Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Шакин, Кусочно лексsegmentные идеалы во внешней алгебре, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 2, 139–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1270>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 18:31:43

УДК 512.714

Д. А. Шакин

Кусочно лекссегментные идеалы во внешней алгебре

Рассматривается задача описания функций Гильберта однородных идеалов во внешней алгебре над полем, содержащих фиксированный мономиальный идеал I . Для этой цели вводится понятие *кусочно лекссегментного* идеала во внешней алгебре, обобщающее понятие лекссегментного идеала. Доказывается, что в случае, когда идеал I является кусочно лекссегментным, возможно описать функции Гильберта однородных идеалов, содержащих I , способом, аналогичным предложенному Крушкалем и Катоной для ситуации $I = 0$. Кроме того, получено обобщение экстремальных свойств лекссегментных идеалов (неравенство для чисел Бетти).

Библиография: 14 названий.

§ 1. Введение

Рассмотрим симплициальный комплекс Δ с вершинами $v_1, \dots, v_n$. Каждому такому комплексу можно сопоставить градуированную алгебру $k[\Delta]$ (называемую *кольцом Стенли–Рейснера* комплекса Δ) следующим образом: возьмем идеал $I(\Delta)$ в кольце коммутативных многочленов $A = k[x_1, \dots, x_n]$, порожденный такими мономами $x_{i_1} \cdots x_{i_l}$, что $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_l}\} \notin \Delta$; тогда $k[\Delta] = A/I(\Delta)$. Хорошо известно о связи топологических свойств комплекса Δ и алгебраических свойств кольца $k[\Delta]$, например, числа Бетти кольца $k[\Delta]$ над A выражаются через размерности приведенных групп гомологий подкомплексов комплекса Δ с коэффициентами в k (см. [1], а также [2]).

Комплексу Δ можно сопоставить еще один алгебраический объект, так называемую *индикаторную алгебру* $k\{\Delta\}$, определяемую следующим образом: рассмотрим идеал $J(\Delta)$ во внешней алгебре $E = k\langle e_1, \dots, e_n \rangle$, порожденный такими мономами $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_l}$, что $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_l}\} \notin \Delta$, и положим $k\{\Delta\} = E/J(\Delta)$. В последнее время появилось много работ, в которых исследуется связь между свойствами алгебр $k[\Delta]$ и $k\{\Delta\}$, а также обобщаются результаты, уже давно известные для идеалов в кольце многочленов, например, теорема Гойсмана об устойчивости [3] и неравенство для градуированных чисел Бетти [4], [5]. В настоящей работе упомянутые выше, а также некоторые другие результаты обобщаются на случай, когда рассматриваются подкомплексы некоторого комплекса специального вида.

Одной из самых простых характеристик симплициального комплекса являются его f -вектор, i -я компонента которого равна числу симплексов этого комплекса, имеющих размерность i . Дж. Крушкаль и Дж. Катона [6], [7] описали все возможные последовательности, которые могут быть f -векторами симплициальных

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00468).

комплексов. Естественнo задать вопрос: пусть задан некоторый комплекс Δ , какие f -векторы могут иметь его подкомплексы? Ясно, что эта задача эквивалентна описанию функций Гильберта однородных идеалов в кольце $k\{\Delta\}$. В §2 предлагается способ описания функций Гильберта идеалов в кольце $k\{\Delta\}$, аналогичный предложенному Ф. Маколеем [8] для кольца коммутативных многочленов. Суть этого способа в том, что для некоторых комплексов Δ функции Гильберта однородных идеалов в $k\{\Delta\}$ исчерпываются функциями Гильберта идеалов, порожденных в каждой степени самыми старшими мономы по лексикографическому порядку (так называемые $J(\Delta)$ -лекссегментные идеалы). В этом случае мы будем говорить, что $J(\Delta)$ является M -идеалом. Далее приводятся некоторые необходимые условия для того, чтобы идеал $J(\Delta)$ был M -идеалом, а в §3 доказывается, что свойство идеала быть M -идеалом сохраняется при расширении внешней алгебры новыми переменными. Этот результат обобщает теорему Крушкаля–Катоны.

В §4 вводится понятие кусочно лекссегментного идеала во внешней алгебре. Идеалы в кольце коммутативных многочленов, обладающие аналогичными свойствами, были рассмотрены в работе [9]. Показывается, что каждый кусочно лекссегментный идеал может быть разложен в сумму лекссегментных, а потом, используя результаты §3, доказывается, что все кусочно лекссегментные идеалы являются M -идеалами. Таким образом, для соответствующих этим идеалам комплексов можно ответить на поставленный выше вопрос о допустимых f -векторах. Интерес к кусочно лекссегментным идеалам объясняется еще и тем, что они являются сильно устойчивыми, т.е. возникают как идеалы старших членов при общей линейной замене переменных. Более того, среди всех сильно устойчивых идеалов только кусочно лекссегментные являются M -идеалами.

В §5 обобщаются результаты статей [10] и [11] о максимальной градуированных чисел Бетти лекссегментных идеалов среди всех однородных идеалов в E с такой же функцией Гильберта на случай, когда $J(\Delta)$ кусочно лекссегментный. Аналогичный результат получен и для бесквадратных идеалов в кольце $k[x_1, \dots, x_n]$, соответствующих идеалам в E .

Наконец, в §6 обобщается теорема Гоцмана, а также доказывается, что $J(\Delta)$ -гоцмановы идеалы (см. определение в §6) являются покомпонентно линейными и имеют такие же градуированные числа Бетти, что и соответствующие им $J(\Delta)$ -лекссегментные идеалы.

§ 2. Теорема Маколея для факторалгебр внешней алгебры

Рассмотрим внешнюю алгебру $E[1 : n] = k\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ над полем k . Мы будем предполагать, что поле k имеет характеристику 0 и что все порождающие e_i имеют степень 1. Множество всех однородных многочленов степени d будем обозначать через $E[1 : n]_d$, аналогично, множество всех однородных многочленов степени d , принадлежащих некоторому идеалу I , будем обозначать через I_d . Если $S \subseteq E[1 : n]$ – некоторое множество, то через $\mathcal{M}(S)$ будем обозначать множество мономов, принадлежащих S .

Пусть $\sigma = \{i_1, \dots, i_p\} \subseteq \{1, \dots, n\}$, где $i_1 < \dots < i_p$, положим

$$e_\sigma = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}.$$

На мономах в $E[1 : n]$ введем степенной лексикографический порядок: $e_\sigma >_{\text{lex}} e_\tau$,

где $\sigma = \{i_1, \dots, i_p\}$ и $\tau = \{j_1, \dots, j_q\}$, если либо $p > q$, либо $p = q$ и первый ненулевой член последовательности $i_1 - j_1, \dots, i_p - j_p$ отрицателен.

Пусть $I \subseteq E[1 : n]$ – некоторый мономиальный идеал в $E[1 : n]$. Мы можем рассмотреть факторалгебру $R = E[1 : n]/I$. На мономах факторалгебры R с помощью порядка в $E[1 : n]$ индуцируется аналогичный порядок.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Множество $S \subseteq \mathcal{M}(R_d)$ называется *I -лекссегментным* (обратно *I -лекссегментным*), если из того, что некоторый моном $u \in R_d$ принадлежит S следует, что всякий моном $v \in R_d$, больший (меньший) u , тоже принадлежит S . В частности, если $I = 0$, т.е. $R = E[1 : n]$, то I -лекссегментные (обратно I -лекссегментные) множества называются просто *лекссегментными* (обратно *лекссегментными*). Мономиальный идеал $L \subseteq E[1 : n]$ называется *I -лекссегментным* (обратно *I -лекссегментным*), если все множества $\mathcal{M}(L_d)$ представляются в виде $\mathcal{M}(I_d) \cup M_d$, где M_d – некоторое I -лекссегментное (обратно I -лекссегментное) множество. В частности, если $I = 0$, то I -лекссегментные идеалы называются просто *лекссегментными* (обратно *лекссегментными*).

Пусть $e_\sigma \in R_d$ – некоторый моном и $M \subseteq \mathcal{M}(R_d)$ – некоторое мономиальное множество. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Delta^R(e_\sigma) &= \{e_{\sigma \cup \{i\}} : i \notin \sigma\}, & \Delta^R(M) &= \bigcup_{e_\tau \in M} \Delta^R(e_\tau), \\ \Gamma^R(e_\sigma) &= \{e_{\sigma \setminus \{i\}} : i \in \sigma\}, & \Gamma^R(M) &= \bigcup_{e_\tau \in M} \Gamma^R(e_\tau). \end{aligned}$$

Далее, через $D^R M$ обозначим такое I -лекссегментное подмножество в $\mathcal{M}(R_d)$, что $|M| = |D^R M|$, и, аналогично, через $C^R M$ обозначим такое обратно I -лекссегментное подмножество в $\mathcal{M}(R_d)$, что $|M| = |C^R M|$. Введем также следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Gamma_i^R(M) &= \{e_\sigma \in \mathcal{M}(R_{d-1}) : i \notin \sigma, e_{\sigma \cup \{i\}} \in M\}, \\ \Gamma_{-i}^R(M) &= \{e_\sigma \in \mathcal{M}(R_{d-1}) : e_{\sigma \cup \{j\}} \in M \text{ для некоторого } j \neq i, j \notin \sigma\}, \\ M_{i=0} &= \{e_\sigma \in M : i \notin \sigma\}, \\ M_{i=1} &= \{e_\sigma \in M : i \in \sigma\}. \end{aligned}$$

