Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Толстоногов, Теорема Боголюбова при ограничениях, порожденных полунепрерывным снизу дифференциальным включением, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 2, 117–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1269>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 12:43:55

УДК 517.972

А. А. Толстоногов

Теорема Боголюбова при ограничениях, порожденных полунепрерывным снизу дифференциальным включением

Доказывается аналог классической теоремы Боголюбова с невыпуклым ограничением. Ограничением является множество решений дифференциального включения с невыпуклой полунепрерывной снизу правой частью. Как приложение изучается взаимосвязь между решениями задачи минимизации интегрального функционала с невыпуклым интегрантом на решениях исходного включения и решениями релаксационной задачи.

Библиография: 20 названий.

§1. Введение и постановка задачи

В 1930 г. Н. Н. Боголюбов доказал следующую теорему [1], [2].

Пусть $T = [0, 1]$, $f: T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда для любой функции $x(\cdot) \in W_{\infty,1}(T, \mathbb{R}^n)$ найдется последовательность функций $x_m(\cdot) \in C_1(T, \mathbb{R}^n)$, $m \geq 1$, такая, что $x_m(0) = x(0)$, $x_m(1) = x(1)$, $x_m(\cdot)$, $m \geq 1$, стремится к $x(\cdot)$ равномерно на T и, кроме того,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_T f(t, x_m(t), \dot{x}_m(t)) dt \leq \int_T f^{**}(t, x(t), \dot{x}(t)) dt.$$

Здесь $f^{**}(t, x, u)$ — биполяра (вторая сопряженная) [2], [3] функции $u \rightarrow f(t, x, u)$, $W_{\infty,1}(T, \mathbb{R}^n)$ — пространство абсолютно непрерывных функций из T в $\mathbb{R}^n$, у которых производные являются элементами пространства $L_\infty(T, \mathbb{R}^n)$.

В настоящей работе рассматривается следующая задача.

Пусть $X = \mathbb{R}^N$ — N -мерное евклидово пространство, $B \subset X$ — единичный открытый шар с центром в нуле, $C(T, X)$ — пространство непрерывных функций из T в X с топологией равномерной сходимости на T , $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $\overline{\mathbb{R}} = (-\infty, +\infty]$. Для многозначного отображения $F: T \times X \rightarrow X$, полунепрерывного снизу по второй переменной с компактными значениями, рассмотрим многозначные отображения

$$F_\delta(t, x) = \left\{ \bigcup F(t, y); y \in x + \delta \cdot B \right\}, \quad \delta > 0, \quad (1.1)$$

$$\tilde{F}(t, x) = \bigcap_{\delta \downarrow 0} \overline{F}_\delta(t, x), \quad (1.2)$$

где $\overline{F}_\delta(t, x)$ — замыкание множества $F_\delta(t, x)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда INTAS (грант № 2000-0015), РФФИ–ГФЕН Китая (грант № 02-01-39006) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-01-00203).

Для числовой функции $g: T \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ пусть

$$g_{\tilde{F}}(t, x, u) = \begin{cases} g(t, x, u), & u \in \tilde{F}(t, x); \\ +\infty, & u \notin \tilde{F}(t, x). \end{cases} \quad (1.3)$$

Обозначим через $g_{\tilde{F}}^{**}(t, x, u)$ биполярную функцию $u \rightarrow g_{\tilde{F}}(t, x, u)$.
Рассмотрим дифференциальные включения

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad (1.4)$$

$$\dot{x}(t) \in \text{co } \tilde{F}(t, x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad (1.5)$$

где $\text{co } \tilde{F}(t, x(t))$ означает выпуклую оболочку множества $\tilde{F}(t, x(t))$.

Целью настоящей работы является установление взаимосвязей между решениями дифференциальных включений (1.4), (1.5) и значениями интегралов

$$\int_T g(t, x(t), \dot{x}(t)) dt, \quad \int_T g_{\tilde{F}}^{**}(t, x(t), \dot{x}(t)) dt,$$

вычисленных на решениях этих систем.

При достаточно общих предположениях относительно F и g , включающих в себя известные [4], [5], доказывается, что множество решений включения (1.5) является компактным подмножеством пространства $C(T, X)$ и для любого решения $x_*(\cdot)$ включения (1.5) существует последовательность $x_n(\cdot)$, $n \geq 1$, решений включения (1.4) такая, что

$$x_n(\cdot) \rightarrow x_*(\cdot) \quad \text{в } C(T, X), \quad (1.6)$$

$$\int_T g(t, x_n(t), \dot{x}_n(t)) dt \rightarrow \int_T g_{\tilde{F}}^{**}(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)) dt. \quad (1.7)$$

В качестве приложения рассмотрена задача

$$\int_T g(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \rightarrow \inf \quad (\text{P})$$

на решениях включения (1.4) и релаксационная задача

$$\int_T g_{\tilde{F}}^{**}(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \rightarrow \inf \quad (\text{RP})$$

на решениях включения (1.5).

Показано, что задача (RP) имеет решение и для любого решения $x_*(\cdot)$ задачи (RP) существует минимизирующая последовательность $x_n(\cdot)$, $n \geq 1$, задачи (P) такая, что имеют место соотношения (1.6), (1.7). Эти соотношения являются аналогом утверждений теоремы Н. Н. Боголюбова при наличии ограничений, порожденных дифференциальным включением с невыпуклозначной полунепрерывной снизу правой частью.

Приведены примеры, показывающие содержательность предположений относительно F и g .

§ 2. Основные определения, обозначения и предположения

Пусть $X = \mathbb{R}^N$ – N -мерное евклидово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $T = [0, 1]$ – отрезок числовой полупрямой $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ с мерой Лебега μ и с σ -алгеброй Σ измеримых по Лебегу множеств.

Для сепарабельного банахова пространства Y с нормой $\|\cdot\|_Y$ мы используем следующие обозначения: 2^Y – совокупность всех непустых подмножеств из Y , cY – совокупность всех непустых замкнутых подмножеств из Y , cbY – совокупность всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств из Y и $\text{comp } Y$ – совокупность всех непустых компактных подмножеств из Y .

Пусть $B_Y \subset X$ – единичный открытый шар с центром в нуле, $\text{co } A$ и $\overline{\text{co}} A$ – выпуклая и выпуклая замкнутая оболочки множества $A \subset Y$.

На пространстве cbY определим метрику Хаусдорфа

$$D_Y(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \|x - y\|_Y, \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} \|y - x\|_Y \right\}.$$

Для пространства X метрику Хаусдорфа на пространстве cbX и единичный шар из X мы будем обозначать $D(\cdot, \cdot)$ и B соответственно.

Многозначное отображение $F: Y \rightarrow 2^Y$ называется *полу непрерывным снизу по Вьеторису в точке y_0* , если для любого открытого множества $U \subset Y$, $F(y_0) \cap U \neq \emptyset$, существует окрестность $V(y_0)$ точки y_0 такая, что $F(y) \cap U \neq \emptyset$ для любого $y \in V(y_0)$.

Многозначное отображение $F: Y \rightarrow 2^Y$ называется *полу непрерывным снизу по Хаусдорфу в точке y_0* , если для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $V(y_0)$ точки y_0 такая, что

$$F(y_0) \subset F(y) + \varepsilon \cdot B_Y, \quad y \in V(y_0).$$

Очевидно, что из полу непрерывности снизу по Хаусдорфу следует полу непрерывность снизу по Вьеторису. Известно, что для отображений $F: Y \rightarrow \text{comp } Y$ оба определения полу непрерывности снизу совпадают. Поэтому в дальнейшем для таких отображений мы просто будем говорить о полу непрерывности снизу. Легко показать, что отображение $F: Y \rightarrow 2^Y$ полу непрерывно снизу по Вьеторису тогда и только тогда, когда полу непрерывно снизу отображение $\bar{F}: Y \rightarrow 2^Y$, где $\bar{F}(y)$ означает замыкание множества $F(y)$. Более того, отображение $F: Y \rightarrow 2^Y$ полу непрерывно снизу по Вьеторису в точке y_0 тогда и только тогда, когда для любого $u_0 \in F(y_0)$ и любой последовательности $y_n \in Y$, $n \geq 1$, сходящейся к y_0 , существует последовательность $u_n \in F(y_n)$, $n \geq 1$, сходящаяся к u_0 .

Многозначное отображение $F: Y \rightarrow 2^Y$ называется *полу непрерывным сверху по Хаусдорфу в точке y_0* , если для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $V(y_0)$ точки y_0 такая, что

$$F(y) \subset F(y_0) + \varepsilon \cdot B_Y, \quad y \in V(y_0).$$

Многозначное отображение $F: T \rightarrow 2^Y$ называется *измеримым (слабо измеримым)*, если множество $F^{-1}(U) = \{t \in T; F(t) \cap U \neq \emptyset\}$ измеримо для любого замкнутого (открытого) множества $U \subset Y$. Если $F: T \times Y \rightarrow 2^Y$, то $\Sigma \otimes \mathcal{B}_Y$ -измеримость (слабая $\Sigma \otimes \mathcal{B}_Y$ -измеримость) означает, что $F^{-1}(U) =$

$\{t \in T, y \in Y; F(t, y) \cap U \neq \emptyset\} \in \Sigma \otimes \mathcal{B}_Y$ для любого замкнутого (открытого) множества $U \subset Y$, где $\Sigma \otimes \mathcal{B}_Y$ — σ -алгебра подмножеств из $T \times Y$, порожденная множествами $E \times V$, $E \in \Sigma$, $V \in \mathcal{B}_Y$ и $\mathcal{B}_Y$ — σ -алгебра борелевских множеств из Y . Известно [6], что измеримость ($\Sigma \otimes \mathcal{B}_Y$ -измеримость) влечет слабую измеримость (слабую $\Sigma \otimes \mathcal{B}_Y$ -измеримость). Для отображений $F: T \rightarrow \text{cb } Y$ ($F: T \times Y \rightarrow \text{comp } Y$) понятия измеримости ($\Sigma \otimes \mathcal{B}_Y$ -измеримости) и слабой измеримости (слабой $\Sigma \otimes \mathcal{B}_Y$ -измеримости) совпадают.

