Общероссийский математический портал

В. В. Козлов, В. В. Тен, Топология областей возможности движения интегрируемых систем, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 5, 59–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm127>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 13:16:26

УДК 517.9+531.01

В. В. Козлов, В. В. Тен

Топология областей возможности движения интегрируемых систем

Рассматриваются аналитические обратимые системы с двумя степенями свободы на фиксированном трехмерном многообразии уровня интеграла энергии. Предполагается, что это многообразие компактно и не имеет особых точек (равновесий исходной системы). Естественная проекция энергетического многообразия на двумерное конфигурационное пространство называется областью возможности движения. В ориентируемом случае это сфера с k дырами и p приклеенными ручками. Известно, что если $k = 0$ и $p \geq 2$, то система не имеет непостоянного аналитического интеграла на соответствующем уровне интеграла энергии. Оказывается, для областей возможности движения с краем ситуация совсем иная. Основной результат состоит в следующем: имеются примеры аналитически интегрируемых систем, для которых числа p и $k \geq 1$ произвольны.

Библиография: 10 названий.

§ 1. Введение. Основной результат

Рассмотрим обратимую динамическую систему с двумя степенями свободы. Пусть M — ее конфигурационное пространство; это двумерное многообразие. Фазовое пространство четырехмерно; оно совпадает с пространством кокасательного расслоения T^*M .

Функция Гамильтона $H: T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ обратимой системы имеет вид

$$H = T + V, \quad (1.1)$$

где

$$T = \frac{1}{2} \sum g_{ij}(x) y_i y_j$$

— кинетическая энергия (риманова метрика на M) — положительно определенная квадратичная форма по импульсам y_1, y_2 , а $V: M \rightarrow \mathbb{R}$ — потенциальная энергия (функция от координат x_1, x_2 на M). В дальнейшем предполагается, что M имеет структуру ориентированного аналитического многообразия, а H — аналитическая функция на T^*M . В случае неориентируемого M имеется естественное двулистное накрытие $N \rightarrow M$, где N уже ориентируемо, причем динамическая система на T^*M “поднимается” до обратимой системы на T^*N .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-013-16244) и Международного научного фонда (грант № МСУ000).

Уравнения Гамильтона

$$\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \dot{y}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2) \quad (1.2)$$

имеют интеграл энергии (1.1). Зафиксируем его постоянную, которую обозначим h . Трехмерный уровень интеграла энергии

$$\Sigma_h = \{x, y : H = h\}$$

будет регулярным аналитическим многообразием, если на Σ_h нет критических точек функции H , т.е. состояний равновесия рассматриваемой системы. Это предположение, очевидно, эквивалентно условию, что h не является критическим значением потенциальной энергии V . В дальнейшем рассматривается случай, когда Σ компактно.

Естественная проекция $T^*M \rightarrow M$ (точка (x, y) переходит в точку x) переводит Σ_h в некоторую компактную область (возможно с краем) B_h на M . Эта область называется *областью возможности движения*. Так как $T \geq 0$, то

$$B_h = \{x \in M : V(x) \leq h\}.$$

Геометрия и динамика областей возможности движения обсуждается в [1].

Предположим теперь, что система (1.2) на Σ допускает непостоянный аналитический интеграл

$$F : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}.$$

По теореме Лиувилля некритические поверхности уровня функции F будут объединением двумерных торов с условно-периодическими траекториями. Так как аналитическая функция на компактном многообразии имеет конечное число критических значений, то Σ разбивается на конечное число кусков, “регулярно” слоенных на двумерные торы.

Оказывается, свойство полной интегрируемости системы (1.2) на Σ существенно зависит от топологии области возможности движения B . Первый результат в этом направлении получен в работе [2]: если $\partial B = \emptyset$ (M компактно и $h > \max V$) и род p поверхности $B = M$ (число ручек) ≥ 2 , то динамическая система на Σ не имеет непостоянного аналитического интеграла. С другой стороны, известны многочисленные примеры интегрируемых задач, когда $p = 0$ (сфера) и $p = 1$ (тор). Впоследствии были получены новые доказательства этого результата, основанные на других идеях (см. [3]–[6]).

Рассмотрим теперь случай, когда граница ∂B не пуста. Топологическая классификация таких областей хорошо известна. Это сфера с $k \geq 1$ дырами и $p \geq 0$ ручками. Число p называется *родом* области B . Наш основной результат составляет

ТЕОРЕМА 1. *Для любых $k \geq 1$ и $p \geq 2$ существуют аналитическая система (1.2) и значение энергии h такие, что*

- 1) *ограничение системы (1.2) на Σ_h допускает непостоянный аналитический интеграл,*
- 2) *компактная область B_h гомеоморфна сфере с k дырами и p ручками.*

Таким образом, область возможности движения с краем аналитически интегрируемой системы с двумя степенями свободы может быть устроена топологически сколь угодно сложно.