Кроме того, через $C_{i=s}^R M$ обозначим подмножество в $\mathcal{M}(R_d)_{i=s}$, состоящее из младших мономов в количестве $|M_{i=s}|$, и положим

$$C_i^R M = C_{i=0}^R M \cup C_{i=1}^R M.$$

Множество M называется *i -сжатым*, если $C_i^R M = M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Мономиальный идеал $I \subseteq E[1 : n]$ называется *M -идеалом*, если в факторалгебре $R = E[1 : n]/I$ выполняется теорема Маколея, т.е. для всякого $d > 0$, для всякого множества $M \subseteq \mathcal{M}(R_d)$ выполнено неравенство

$$|\Delta^R(D^R M)| \leq |\Delta^R(M)|. \quad (1)$$

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $I \subseteq E[1 : n]$ – мономиальный идеал и $R = E[1 : n]/I$, I является M -идеалом тогда и только тогда, когда для всякого $d > 1$, для всякого множества $M \subseteq \mathcal{M}(R_d)$ выполнено включение

$$\Gamma^R(C^R M) \subseteq C^R \Gamma^R(M). \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем представить R как факторкольцо кольца коммутативных многочленов:

$$R = k[x_1, \dots, x_n]/(x_1^2, \dots, x_n^2, S(I)),$$

здесь $S(I)$ – мономиальный идеал в $k[x_1, \dots, x_n]$, порожденный мономами вида $x_{i_1} \cdots x_{i_p}$, где $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \in I$. В [12] показано, что для факторколец кольца многочленов $k[x_1, \dots, x_n]$ условия (1) и (2) эквивалентны. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть $I \subseteq E[1 : n]$ – мономиальный идеал, $R = E[1 : n]/I$. Следующие условия равносильны:

- 1) для всякого $d > 1$, для всякого обратно I -лекссегментного множества $M \subseteq \mathcal{M}(R_d)$ множество $\Gamma^R(M)$ тоже обратно I -лекссегментное;
- 2) для всякого $d \geq 1$, для всяких мономов $e_\sigma \in R_d$, $e_\tau \in R_{d+1}$ таких, что
 - а) $e_\sigma \leq_{\text{lex}} e_{\tau \setminus \{\max(\tau)\}}$;
 - б) если $i \notin \sigma$ и $e_{\sigma \cup \{i\}} <_{\text{lex}} e_\tau$, то $e_{\sigma \cup \{i\}} \in I$,
 выполнено $e_\tau = e_{\sigma \cup \{j\}}$ для некоторого j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично доказательству предыдущей теоремы, достаточно представить R как факторалгебру алгебры многочленов и применить результаты работы [12].

ТЕОРЕМА 2.5. Каждое из эквивалентных условий 1) или 2) предыдущей теоремы является необходимым для того, чтобы идеал I был M -идеалом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично доказательству теоремы 2.3, достаточно представить R как факторалгебру алгебры многочленов и применить результаты работы [12].

СЛЕДСТВИЕ 2.6. Пусть $I \subseteq E[1 : n]$ – мономиальный идеал, $R = E[1 : n]/I$. Если в алгебре R выполнено одно из эквивалентных условий 1) или 2) теоремы 2.4, то для того чтобы идеал I был M -идеалом, достаточно, чтобы для всякого $d > 1$, для всякого множества $M \subseteq \mathcal{M}(R_d)$ было выполнено

$$|\Gamma^R(C^R M)| \leq |C^R \Gamma^R(M)|.$$

§ 3. Выполнение теоремы Маколея для идеалов во внешней алгебре при расширении кольца

В этом параграфе будет показано, что свойство идеала быть M -идеалом сохраняется при расширении внешней алгебры новыми младшими по порядку переменными. Подобный результат в кольце многочленов для идеалов, порожденных мономами от двух старших переменных, был получен в статье [12].

Пусть $I \subseteq E[1 : n]$ – некоторый мономиальный идеал. Обозначим через $J_I(0)$ мономиальный идеал в $E[2 : n]$, порожденный такими мономами $e_\sigma \in E[2 : n]$, что $e_\sigma \in I$; а через $J_I(1)$ – мономиальный идеал в $E[2 : n]$, порожденный такими мономами $e_\sigma \in E[2 : n]$, что $e_{\sigma \cup \{1\}} \in I$. Если $M \subseteq \mathcal{M}(E[1 : n]_d)$ – некоторое множество, то положим

$$e_i \wedge M = \{e_{\sigma \cup \{i\}} : e_\sigma \in M, i \notin \sigma\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $I \subseteq E[1 : n]$ – M -идеал, $R = E[1 : n]/I$. Тогда идеалы $J_I(0), J_I(1) \subseteq E[2 : n]$ тоже являются M -идеалами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R(d) = E[2 : n]/J_I(d)$ при $d = 0, 1$, пусть также $M \subseteq \mathcal{M}(R(d)_t)$.

Рассмотрим сначала случай $d = 0$. Нужно доказать, что

$$|\Delta^{R(0)}(D^{R(0)}M)| \leq |\Delta^{R(0)}(M)|.$$

Мы можем отождествить M с соответствующим подмножеством в $\mathcal{M}(R_t)$. Рассмотрим $M' = M \cup B \subseteq \mathcal{M}(R_t)$, где

$$B = \{e_\sigma \in \mathcal{M}(R_t) : 1 \in \sigma\}.$$

Ясно, что $D^R M' = D^{R(0)}M \cup B$, кроме того,

$$\begin{aligned} \Delta^R(M') &= \Delta^{R(0)}(M) \sqcup B', \\ \Delta^R(D^R M') &= \Delta^{R(0)}(D^{R(0)}M) \sqcup B', \end{aligned}$$

где

$$B' = \{e_\sigma \in \mathcal{M}(R_{t+1}) : 1 \in \sigma\}.$$

Так как в R выполнена теорема Маколея, то

$$|\Delta^R(M')| = |\Delta^{R(0)}(M)| + |B'| \geq |\Delta^{R(0)}(D^{R(0)}M)| + |B'| = |\Delta^R(D^R M')|,$$

откуда получаем, что $|\Delta^{R(0)}(M)| \geq |\Delta^{R(0)}(D^{R(0)}M)|$.

В случае $d = 1$ доказательство аналогично, нужно только в качестве B и B' взять пустое множество.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $I' \subseteq E[1 : (n-1)]$ – M -идеал, $R' = E[1 : (n-1)]/I'$. Тогда $I = I'E[1 : n]$ – тоже M -идеал.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R = E[1 : n]/I$. Проведем индукцию по n . База индукции при $n = 2$ очевидна. Пусть $n > 2$ и для всех идеалов $I' \subseteq E[1 : (l-1)]$, где $l < n$, теорема уже доказана.

ЛЕММА 3.3. Пусть $M \subseteq \mathcal{M}(R_d)$ – обратно I -лекссегментное множество, тогда $\Gamma^R(M)$ тоже обратно I -лекссегментное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 2.4 достаточно показать, что для любых мономов $e_\sigma \in R_d$, $e_\tau \in R_{d+1}$, удовлетворяющих условиям

- 1) $e_\sigma \leq_{\text{lex}} e_{\tau \setminus \{\max \tau\}}$;
- 2) если $i \notin \sigma$, $e_{\sigma \cup \{i\}} <_{\text{lex}} e_\tau$, то $e_{\sigma \cup \{i\}} \in I$,

выполнено $e_\tau = e_{\sigma \cup \{j\}}$ для некоторого j . Действительно, пусть e_σ и e_τ удовлетворяют условиям 1) и 2), но при этом $\sigma \not\subseteq \tau$. Мы можем считать, что $n \in \tau$, в противном случае заменим τ на $(\tau \cup \{n\}) \setminus \{\max \tau\}$ — условия 1) и 2) будут выполняться. Заметим также, что так как $e_\sigma \leq_{\text{lex}} e_{\tau \setminus \{\max \tau\}}$, то $e_\sigma \wedge e_n \in I$, следовательно, $n \in \sigma$ (у I нет порождающих, делящихся на e_n). Рассмотрим множества $\sigma' = \sigma \setminus \{n\}$ и $\tau' = \tau \setminus \{n\}$, а также соответствующие им мономы $e_{\sigma'}$ и $e_{\tau'}$ в R' . Так как в R' выполняется теорема Маколея, а $e_{\tau'}$ и $e_{\sigma'}$, как легко видеть, удовлетворяют условиям 1) и 2) (в R'), то по теореме 2.5 имеем $\sigma' \subseteq \tau'$, поэтому $\sigma \subseteq \tau$, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 3.4. Пусть $M \subseteq \mathcal{M}(R_d)$, тогда

$$|\Gamma^R(M)| \geq |\Gamma^R(C_n^R M)|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\begin{aligned} A_1 &= M_{n=1}, & A_0 &= M_{n=0}, \\ B_1 &= (C_n^R M)_{n=1}, & B_0 &= (C_n^R M)_{n=0} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} A'_{-1} &= \Gamma_{-n}^R(A_1), & A'_1 &= \Gamma_n^R(A_1), & A'_0 &= \Gamma^R(A_0), \\ B'_{-1} &= \Gamma_{-n}^R(B_1), & B'_1 &= \Gamma_n^R(B_1), & B'_0 &= \Gamma^R(B_0). \end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \Gamma^R(M) &= A'_{-1} \sqcup (A'_1 \cup A'_0), \\ \Gamma^R(C_n^R M) &= B'_{-1} \sqcup (B'_1 \cup B'_0). \end{aligned}$$

Рассматривая A_0 и B_0 как подмножества в R'_d , получаем, что

$$|B'_0| \leq |A'_0| \tag{3}$$

($I' - M$ -идеал). Аналогично, так как у I нет порождающих, делящихся на e_n , мы можем отождествить $\mathcal{M}(R_d)_{n=1}$ с $\mathcal{M}(R'_{d-1})$ (сократив все элементы $\mathcal{M}(R_d)_{n=1}$ на e_n) и заключить, что

$$|B'_{-1}| \leq |A'_{-1}|. \tag{4}$$

Заметим далее, что множества B'_1 и B'_0 являются $C^{R'}$ -сжатыми (если рассматривать их как подмножества в $\mathcal{M}(R'_{d-1})$), поэтому либо $B'_1 \subseteq B'_0$, либо $B'_0 \subseteq B'_1$. В частности, $|B'_1 \cup B'_0| = \max\{|B'_1|, |B'_0|\}$. Так как $|B'_1| = |A'_1|$, то, используя неравенство (3), получаем

$$|A'_1 \cup A'_0| \geq \max\{|A'_1|, |A'_0|\} \geq \max\{|B'_1|, |B'_0|\} = |B'_1 \cup B'_0|.$$

Теперь, применяя неравенство (4), получаем

$$|\Gamma^R(M)| = |A'_1 \cup A'_0| + |A'_{-1}| \geq |B'_1 \cup B'_0| + |B'_{-1}| = |\Gamma^R(C_n^R M)|,$$

лемма доказана.