Обозначим через $\mathcal{M}(Y)$ пространство измеримых функций из T в Y . Множество $U \subset \mathcal{M}(Y)$ называется *разложимым*, если для любых $u, v \in U$ и любого $E \in \Sigma$ элемент $u \cdot \chi(E) + v \cdot \chi(T \setminus E) \in U$, где $\chi(E)$ — характеристическая функция множества E .

Для пространства Y символ w - Y означает, что пространство Y наделено слабой $\sigma(Y, Y^*)$ топологией [7], где Y^* — пространство, топологически сопряженное к Y . Такое же обозначение мы используем и для подмножеств из Y . Во всех остальных случаях мы предполагаем, что пространство Y и его подмножества наделены сильной (нормированной) топологией.

Функция $\omega: T \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ называется *интегрально ограниченной на ограниченных подмножествах из $\mathbb{R}^+$* , если для любого $m > 0$ существует функция $l_m(\cdot) \in L_1(T, \mathbb{R}^+)$ такая, что $\omega(t, r) \leq l_m(t)$ почти всюду на T для любого $0 \leq r \leq m$.

Функция $\omega: T \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ называется *функцией Камке*, если

- 1) $\omega(t, r)$ является функцией Каратеодори, интегрально ограниченной на ограниченных подмножествах из $\mathbb{R}^+$;
- 2) $\omega(t, 0) = 0$ почти всюду на T ;
- 3) единственной непрерывной функцией $r: T \rightarrow \mathbb{R}^+$, удовлетворяющей интегральному неравенству

$$r(t) \leq \int_0^t \omega(s, r(s)) ds, \quad t \in T,$$

является функция $r(t)$, тождественно равная нулю.

Типичным примером функции Камке является функция $\omega(t, r) = k(t)r$, где $k(\cdot) \in L_1(T, \mathbb{R}^+)$. Другие примеры функций Камке можно найти в [8].

Под *решением включения* (1.4) мы понимаем абсолютно непрерывную функцию $x: T \rightarrow X$, $x(0) = x_0$, производная $\dot{x}(t)$ которой почти всюду удовлетворяет (1.4). Аналогично определяется решение включения (1.5). Множества решений включений (1.4), (1.5) мы будем обозначать $\mathcal{R}_F(x_0)$ и $\mathcal{R}_{\text{co } \tilde{F}}(x_0)$ соответственно.

Введем следующие предположения.

ГИПОТЕЗЫ $H(F)$. *Отображение $F: T \times X \rightarrow \text{comp } X$ является таким, что*

- 1) *отображение $x \rightarrow F(t, x)$ полунепрерывно снизу при почти всех $t \in T$;*
- 2) *отображение $(t, x) \rightarrow F(t, x)$ является $\Sigma \otimes \mathcal{B}_X$ -измеримым;*
- 3) *почти всюду*

$$\|F(t, x)\| = \sup\{\|u\|; u \in F(t, x)\} \leq a(t) + b(t)\|x\|, \quad (2.1)$$

$$x \in X, \quad a(\cdot), b(\cdot) \in L_1(T, \mathbb{R}^+).$$

ГИПОТЕЗЫ $H(g)$. Функция $g: T \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ является такой, что

- 1) функция $t \rightarrow g(t, x, u)$ измерима;
- 2) функция $(x, u) \rightarrow g(t, x, u)$ непрерывна при почти всех $t \in T$;
- 3) для любого ограниченного множества $Q \subset X$ существует функция $m_Q(\cdot) \in L_1(T, \mathbb{R}^+)$ такая, что почти всюду

$$|g(t, x, u)| \leq m_Q(t), \quad x \in Q, \quad u \in F(t, x). \quad (2.2)$$

ГИПОТЕЗА $H(F, g)$. Для любого $M > 0$ существуют функция Камке $\omega_M: T \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ и интегрально ограниченная на ограниченных подмножествах из $\mathbb{R}^+$ типа Каратеодори функция $\omega_M^*: T \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\omega_M^*(t, 0) = 0$ почти всюду, такие, что для любых $x, y \in X$, $\|x\| \leq M$, $\|y\| \leq M$, $u \in F(t, x)$ найдется $v \in F(t, y)$, при котором выполняются неравенства

$$\langle x - y, u - v \rangle \leq \omega_M(t, \|x - y\|) \cdot \|x - y\|, \quad t \in T, \quad (2.3)$$

$$|g(t, x, u) - g(t, y, v)| \leq \omega_M^*(t, \|x - y\|), \quad t \in T. \quad (2.4)$$

§ 3. Вспомогательные результаты

Пусть $\tilde{F}: T \times X \rightarrow 2^X$ — отображение, определенное по формуле (1.2). Ясно, что $F(t, x) \subset \tilde{F}(t, x)$ и

$$\tilde{F}(t, x) = \bigcap_{n \geq 1} \overline{F}_{1/n}(t, x), \quad (3.1)$$

где $F_{1/n}(t, x)$ — множество (1.1) при $\delta = \frac{1}{n}$.

ЛЕММА 3.1. Пусть выполняются гипотезы $H(F)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество $T_\varepsilon \subset T$, $\mu(T \setminus T_\varepsilon) \leq \varepsilon$, такое, что отображение $(t, x) \rightarrow \tilde{F}(t, x)$ является полунепрерывным сверху по Хаусдорфу из $T_\varepsilon \times X$ в $\text{comp } X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_0 \in X$. Воспользовавшись равенством (1.1) и неравенством (2.1), мы получаем при почти каждом $t \in T$ убывающую по включению последовательность компактных множеств $\overline{F}_{1/n}(t, x_0)$, $n \geq 1$. Тогда согласно (3.1) последовательность $\overline{F}_{1/n}(t, x_0)$, $n \geq 1$, сходится в метрике Хаусдорфа к $\tilde{F}(t, x_0)$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 \geq 1$ такое, что

$$\overline{F}_{1/n_0}(t, x_0) \subset \tilde{F}(t, x_0) + \varepsilon \cdot B. \quad (3.2)$$

Возьмем произвольное $y \in x_0 + \frac{1}{n_0} \cdot B$. Тогда найдется $\delta > 0$, при котором имеет место включение $y + \delta \cdot B \subset x_0 + \frac{1}{n_0} \cdot B$. Поэтому

$$\overline{F}_\delta(t, y) \subset \overline{F}_{1/n_0}(t, x_0). \quad (3.3)$$

Теперь из (3.2), (3.3) вытекает, что

$$\tilde{F}(t, y) \subset \tilde{F}(t, x_0) + \varepsilon \cdot B, \quad y \in x_0 + \frac{1}{n_0} \cdot B.$$

Последнее включение означает, что при почти каждом $t \in T$ отображение $x \rightarrow \tilde{F}(t, x)$ является полунепрерывным сверху по Хаусдорфу из X в $\text{comp } X$.

Пусть $C = \{y_k\}_{k \geq 1}$ – счетное плотное подмножество шара B . Положим

$$F_{1/n}^k(t, x) = F\left(t, x + \frac{1}{n} \cdot y_k\right), \quad y_k \in C. \quad (3.4)$$

Покажем, что при почти каждом $t \in T$ имеет место равенство

$$\overline{F_{1/n}(t, x)} = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} F_{1/n}^k(t, x)}, \quad x \in X, \quad n \geq 1, \quad (3.5)$$

где $\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} F_{1/n}^k(t, x)}$ означает замыкание множества $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_{1/n}^k(t, x)$.
Включение

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} F_{1/n}^k(t, x) \subset \overline{F_{1/n}(t, x)} \quad (3.6)$$

очевидно.

Пусть $v \in F_{1/n}(t, x)$. Тогда $v \in F\left(t, x + \frac{1}{n} \cdot z\right)$ при некотором $z \in B$. Поэтому существует последовательность $z_m \in C$, $m \geq 1$, сходящаяся к z . Поскольку отображение $y \rightarrow F(t, y)$ полунепрерывно снизу в точке $x + \frac{1}{n} \cdot z$ и $x + \frac{1}{n} \cdot z_m \rightarrow x + \frac{1}{n} \cdot z$, то существует последовательность $v_m \in F\left(t, x + \frac{1}{n} \cdot z_m\right)$, $m \geq 1$, сходящаяся к v . Ясно, что $v_m \in \bigcup_{k=1}^{\infty} F_{1/n}^k(t, x)$, $m \geq 1$. Поэтому

$$v \in F_{1/n}(t, x) \subset \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} F_{1/n}^k(t, x)}. \quad (3.7)$$

Теперь равенство (3.5) следует из (3.6), (3.7).

Пусть $\varepsilon > 0$. Воспользовавшись гипотезами $H(F)$ 1), 2), теоремой 2.4 [9] и замечанием 2.1 [9], мы получаем, что для $\frac{\varepsilon}{2}$ существует замкнутое множество $\mathcal{T} \subset T$, $\mu(T \setminus \mathcal{T}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, такое, что отображение $(t, x) \rightarrow F(t, x)$ полунепрерывно снизу на $\mathcal{T} \times X$. Тогда из (3.4) следует, что любое из отображений $(t, x) \rightarrow F_{1/n}^k(t, x)$, $k \geq 1$, $n \geq 1$, полунепрерывно снизу на $\mathcal{T} \times X$. Поскольку объединение любого семейства полунепрерывных снизу по Вьеторису отображений является полунепрерывным снизу по Вьеторису, то из (3.5) следует, что отображение $(t, x) \rightarrow \overline{F_{1/n}(t, x)}$, $n \geq 1$, полунепрерывно снизу по Вьеторису на $\mathcal{T} \times X$ и, следовательно, слабо $\Sigma \otimes \mathcal{B}_X$ -измеримо на $\mathcal{T} \times X$. Поскольку значениями отображения $\overline{F_{1/n}(t, x)}$ являются компактные множества, то согласно теореме 4.1 [6] отображение

$$\tilde{F}(t, x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F_{1/n}(t, x)}$$

является слабо $\Sigma \otimes \mathcal{B}_X$ -измеримым на $\mathcal{T} \times X$. Воспользовавшись теоремой 2.2 [9] и полунепрерывностью сверху по Хаусдорфу отображения $x \mapsto \tilde{F}(t, x)$, мы получаем, что для $\frac{\varepsilon}{2}$ существует замкнутое множество $T_\varepsilon \subset \mathcal{T}$, $\mu(\mathcal{T} \setminus T_\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, такое,

что отображение $(t, x) \mapsto \tilde{F}(t, x)$ является полунепрерывным сверху по Хаусдорфу из $T_\varepsilon \times X$ в $\text{сomp } X$. Так как $\mu(T \setminus T_\varepsilon) \leq \varepsilon$, то лемма доказана.