В связи с этим замечанием полезно сравнить теорему 1 с результатом работы [7]. Пусть $V \equiv 0$, и найдется двумерное многообразие с краем $M_0 \subset M$ такое, что $\chi(M_0) < 0$, и граница M_0 геодезически выпукла. Тогда уравнения (1.2) не имеют дополнительного аналитического интеграла. Например, если M_0 – диск с $k \geq 2$ дырами, то $\chi(M_0) = 1 - k < 0$.

§ 2. Случай $p \leq 1$

Наиболее просто теорема 1 доказывается в случаях, когда $p = 0$ и $p = 1$. Предъявим системы, аналитически интегрируемые на Σ , причем проекции Σ на M (область возможности движения) имеет любое заданное число дыр.

Положим сначала $p = 0$. Пусть $M = \mathbb{R}^2 = \{x_1, x_2\}$, кинетическая энергия задает плоскую метрику

$$T = (y_1^2 + y_2^2)/2, \quad (2.1)$$

потенциал V равен сумме

$$\begin{aligned} f(x_1) + g(x_2), \\ f(z) = T_4(z) = 8z^4 - 8z^2 + 1, \quad g(z) = T_{2k+2}(z). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь $T_n(z) = \cos(n \arccos z)$ – многочлены Чебышёва.

Ясно, что $V(x_1, x_2) \rightarrow +\infty$, когда $x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \infty$. Потенциальная энергия имеет ровно k локальных максимумов, где эта функция принимает одно и то же значение, равное 2. Положим $h = 2 - \varepsilon$, где ε – малое положительное число. Легко понять, что тогда B_h гомеоморфно диску с k дырами.

Остается заметить, что обратимая система с кинетической энергией (2.1) и потенциалом (2.2) вполне интегрируема. Она допускает дополнительный аналитический интеграл

$$F = \frac{y_1^2}{2} + f(x_1),$$

независимый от интеграла энергии $H = T + V$.

Для $p = 1$ и произвольного $k \geq 0$ также можно указать обратимую систему, интегрируемую разделением переменных. Пусть

$$\begin{aligned} M = \mathbf{T}^2 = \{x_1, x_2 \bmod 2\pi\}, \\ T = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2}, \quad V = \cos x_1 + \cos(k+1)x_2. \end{aligned}$$

Легко проверить, что при $h = 2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ – мало, область B_h гомеоморфна диску с одной ручкой и k дырами. Дополнительным аналитическим интегралом служит, например, функция

$$F = \frac{y_1^2}{2} + \cos x_1.$$

§ 3. Случай $p > 1$

Построение аналитически интегрируемой системы с областью возможности движения рода $p > 1$ основано на идее, изложенной в § 2.

Рассмотрим на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2 = \{x_1, x_2\}$ квадрат

$$\Pi = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$$

и зададим кинетическую и потенциальную энергии формулами

$$T = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2}, \quad V = -\cos x_1 - \cos x_2; \quad y_i = \dot{x}_i. \quad (3.1)$$

При $h = 1$ область возможности движения $B_h \subset \Pi$ — это криволинейный крест, пересекающийся с границей $\partial\Pi$ по отрезкам

$$\begin{aligned} a_1 &= \{-\pi\} \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], & a_2 &= \{\pi\} \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\ b_1 &= \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \{-\pi\}, & b_2 &= \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times \{\pi\}. \end{aligned}$$

Пусть

$$K = \left\{ (x_1, x_2) \in \Pi : V(x_1, x_2) \leq \frac{3}{2} \right\} \quad (3.2)$$

— бóльший крест с граничными отрезками $\alpha_1 \supset a_1$, $\alpha_2 \supset a_2$, $\beta_1 \supset b_1$ и $\beta_2 \supset b_2$.

Рассмотрим теперь $2p+k-2$ экземпляров криволинейного креста (3.2). Декартовы координаты в i -м кресте K_i обозначим x_1^i и x_2^i . Кинетическую и потенциальную энергии в K_i зададим формулами (3.1), в которых переменные x_k, y_k заменены на x_k^i, y_k^i . Граничные отрезки креста K_i обозначим $\alpha_1^i, \alpha_2^i, \beta_1^i, \beta_2^i$. Два креста K_i и K_j можно склеить, например, по отрезкам α_1^i и α_2^j , отождествив точки с координатами $(-\pi, x_2^i)$ и (π, x_2^j) . Такую склейку будем обозначать символом (α_1^i, α_2^j) . Это склеивание можно осуществить таким образом, чтобы в результате получилось аналитическое двумерное многообразие (с краем). Аналогично определяется операция склеивания (β^i, β^j) . Склеим теперь $K_1, \dots, K_{2p+k-2}$ по формуле

$$\begin{aligned} &(\beta_1^1, \beta_2^1) + (\alpha_1^1, \alpha_2^1) + (\alpha_2^1, \alpha_2^2) + \dots + (\beta_1^{2p-2}, \beta_2^{2p-1}) + (\beta_2^{2p-2}, \beta_2^{2p-1}) \\ &+ \sum_{i=2}^k ((\alpha_1^{2p+i-3}, \alpha_2^{2p+i-2}) + (\beta_1^{2p+i-2}, \beta_2^{2p+i-2})) + (\alpha_1^{2p+k-2}, \alpha_2^{2p-1}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Символ “+” означает последовательное повторение склеивания. В результате получим аналитическое компактное многообразие M с краем.