ЛЕММА 3.5. Пусть M – n -сжатое, но не обратно I -лекссегментное множество. Если $\max M = \max M_{n=1}$, то

$$|\Gamma^R(M)| \geq |\Gamma^R(M')|,$$

где

$$M' = (M \setminus \{\max M\}) \cup \{\min(\mathcal{M}(R_d) \setminus M)\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $e_\sigma = \max M$, $e_\tau = \min(\mathcal{M}(R_d) \setminus M)$. Если $j \in \tau$, то $e_{(\tau \cup \{n\}) \setminus \{j\}} \in M \setminus \{e_\sigma\}$, следовательно,

$$|\Gamma^R(M')| = |\Gamma^R(M \setminus \{e_\sigma\})| \leq |\Gamma^R(M)|,$$

лемма доказана.

ЛЕММА 3.6. Идеалы $J_I(0), J_I(1) \subseteq E[2 : n]$ являются M -идеалами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как I' является M -идеалом, то по предложению 3.1 $J_{I'}(0), J_{I'}(1) \subseteq E[2 : (n-1)]$ являются M -идеалами. По предположению индукции, идеалы $J_{I'}(0)E[2 : n], J_{I'}(1)E[2 : n] \subseteq E[2 : n]$ тоже являются M -идеалами. Остается заметить, что $J_I(0) = J_{I'}(0)E[2 : n]$ и $J_I(1) = J_{I'}(1)E[2 : n]$.

ЛЕММА 3.7. Пусть M – n -сжатое, но не обратно I -лекссегментное множество. Если $\max M = \max M_{n=0}$ и $\max M$ не делится на e_1 , то

$$|\Gamma^R(M)| \geq |\Gamma^R(C^R M)|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В этом случае в M нет мономов, делящихся на e_1 , и мы можем отождествить M с подмножеством в $\mathcal{M}(R(0)_d)$. По лемме 3.6 $J(0)$ является M -идеалом, следовательно,

$$|\Gamma^R(M)| = |\Gamma^{R(0)}(M)| \geq |\Gamma^{R(0)}(C^{R(0)} M)| = |\Gamma^R(C^R M)|,$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 3.8. Пусть M – n -сжатое, но не обратно I -лекссегментное множество. Если $e_\sigma = \max M = \max M_{n=0}$, $1 \in \sigma$, и $e_{(\sigma \cup \{n\}) \setminus \{1\}} \in M$, то

$$|\Gamma^R(M)| \geq |\Gamma^R(M')|,$$

где

$$M' = M_{1=0} \cup (e_1 \wedge C^{R(1)}(M_{1=1}/e_1)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем отождествить множество $\mathcal{M}(R_d)_{1=1}$ с $\mathcal{M}(R(1)_d)$, сократив все элементы на e_1 . Пусть

$$\begin{aligned} A_1 &= M_{1=1}, & A_0 &= M_{1=0}, & B_1 &= e_1 \wedge C^{R(1)}(\Gamma_1^R(M_{1=1})), \\ A'_1 &= \Gamma_1^R(A_1), & A'_0 &= \Gamma^R(A_0), & A'_{-1} &= \Gamma_{-1}^R(A_1), \\ B'_1 &= \Gamma_1^R(B_1), & B'_{-1} &= \Gamma_{-1}^R(B_1). \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \Gamma^R(M) &= A'_{-1} \sqcup (A'_1 \cup A'_0), \\ \Gamma^R(M') &= B'_{-1} \sqcup (B'_1 \cup A'_0). \end{aligned}$$

Так как $J(1) - M$ -идеал (лемма 3.6), то

$$|A'_{-1}| \geq |B'_{-1}|. \quad (5)$$

Пусть

$$L = \{e_\rho \in \mathcal{M}(R_d) : e_\rho \leq_{\text{lex}} e_{(\sigma \cup \{n\}) \setminus \{1\}}\}.$$

Ясно, что $L \subseteq A_0$. Пусть $e_\tau \in A_1$ и $j \in \tau$. Так как $e_\tau \leq_{\text{lex}} e_\sigma$, то $e_\tau \setminus \{1\} \leq_{\text{lex}} e_\sigma \setminus \{1\}$. Так как множество $L' = \Gamma^R(L)$ обратно I -лекссегментное (лемма 3.3) и $e_\sigma \setminus \{1\} \in L'$, то $e_\tau \setminus \{1\} \in L' \subseteq A'_0$. Таким образом, $A'_1 \subseteq A'_0$. Аналогично $B'_1 \subseteq A'_0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \Gamma^R(M) &= A'_{-1} \sqcup A'_0, \\ \Gamma^R(M') &= B'_{-1} \sqcup A'_0. \end{aligned}$$

Используя неравенство (5), получаем

$$|\Gamma^R(M)| = |A'_{-1}| + |A'_0| \geq |B'_{-1}| + |A'_0| = |\Gamma^R(M')|,$$

лемма доказана.

Рассмотрим отображение $i: M \rightarrow \mathcal{M}(R_d)$, действующее по правилу

$$i(e_\sigma) = \begin{cases} e_{(\sigma \cup \{n\}) \setminus \{1\}}, & \text{если } 1 \in \sigma, n \notin \sigma, e_{(\sigma \cup \{n\}) \setminus \{1\}} \notin M; \\ e_\sigma & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

ЛЕММА 3.9. Пусть M — n -сжатое, но не обратно I -лекссегментное множество. Если $e_\sigma = \max M = \max M_{n=0}$, $1 \in \sigma$, и $e_{(\sigma \cup \{n\}) \setminus \{1\}} \notin M$, то

$$|\Gamma^R(M)| \geq |\Gamma^R(i(M))|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\begin{aligned} A_1 &= M \setminus i(M), & A_0 &= M \cap i(M), & B_1 &= i(M) \setminus M, \\ A'_1 &= \Gamma^R(M) \setminus \Gamma^R(i(M)), & A'_0 &= \Gamma^R(M) \cap \Gamma^R(i(M)), & B'_1 &= \Gamma^R(i(M)) \setminus \Gamma^R(M). \end{aligned}$$

Покажем, что $|A'_1| \geq |B'_1|$. Предположим, что $e_\tau \in B'_1$, в частности, $e_{\tau \cup \{j\}} \in B_1$ для некоторого $j \notin \tau$. Рассмотрим элемент $e_{\tau'} = (e_{(\tau \cup \{j, 1\}) \setminus \{n\}})$. Ясно, что $e_{\tau'} \in A_1$. Заметим также, что $j < n$ (иначе $e_\tau \in \Gamma^R(M)$) и $1 < j$. Пусть $s(e_\tau) = e_{\tau' \setminus \{j\}} = e_{(\tau \cup 1) \setminus \{n\}}$. Покажем, что $s(e_\tau) \in A'_1$. Действительно, если это не так, то $s(e_\tau) \in A'_0 \cup B'_1$. Так как $s(e_\tau)$ делится на e_1 , то $s(e_\tau) \notin B'_1$. Следовательно, $e_{\tau \cup \{t\}} \in A_0$ для некоторого $t \notin \tau$, что невозможно. Таким образом, $s(B'_1) \subseteq A'_1$. Так как отображение s , очевидно, инъективно, то $|B'_1| \leq |A'_1|$. Отсюда следует

$$|\Gamma^R(M)| = |A'_0| + |A'_1| \geq |A'_0| + |B'_1| = |\Gamma^R(i(M))|,$$

лемма доказана.

Завершим теперь доказательство теоремы 3.2. Пусть $M \subseteq \mathcal{M}(R_d)$ – произвольное множество. В силу следствия 2.6 и леммы 3.3 достаточно показать, что

$$|\Gamma^R(M)| \geq |\Gamma^R(C^R M)|.$$

По лемме 3.4 можно считать, что множество M n -сжато. Пусть $N(e_\sigma)$ – номер монома степени d по лексикографическому порядку, начиная с наименьшего, а $N(M)$ – сумма номеров мономов множества M . Проведем индукцию по $N(M)$. База индукции очевидна (минимальное $N(M)$ имеет обратно I -лекссегментное множество). Если же M есть n -сжатое, но не обратно I -лекссегментное множество, то, применяя одну из лемм 3.5, 3.7–3.9, можно перейти к множеству с меньшим $N(M)$, откуда по предположению индукции вытекает утверждение теоремы.

Основное применение теоремы 3.2 будет показано в следующем параграфе, сейчас мы лишь сформулируем одно следствие.

СЛЕДСТВИЕ 3.10 [6], [7]. Нулевой идеал в $E[1 : n]$ является M -идеалом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по n , база индукции при $n = 1$ очевидна, шаг индукции непосредственно вытекает из теоремы 3.2.