Из леммы 3.1 следует, что отображение $x \mapsto \tilde{F}(t, x)$ является полунепрерывной сверху регуляризацией отображения $x \mapsto F(t, x)$.

Рассмотрим пространство $Y = X \times \mathbb{R}$, наделенное нормой

$$\|(x, \lambda)\|_Y = \max\{\|x\|, |\lambda|\}.$$

Пусть

$$G(t, x) = \{(u, g(t, x, u)); u \in \tilde{F}(t, x)\}. \quad (3.8)$$

ЛЕММА 3.2. Пусть выполняются гипотезы $H(F)$, $H(g)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество $T_\varepsilon \subset T$, $\mu(T \setminus T_\varepsilon) \leq \varepsilon$, такое, что отображение $(t, x) \rightarrow G(t, x)$ является полунепрерывным сверху по Хаусдорфу из $T_\varepsilon \times X$ в $\text{сomp } Y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда из леммы 3.1 и гипотез $H(g)$ следует, что существует замкнутое множество $T_\varepsilon \subset T$, $\mu(T \setminus T_\varepsilon) \leq \varepsilon$, такое, что отображение $(t, x) \rightarrow \tilde{F}(t, x)$ является полунепрерывным сверху по Хаусдорфу из $T_\varepsilon \times X$ в $\text{сomp } X$, а отображение $(t, x, u) \rightarrow g(t, x, u)$ является непрерывным на $T_\varepsilon \times X \times X$. Поэтому $G(t, x)$ является отображением из $T_\varepsilon \times X$ в $\text{сomp } Y$.

Покажем, что отображение $G: T_\varepsilon \times X \rightarrow \text{сomp } Y$ является полунепрерывным сверху по Хаусдорфу. Для этого достаточно доказать [8], что для любого компактного множества $Q \subset X$ отображение $G: T_\varepsilon \times Q \rightarrow \text{сomp } Y$ полунепрерывно сверху по Хаусдорфу. Поскольку отображение $\tilde{F}: T_\varepsilon \times Q \rightarrow \text{сomp } X$ полунепрерывно сверху по Хаусдорфу, то график

$$\text{gr } \tilde{F}|_{T_\varepsilon \times Q} = \{(t, x, u); (t, x) \in T_\varepsilon \times Q, u \in \tilde{F}(t, x)\}$$

сужения отображения $\tilde{F}$ на $T_\varepsilon \times Q$ является компактом в $T \times X \times X$. Тогда из непрерывности функции $g(t, x, u)$ на множестве $\text{gr } \tilde{F}|_{T_\varepsilon \times Q}$ следует, что существует компактное множество $U \subset Y$ такое, что

$$G(t, x) \subset U, \quad t \in T_\varepsilon, \quad x \in Q. \quad (3.9)$$

Согласно (3.9) полунепрерывность сверху по Хаусдорфу отображения $G: T_\varepsilon \times Q \rightarrow \text{сomp } Y$ эквивалентна замкнутости графика сужения отображения $G(t, x)$ на $T_\varepsilon \times Q$. Последнее вытекает из замкнутости множества $\text{gr } \tilde{F}|_{T_\varepsilon \times Q}$ и непрерывности функции $(t, x, u) \rightarrow g(t, x, u)$ на множестве $\text{gr } \tilde{F}|_{T_\varepsilon \times Q}$. Лемма доказана.

Для функции $f: T \times X \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ обозначим через $\text{dom } f(t, x)$ эффективное множество и через $\text{epi } f(t, x)$ — надграфик функции $u \rightarrow f(t, x, u)$, т.е.

$$\begin{aligned} \text{dom } f(t, x) &= \{u \in X; f(t, x, u) < +\infty\}, \\ \text{epi } f(t, x) &= \{(u, \lambda) \in X \times \mathbb{R}; f(t, x, u) \leq \lambda\}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3.3. Пусть выполняются гипотезы $H(F)$, $H(g)$. Тогда для почти каждого $t \in T$ справедливы следующие утверждения:

1) выполняются равенства

$$\text{dom } g_{\tilde{F}}^{**}(t, x) = \text{co } \tilde{F}(t, x), \quad x \in X; \quad (3.10)$$

2) для любого $u \in \text{co } \tilde{F}(t, x)$

$$g_{\tilde{F}}^{**}(t, x, u) = \min\{\lambda \in \mathbb{R}; (u, \lambda) \in \text{co } G(t, x)\}, \quad x \in X, \quad (3.11)$$

и, следовательно,

$$(u, g_{\tilde{F}}^{**}(t, x, u)) \in \text{co } G(t, x), \quad u \in \text{co } \tilde{F}(t, x), \quad x \in X; \quad (3.12)$$

3) для любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество $T_\varepsilon \subset T$, $\mu(T \setminus T_\varepsilon) \leq \varepsilon$, такое, что функция $(t, x, u) \rightarrow g_{\tilde{F}}^{**}(t, x, u)$ полунепрерывна снизу на $T_\varepsilon \times X \times X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что поскольку в конечномерном пространстве выпуклая оболочка компактного множества является выпуклым компактом, то $\text{co } G(t, x)$ является отображением из $T \times X$ в $\text{comp } Y$. Воспользовавшись леммой 3.2, для $\varepsilon > 0$ выберем замкнутое множество $T_\varepsilon \subset T$, $\mu(T \setminus T_\varepsilon) \leq \varepsilon$, так, чтобы отображение $G(t, x)$ было полунепрерывным сверху по Хаусдорфу на $T_\varepsilon \times X$, а функция $g(t, x, u)$ непрерывна на $T_\varepsilon \times X \times X$. Пусть $t \in T_\varepsilon$, $x \in X$. Поскольку множество $\tilde{F}(t, x)$ компактно, то при некотором $m \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство

$$m \leq g_{\tilde{F}}(t, x, u), \quad u \in X.$$

Из этого неравенства и [3] следует, что

$$m \leq g_{\tilde{F}}^{**}(t, x, u) \leq g_{\tilde{F}}(t, x, u), \quad u \in X, \quad (3.13)$$

функция $u \rightarrow g_{\tilde{F}}^{**}(t, x, u)$ является выпуклой, полунепрерывной снизу и

$$\text{epi } g_{\tilde{F}}^{**}(t, x) = \overline{\text{co}} \text{epi } g_{\tilde{F}}(t, x). \quad (3.14)$$

Пусть $u \in \text{dom } g_{\tilde{F}}^{**}(t, x)$. Тогда существует $\lambda \in \mathbb{R}$ такое, что $(u, \lambda) \in \text{epi } g_{\tilde{F}}^{**}(t, x)$. Из (3.14) следует, что найдется последовательность выпуклых комбинаций

$$\sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i^n \cdot (u_i^n, \lambda_i^n), \quad n \geq 1, \quad \alpha_i^n > 0,$$

точек $(u_i^n, \lambda_i^n) \in \text{epi } g_{\tilde{F}}(t, x)$, сходящаяся к (u, λ) . Поскольку $u_i^n \in \tilde{F}(t, x)$, $n \geq 1$, $i = 1, \dots, p_n$, то $\sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i^n \cdot u_i^n \in \text{co } \tilde{F}(t, x)$, $n \geq 1$. Поскольку множество $\text{co } \tilde{F}(t, x)$ компактно, то $u \in \text{co } \tilde{F}(t, x)$. Пусть $u \in \text{co } \tilde{F}(t, x)$. Тогда существует выпуклая комбинация $\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot u_i$ точек $u_i \in \tilde{F}(t, x)$, $i = 1, \dots, n$, такая, что $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot u_i$. Поэтому $(u_i, g(t, x, u_i)) \in \text{epi } g_{\tilde{F}}(t, x)$, $i = 1, \dots, n$, и, следовательно, $(u, \lambda) \in \text{epi } g_{\tilde{F}}^{**}(t, x)$ при $\lambda = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot g(t, x, u_i)$. Тогда $u \in \text{dom } g_{\tilde{F}}^{**}(t, x)$ и равенство (3.10) доказано для $t \in T_\varepsilon$.

Докажем равенство (3.11). Пусть $u \in \text{co } \tilde{F}(t, x)$. Тогда существует выпуклая комбинация $\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot u_i$ точек $u_i \in \tilde{F}(t, x)$, $i = 1, \dots, n$, для которой имеет место равенство $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot u_i$. Поэтому $(u, \lambda) \in \text{co } G(t, x)$ при $\lambda = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot g(t, x, u_i)$. Следовательно, для любого $u \in \text{co } \tilde{F}(t, x)$ существует $\lambda \in \mathbb{R}$ такое, что $(u, \lambda) \in \text{co } G(t, x)$. Поскольку множество $\text{co } G(t, x)$ является выпуклым компактом в Y , то

согласно (3.10) для любого $u \in \text{dom } g_{\tilde{F}}^{**}(t, x)$ существует $\mu \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее равенству

$$\mu = \min\{\lambda \in \mathbb{R}; (u, \lambda) \in \text{co } G(t, x)\}.$$

Согласно (3.8) $G(t, x) \subset \text{epi } g_{\tilde{F}}(t, x)$. Поэтому в соответствии с (3.14) мы имеем $\text{co } G(t, x) \subset \text{epi } g_{\tilde{F}}^{**}(t, x)$. Из этого включения следует, что

$$g_{\tilde{F}}^{**}(t, x, u) \leq \mu, \quad u \in \text{dom } g_{\tilde{F}}^{**}(t, x). \quad (3.15)$$

Так как $(u, g_{\tilde{F}}^{**}(t, x, u)) \in \text{epi } g_{\tilde{F}}^{**}(t, x)$, то из (3.14) вытекает, что существует последовательность выпуклых комбинаций $\sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i \cdot (u_i^n, \lambda_i^n)$, $n \geq 1$, точек $(u_i^n, \lambda_i^n) \in \text{epi } g_{\tilde{F}}(t, x)$, сходящаяся в Y к $(u, g_{\tilde{F}}^{**}(t, x, u))$. Поскольку $u_i^n \in \tilde{F}(t, x)$, то $g(t, x, u_i^n) \leq \lambda_i^n$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i^n \cdot g(t, x, u_i^n) \leq \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i^n \cdot \lambda_i^n. \quad (3.16)$$

В соответствии с (3.13) $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i^n \cdot g(t, x, u_i^n) > -\infty$. Тогда из (3.16) вытекает, что

$$\gamma \leq g_{\tilde{F}}^{**}(t, x, u). \quad (3.17)$$

Так как $\sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i^n \cdot (u_i^n, g(t, x, u_i^n)) \in \text{co } G(t, x)$, $n \geq 1$, то $(u, \gamma) \in \text{co } G(t, x)$. Следовательно,

$$\mu \leq \gamma. \quad (3.18)$$

Теперь для $t \in T_\varepsilon$ равенство (3.11) вытекает из (3.15), (3.17), (3.18), а равенство (3.12) является следствием равенства (3.11). Поскольку равенства (3.10)–(3.12) доказаны для любого $t \in T_\varepsilon$ и $\varepsilon > 0$ произвольно, то эти равенства имеют место для почти всех $t \in T$.

