер. матем. 1967. Т. 2. № 6. С. 350–361.
11. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.: ОНТИ, 1937.
12. Ostaszewski K. M. Henstock integration in the plane // Mem. Amer. Math. Soc. 1986. V. 63. № 353. P. 1–106.
13. Плотников М. Г. О единственности всюду сходящихся кратных рядов Хаара // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 2001. № 1. С. 23–28.
14. Плотников М. Г. О нарушении единственности для двумерных рядов Хаара // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 2003. № 4. С. 20–24.

Вологодская государственная молочнохозяйственная
академия им. Н. В. Верещагина
E-mail: mgplotnikov@mail.ru

Поступила в редакцию
04.11.2003 и 30.08.2004