§ 4. Теорема Маколея для бесквадратных кусочно лекссегментных идеалов

В этом параграфе мы рассмотрим специальный класс идеалов (так называемые кусочно лекссегментные идеалы), которые являются обобщением лекссегментных идеалов. Подобные идеалы в кольце многочленов изучались в работе [9].

Если $I \subseteq E[1 : n]$ – мономиальный идеал, то обозначим через $G(I)$ его минимальное порождающее множество, состоящее из мономов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Мономиальный идеал $I \subseteq E[1 : n]$ называется *кусочно лекссегментным*, если для любого монома $e_\sigma \in G(I)$ степени d и для любого монома $e_\tau \in E[1 : n]$ степени d такого, что $e_\tau >_{\text{lex}} e_\sigma$ и $\max \tau \leq \max \sigma$, выполнено $e_\tau \in I$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть $I \subseteq E[1 : n]$ – кусочно лекссегментный идеал, тогда

- 1) идеал $I \cap E[1 : l]$ кусочно лекссегментный в $E[1 : l]$;
- 2) идеал $IE[1 : r] \subseteq E[1 : r]$ кусочно лекссегментный при $r > n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оба утверждения следуют непосредственно из определения кусочно лекссегментного идеала.

ЛЕММА 4.3. Мономиальный идеал $I \subseteq E[1 : n]$ является кусочно лекссегментным тогда и только тогда, когда существуют такие лекссегментные идеалы $L_j \subseteq E[1 : j]$, $1 \leq j \leq n$, что

$$I = L_1E[1 : n] + \cdots + L_nE[1 : n].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по n – числу переменных в $E[1 : n]$. База индукции следует из того, что при $n = 1$ всякий кусочно лекссегментный идеал является лекссегментным. Пусть теперь $n > 1$ и при всех $l < n$ теорема уже доказана.

Пусть $I \subseteq E[1 : n]$ – кусочно лекссегментный идеал, тогда по предложению 4.2 идеал $I' = I \cap E[1 : (n - 1)]$ является кусочно лекссегментным, следовательно, по предположению индукции

$$I' = L_1E[1 : (n - 1)] + \cdots + L_{n-1}E[1 : (n - 1)].$$

Рассмотрим все такие мономы $e_\sigma \in G(I)$, что $\max \sigma = n$. Для каждого такого монома e_σ построим множество мономов

$$L(e_\sigma) = \{e_\tau \in E[1 : n] : |\tau| = |\sigma|, e_\tau \geq_{\text{lex}} e_\sigma\},$$

$$L_n = \bigoplus_{\substack{e_\sigma \in G(I) \\ \max \sigma = n}} L(e_\sigma)E[1 : n].$$

Очевидно, L_n – лекссегментный идеал, содержащийся в I . Покажем, что $I = L_1E[1 : n] + \cdots + L_nE[1 : n]$. Положим $J = L_1E[1 : n] + \cdots + L_nE[1 : n]$. Включение $J \subseteq I$ очевидно, так как $L_n \subseteq I$. Докажем теперь, что $I \subseteq J$. Так как I мономиальный, то достаточно доказать, что $e_\sigma \in J$ для всякого монома $e_\sigma \in I$. Действительно, пусть e_τ – минимальная порождающая идеала I , делящая e_σ . Если $\max \tau < n$, то $e_\tau \in L_1E[1 : (n - 1)] + \cdots + L_{n-1}E[1 : (n - 1)]$, следовательно, $e_\sigma \in L_1E[1 : n] + \cdots + L_{n-1}E[1 : n] \subseteq J$. Если $\max \tau = n$, то $e_\sigma \in L_n \subseteq J$.

Докажем теперь, что идеал $I = L_1E[1 : n] + \cdots + L_nE[1 : n]$ является кусочно лекссегментным. По предположению индукции $J = L_1E[1 : (n - 1)] + \cdots + L_{n-1}E[1 : (n - 1)]$ является кусочно лекссегментным. Пусть $e_\sigma \in G(I)$. Если $e_\sigma \in JE[1 : n]$, то $e_\sigma \in J$ (так как это минимальная порождающая) и, следовательно, $e_\sigma \in G(J)$. Поэтому для всякого $e_\tau \in E[1 : n]_{|\sigma|}$ такого, что $\max \tau \leq \max \sigma$ и $e_\tau >_{\text{lex}} e_\sigma$, выполнено $e_\tau \in J \subseteq I$. Если же $e_\sigma \in L_n$, то так как L_n лекссегментный, то для всякого бесквадратного $e_\tau \in E[1 : n]_{|\sigma|}$ такого, что $e_\tau >_{\text{lex}} e_\sigma$, выполнено $e_\tau \in L_n \subseteq I$. Таким образом, I кусочно лекссегментный.

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть $I \subseteq E[1 : n]$ – M -идеал, а $L \subseteq E[1 : n]$ – некоторый лекссементный идеал. Тогда $I + L$ – тоже M -идеал.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

Основным результатом настоящего параграфа является следующая

ТЕОРЕМА 4.5. Всякий кусочно лекссементный идеал I в $E[1 : n]$ является M -идеалом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по n . База индукции при $n = 1$ очевидна. Предположим, что при всех $l < n$ теорема уже доказана. Рассмотрим представление идеала I в виде суммы лекссементных из предыдущей леммы:

$$I = L_1 E[1 : n] + \dots + L_n E[1 : n].$$

Пусть $I' = L_1 E[1 : (n-1)] + \dots + L_{n-1} E[1 : (n-1)] \subseteq E[1 : (n-1)]$. Так как I' кусочно лекссементный, то он является M -идеалом по предположению индукции. Применяя теорему 3.2, получаем, что $I' E[1 : n]$ тоже является M -идеалом. Так как идеал I равен сумме $I' E[1 : n]$ и лекссементного идеала L_n , то он, в свою очередь, также является M -идеалом (см. предыдущую теорему).

СЛЕДСТВИЕ 4.6. Пусть $I \subseteq E[1 : n]$ – кусочно лекссементный идеал, а $J \subseteq E[1 : n]$ – произвольный идеал, содержащий I . Тогда существует единственный I -лекссементный идеал $L^I(J) \subseteq E[1 : n]$, имеющий такую же функцию Гильберта, что и J .

Теперь мы докажем одно важное свойство кусочно лекссементных идеалов: оказывается, что все они являются сильно устойчивыми, т.е. возникают как идеалы старших членов при общей линейной замене переменных¹.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.7. Множество $M \subseteq \mathcal{M}(E[1 : n]_d)$ называется *сильно устойчивым*, если для всякого $e_\sigma \in M$ и для всяких $i \in \sigma, j \notin \sigma$ таких, что $j < i$, имеем $e_{(\sigma \cup \{j\}) \setminus \{i\}} \in M$. Мономиальный идеал $I \subseteq E[1 : n]$ называется *сильно устойчивым*, если все множества $\mathcal{M}(I_d)$ являются сильно устойчивыми.

Множество $M \subseteq \mathcal{M}(E[1 : n]_d)$ называется *обратно сильно устойчивым*, если для всякого $e_\sigma \in M$ и для всяких $i \in \sigma, j \notin \sigma$ таких, что $i < j$, имеем $e_{(\sigma \cup \{j\}) \setminus \{i\}} \in M$. Мономиальный идеал $I \subseteq E[1 : n]$ называется *обратно сильно устойчивым*, если все множества $\mathcal{M}(I_d)$ являются обратно сильно устойчивыми.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.8. Всякий кусочно лекссементный идеал $I \subseteq E[1 : n]$ является сильно устойчивым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $e_\sigma \in G(I)$. В этом случае $e_{(\sigma \cup \{j\}) \setminus \{i\}} \in I$ для всяких $i \in \sigma, j \notin \sigma, j < i$, по определению кусочно лекссементного идеала.

Доказанное предложение позволяет описать не только функции Гильберта идеалов, содержащих некоторый кусочно лекссементный идеал, но и функции Гильберта идеалов, содержащих идеал с кусочно лекссементным общим идеалом старших членов.

¹Здесь имеется в виду общий идеал старших членов относительно обратного лексикографического порядка.

ТЕОРЕМА 4.9. Пусть $I \subseteq E[1 : n]$ – однородный идеал, причем идеал $G = \text{Gin}(I)$ (относительно обратного лексикографического порядка) является кусочно лекссегментным. Если функция $F : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ является функцией Гильберта некоторого однородного идеала J , содержащего I , то существует G -лекссегментный идеал L с функцией Гильберта F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим идеал $J' = \text{Gin}(J)$. Он содержит G и имеет функцию Гильберта F . Так как G кусочно лекссегментный, то последнее эквивалентно существованию G -лекссегментного идеала с функцией Гильберта F (следствие 4.6).

В заключение параграфа мы докажем, что из всех сильно устойчивых идеалов только кусочно лекссегментные являются M -идеалами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.10. Пусть $I \subseteq E[1 : n]$ – сильно устойчивый M -идеал, $R = E[1 : n]/I$. Если существует такой моном $e_\tau \in \mathcal{M}(R_d)$, что $\max \tau < n$ и $e_{\tau \cup \{n\}} \in G(I)$, то для всякого $e_\sigma \in \mathcal{M}(E[1 : n]_{d+1})$ с условием $e_\sigma >_{\text{lex}} e_{\tau \cup \{n\}}$ имеем $e_\sigma \in I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $e_\sigma \in \mathcal{M}(R_{d+1})$ таков, что $e_\sigma >_{\text{lex}} e_{\tau \cup \{n\}}$, но при этом $e_\sigma \notin I$. Из сильной устойчивости идеала I вытекает, что $e_\tau \wedge e_i \in I$ для всех i , откуда, используя теоремы 2.5 и 2.4, получаем требуемое.