Докажем теперь, что функция $(t, x, u) \mapsto g_{\tilde{F}}^{**}(t, x, u)$ полунепрерывна снизу на $T_\varepsilon \times X \times X$. Для этого достаточно показать, что для любых $(t, x, u) \in T_\varepsilon \times X \times X$ и любой последовательности $(t_n, x_n, u_n) \in T_\varepsilon \times X \times X$, $n \geq 1$, сходящейся к (t, x, u) , справедливо неравенство

$$g_{\tilde{F}}^{**}(t, x, u) \leq \lambda, \quad \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{\tilde{F}}^{**}(t_n, x_n, u_n). \quad (3.19)$$

Если $\lambda = +\infty$, то неравенство (3.19) выполняется автоматически и функция $g_{\tilde{F}}^{**}$ полунепрерывна снизу в точке (t, x, u) по определению.

Пусть $\lambda < +\infty$. Переходя к подпоследовательности, если необходимо, не нарушая общности, мы можем считать, что $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{\tilde{F}}^{**}(t_n, x_n, u_n)$ и $g_{\tilde{F}}^{**}(t_n, x_n, u_n) < +\infty$, $n \geq 1$. Тогда согласно (3.10), (3.12) $(u_n, g_{\tilde{F}}^{**}(t_n, x_n, u_n)) \in \text{co } G(t_n, x_n)$, $n \geq 1$. Так как отображение $G: T_\varepsilon \times X \rightarrow \text{comp } X$ полунепрерывно сверху по Хаусдорфу, то отображение $\text{co } G(t, x)$ также будет полунепрерывным сверху по Хаусдорфу на $T_\varepsilon \times X$. Поэтому $(u, \lambda) \in \text{co } G(t, x)$. Из этого включения и (3.11) следует, что имеет место неравенство (3.19). Тем самым функция $(t, x, u) \rightarrow g_{\tilde{F}}^{**}(t, x, u)$ полунепрерывна снизу на $T_\varepsilon \times X \times X$. Лемма доказана.

§ 4. Теорема Н. Н. Боголюбова

В этом параграфе мы переходим к изложению основных результатов. Пусть $\mathcal{A}_{\text{co } \tilde{F}}(x_0) = \{(x(\cdot), \dot{x}(\cdot)); x(\cdot) \in \mathcal{R}_{\text{co } \tilde{F}}(x_0)\}$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть выполняются гипотезы $H(F)$. Тогда множество $\mathcal{R}_F(x_0)$ непусто, $\mathcal{R}_F(x_0) \subset \mathcal{R}_{\text{co } \tilde{F}}(x_0)$ и множество $\mathcal{A}_{\text{co } \tilde{F}}(x_0)$ является компактным подмножеством пространства $C(T, X) \times \omega\text{-}L_1(T, X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непустота множества $\mathcal{R}_F(x_0)$ в рамках предположений $H(F)$ хорошо известна (см., например, [8]). Так как $F(t, x) \subset \tilde{F}(t, x)$, то $\mathcal{R}_F(x_0) \subset \mathcal{R}_{\text{co } \tilde{F}}(x_0)$. Из (2.1) следует, что

$$\|\text{co } \tilde{F}(t, x)\| \leq a(t) + b(t)\|x\| \quad \text{п.в.}, \quad x \in X. \quad (4.1)$$

Теперь компактность множества $\mathcal{A}_{\text{co } \tilde{F}}(x_0)$ в пространстве $C(T, X) \times \omega\text{-}L_1(T, X)$ доказывается с помощью хорошо известных рассуждений с использованием неравенства (4.1), полунепрерывности сверху по Хаусдорфу отображения $x \rightarrow \text{co } \tilde{F}(t, x)$ и теоремы Мазура (см., например, [8]). Теорема доказана.

Функцию $f: T \rightarrow X$ назовем *этажной*, если существует разбиение отрезка T на конечное число непересекающихся измеримых подмножеств $\mathcal{T}_i \subset T$, $i = 1, \dots, n$, таких, что на каждом из этих множеств функция $f(x)$ постоянна.

ЛЕММА 4.1. Пусть выполняются гипотезы $H(F)$, $H(g)$ и $x_*(\cdot) \in \mathcal{R}_{\text{co } \tilde{F}}(x_0)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют абсолютно непрерывная функция $y: T \rightarrow X$, $y(0) = x_0$, и этажная функция $v: T \rightarrow X$ такие, что

$$\|x_*(\cdot) - y(\cdot)\|_{C(T, X)} \leq \varepsilon, \quad (4.2)$$

$$\dot{y}(t) \in F(t, x_*(t) + v(t)) \quad \text{п.в.}, \quad (4.3)$$

$$\|v(t)\| \leq \varepsilon, \quad t \in T, \quad (4.4)$$

$$\sup_{t \in T} \left| \int_0^t (g_{\tilde{F}}^{**}(s, x_*(s), \dot{x}_*(s)) - g(s, x_*(s) + v(s), \dot{y}(s))) ds \right| \leq \varepsilon. \quad (4.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_*(\cdot) \in \mathcal{R}_{\text{co } \tilde{F}}(x_0)$. Воспользовавшись гипотезой $H(g)$ 3), мы получим, что существует функция $m(\cdot) \in L_1(T, \mathbb{R}^+)$ такая, что

$$|g(t, x_*(t) + v, u)| \leq m(t) \quad \text{п.в.} \quad (4.6)$$

для всех $v \in B$, $u \in F(t, x_*(t) + v)$. Тогда согласно (3.8), (4.1), (4.6) мы имеем

$$\|\text{co } G(t, x_*(t))\|_Y = \sup\{\|u\|_Y; u \in \text{co } G(t, x_*(t))\} \leq l(t) \quad \text{п.в.} \quad (4.7)$$

для некоторой функции $l(\cdot) \in L_1(T, \mathbb{R}^+)$. Из леммы 3.2 и утверждения 3) леммы 3.3 следует, что отображения $t \rightarrow \text{co } G(t, x_*(t))$, $t \rightarrow g_{\tilde{F}}^{**}(t, x_*(t), \dot{x}_*(t))$ измеримы. Более того, согласно (3.12)

$$(\dot{x}_*(t), g_{\tilde{F}}^{**}(t, x_*(t), \dot{x}_*(t))) \in \text{co } G(t, x_*(t)). \quad (4.8)$$

Воспользовавшись (4.8) и теоремой 2.2 [10], мы получаем, что существует измеримая функция $w: T \rightarrow X$ такая, что

$$(w(t), g(t, x_*(t), w(t))) \in G(t, x_*(t)), \quad t \in T, \quad (4.9)$$

$$\sup_{t \in T} \left\| \int_0^t (\dot{x}_*(s) - w(s)) ds \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad (4.10)$$

$$\sup_{t \in T} \left| \int_0^t (g_{\tilde{F}}^{**}(s, x_*(s), \dot{x}_*(s)) - g(s, x_*(s), w(s))) ds \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.11)$$

Согласно (3.8), (4.9)

$$w(t) \in \tilde{F}(t, x_*(t)), \quad t \in T.$$

Пусть $\frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Рассмотрим многозначное отображение

$$t \mapsto F\left(t, x_*(t) + \frac{1}{n} \cdot y_k\right),$$

где y_k — элемент из счетного плотного подмножества C единичного шара B , которое согласно гипотезе $H(F)$ 2) является измеримым. Поэтому существует [6] последовательность измеримых селекторов $f_k^m(t)$, $m \geq 1$, этого отображения такая, что

$$F\left(t, x_*(t) + \frac{1}{n} \cdot y_k\right) = \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} f_k^m(t)}, \quad t \in T, \quad k \geq 1. \quad (4.12)$$

Из (3.4), (3.5), (4.12) следует, что

$$\overline{F}_{1/n}(t, x_*(t)) = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} f_k^m(t)}, \quad t \in T. \quad (4.13)$$

Согласно (2.1)

$$\|\overline{F}_{1/n}(t, x_*(t))\| \leq a(t) + b(t)(\|x_*(t)\| + \varepsilon). \quad (4.14)$$

Поскольку

$$w(t) \in \tilde{F}(t, x_*(t)) \subset \overline{F}_{1/n}(x_*(t)) \quad \text{п.в.},$$

то из (4.13), (4.14) и леммы 1.3 [11] следует, что для $n \geq 1$, $\frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$, существует конечное измеримое разбиение $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_{l(n)}$ отрезка T такое, что

$$\int_T \left\| w(t) - \sum_{i=1}^{l(n)} \chi(\mathcal{T}_i) \cdot f_{k_i}^{m_i}(t) \right\| dt \leq \frac{1}{n}, \quad (4.15)$$

где $\chi(\mathcal{T}_i)$ — характеристическая функция множества $\mathcal{T}_i$. Положим

$$\varphi_n(t) = \sum_{i=1}^{l(n)} \chi(\mathcal{T}_i) \cdot f_{k_i}^{m_i}(t), \quad v_n(t) = \sum_{i=1}^{l(n)} \chi(\mathcal{T}_i) \frac{1}{n} \cdot y_{k_i}.$$

Тогда $v_n(t)$ является этажной функцией и

$$\|v_n(t)\| \leq \frac{1}{n}, \quad t \in T. \quad (4.16)$$

Воспользовавшись (4.12), (4.15), мы получим

$$\varphi_n(t) \in F(t, x_*(t) + v_n(t)), \quad t \in T, \quad n \geq 1, \quad (4.17)$$

$$\int_T \|w(t) - \varphi_n(t)\| dt \leq \frac{1}{n}. \quad (4.18)$$

Согласно (4.18), переходя к подпоследовательности, если необходимо, не нарушая общности, мы можем считать, что

$$\varphi_n(t) \rightarrow w(t) \quad \text{п.в. в } X. \quad (4.19)$$

Из (4.6), (4.17) следует, что

$$|g(t, x_*(t) + v_n(t), \varphi_n(t))| \leq m(t), \quad n \geq 1. \quad (4.20)$$

Воспользовавшись гипотезой $H(g)$ 2), (4.16), (4.19), (4.20) и теоремой Лебега об ограниченной сходимости, мы получаем, что существует достаточно большое n_0 , при котором имеют место соотношения

$$\varphi_{n_0}(t) \in F(t, x_*(t) + v_{n_0}(t)) \quad \text{п.в.}, \quad (4.21)$$

$$\int_T \|w(t) - \varphi_{n_0}(t)\| dt \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad (4.22)$$

$$\int_T \|g(s, x_*(s), w(s)) - g(s, x_*(s) + v_{n_0}(s), \varphi_{n_0}(s))\| ds \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.23)$$

Положим $y(t) = x_0 + \int_0^t \varphi_{n_0}(s) ds$, $v(t) = v_{n_0}(t)$, $t \in T$. Теперь неравенства (4.3)–(4.6) следуют из (4.10), (4.11), (4.16), (4.21)–(4.23). Лемма доказана.