ЛЕММА. *Многообразие M гомеоморфно сфере с k дырами и p приклеенными ручками.*

Это утверждение будет доказано ниже.

Ввиду периодичности потенциальная энергия $V : M \rightarrow \mathbb{R}$ будет аналитической функцией. Область возможности движения

$$B_1 = \{V \leq 1\} \subset M,$$

очевидно, гомеоморфна M . Построенная обратимая механическая система аналитически интегрируема. Действительно, зададим в T^*K_i ($i = 1, \dots, 2p + k - 2$) функцию F формулой

$$\frac{(y_1^i)^2}{2} - \cos x_1^i.$$

Ясно, что это – интеграл построенной обратимой гамильтоновой системы. Функция F определена почти всюду на T^*M и по построению многообразия M она продолжается по непрерывности до аналитической функции на всем фазовом пространстве T^*M . Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Рассмотрим замкнутую поверхность рода p (на рис. $p = 2$) и $2p$ “канонических” замкнутых циклов $a_1, b_1, \dots, a_p, b_p$; пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}$ – гомологичные циклы, пересекающие b_p (как показано на рис.). Если разрезать поверхность по этим $2p + k - 1$ циклам, то поверхность распадается на k кусков, каждый из которых гомеоморфен диску. Окружим теперь указанные циклы тонкими полосками. Область на поверхности вне этих полосок будет несвязным объединением k дисков. Следовательно, объединение всех полосок (см. рис.) – поверхность с краем рода p , граница которого имеет ровно $k \geq 1$ связных компонент. Нетрудно проверить, что она получается путем склеивания $2p + k - 2$ крестов по формуле (3.3). Лемма доказана.

§ 4. Заключительные замечания

1. Функция $F: T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ называется *условным* (по Биркгофу) *интегралом* гамильтоновой системы (1.2), если $\dot{F} = 0$ на некоторой поверхности $\Sigma_h = \{H = h\}$. Теорема 1 допускает следующее уточнение.

ТЕОРЕМА 2. Для любой компактной поверхности N с краем найдутся аналитическая обратимая гамильтонова система и значение полной энергии h такие, что

- 1) B_h гомеоморфно N ,
- 2) существует нетривиальный условный интеграл в виде полинома второй степени по импульсам.

Таким образом, для областей возможности движения с краем нет никаких топологических препятствий к существованию условных квадратичных интегралов. Интересно отметить, что для условных интегралов, линейных по импульсам, такие

препятствия существуют. Как доказано в [9], если при $H = h$ имеется условный линейный интеграл, то эйлерова характеристика области B_h неотрицательна.

2. Было бы интересным исследовать задачу о препятствиях к существованию условных полиномиальных интегралов для необратимых систем с гироскопическими силами, когда $\partial B \neq \emptyset$. Для случая, когда B совпадает со всем M , эта задача исследована в [10]. Если род M больше 1, то условных полиномиальных интегралов нет. Если же M гомеоморфно тору, то необходимое условие интегрируемости по Биркгофу состоит в следующем: интеграл 2-формы гироскопических сил по тору равен нулю.

3. Когда $\partial B \neq \emptyset$, то вопрос о топологических препятствиях к полной интегрируемости для систем со многими степенями свободы остается пока открытым. Здесь речь должна идти об условиях существования n инволютивных интегралов, где n — число степеней свободы системы.

Список литературы

1. Козлов В. В. Вариационное исчисление в целом и классическая механика // УМН. 1985. Т. 40, № 2. С. 33–60.
2. Козлов В. В. Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем // ДАН СССР. 1979. Т. 249. № 6. С. 1299–1302.
3. Колокольцов В. Н. Геодезические потоки на двумерных многообразиях с дополнительным по скорости первым интегралом // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. № 5. С. 994–1010.
4. Тайманов И. А. Топологические препятствия к интегрируемости геодезических потоков на неодносвязных многообразиях // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. № 2. С. 429–435.
5. Болотин С. В. Двоякоасимптотические траектории минимальных геодезических // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1992. № 1. С. 92–96.
6. Paternain G. P. On the topology of manifolds with completely integrable geodesic flows // Ergod. Th. and Dynam. Sys. 1992. V. 12. P. 109–121.
7. Болотин С. В. Неинтегрируемость задачи n центров при $n > 2$ // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1984. № 3. С. 65–68.
8. Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // УМН. 1983. Т. 38. № 1. С. 3–67.
9. Абраров Д. Л. Топологические препятствия к существованию условно-линейных интегралов // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1984. № 6. С. 72–75.
10. Болотин С. В. О первых интегралах систем с гироскопическими силами // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1984. № 6. С. 75–82.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
03.10.1995