ТЕОРЕМА 4.11. Пусть $I \subseteq E[1 : n]$ – сильно устойчивый идеал. Идеал I является M -идеалом тогда и только тогда, когда I кусочно лекссегментный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если I кусочно лекссегментный, то он является M -идеалом по теореме 4.5.

Предположим, что I является M -идеалом, но не является кусочно лекссегментным, т.е. для некоторого $e_\sigma \in G(I)$, $\max \sigma = l \leq n$, существует моном e_τ степени $d = \deg e_\sigma$, $\max \tau \leq l$, больший e_σ , но который не принадлежит I . Для определенности считаем, что e_τ – наименьший моном степени d , больший e_σ , имеющий $\max \tau \leq l$ и не принадлежащий I . Обозначим $\sigma' = \sigma \setminus \{l\}$.

Покажем, что $\max \tau = l$. Действительно, если $\max \tau < l$, то моном $e_{\tau'}$, где $\tau' = (\tau \cup \{1 + \max \tau\}) \setminus \{\max \tau\}$, принадлежит I , так как $e_{\tau'}$ следующий по порядку за e_τ моном (и меньший его), откуда по причине сильной устойчивости идеала I получаем, что $e_\tau \in I$. Противоречие.

Покажем, что $e_{\sigma'} \wedge e_n \notin I$. Предположим противное, тогда из сильной устойчивости идеала I вытекает, что либо $e_{\sigma'} \in I$, либо $e_{\sigma'} \wedge e_n \in G(I)$. Первое невозможно, так как $e_\sigma \in G(I)$. Если же $e_{\sigma'} \wedge e_n \in G(I)$, из предложения 4.10 следует, что в этом случае $e_\tau \in I$. Противоречие.

Пусть j – минимальное число, не принадлежащее σ' , удовлетворяющее условию $e_{\sigma' \cup \{j\}} \notin I$. Так как I сильно устойчивый, то при $t \geq j$, $t \notin \sigma'$ имеем $e_{\sigma' \cup \{t\}} \notin I$, а при $t < j$ имеем $e_{\sigma' \cup \{t\}} \in I$. Рассмотрим множество

$$B = \{e_\rho \in \mathcal{M}(R_d) : e_\rho <_{\text{lex}} e_{\sigma' \cup \{n\}}\} \cup \{e_\rho \in \mathcal{M}(R_d) : e_\tau \geq_{\text{lex}} e_\rho >_{\text{lex}} e_{\sigma' \cup \{j\}}\}.$$

Покажем, что для множества B нарушается теорема Маколея, т.е. $\Gamma^R(C^R B) \not\subseteq C^R \Gamma^R(B)$. Действительно, пусть

$$B' = \{e_\rho \in \mathcal{M}(R_{d-1}) : e_\rho \leq_{\text{lex}} e_{\tau \setminus \{l\}}\}.$$

Тогда $\Gamma^R(B) \subseteq B' \setminus \{e_{\sigma'}\}$. С другой стороны, так как $j > l$, то $e_{(\tau \cup \{n\}) \setminus \{l\}} \in C^R(B)$, поэтому $e_{\tau \setminus \{l\}} \in \Gamma^R(C^R B)$, а так как Γ^R -образ C^R -сжатого множества C^R -сжат (теоремы 2.4 и 2.5), то $\Gamma^R(C^R B) = B'$, т.е.

$$|\Gamma^R(C^R B)| > |\Gamma^R(B)| = |C^R \Gamma^R(B)|.$$

Противоречие.

§ 5. Неравенства для чисел Бетти

Лекссегментные идеалы в кольце многочленов и во внешней алгебре обладают интересными экстремальными свойствами, например, они имеют максимальные числа Бетти среди всех идеалов с фиксированной функцией Гильберта. В этом параграфе мы обобщим это свойство на случай I -лекссегментных идеалов, когда идеал I является кусочно лекссегментным.

Пусть $M \subseteq \mathcal{M}(E[1 : n]_d)$. Положим

$$\begin{aligned} m_i(M) &= |\{e_\sigma \in M : \max \sigma = i\}|, \\ M_i(M) &= |\{e_\sigma \in M : \max \sigma \leq i\}|. \end{aligned}$$

ЛЕММА 5.1. Пусть $I \subseteq E[1 : n]$ – кусочно лекссегментный идеал, $R = E[1 : n]/I$. Если $M \subseteq \mathcal{M}(R_d)$ – обратно сильно устойчивое множество, то $m_n(M) \geq m_n(C^R M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество $M' = C_n^R M$. Оно обратно сильно устойчиво. Действительно, пусть $e_\sigma \in M'$, $i \in \sigma$, $j \notin \sigma$, $i < j$. Если $j < n$, то $e_{(\sigma \cup \{j\}) \setminus \{i\}} \in M'$, так как M' n -сжато.

Пусть $j = n$. Так как идеал $I' = I \cap E[1 : (n-1)]$ является кусочно лекссегментным (предложение 4.2) и, следовательно, M -идеалом (теорема 4.5), то

$$|\Gamma^R(M_{n=0})| \geq |\Gamma^R(M'_{n=0})|.$$

Так как M обратно сильно устойчиво, то

$$\Gamma^R(M_{n=0}) \subseteq \Gamma_n^R(M_{n=1}),$$

откуда следует, что $|\Gamma^R(M'_{n=0})| \leq |\Gamma_n^R(M_{n=1})| = |M_{n=1}| = |M'_{n=1}|$. Заметим далее, что множество $\Gamma^R(M'_{n=0}) \wedge e_n$ n -сжато и, следовательно, $\Gamma^R(M'_{n=0}) \wedge e_n \subseteq M'_{n=1}$. Отсюда $e_{(\sigma \cup \{n\}) \setminus \{i\}} \in M'_{n=1}$.

Заметим далее, что $m_n(M') \geq m_n(C^R M)$. Действительно, так как оба множества M' и $C^R M$ обратно сильно устойчивые, то

$$\Gamma^R(M') = \Gamma^R(M'_{n=1}) \geq \Gamma^R((C^R M)_{n=1}) = \Gamma^R(C^R M),$$

откуда имеем, что $m_n(M') = |M'_{n=1}| \geq |(C^R M)_{n=1}| = m_n(C^R M)$. Замечая, что $m_n(M) = m_n(M')$, окончательно получаем $m_n(M) \geq m_n(C^R M)$.

ЛЕММА 5.2. Пусть $I \subseteq E[1 : n]$ – кусочно лекссегментный идеал, и пусть $R = E[1 : n]/I$. Если $M \cup \mathcal{M}(I_d)$ сильно устойчиво, то для всех i от 1 до n выполнено неравенство

$$M_i(D^R M \cup \mathcal{M}(I_d)) \leq M_i(M \cup \mathcal{M}(I_d)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по n – числу переменных в $E[1 : n]$. При $n = 2$ утверждение очевидно. Предположим, что лемма доказана при $n - 1$, докажем ее при n .

Покажем, что $m_n(D^R M \cup \mathcal{M}(I_d)) \geq m_n(M \cup \mathcal{M}(I_d))$. Действительно, рассмотрим множество $M' = \mathcal{M}(R_d) \setminus M$, это множество обратно сильно устойчиво. По лемме 5.1 $m_n(M') \geq m_n(C^R M')$. Но так как $m_n(M') = m_n(\mathcal{M}(E[1 : n])_d \setminus (\mathcal{M}(I_d) \cup M))$, то $m_n(\mathcal{M}(I_d) \cup M) = m_n(\mathcal{M}(E[1 : n])_d) - m_n(M')$, аналогично $m_n(\mathcal{M}(I_d) \cup D^R M) = m_n(\mathcal{M}(E[1 : n])_d) - m_n(C^R M')$, поэтому $m_n(D^R M \cup \mathcal{M}(I_d)) \geq m_n(M \cup \mathcal{M}(I_d))$.

Рассмотрим идеал $J = I \cap E[1 : (n - 1)] \subseteq E[1 : (n - 1)]$, а также множества

$$S = M \cap E[1 : (n - 1)]_d, \quad T = D^R M \cap E[1 : (n - 1)]_d.$$

Пусть $R' = E[1 : (n - 1)]/J$. Идеал J является кусочно лекссегментным по предложению 4.2, кроме того, множество $S \cup J_d$ является сильно устойчивым, а $T - J$ -лекссегментным. Заметим, что $\mathcal{M}(J_d) = \{e_\sigma \in \mathcal{M}(I_d) : \max \sigma < n\}$, поэтому

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}(J_d) \cup S| &= |\mathcal{M}(I_d) \cup M| - |m_n(\mathcal{M}(I_d) \cup M)|, \\ |\mathcal{M}(J_d) \cup T| &= |\mathcal{M}(I_d) \cup D^R M| - |m_n(\mathcal{M}(I_d) \cup D^R M)|, \end{aligned}$$

а также

$$M_i(S \cup J_d) = M_i(M \cup \mathcal{M}(I_d)), \quad (6)$$

$$M_i(T \cup J_d) = M_i(D^R M \cup \mathcal{M}(I_d)) \quad (7)$$

при i от 1 до $n - 1$. Заметим далее, что

$$\begin{aligned} |S| &= |\mathcal{M}(J_d) \cup S| - |\mathcal{M}(J_d)| = |\mathcal{M}(I_d) \cup M| - |m_n(\mathcal{M}(I_d) \cup M)| - |\mathcal{M}(J_d)| \\ &\geq |\mathcal{M}(I_d) \cup D^R M| - |m_n(\mathcal{M}(I_d) \cup D^R M)| - |\mathcal{M}(J_d)| = |T|. \end{aligned}$$

Пусть S' – такое подмножество в S , что $S' \cup \mathcal{M}(J_d)$ является сильно устойчивым (в $E[1 : (n - 1)]$) и $|S'| = |T|$, т.е. $T = D^{R'} S'$ (для получения S' можно, например, убрать из S нужное количество младших мономов). По предположению индукции

$$M_i(T \cup \mathcal{M}(J_d)) \leq M_i(S' \cup \mathcal{M}(J_d))$$

при i от 1 до $n - 1$. А так как $S' \subseteq S$, то

$$M_i(T \cup \mathcal{M}(J_d)) \leq M_i(S \cup \mathcal{M}(J_d)).$$

Используя равенства (6) и (7), получаем

$$M_i(D^R M \cup \mathcal{M}(I_d)) \leq M_i(M \cup \mathcal{M}(I_d))$$

при i от 1 до $n - 1$. Осталось доказать лишь, что

$$M_n(D^R M \cup \mathcal{M}(I_d)) \leq M_n(M \cup \mathcal{M}(I_d)),$$

но это очевидно, так как

$$M_n(D^R M \cup \mathcal{M}(I_d)) = |D^R M \cup \mathcal{M}(I_d)| = |M \cup \mathcal{M}(I_d)| = M_n(M \cup \mathcal{M}(I_d)).$$

Лемма доказана.