Пусть $x(\cdot) \in \mathcal{R}_{\text{co } \tilde{F}}(x_0)$. Тогда из (4.1) следует, что

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + \int_0^t (a(s) + b(s)\|x(s)\|) ds, \quad t \in T.$$

Из этого неравенства и неравенства Беллмана–Грунцулла вытекает, что

$$\|x(t)\| \leq M, \quad t \in T, \quad x(\cdot) \in \mathcal{R}_{\text{co } \tilde{F}}(x_0), \quad (4.24)$$

для некоторого $M > 0$. Поскольку $\mathcal{R}_F(x_0) \subset \mathcal{R}_{\text{co } \tilde{F}}(x_0)$, то неравенство (4.24) справедливо и для любого $x(\cdot) \in \mathcal{R}_F(x_0)$.

Пусть

$$Q = \{x \in X; \|x\| \leq M + 1\}. \quad (4.25)$$

Обозначим через $p_r: X \rightarrow Q$ оператор проектирования на множество Q . Тогда

$$\|p_r x - p_r y\| \leq \|x - y\|. \quad (4.26)$$

Рассмотрим отображение

$$F^*(t, x) = F(t, p_r x). \quad (4.27)$$

Тогда из (2.1), (4.26) имеем

$$\|F^*(t, x)\| \leq a(t) + b(t)\|x\|, \quad x \in X, \quad (4.28)$$

$$\|F^*(t, x)\| \leq a(t) + b(t)(M + 1), \quad x \in X. \quad (4.29)$$

Если мы рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x}(t) \in F^*(t, x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad (4.30)$$

то из (4.28) следует, что для любого $x(\cdot) \in \mathcal{R}_{F^*}(x_0)$ будет справедлива оценка (4.24). Поэтому согласно (4.27) $\mathcal{R}_F(x_0) = \mathcal{R}_{F^*}(x_0)$.

Рассмотрим многозначное отображение

$$\Gamma(t) = a(t) + b(t)(M + 1) \cdot B, \quad (4.31)$$

которое является измеримым с выпуклыми компактными значениями. Пусть

$$S(\Gamma) = \{f(\cdot) \in \mathcal{M}(X); f(t) \in \Gamma(t) \text{ п.в.}\}.$$

Согласно теореме 4.4 [12] $S(\Gamma)$ является выпуклым компактным подмножеством пространства ω - $L_1(T, X)$. Рассмотрим оператор $\mathcal{L}: S(\Gamma) \rightarrow C(T, X)$

$$\mathcal{L}(f)(t) = x_0 + \int_0^t f(s) ds, \quad t \in T, \quad f(\cdot) \in S(\Gamma). \quad (4.32)$$

Легко показать, что оператор $\mathcal{L}$ является непрерывным из ω - $S(\Gamma)$ в $C(T, X)$. Пусть

$$\mathcal{R}_\Gamma(x_0) = \{\mathcal{L}(f); f(\cdot) \in S(\Gamma)\}. \quad (4.33)$$

Тогда $\mathcal{R}_\Gamma(x_0)$ является выпуклым компактным подмножеством пространства $C(T, X)$ и согласно (4.29), (4.31)

$$\mathcal{R}_F(x_0) = \mathcal{R}_{F^*}(x_0) \subset \mathcal{R}_{\text{co } \tilde{F}}(x_0) \subset \mathcal{R}_\Gamma(x_0). \quad (4.34)$$

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть выполняются гипотезы $H(F)$, $H(g)$, $H(F, g)$. Тогда для любого $x_*(\cdot) \in \mathcal{R}_{\tilde{F}}(x_0)$ существует последовательность $z_n(\cdot) \in \mathcal{R}_F(x_0)$ такая, что

$$z_n(\cdot) \rightarrow x_*(\cdot) \quad \text{в } C(T, H), \quad (4.35)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in T} \left| \int_0^t (g_{\tilde{F}}^{**}(s, x_*(s), \dot{x}_*(s)) - g(s, z_n(s), \dot{z}_n(s))) ds \right| = 0. \quad (4.36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись теоремой 2.4 [9], мы получим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество $T_\varepsilon \subset T$, $\mu(T \setminus T_\varepsilon) \leq \varepsilon$, такое, что отображение $(t, x) \rightarrow F(t, x)$ является полунепрерывным снизу на $T_\varepsilon \times X$. Отсюда следует, что отображение $(t, x) \rightarrow F^*(t, x) = F(t, p_r x)$ будет полунепрерывным снизу на $T_\varepsilon \times X$ и для любой непрерывной функции $x: T \rightarrow X$ отображение $t \rightarrow F^*(t, x(t))$ измеримо. На множестве $\mathcal{R}_\Gamma(x_0)$ рассмотрим отображение

$$\mathcal{F}(x) = \{f(\cdot) \in \mathcal{M}(X); f(t) \in F^*(t, x(t)) \text{ п.в.}\}. \quad (4.37)$$

Из (4.29) следует, что $\mathcal{F}(x)$ для каждого $x(\cdot) \in \mathcal{R}_\Gamma(x_0)$ является непустым замкнутым ограниченным разложимым подмножеством пространства $L_1(T, X)$. Воспользовавшись хорошо известными рассуждениями (см., например, [13]), мы получим, что отображение $\mathcal{F}: \mathcal{R}_\Gamma(x_0) \rightarrow \text{cb } L_1(T, X)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису.

Положим в утверждениях леммы 4.1 $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Пусть $x_*(\cdot) \in \mathcal{R}_{\text{co } \bar{F}}(x_0)$. Тогда согласно лемме 4.1 существуют $y_n: T \rightarrow X$ и $v_n: T \rightarrow X$, удовлетворяющие (4.3), (4.4) с $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Из (4.4), (4.24) следует, что $\|x_*(t) + v_n(t)\| \leq M + 1$, $t \in T$. Поэтому согласно гипотезе $H(F, g)$ для любого $\|z\| \leq M + 1$ найдется $u \in F(t, z)$ такое, что

$$\begin{aligned} \varphi(t, z, u) &= \langle x_*(t) + v_n(t) - z, \dot{y}_n(t) - u \rangle - \omega_{M+1}(t, \|x_*(t) + v_n(t) - z\|) \\ &\quad \times \|x_*(t) + v_n(t) - z\| \leq 0, \quad t \in T, \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \varphi_*(t, z, u) &= |g(t, x_*(t) + v_n(t), \dot{y}_n(t)) - g(t, z, u)| \\ &\quad - \omega_{M+1}^*(t, \|x_*(t) + v_n(t) - z\|) \leq 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Воспользовавшись теоремой 2.4 [9], получаем последовательность замкнутых множеств $T_k \subset T_{k+1} \subset T$, $k \geq 1$, $\mu(T \setminus \bigcup_{k=1}^\infty T_k) = 0$, такую, что отображение $F(t, z)$ полунепрерывно снизу на $T_k \times Q$, а функции $\varphi(t, z, u)$, $\varphi_*(t, z, u)$ непрерывны на $T_k \times Q \times X$, $k \geq 1$, соответственно.

Рассмотрим многозначное отображение $V_n: T \times Q \rightarrow X$

$$V_n(t, z) = \left\{ u \in X; \varphi(t, z, u) < \frac{1}{n}, \varphi_*(t, z, u) < \frac{1}{n} \right\}. \quad (4.40)$$

Тогда для каждого $k \geq 1$ график отображения $V_n(t, z)$ будет открытым подмножеством в $T_k \times Q \times X$.

Положим

$$U_n(t, z) = F(t, z) \cap V_n(t, z), \quad t \in T, \quad z \in Q. \quad (4.41)$$

Из (4.38), (4.39) следует, что для каждого $t \in T$, $z \in Q$ множество $U_n(t, z)$ непусто. Поскольку отображение $F(t, z)$ полунепрерывно снизу на $T_k \times Q$ и график отображения $V_n(t, z)$ является открытым подмножеством в $T_k \times Q \times X$, то отображение $(t, z) \rightarrow U_n(t, z)$ будет полунепрерывным снизу по Вьеторису на $T_k \times Q$, $k \geq 1$. Тогда отображение $\overline{U}_n(t, z)$, где черта сверху означает замыкание в X , тоже будет полунепрерывным снизу на $T_k \times Q$, $k \geq 1$, с компактными значениями. Ясно, что

$$\overline{U}_n(t, z) \subset F(t, z), \quad t \in T, \quad z \in Q, \quad (4.42)$$

и согласно (4.39), (4.40)

$$\varphi(t, z, u) \leq \frac{1}{n}, \quad \varphi_*(t, z, u) \leq \frac{1}{n}, \quad t \in T, \quad z \in Q, \quad u \in \overline{U}_n(t, z). \quad (4.43)$$

Пусть $\overline{\mathcal{R}}_F(x_0)$ – замыкание в $C(T, H)$ множества $\mathcal{R}_F(x_0)$. Тогда согласно (4.34) $\overline{\mathcal{R}}_F(x_0)$ является компактом в $C(T, X)$ и для любого $x(\cdot) \in \overline{\mathcal{R}}_F(x_0)$ будет справедливо неравенство $\|x(t)\| \leq M$, $t \in T$. Из свойств отображения $\overline{U}_n(t, z)$, установленных выше, следует, что для любой непрерывной функции $z: T \rightarrow Q$ отображение $t \rightarrow \overline{U}_n(t, z(t))$ измеримо и при почти каждом $t \in T$ отображение $z \rightarrow \overline{U}_n(t, z)$

полу непрерывно снизу по Вьеторису. Поэтому на $\overline{\mathcal{R}}_F(x_0)$ мы можем определить отображение $\mathcal{F}_n(x)$

$$\mathcal{F}_n(x) = \{f(\cdot) \in \mathcal{M}(X); f(t) \in \overline{U}_n(t, x(t)) \text{ п.в.}\}. \quad (4.44)$$

Используя (4.34), (4.37), (4.42) и достаточно стандартные рассуждения (см., например, [13]), можно показать, что отображение $\mathcal{F}_n(x)$ является полу непрерывным снизу по Вьеторису из $\overline{\mathcal{R}}_F(x_0)$ в $L_1(T, X)$ с замкнутыми ограниченными разложимыми значениями и

$$\mathcal{F}_n(x) \subset \mathcal{F}(x), \quad x(\cdot) \in \overline{\mathcal{R}}_F(x_0). \quad (4.45)$$

Согласно теореме 3.1 [13] существует непрерывное отображение $v_n: \overline{\mathcal{R}}_F(x_0) \rightarrow L_1(T, X)$ такое, что

$$v_n(x) \in \mathcal{F}_n(x), \quad x(\cdot) \in \overline{\mathcal{R}}_F(x_0). \quad (4.46)$$

Поскольку отображение $\mathcal{F}: \mathcal{R}_\Gamma(x_0) \rightarrow \text{cb } L_1(T, X)$ является полу непрерывным снизу по Вьеторису с разложимыми значениями, то из замкнутости множества $\overline{\mathcal{R}}_F(x_0)$ и (4.45), (4.46) следует, что существует непрерывное отображение $v_n^c: \mathcal{R}_\Gamma(x_0) \rightarrow L_1(T, X)$, удовлетворяющее условиям

$$v_n^c(x) \in \mathcal{F}(x), \quad x(\cdot) \in \mathcal{R}_\Gamma(x_0), \quad (4.47)$$

$$v_n^c(x) = v_n(x), \quad x(\cdot) \in \overline{\mathcal{R}}_F(x_0). \quad (4.48)$$

Воспользовавшись (4.32), (4.33), (4.47), мы можем определить отображение $v_n^c(\mathcal{L}(f))$ из $S(\Gamma)$ в $L_1(T, X)$. Как указывалось выше, оператор $\mathcal{L}$ является непрерывным из ω - $S(\Gamma)$ в $C(T, X)$. Поэтому отображение $v_n^c(\mathcal{L}(f))$ является непрерывным из ω - $S(\Gamma)$ в ω - $L_1(T, X)$. Из (4.47), (4.29), (4.31), (4.37) следует, что отображение $v_n^c(\mathcal{L}(f))$ является непрерывным из ω - $S(\Gamma)$ в ω - $S(\Gamma)$. Так как ω - $S(\Gamma)$ является выпуклым метризуемым компактным подмножеством пространства ω - $L_1(T, X)$, то $v_n^c(\mathcal{L}(f))$ имеет неподвижную точку $f_n(\cdot) \in S(\Gamma)$, т.е.

$$f_n = v_n^c(\mathcal{L}(f_n)). \quad (4.49)$$

Положим $z_n = \mathcal{L}(f_n)$. Воспользовавшись (4.32), (4.47), (4.37), (4.49), мы получаем, что $z_n(\cdot) \in \mathcal{R}_{F^*}(x_0)$. Тогда согласно (4.34) $z_n(\cdot) \in \mathcal{R}_F(x_0)$. Теперь из (4.48), (4.46), (4.44) вытекает, что $\dot{z}_n(t) \in \overline{U}_n(t, z_n(t))$ почти всюду. Поэтому в соответствии с (4.40), (4.41)

$$\varphi(t, z_n(t), \dot{z}_n(t)) \leq \frac{1}{n}, \quad \varphi_*(t, z_n(t), \dot{z}_n(t)) \leq \frac{1}{n} \quad \text{п.в.}$$

Из этих неравенств и (4.38), (4.39) следует, что

$$\begin{aligned} & \langle x_*(t) - z_n(t), \dot{x}_*(t) - \dot{z}_n(t) \rangle \\ & \leq \langle x_*(t) - z_n(t), \dot{x}_*(t) - \dot{y}_n(t) \rangle - \langle v_n(t), \dot{y}_n(t) - \dot{z}_n(t) \rangle \\ & \quad + \omega_{M+1}(t, \|x_*(t) + v_n(t) - z_n(t)\|) \cdot \|x_*(t) + v_n(t) - z_n(t)\| + \frac{1}{n}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} & |g(t, x_*(t) + v_n(t), \dot{y}_n(t)) - g(t, z_n(t), \dot{z}_n(t))| \\ & \leq \omega_{M+1}^*(t, \|x_*(t) + v_n(t) - z_n(t)\|) + \frac{1}{n}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Из (4.3), (4.4), (2.1) и теоремы 4.4 [12] следует, что множество $\{\dot{y}_n(\cdot)\}_{n \geq 1}$ является относительно компактным подмножеством пространства $\omega\text{-}L_1(T, X)$. Воспользовавшись (4.2) и используя достаточно стандартные рассуждения, мы получаем, что $\dot{y}_n(\cdot)$, $n \geq 1$, сходится к $\dot{x}_*(\cdot)$ в $\omega\text{-}L_1(T, X)$. Так как множество $\{x_*(\cdot) - z_n(\cdot)\}_{n \geq 1}$ относительно компактно в $C(T, X)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \langle x_*(s) - z_n(s), \dot{x}_*(s) - \dot{y}_n(s) \rangle ds = 0, \quad t \in T. \quad (4.52)$$

Из (4.3), (4.4), (2.1) и относительной компактности множества $\mathcal{R}_F(x_0)$ следует, что

$$\|\dot{y}_n(t) - \dot{z}_n(t)\| \leq l(t) \text{ п.в., } n \geq 1, \quad (4.53)$$

для некоторой функции $l(\cdot) \in L_1(T, \mathbb{R}^+)$. Теперь из (4.4), (4.53) и теоремы Лебега об ограниченной сходимости следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_T |\langle v_n(t), \dot{y}_n(t) - \dot{z}_n(t) \rangle| dt = 0. \quad (4.54)$$

Переходя к подпоследовательности, если необходимо, не нарушая общности, мы можем считать, что $z_n(\cdot)$ сходится к $z(\cdot)$ в $C(T, X)$. Интегрируя неравенство (4.50) и учитывая интегральную ограниченность функции $\omega_{M+1}(t, r)$ на ограниченных подмножествах из $\mathbb{R}^+$, переходим к пределу. Тогда с учетом (4.52), (4.54) мы получаем

$$\frac{1}{2} \|x_*(t) - z(t)\|^2 \leq \int_0^t \omega_{M+1}(s, \|x_*(s) - z(s)\|) \cdot \|x_*(s) - z(s)\| ds.$$

Поскольку функция $t \rightarrow \omega_{M+1}(t, \|x_*(t) - z(t)\|)$ интегрируема, то из этого неравенства и леммы А.5 [14] вытекает

$$\|x_*(t) - z(t)\| \leq \int_0^t \omega_{M+1}(s, \|x_*(s) - z(s)\|) ds, \quad t \in T.$$

Из последнего неравенства непосредственно следует, что $x_*(t) = z(t)$, $t \in T$. Тем самым (4.35) доказано. Поскольку функция $\omega_{M+1}^*(t, r)$ интегрально ограничена на ограниченных подмножествах из $\mathbb{R}^+$ и $\omega(t, 0) = 0$, то из (4.51) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_T |g(t, x_*(t) + v_n(t), \dot{y}_n(t)) - g(t, z_n(t), \dot{z}_n(t))| dt = 0. \quad (4.55)$$

Воспользовавшись (4.5), (4.55), мы приходим к равенству (4.36). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть выполняются гипотезы $H(F)$ и неравенство (2.3). Тогда множество $\mathcal{R}_{\text{co } \bar{F}}(x_0)$ является компактом в $C(T, X)$ и

$$\mathcal{R}_{\text{co } \bar{F}}(x_0) = \overline{\mathcal{R}_F(x_0)},$$

где черта означает замыкание в $C(T, X)$.

Если положить $g(t, x, u) \equiv 0$, то следствие вытекает из теорем 4.1, 4.2.

§ 5. Приложение

В этом параграфе мы используем теорему 4.2 для установления взаимосвязей между решениями проблем (RP) и (P).