Следующая теорема является обобщением результата статьи [11], в которой был рассмотрен случай $I = 0$.

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть $I \subseteq E[1 : n]$ – кусочно лекссегментный идеал, а $J \subseteq E[1 : n]$ – произвольный однородный идеал, содержащий I . Тогда для всех i и j выполнено неравенство

$$\beta_{ij}^{E[1:n]}(E[1 : n]/J) \leq \beta_{ij}^{E[1:n]}(E[1 : n]/L^I(J)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим идеал $\text{Gin}(J) \subseteq E[1 : n]$ относительно обратного лексикографического порядка. Как известно, этот идеал имеет такую же, как у J , функцию Гильберта, сильно устойчив [11; предложение 1.7], а также для всех i и j выполнено следующее неравенство [11; предложение 1.8]:

$$\beta_{ij}^{E[1:n]}(E[1 : n]/J) \leq \beta_{ij}^{E[1:n]}(E[1 : n]/\text{Gin}(J)).$$

Кроме того, так как идеал I является сильно устойчивым, то $I \subseteq \text{Gin}(J)$ и $L^I(J) = L^I(\text{Gin}(J))$. Таким образом, можно считать, что идеал J сильно устойчивый. Используя лемму 5.2 и дословно повторяя рассуждения из [11; док-во теоремы 4.4], получаем требуемое.

Пусть $J \subseteq E[1 : n]$ – некоторый однородный идеал. Каждому многочлену $f(e_1, \dots, e_n) \in J$ мы можем сопоставить многочлен $f(x_1, \dots, x_n)$ в кольце коммутативных многочленов $A[1 : n] = k[x_1, \dots, x_n]$. Идеал в $A[1 : n]$, порожденный всеми такими многочленами $f(x_1, \dots, x_n)$, обозначим через $S(J)$.

Следующая теорема является обобщением результата статьи [10], в которой был рассмотрен случай $I = 0$.

ТЕОРЕМА 5.4. Пусть $I \subseteq E[1 : n]$ – кусочно лекссегментный идеал, а $J \subseteq E[1 : n]$ – произвольный однородный идеал, содержащий I . Тогда для всех i и j выполнено неравенство

$$\beta_{ij}^{A[1:n]}(A[1 : n]/S(J)) \leq \beta_{ij}^{A[1:n]}(A[1 : n]/S(L^I(J))).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [10] показано, что для всякого однородного идеала $J \subseteq E[1 : n]$, содержащего сильно устойчивый идеал I , существует сильно устойчивый идеал $J' \subseteq E[1 : n]$ с такой же функцией Гильберта, причем

$$\beta_{ij}^{A[1:n]}(A[1 : n]/S(J)) \leq \beta_{ij}^{A[1:n]}(A[1 : n]/S(J'))$$

для всех i и j . Кроме того, $I \subseteq J'$. Таким образом, можно считать, что идеал J сильно устойчивый. Используя лемму 5.2 и дословно повторяя рассуждения из [13; док-во теоремы 4.4], получаем требуемое.

§ 6. I -гоцмановы идеалы и их числа Бетти

В этом параграфе мы рассмотрим множества, экстремальные в смысле теоремы Маколея, т.е. такие множества $M \subseteq R_d$, для которых неравенство

$$|\Delta^R(D^R M)| \leq |\Delta^R(M)|$$

превращается в равенство. Если $R = E$, т.е. $I = 0$, то векторное пространство, порожденное мономами экстремального множества $M \subseteq E_d$, называется *гоцмановым*. Известно, что в случае $I = 0$ гоцмановы пространства обладают свойством устойчивости, т.е. если M гоцманово, то $D^R(M)$ – тоже (см. [11]). Здесь мы обобщаем этот результат на случай, когда I кусочно лекссегментный.

Пусть I – кусочно лекссегментный идеал, $R = E[1 : n]/I$ и $\delta(I)$ есть максимальная степень порождающих идеала I , т.е. $\delta(I) = \max\{\deg u : u \in G(I)\}$.

Пусть $I \subseteq E[1 : n]$ – мономиальный идеал, $R = E[1 : n]/I$. Если $V \subseteq R_d$ – некоторое векторное пространство, то через $D^R V$ обозначим I -лекссегментное векторное пространство, имеющее размерность, равную размерности V . Кроме того, если $W \subseteq E[1 : n]_d$ – векторное пространство и $I_d \subseteq W$, то положим $L^I(W) = I_d + D^R(W \cap R_d)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Векторное пространство $V \subseteq E[1 : n]_d$ называется *I -гоцмановым*, если выполнены следующие условия:

- 1) $d \geq \delta(I) = \max\{\deg u : u \in G(I)\}$;
- 2) $I_d \subseteq V$;
- 3) $\dim eV = \dim eL^I(V)$.

Будем называть однородный идеал J *I -гоцмановым*, если все пространства J_d являются I -гоцмановыми при $d \geq \delta(I)$ и $J_d = I_d$ при $d < \delta(I)$.

Следующая теорема обобщает теорему Гоцмана для внешних алгебр [11].

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть $I \subseteq E[1 : n]$ – кусочно лекссегментный идеал, $V \subseteq E_d$ – I -гоцманово векторное пространство, тогда eV тоже I -гоцманово.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $I_{d+1} \subseteq eV$. Поэтому достаточно показать, что пространство $e(V)$ имеет нужную размерность.

Доказательство следующей простой леммы можно найти в [13].

ЛЕММА 6.3. Пусть $V \subseteq E[1 : n]_d$ – сильно устойчивое пространство, тогда

- 1) для всякого i от 1 до n $m_i(eV) = M_{i-1}(V)$;
- 2) $\dim eV = \sum_{i=1}^{n-1} M_i(V)$.

Доказательство теоремы 6.2 начнем с рассмотрения случая сильно устойчивого векторного пространства.

ЛЕММА 6.4. Пусть $V \subseteq E[1 : n]_d$ – сильно устойчивое I -гоцманово пространство, тогда $V' = eV$ тоже I -гоцманово.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, по лемме 6.3.2)

$$\sum_{i=1}^{n-1} M_i(V) = \dim eV = \dim eL^I(V) = \sum_{i=1}^{n-1} M_i(L^I(V))$$

(среднее равенство – в силу I -гоцмановости V), следовательно, по лемме 5.2 получаем, что для всякого i от 1 до n выполняются равенства $M_i(V) = M_i(L^I(V))$ и $m_i(V) = m_i(L^I(V))$. Далее, снова по лемме 6.3.2) и 1)

$$\dim eV' = \sum_{i=1}^{n-1} M_i(V') = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{i-1} M_j(V) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{i-1} M_j(L^I(V)) = \dim e(L^I(V)).$$

Осталось заметить, что $eL^I(V) = L^I(V')$.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть W – идеал, порожденный V . Рассмотрим далее идеал $J = \text{Gin}(W)$. Этот идеал сильно устойчив, кроме того, $I_t \subseteq J$ при $t \geq d$ (I сильно устойчивый). Так как

$$\dim eW_d = \dim J_{d+1} \geq \dim eJ_d \geq \dim eW_d$$

(последнее неравенство – по теореме 4.5 и в силу I -гоцмановости W_d), то $J_{d+1} = eJ_d$ и $\dim eJ_d = \dim eW_d$, т.е. J_d I -гоцманово. По лемме 6.4 получаем, что J_{d+1} I -гоцманово. Если показать, что $J_{d+2} = eJ_{d+1}$, то получим, что $W_{d+1} = eV$ I -гоцманово. Иными словами, нужно показать, что у идеала J нет минимальных порождающих степени $d+2$.

Переход от идеала W к $J = \text{Gin}(W)$ можно осуществить в два этапа. Сначала при помощи общей линейной замены переменных перейти к идеалу W' , очевидно, что у идеала W' будут порождающие только степени d (как и у W); а затем взять идеал старших членов $\text{In}(W')$ идеала W' относительно обратного лексикографического порядка, тогда $\text{In}(W') = \text{Gin}(W)$. Таким образом, достаточно показать, что при переходе от W' к $\text{In}(W')$ порождающие степени $d+2$ не появятся.