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть выполняются гипотезы $H(F)$, $H(g)$, $H(F, g)$. Тогда проблема (RP) имеет решение и для любого решения $x_*(\cdot)$ проблемы (RP) существует минимизирующая последовательность $z_n(\cdot)$, $n \geq 1$, проблемы (P) такая, что справедливы соотношения (4.35), (4.36).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно гипотезе $H(g)$ 3) для множества Q (см. (4.25)) существует функция $m_Q(\cdot) \in L_1(T, \mathbb{R}^+)$ такая, что

$$-m_Q(t) \leq g(t, y, v), \quad y \in Q, \quad v \in F(t, y). \quad (5.1)$$

Пусть $\|x\| \leq M$ и $u \in \tilde{F}(t, x)$. Тогда из определения множества $\tilde{F}(t, x)$ следует, что существует последовательность (x_n, v_n) , $x_n \in Q$, $v_n \in F(t, x_n)$, сходящаяся к (x, u) . Поэтому из непрерывности функции $(y, v) \rightarrow g(t, y, v)$ и (5.1) следует, что

$$-m_Q(t) \leq g(t, x, u), \quad \|x\| \leq M, \quad u \in \tilde{F}(t, x).$$

Из этого неравенства непосредственно вытекает, что

$$-m_Q(t) \leq g_{\tilde{F}}(t, x, u), \quad \|x\| \leq M, \quad u \in X. \quad (5.2)$$

Воспользовавшись неравенством (5.2) и свойствами биполяр [3], мы получаем

$$-m_Q(t) \leq g_{\tilde{F}}^{**}(t, x, u), \quad \|x\| \leq M, \quad u \in X. \quad (5.3)$$

Рассмотрим функцию $q: T \times X \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, определенную следующим образом:

$$q(t, x, u) = \begin{cases} g_{\tilde{F}}^{**}(t, x, u), & \|x\| \leq M; \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (5.4)$$

Так как множество $B_M = \{x \in X : \|x\| \leq M\}$ является замкнутым, то функция $q(t, x, u)$ обладает свойствами функции $g_{\tilde{F}}^{**}(t, x, u)$, установленными в утверждении 3) леммы 3.3. Согласно этому утверждению существует возрастающая по включению последовательность замкнутых множеств

$$T_k \subset T, \quad k \geq 1, \quad \mu\left(T \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k\right) = 0,$$

такая, что функция $(t, x, u) \rightarrow q(t, x, u)$ полунепрерывна снизу на $T_k \times X \times X$, $k \geq 1$. Поскольку множество $\bigcup_{k=1}^{\infty} T_k$ является борелевским, то функция $(t, x, u) \mapsto q(t, x, u)$ является борелевской на $\bigcup_{k=1}^{\infty} T_k \times X \times X$. Изменяя значения функции $q(t, x, u)$ на борелевском множестве $(T \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k) \times X \times X$, например, полагая $q(t, x, u) = 0$, $t \in T \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k$, $x \in X$, $u \in X$, не нарушая общности, мы можем считать, что функция $q(t, x, u)$ является борелевской и, следовательно, $\Sigma \otimes \mathcal{B}_{X \times X}$ -измеримой. Кроме того, в соответствии с (5.3), (5.4) для почти каждого t функция $(x, u) \rightarrow q(t, x, u)$ полунепрерывна снизу, выпукла по переменной u и

$$-m_Q(t) \leq q(t, x, u), \quad x \in X, \quad u \in X.$$

Другими словами, функция $q(t, x, u)$ удовлетворяет всем предположениям теоремы 2.1 из [15]. Согласно этой теореме функция

$$(x(\cdot), u(\cdot)) \rightarrow \int_T q(t, x(t), u(t)) dt$$

является секвенциально полунепрерывной снизу на $C(T, X) \times w\text{-}L^1(T, X)$. Поскольку в соответствии с (4.24) для любого $x(\cdot) \in \mathcal{R}_{\text{co } \tilde{F}}(x_0)$ справедливо $\|x(t)\| \leq M$, $t \in T$, то из (5.4) следует, что для любого $x(\cdot) \in \mathcal{R}_{\text{co } \tilde{F}}(x_0)$

$$\int_T g_{\tilde{F}}^{**}(t, x(t), \dot{x}(t)) dt = \int_T q(t, x(t), \dot{x}(t)) dt. \quad (5.5)$$

Согласно теореме 4.1 множество $\mathcal{A}_{\text{co } \tilde{F}}(x_0) = \{(x(\cdot), \dot{x}(\cdot)); x(\cdot) \in \mathcal{R}_{\text{co } \tilde{F}}(x_0)\}$ является компактом в $C(T, X) \times w\text{-}L^1(T, X)$. Поэтому из (5.5) вытекает, что проблема (RP) имеет решение. Теперь утверждение теоремы следует из теоремы 4.2. Теорема доказана.

§ 6. Комментарии

В этом параграфе на примерах мы покажем существенность предположений, сделанных в теореме 4.2, и обсудим полученные результаты. Через $(a, b) \subset \mathbb{R}$ мы будем обозначать множество, состоящее из двух точек a, b , а через $[a, b]$ — отрезок с концами a, b . Следующий пример является модификацией известного примера из [16], в котором многозначное отображение $F(x)$ было непрерывным с невыпуклыми значениями.

ПРИМЕР 1. Пусть $x = \{x_1, x_2\}$, $u = \{u_1, u_2\} \in \mathbb{R}^2$ и $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим многозначное отображение $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{com } \mathbb{R}^2$ и функцию $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, которые определяются следующим образом:

если $|x_2| \neq 0$, то

$$F(x) = \left\{ \{u_1, u_2\} \in \mathbb{R}^2; \begin{array}{l} u_1 \in (-1, +1), \\ u_2 \in |x_1| + (2\sqrt{|x_2|}, 1 + 2\sqrt{|x_2|}); \end{array} \right. \quad (6.1)$$

если $x_2 = 0$, то

$$F(x) = \left\{ \{u_1, u_2\} \in \mathbb{R}^2; \begin{array}{l} u_1 \in (-1, +1), \\ u_2 = |x_1|; \end{array} \right. \quad (6.2)$$

$$g(x, u) = \|x\| + ||u_1| - 1| + |x_2| \cdot |u_2 - |x_1||. \quad (6.3)$$

Из (6.1), (6.2) следует, что $F(x)$ является полунепрерывным снизу отображением, удовлетворяющим гипотезам $H(F)$. Используя локальную липшицевость функции $y \mapsto 2|y|\sqrt{|y|}$, нетрудно показать, что для любого $M > 0$ существует константа $k_M > 0$ такая, что для любых $\|x\| \leq M$, $\|y\| \leq M$ и $u \in F(x)$ найдется элемент $v \in F(y)$, удовлетворяющий неравенству

$$|g(x, u) - g(y, v)| \leq k_M \|x - y\|. \quad (6.4)$$

Поэтому функция $g(x, u)$ удовлетворяет гипотезам $H(g)$ и неравенству (2.4). Отображения $\tilde{F}(x)$ и $\text{co } \tilde{F}(x)$ будут иметь вид:

$$\tilde{F}(x) = \left\{ \{u_1, u_2\} \in \mathbb{R}^2; \begin{array}{l} u_1 \in (-1, +1), \\ u_2 \in |x_1| + \{2\sqrt{|x_2|}, 1 + 2\sqrt{|x_2|}\}; \end{array} \right. \quad (6.5)$$

$$\text{co } \tilde{F}(x) = \left\{ \{u_1, u_2\} \in \mathbb{R}^2; \begin{array}{l} u_1 \in [-1, +1], \\ u_2 \in |x_1| + [2\sqrt{|x_2|}, 1 + 2\sqrt{|x_2|}] \end{array} \right\}. \quad (6.6)$$

Рассмотрим дифференциальные включения

$$\dot{x} \in F(x), \quad x(0) = (0, 0), \quad (6.7)$$

$$\dot{x} \in \text{co } \tilde{F}(x), \quad x(0) = (0, 0). \quad (6.8)$$

Очевидно, что $\mathcal{R}_F(0) \neq \emptyset$. Пусть $x(\cdot) \in \mathcal{R}_F(0)$. Тогда в соответствии с (6.1)

$$|\dot{x}_1(t)| = 1 \quad \text{п.в.}, \quad (6.9)$$

$$|x_1(t)| + 2\sqrt{|x_2(t)|} \leq \dot{x}_2(t) \quad \text{п.в.} \quad (6.10)$$

Из (6.9) следует, что $|x_1(t)| \neq 0$ почти всюду. Поэтому в соответствии с (6.10) функция $x_2(t)$ монотонно возрастает. Возьмем произвольное s , $0 < s < 1$. Тогда найдется τ , $0 < \tau \leq s$, такое, что $x_2(\tau) = b > 0$. Рассмотрим дифференциальные уравнения

$$\dot{y}(t) = |x_1(t)| + 2\sqrt{|y(t)|}, \quad y(\tau) = b, \quad \tau \leq t \leq 1, \quad (6.11)$$

$$\dot{z}(t) = 2\sqrt{|z(t)|}, \quad z(\tau) = b, \quad \tau \leq t \leq 1. \quad (6.12)$$

Поскольку функция $y \mapsto 2\sqrt{|y|}$ является локально липшицевой на множестве $\mathbb{R}^+ \setminus 0$, то задачи (6.11), (6.12) имеют единственные решения $y(t)$, $z(t)$, определенные на $[\tau, 1]$. Тогда из (6.10)–(6.12) и теорем о дифференциальных неравенствах [17] следует, что

$$z(t) \leq y(t) \leq x_2(t), \quad t \in [\tau, 1]. \quad (6.13)$$

Но решением уравнения (6.12) является функция $z(t) = (t - \tau)^2 + b$, $t \in [\tau, 1]$. Поэтому в соответствии с (6.13)

$$(t - \tau)^2 \leq x_2(t), \quad t \in [\tau, 1]. \quad (6.14)$$

Так как точка s , $0 < s < 1$, была выбрана произвольно и $0 < \tau \leq s$, то из (6.14) следует, что для любого $x(\cdot) \in \mathcal{R}_F(0)$ справедливо неравенство

$$t^2 \leq x_2(t) \leq \|x(t)\|, \quad t \in T. \quad (6.15)$$

Воспользовавшись (6.3), (6.5), мы получаем, что

$$g_{\tilde{F}}^{**}(x, u) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad u \in \mathbb{R}^2, \quad (6.16)$$

и

$$g_{\tilde{F}}^{**}(0, u) = g(0, u) = 0 \quad (6.17)$$

при $u_1 \in (-1, +1)$, $u_2 \in (0, 1)$. Тогда из выпуклости функции $u \rightarrow g_{\tilde{F}}^{**}(x, u)$ и (6.16), (6.17) мы получаем

$$g_{\tilde{F}}^{**}(0, 0) = 0. \quad (6.18)$$

В соответствии с (6.6) функция $x_*(t) \equiv (0, 0)$, $t \in T$, является решением включения (6.8). Из (6.3), (6.10), (6.15) вытекает, что для любого $x(\cdot) \in \mathcal{R}_F(0)$

$$t^2 \leq g(x(t), \dot{x}(t)) \quad \text{п.в.} \quad (6.19)$$

Воспользовавшись (6.3), (6.15), (6.19), мы получаем, что для любого $x(\cdot) \in \mathcal{R}_F(0)$ имеют место неравенства

$$t^2 \leq \|x_*(\cdot) - x(\cdot)\|_{C(T, X)},$$

$$\frac{t^3}{3} \leq \sup_{t \in T} \left| \int_0^t (g_{\tilde{F}}^{**}(x_*(s), \dot{x}_*(s)) - g(x(s), \dot{x}(s))) ds \right|.$$

Из этих неравенств вытекает, что утверждения теоремы 4.2 для этого примера не имеют места. Это объясняется тем, что для отображения $F(x)$ не выполняется неравенство (2.3).

ПРИМЕР 2. Пусть многозначное отображение $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{compr } \mathbb{R}^2$ при $x_2 < 0$ и $x_2 = 0$ определяется по формулам (6.1) и (6.2) соответственно, а при $x_2 > 0$

$$F(x) = \begin{cases} \{u_1, u_2\} \in \mathbb{R}^2; & u_1 \in (-1, +1), \\ & u_2 \in |x_1| + (-1 - 2\sqrt{|x_2|}, -2\sqrt{|x_2|}). \end{cases}$$

Тогда $F(x)$ является полунепрерывным снизу отображением с компактными значениями, удовлетворяющим гипотезам $H(F)$.

Пусть функция $g(x, u)$ определена по формуле (6.3). Непосредственной проверкой убеждаемся, что для любого $M > 0$ существует константа $k_M > 0$ такая, что для любых $\|x\| \leq M$, $\|y\| \leq M$ и $u \in F(x)$ найдется элемент $v \in F(y)$, при котором имеют место неравенство

$$\langle x - y, u - v \rangle \leq k_M \|x - y\|^2$$

и неравенство (6.4). Тем самым для отображения $F(x)$ и функции $g(x, u)$ выполняются гипотезы $H(F)$, $H(g)$, $H(F, g)$. Поэтому для данного примера справедливы утверждения теорем 4.2, 5.1.

В следующем примере мы покажем, что в предположении следствия 4.1, определяемом неравенством (2.3), вместо отображения $F(x)$ нельзя взять отображение $\tilde{F}(x)$.

ПРИМЕР 3. Пусть $A \subset [0, 1]$ — канторово множество положительной меры [18; гл. 8, §4]. Тогда $B = \mathbb{R}^+ \setminus A$ является плотным и открытым подмножеством в $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$. Рассмотрим отображение $F: \mathbb{R} \rightarrow \text{compr } \mathbb{R}$, определенное следующим образом: $F(x) = (0, 1)$, $x < 0$, $F(x) = 0$, $x \in A$, и $F(x) = (0, 1)$, $x \in B$. Поскольку $0 \in A$ по построению множества A [18], то $F(x)$ является полунепрерывным снизу отображением, удовлетворяющим гипотезам $H(F)$. Так как B является всюду плотным подмножеством в $\mathbb{R}^+$, то $\tilde{F}(x) = (0, 1)$ и со $\tilde{F}(x) = [0, 1]$ при $x \in \mathbb{R}$. Ясно, что для любых $x, y \in \mathbb{R}$ и $u \in \tilde{F}(x)$ найдется элемент $v \in \tilde{F}(y)$, удовлетворяющий неравенству

$$\langle x - y, u - v \rangle \leq 0.$$

Поэтому для отображения $\tilde{F}(x)$ выполняется неравенство (2.3).

Пусть $y(\cdot) \in \mathcal{R}_F(0)$. Тогда $\dot{y}(t) = 0$ при почти всех $t \in A$ и $\dot{y}(t) \in (0, 1)$ при почти всех $t \in [0, 1] \setminus A$. Так как $\mu(A) = \delta > 0$, то

$$0 \leq y(t) \leq 1 - \delta, \quad t \in T. \quad (6.20)$$

С другой стороны, функция $x(\cdot)$, $x(t) = t$, $t \in T$, является элементом множества $\mathcal{R}_{\text{co } \tilde{F}}(0)$. Теперь из (6.20) и монотонности функции $y(t)$ следует, что

$$\delta \leq \|y(\cdot) - x(\cdot)\|_{C(T, X)}.$$

Поэтому для данного примера утверждения следствия 4.1 не имеют места.

ПРИМЕР 4. Пусть отображение $F: T \times X \rightarrow \text{сomp } X$ и функция $g(t, x, u)$ удовлетворяют гипотезам $H(F)$ 2), 3) и $H(g)$. Предположим, что для любого $M > 0$ существуют константа $l_M > 0$ и функции $\omega_M(t, r)$, $\omega_M^*(t, r)$ такие, что для любых $\|x\| \leq M$, $\|y\| \leq M$ и $u \in F(t, x)$, $v \in F(t, y)$ выполняются неравенства

$$D(F(t, x), F(t, y)) \leq \omega_M(t, \|x - y\|), \quad (6.21)$$

$$|g(t, x, u) - g(t, y, v)| \leq \omega_M^*(t, \|x - y\|) + l_M \|y - v\|. \quad (6.22)$$

Из (6.21) следует, что отображение $x \rightarrow F(t, x)$ непрерывно в метрике Хаусдорфа и, следовательно, полунепрерывно снизу. Воспользовавшись (6.21), (6.22), легко показать, что для любых $\|x\| \leq M$, $\|y\| \leq M$ и $u \in F(t, x)$ существует $v \in F(t, y)$, удовлетворяющее неравенству (2.3) и

$$|g(t, x, u) - g(t, y, v)| \leq \omega_M^*(t, \|x - y\|) + l_M \cdot \omega_M(t, \|x - y\|).$$

Так как функция $\omega_M^*(t, r) + l_M \cdot \omega_M(t, r)$ обладает теми же свойствами, что и функция $\omega_M^*(t, r)$, то отображение $F(t, x)$ и функция $g(t, x, u)$ удовлетворяют гипотезам $H(F)$, $H(g)$, $H(F, g)$. Поэтому для этого примера справедливы утверждения теорем 4.2, 5.1. Поскольку отображение $x \rightarrow F(t, x)$ непрерывно в метрике Хаусдорфа, то $\tilde{F}(t, x) = F(t, x)$ и $\text{co } \tilde{F}(t, x) = \text{co } F(t, x)$. Согласно следствию 4.1 при выполнении гипотез $H(F)$ и неравенства (2.3) множество решений включения (1.4) плотно в множестве решений включения (1.5).

Начиная с классической работы А. Ф. Филишова [19] вопросам плотности множества решений дифференциального включения с невыпуклой правой частью в множестве решений включения с выпукленной правой частью посвящено много работ (см., например, [8] и приведенную там библиографию). Среди прочих предположений относительно отображения $F(t, x)$ основным в этих работах являлось требование выполнения неравенства (6.21), из которого сразу следует непрерывность отображения $x \rightarrow F(t, x)$. Поскольку $\text{co } F(t, x) \subset \text{co } \tilde{F}(t, x)$, то согласно следствию 4.1 плотность множества решений включения с невыпуклой правой частью в множестве решений включения с выпукленной правой частью имеет место и для полунепрерывных снизу отображений, удовлетворяющих гипотезам $H(F)$ и неравенству (2.3), хотя полунепрерывные снизу отображения не могут удовлетворять неравенству (6.21). Поэтому приведенные в нашей работе примеры показывают содержательность и существенность гипотезы $H(F, g)$. Плотность множества

решений включения (1.4) в множестве решений включения (1.5) для полунепрерывных снизу отображений с невыпуклыми значениями изучалась в работе [20]. Утверждение следствия 4.1 дополняет результаты этой работы.

Для дифференциальных включений в банаховом пространстве с невыпуклой правой частью и для эволюционных управляемых систем с невыпуклыми ограничениями $U(t, x)$ на управление впервые теорема 5.1 была доказана в [8] и [4]. В этих работах среди прочих основным предположением являлось требование липшицевости отображения $x \rightarrow F(t, x)$ или отображения $x \rightarrow U(t, x)$ и функции $(x, u) \rightarrow g(t, x, u)$. Аналог теоремы Боголюбова при ограничениях, порожденных эволюционной управляемой системой, был доказан в [5]. В этой работе также основным предположением являлось требование липшицевости соответствующих отображений.

Список литературы

1. *Bogolyubov N. N.* Sur quelques method nonvelles dans le calculas des variations // Ann. Math. Pura Appl. (4). 1930. V. 7. P. 249–271.
2. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
3. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
4. *Толстоногов А. А.* Релаксация в невыпуклых задачах оптимального управления, описываемых эволюционными уравнениями первого порядка // Матем. сб. 1999. Т. 190. № 11. С. 135–160.
5. *Толстоногов А. А.* Теорема Боголюбова при ограничениях, порожденных эволюционной управляемой системой второго порядка // Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67. № 5. С. 177–206.
6. *Himmelberg C. J.* Measurable relations // Fund. Math. 1975. V. 87. P. 53–72.
7. *Бурбаки Н.* Топологические векторные пространства. М.: ИЛ, 1959.
8. *Tolstonogov A. A.* Differential inclusions in a Banach space. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000.
9. *Толстоногов А. А.* К теореме Скорца–Драгони для многозначных отображений с переменной областью определения // Матем. заметки. 1990. Т. 48. № 5. С. 109–120.
10. *Tolstonogov A. A., Tolstonogov D. A.* L_p -continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values: relaxation theorems // Set-Valued Anal. 1996. V. 4. P. 237–269.
11. *Hiai F., Umegaki H.* Integrals, conditional expectations and martingales of multivalued functions // J. Multivariate Anal. 1997. V. 7. P. 149–182.
12. *Tolstonogov A. A., Tolstonogov D. A.* L_p -continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values: existence theorems // Set-Valued Anal. 1996. V. 4. P. 173–203.
13. *Fryszkowski A.* Continuous selections for a class of nonconvex multivalued maps // Studia Math. 1983. V. 76. P. 163–174.
14. *Brezis H.* Operateurs maximaux monotones et semi-groups de contractios dans les espaces de Hilbert. Amsterdam: North-Holland, 1973.
15. *Balder E. J.* Necessary and sufficient condition for L_1 -strong-weak lower semicontinuity of integral functionals // Nonlinear Anal. 1987. V. 11. № 12. P. 1399–1404.
16. *Plis A.* Trajectories and quasitrajectories of an Orientor field // Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math., Astronom., Phys. 1963. V. 11. P. 369–370.
17. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
18. *Гельбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967.
19. *Филиппов А. Ф.* Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1967. № 3. С. 16–26.
20. *Donchev T.* Lower semicontinuous differential inclusions. One sided Lipschitz approach // Colloq. Math. 1997. V. 74. № 2. P. 177–184.