Предположим, что у $\text{In}(W')$ есть порождающая степени $d+2$, т.е. существуют такие $f_{ij} \in W'_d$ со старшими коэффициентами 1 и $\lambda_{ij} \in k \setminus \{0\}$, что для любых k, l и для любого $f \in W'_d$ выполнено

$$\text{Lm}\left(\sum_{i < j} (-1)^{\mu(i,j,f_{ij})} \lambda_{ij} e_i \wedge e_j \wedge f_{ij}\right) \neq \text{Lm}((-1)^{\mu(k,l,f)} e_k \wedge e_l \wedge f).$$

Здесь $\mu(s, t, f)$ выбирается так, чтобы многочлен

$$(-1)^{\mu(s,t,f)} e_s \wedge e_t \wedge f$$

имел старший коэффициент 1. Пусть

$$f_0 = \sum_{i < j} \lambda_{ij} (-1)^{\mu(i,j,f_{ij})} e_i \wedge e_j \wedge f_{ij},$$

$m = \text{Lm}(f_0)$, $M = \max_{i < j} \text{Lm}(e_i \wedge e_j \wedge f_{ij})$. Будем считать, что данное представление f_0 в виде $\text{Lm}(\sum_{i < j} \lambda_{ij} (-1)^{\mu(i,j,f_{ij})} e_i \wedge e_j \wedge f_{ij})$ имеет минимальное число слагаемых, у которых старший член равен M . Заметим, что $M > m$, поэтому таких слагаемых по крайней мере два, пусть эти слагаемые суть $\lambda_{ij} (-1)^{\mu(i,j,f_{ij})} e_i \wedge e_j \wedge f_{ij}$ и $\lambda_{lk} (-1)^{\mu(k,l,f_{kl})} e_k \wedge e_l \wedge f_{lk}$ ($i < j$, $k < l$). Так как равенство $e_i \wedge e_j = e_k \wedge e_l$ невозможно (иначе число слагаемых можно уменьшить), то считаем, что $i < l$. Пусть $\text{Lm}(f_{ij}) = e_\sigma$, разберем два случая.

Если $l \in \sigma$, то, так как идеал $\text{In}(W')$ сильно устойчивый, имеем $e_{(\sigma \cup \{i\}) \setminus \{l\}} = \text{Lm}(f)$ для некоторого $f \in W'_d$ со старшим коэффициентом 1, следовательно, $\text{Lm}(e_j \wedge e_l \wedge f) = M$, поэтому

$$f_0 = \lambda_{ij} e_j \wedge h_1 + \lambda_{lk} e_l \wedge h_2 + (\lambda_{ij} + \lambda_{lk}) (-1)^{\mu(j,l,f)} e_j \wedge e_l \wedge f + \text{остальные члены},$$

где

$$\begin{aligned} h_1 &= (-1)^{\mu(j,i,f_{ij})} e_i \wedge f_{ij} - (-1)^{\mu(j,l,f)} e_l \wedge f, \\ h_2 &= (-1)^{\mu(l,k,f_{kl})} e_k \wedge f_{lk} - (-1)^{\mu(l,j,f)} e_j \wedge f. \end{aligned}$$

Рассмотрим многочлен h_1 . Так как $\text{In}(W')$ не имеет порождающих степени $d+1$, то из теории базисов Гребнера следует, что $h_1 = \sum_{p=1}^s \lambda_p e_{s_p} \wedge f_p$, где $f_p \in W'_d$, причем $\text{Lm}(e_{s_p} \wedge f_p) \leq \text{Lm}(f_1) < M/e_j$. Аналогично, $h_2 = \sum_{p=1}^t \mu_p e_{t_p} \wedge g_p$, где $\text{Lm}(e_{t_p} \wedge g_p) < M/e_l$. Таким образом,

$$\begin{aligned} f_0 &= \lambda_{ij} e_j \wedge \left(\sum_{p=1}^s \lambda_p e_{s_p} \wedge f_p \right) + \lambda_{lk} e_l \wedge \left(\sum_{p=1}^t \mu_p e_{t_p} \wedge g_p \right) \\ &\quad + (\lambda_{ij} + \lambda_{lk}) (-1)^{\mu(j,l,f)} e_j \wedge e_l \wedge f + \text{остальные члены}. \end{aligned}$$

Заметим, что число членов, имеющих старший член M , уменьшилось, что невозможно. Противоречие.

Если же $l \notin \sigma$, то $l = j$ и тогда

$$f_0 = \lambda_{ij} e_l \wedge h + (\lambda_{ij} + \lambda_{lk}) (-1)^{\mu(l,k,f_{lk})} e_l \wedge e_k \wedge f_{lk} + \text{остальные члены},$$

где

$$h = (-1)^{\mu(l,i,f_{li})} e_i \wedge f_{ij} - (-1)^{\mu(l,k,f_{lk})} e_k \wedge f_{lk}.$$

Рассуждая, как и выше, получаем, что $h = \sum_{p=1}^s \lambda_p e_{s_p} \wedge f_p$, причем $\text{Lm}(x_{s_p} f_p) < M/e_l$, поэтому

$$\begin{aligned} f_0 &= \lambda_{ij} e_l \wedge \left(\sum_{p=1}^s \lambda_p e_{s_p} \wedge f_p \right) \\ &\quad + (\lambda_{ij} + \lambda_{lk}) (-1)^{\mu(l,k,f_{lk})} e_l \wedge e_k \wedge f_{lk} + \text{остальные члены}. \end{aligned}$$

Снова число членов, имеющих старший член M , уменьшилось. Противоречие. Теорема 6.2 доказана полностью.

Следующая теорема показывает, что I -гоцманов идеал и соответствующий ему I -лекссегментный идеал имеют сходные гомологические характеристики.

ТЕОРЕМА 6.5. Пусть I – кусочно лекссегментный идеал, J – I -гоцманов идеал, тогда J и $L^I(J)$ имеют одинаковые градуированные числа Бетти (как модули над $E[1 : n]$).

Для доказательства нам потребуется следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.6. Однородный идеал $J \subseteq E[1 : n]$ называется *покомпонентно линейным*, если для всякого d идеал $J_{(d)}$, порожденный пространством J_d , имеет линейную резольвенту.

Докажем сначала несколько вспомогательных утверждений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.7. Пусть идеал $K \subseteq E[1 : n]$ имеет d -линейную резольвенту, тогда идеал eK имеет $(d + 1)$ -линейную резольвенту.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим короткую точную последовательность $E[1 : n]$ -модулей:

$$0 \longrightarrow eK \longrightarrow K \longrightarrow K/eK \longrightarrow 0.$$

Ей соответствует длинная точная последовательность

$$\begin{aligned} & \cdots \longrightarrow T_{i+1, i+j}(K/eK) \\ \longrightarrow & T_{i, i+j}(eK) \longrightarrow T_{i, i+j}(K) \longrightarrow T_{i, i+j}(K/eK) \\ \longrightarrow & T_{i-1, i+j}(eK) \longrightarrow \cdots, \end{aligned}$$

где $T_{i, i+j}(\cdot) = \text{Tor}_{i, i+j}^{E[1:n]}(\cdot, k)$. По условию идеал K имеет d -линейную резольвенту, следовательно $T_{i, i+j}(K) = 0$ при $j \neq d$. Кроме того, K/eK есть векторное пространство с базисом из элементов степени d , следовательно, $T_{i, i+j}(K/eK) = 0$ при $j \neq d$. Поэтому, используя длинную точную последовательность, получаем, что $T_{i, i+j}(eK) = 0$ при $j > d + 1$. Заметим также, что так как eK порожден элементами степени $d + 1$, то $T_{i, i+j}(eK) = 0$ при $j < d + 1$. Таким образом, eK имеет $(d + 1)$ -линейную резольвенту. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.8. Пусть $K \subseteq E[1 : n]$ – покомпонентно линейный идеал, тогда

$$\beta_{i, i+d}^{E[1:n]}(K) = \beta_i^{E[1:n]}(K_{(d)}) - \beta_i^{E[1:n]}(eK_{(d-1)}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию идеал $K_{(d)}$ имеет d -линейную резольвенту. Кроме того, по предложению 6.7 идеал $eK_{(d-1)}$ имеет d -линейную резольвенту.

Пусть $\gamma(K) = \min\{\deg u : u \in G(K)\}$. Проведем индукцию по $l = \delta(K) - \gamma(K)$. База индукции при $l = 0$ очевидна. Пусть $l > 0$.

Рассмотрим идеал K' , порожденный всеми элементами идеала K , имеющими степень меньше $\delta(K)$. Из предложения 6.7 следует, что этот идеал является покомпонентно линейным. По предположению индукции

$$\beta_{i, i+d}^{E[1:n]}(K') = \beta_i^{E[1:n]}(K'_{(d)}) - \beta_i^{E[1:n]}(eK'_{(d-1)}).$$

Так как градуированные компоненты идеалов K' и K совпадают до степени $\delta(K) - 1$ включительно, то

$$\beta_{i, i+d}^{E[1:n]}(K') = \beta_{i, i+d}^{E[1:n]}(K)$$

при $d < \delta(K)$. Кроме того, $K'_{(d)} = K_{(d)}$ и $eK'_{(d)} = eK_{(d)}$ при $d < \delta(K)$. Следовательно,

$$\beta_{i,i+d}^{E[1:n]}(K) = \beta_i^{E[1:n]}(K_{(d)}) - \beta_i^{E[1:n]}(eK_{(d-1)})$$

при $d < \delta(K)$. Рассмотрим далее короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow K' \oplus M \longrightarrow K \longrightarrow 0,$$

где $N = eK_{(\delta(K)-1)}$ и $M = K_{(\delta(K))}$. Ей соответствует длинная точная последовательность

$$\begin{array}{ccccccc} & & \cdots & & \longrightarrow & T_{i+1,i+j}(K) & \\ \longrightarrow & T_{i,i+j}(N) & \longrightarrow & T_{i,i+j}(K') \oplus T_{i,i+j}(M) & \longrightarrow & T_{i,i+j}(K) & \\ \longrightarrow & T_{i-1,i+j}(N) & \longrightarrow & \cdots & & & \end{array}$$

Модули M и N имеют $\delta(K)$ -линейные резольвенты. Из предположения индукции вытекает, что $T_{i,i+d}(K') = 0$ при $d \geq \delta(K)$. Поэтому из длинной точной последовательности вытекает, что

$$\beta_{i,i+d}^{E[1:n]}(K) = 0 = \beta_i^{E[1:n]}(K_{(d)}) - \beta_i^{E[1:n]}(eK_{(d-1)})$$

при $d > \delta(K)$. Кроме того, имеем следующую точную последовательность:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & T_{i+1,i+\delta(K)}(K') & \longrightarrow & T_{i+1,i+\delta(K)}(K) & & \\ \longrightarrow & T_{i,i+\delta(K)}(N) & \longrightarrow & T_{i,i+\delta(K)}(M) & \longrightarrow & T_{i,i+j}(K) & \\ \longrightarrow & 0. & & & & & \end{array}$$

Так как выше было показано, что $T_{i+1,i+\delta(K)}(K') \cong T_{i+1,i+\delta(K)}(K)$, то

$$\begin{aligned} \beta_{i,i+\delta(K)}^{E[1:n]}(K) &= \beta_{i,i+\delta(K)}^{E[1:n]}(M) - \beta_{i,i+\delta(K)}^{E[1:n]}(N) \\ &= \beta_i^{E[1:n]}(K_{(\delta(K))}) - \beta_i^{E[1:n]}(eK_{(\delta(K)-1)}), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.9. Пусть $V \subseteq E[1 : n]_d$ — I -гоцманово пространство и J — идеал, порожденный V , тогда идеал $\text{Gin}(J)$ порожден I -гоцмановым пространством $\text{Gin}(J)_d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 3.2 все пространства J_t при $t \geq d$ будут I -гоцмановыми, следовательно,

$$\dim e\text{Gin}(J)_t \leq \dim \text{Gin}(J)_{t+1} = \dim J_{t+1} = \dim eJ_t \leq \dim e\text{Gin}(J)_t$$

(последнее неравенство — в силу I -гоцмановости пространства J_t). Следовательно, $\dim e\text{Gin}(J)_t = \dim eJ_t$, т.е. $\text{Gin}(J)_t$ — I -гоцманово при всех $t \geq d$. Кроме того, $\dim e\text{Gin}(J)_t = \dim \text{Gin}(J)_{t+1}$, т.е. у $\text{Gin}(J)$ нет порождающих степеней больше d .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.10. *Всякий I -гоцманов идеал J является покомпонентно линейным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим идеал $J_{(d)}$, порожденный пространством J_d . Если $d < \delta(I)$, то $J_d = I_d$, т.е. $J_{(d)}$ – сильно устойчивый идеал. Как известно (см., например, [11]), сильно устойчивые идеалы, порожденные элементами одной степени, имеют линейные резольвенты.

Пусть $d \geq \delta(I)$. По предложению 6.9 идеал $\text{Gin}(J_{(d)})$ порожден элементами одной степени, кроме того, он сильно устойчив, следовательно, он имеет линейную резольвенту. Так как при переходе от $J_{(d)}$ к $\text{Gin}(J_{(d)})$ градуированные числа Бетти не убывают [11], то и $J_{(d)}$ имеет линейную резольвенту.

ЛЕММА 6.11. *Пусть J – I -гоцманов сильно устойчивый идеал, тогда J и $L^I(J)$ имеют одинаковые градуированные числа Бетти.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При доказательстве леммы 6.4 было показано, что $m_j(J_d) = m_j(L^I(J)_d)$ и $M_j(J_d) = M_j(L^I(J)_d)$ для всех d и j . Из формул для чисел Бетти сильно устойчивых идеалов [11] следует, что $\beta_{i,i+j}^{E[1:n]}(J)$ полностью определяется числами $m_l(J_j)$ и $M_l(J_{j-1})$, $l = 1, \dots, n$, аналогично, число Бетти $\beta_{i,i+j}(L^I(J))$ полностью определяется числами $m_l(L^I(J)_j)$ и $M_l(L^I(J)_{j-1})$, $l = 1, \dots, n$. Таким образом, $\beta_{i,i+j}^{E[1:n]}(J) = \beta_{i,i+j}^{E[1:n]}(L^I(J))$.

ЛЕММА 6.12. *Пусть $J \subseteq E[1 : n]$ – I -гоцманов идеал, тогда $\text{Gin}(J)$ тоже I -гоцманов и имеет такие же градуированные числа Бетти.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что идеал $\text{Gin}(J)$ будет I -гоцмановым, следует из сильной устойчивости идеала I и предложения 6.9. Таким образом, оба идеала J и $\text{Gin}(J)$ являются покомпонентно линейными (предложение 6.10), и их числа Бетти определяются числами Бетти идеалов $J_{(d)}$, $eJ_{(d)}$ и $\text{Gin}(J)_{(d)}$, $e\text{Gin}(J)_{(d)}$ соответственно (предложение 6.8). Поэтому достаточно показать, что $\beta_i^{E[1:n]}(J_{(d)}) = \beta_i^{E[1:n]}(\text{Gin}(J)_{(d)})$ и $\beta_i^{E[1:n]}(eJ_{(d)}) = \beta_i^{E[1:n]}(e\text{Gin}(J)_{(d)})$.

Рассмотрим $J_{(d)}$ и $\text{Gin}(J)_{(d)}$. Эти идеалы имеют линейные резольвенты и одинаковые функции Гильберта, следовательно, их числа Бетти совпадают. Аналогичное рассуждение проходит для $eJ_{(d)}$ и $e\text{Gin}(J)_{(d)}$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.5. Пусть J – I -гоцманов идеал, по лемме 6.12 $\text{Gin}(J)$ тоже I -гоцманов и имеет такие же градуированные числа Бетти, что и J . Над полем характеристики нуль общий идеал старших членов является сильно устойчивым, поэтому для завершения доказательства достаточно применить лемму 6.11.

В случае, когда идеал J мономиальный, аналог теоремы 6.5 справедлив и для чисел Бетти над кольцом многочленов.

ТЕОРЕМА 6.13. *Пусть $I \subseteq E[1 : n]$ – кусочно лекссегментный идеал, J – мономиальный I -гоцманов идеал, тогда $S(J)$ и $S(L^I(J))$ имеют одинаковые градуированные числа Бетти (как модули над $A[1 : n]$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в работе [14] показано, что справедливо равенство формальных степенных рядов:

$$\sum_{i \geq 0} \sum_{j=0}^n \beta_{ij}^{E[1:n]}(E[1:n]/K) t^i s^j = \sum_{i \geq 0} \sum_{j=0}^n \beta_{ij}^{A[1:n]}(A[1:n]/S(K)) \frac{t^i s^j}{(1-ts)^j}.$$

Отсюда следует, что числа Бетти $\beta_{ij}^{E[1:n]}(E[1:n]/K)$ полностью определяют числа Бетти $\beta_{ij}^{A[1:n]}(A[1:n]/S(K))$. Теперь для доказательства достаточно применить теорему 6.5.

Список литературы

1. *Hochster M.* Cohen–Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes // Ring Theory II, Proc. 2nd Okla. Conf., 1975 / ed. B.R. McDonald and R. Morris. New York: Dekker, 1977. P. 171–223.
2. *Stanley R. P.* Combinatorics and commutative algebra. Boston: Birkhäuser, 1983. (Progr. Math. V. 41.)
3. *Gotzmann G.* Eine Bedingung für die Flachheit und das Hilbertpolynom eines graduierten Ringes // Math. Z. 1978. V. 158. P. 61–70.
4. *Bigatti A. M.* Upper bounds for the Betti numbers of a given Hilbert function // Comm. Algebra. 1993. V. 21. № 7. P. 2317–2334.
5. *Hulett H. A.* Maximum Betti numbers of homogeneous ideals with a given Hilbert function // Comm. Algebra. 1993. V. 21. № 7. P. 2335–2350.
6. *Kruskal J.* The number of simplices in a complex // Mathematical optimization techniques / ed. R. Bellman. Berkeley: University of California Press, 1963. P. 251–278.
7. *Katona G.* A theorem for finite sets // Theory of graphs / ed. P. Erdős and G. Katona. New York: Academic Press, 1968. P. 187–207.
8. *Macaulay F. S.* Some properties of enumeration in the theory of modular systems // Proc. London Math. Soc. (2). 1927. V. 26. № 2. P. 531–555.
9. *Шакин Д. А.* Кусочно лексsegmentные идеалы // Матем. сб. 2003. V. 194. № 11. P. 197–224.
10. *Aramova A., Herzog J., Hibi T.* Shifting operations and graded Betti numbers // J. Algebraic Combin. 2000. V. 12. № 3. P. 207–222.
11. *Aramova A., Herzog J., Hibi T.* Gotzmann theorems for exterior algebras and combinatorics // J. Algebra. 1997. V. 191. № 1. P. 174–211.
12. *Шакин Д. А.* О некоторых обобщениях комбинаторной теоремы Маколея на случай факторколец // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 9. С. 143–160.
13. *Aramova A., Herzog J., Hibi T.* Squarefree lexsegment ideals // Math. Z. 1998. V. 228. № 2. P. 353–378.
14. *Aramova A., Avramov L. L., Herzog J.* Resolutions of monomial ideals and cohomology over exterior algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 2000. V. 352. № 2. P. 579–594.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
E-mail: dshakin@online.ru

Поступила в редакцию
26.03.2004