Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. М. Дюкарев, О неопределенности интерполяционных задач в классе Стилттьеса,
Матем. сб., 2005, том 196, номер 3, 61–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1276>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 09:59:10

УДК 517.5

Ю. М. Дюкарев

О неопределенности интерполяционных задач в классе Стильтеса

В статье введено понятие упорядоченных семейств интерполяционных задач в классе Стильтеса. С помощью упорядоченных семейств введено понятие предельной интерполяционной задачи в классе Стильтеса. Доказано, что у предельной интерполяционной задачи существует решение. Для предельной интерполяционной задачи в классе Стильтеса получен критерий полной неопределенности. Во вполне неопределенном случае дано описание всех решений в терминах дробно-линейных преобразований. Общие построения проиллюстрированы на примерах проблемы моментов Стильтеса и задачи Неванлинны–Пика в классе Стильтеса.

Библиография: 21 название.

Введение

В последние два десятилетия в статьях многих авторов были предложены общие подходы к решению различных интерполяционных проблем типа задачи Неванлинны–Пика, задачи Каратеодори, проблем моментов Гамбургера и Стильтеса и т. д. В этих работах можно выделить два основных направления исследований: интерполяция в классе неванлинновских функций и интерполяция в классе стилтесовских функций. В том и другом случаях рассматривают близкие по постановкам задачи, но методы их решения существенно различаются. Общие подходы к теории интерполяционных задач для неванлинновских функций были предложены в статьях [1]–[5], а для стилтесовских функций – в статьях [6]–[8]. В этой статье мы будем рассматривать только интерполяционные задачи для стилтесовских функций.

В процитированных выше работах интерполяционные задачи решались так, чтобы сразу оказались выполненными все интерполяционные условия. Однако многие интерполяционные задачи нельзя решить непосредственно по такой схеме. Примерами являются проблема моментов Стильтеса с бесконечным числом заданных моментов, задача Неванлинны–Пика для стилтесовских функций с бесконечным числом узлов интерполяции и им подобные проблемы. Именно по этой причине в статьях [6]–[8] для дискретного случая рассматривались только интерполяционные задачи с конечным числом узлов интерполяции.

В классической теории дискретные интерполяционные задачи с бесконечным числом узлов интерполяции (см. [9]–[11]) решались по следующей схеме. Сначала решается усеченная интерполяционная задача, в которой должны выполняться лишь первые n интерполяционных условий. После этого, устремляя n к бесконечности, рассматриваем интерполяционную задачу с бесконечным числом узлов интерполяции, которую естественно назвать предельной интерполяционной задачей.

При этом удастся выяснить условия неопределенности задачи с бесконечным числом узлов интерполяции и дать описание множества всех решений для неопределенного случая. Следует подчеркнуть, что к настоящему времени не были предложены достаточно общие подходы, являющиеся обобщением изложенной идеи решения интерполяционных задач для неванлинновских или стилтьесовских функций.

В этой статье предложен общий подход к исследованию предельных интерполяционных задач для стилтьесовских оператор-функций (о.ф.), который содержит в себе все основные идеи метода перехода от усеченных интерполяционных задач к предельной интерполяционной задаче. При этом усеченные задачи могут иметь весьма сложную структуру, их совокупность не обязана быть счетным множеством, а две соседние задачи могут отличаться друг от друга произвольным множеством дополнительных интерполяционных условий. В статье используются многие идеи и методы подхода В. П. Потапова к решению интерполяционных задач [12]–[15].

И, заканчивая введение, перечислим основные новые понятия и результаты статьи.

В §1 приведена несколько модифицированная по сравнению с [6]–[8] обобщенная интерполяционная задача стилтьесовского типа. В таком виде интерполяционная задача лучше приспособлена для наших целей.

В §2 исследованы фундаментальные свойства главных решений обобщенной интерполяционной задачи (теорема 2) и вводятся операторные интервалы Вейля (определение 7). Эти интервалы при интерполяции в классе стилтьесовских функций являются аналогами кругов Вейля при интерполяции в классе неванлинновских функций.

В §3 вводится понятие унитарной эквивалентности двух обобщенных интерполяционных задач (определение 8) и доказано совпадение множеств решений унитарно эквивалентных задач (лемма 2). Далее вводится понятие упорядоченности двух интерполяционных задач стилтьесовского типа (определение 10) и доказывается естественная упорядоченность по включению соответствующих множеств решений и интервалов Вейля (теорема 3).

В §4 вводятся понятия упорядоченного семейства обобщенных интерполяционных задач, предельной интерполяционной задачи и множества ее решений (определения 11, 12). Доказывается существование главных решений предельной интерполяционной задачи (теорема 4) и вводится понятие предельных интервалов Вейля (определение 13).

В §5 доказывается инвариантность рангов предельных интервалов Вейля (48), вводится понятие полной неопределенности предельной интерполяционной задачи (определение 14) и доказывается критерий полной неопределенности предельной интерполяционной задачи (теорема 5).

В §6 указана специальная нормировка (53) резольвентных матриц усеченных интерполяционных задач. При такой нормировке семейство резольвентных матриц усеченных интерполяционных задач во вполне неопределенном случае сходится к резольвентной матрице предельной интерполяционной задачи (теорема 6). Теорема 8 дает описание множества всех решений вполне неопределенной предельной интерполяционной задачи.

В §7 рассмотрены два примера: операторная задача Неванлинны–Пика и опе-

раторная проблема моментов Стильеса. С помощью теоремы 5 для них получены критерии полной неопределенности и с помощью теоремы 8 дано описание всех решений соответствующих предельных интерполяционных задач во вполне неопределенном случае.

§ 1. Обобщенная интерполяционная задача

Введем обозначения: $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$, $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$, $\mathbb{C}_\pm = \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$, $\Pi_- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$.

Пусть $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ – сепарабельные и $\mathcal{H}$ – конечномерное гильбертовы пространства. Символом $\{\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2\}$ обозначим множество всех ограниченных линейных операторов, действующих из $\mathcal{G}_1$ в $\mathcal{G}_2$, символом $\{\mathcal{G}_1\}$ обозначим множество $\{\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_1\}$, а символом $\{\mathcal{G}_1\}_H$ – множество ограниченных эрмитовых операторов в $\mathcal{G}_1$. Оператор $A \in \{\mathcal{G}_1\}_H$ называется *неотрицательным*, если $(f, Af) \geq 0 \ \forall f \in \mathcal{G}_1$. Множество неотрицательных операторов в $\mathcal{G}_1$ обозначим символом $\{\mathcal{G}_1\}_{\geq}$. Неотрицательный оператор $A \in \{\mathcal{G}_1\}_{\geq}$ называется *строго положительным*, если он обратим и $A^{-1} \in \{\mathcal{G}_1\}$. Множество строго положительных операторов в $\mathcal{G}_1$ обозначим символом $\{\mathcal{G}_1\}_{>}$. Пусть операторы $A, B \in \{\mathcal{G}_1\}_H$. Неравенство $A \geq B$ (соответственно $A > B$) означает, что $A - B \in \{\mathcal{G}_1\}_{\geq}$ (соответственно $A - B \in \{\mathcal{G}_1\}_{>}$).

Тождественный и нулевой операторы, действующие в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{G}_1$, обозначим символами $I_{\mathcal{G}_1}$ и $0_{\mathcal{G}_1}$. Нулевой оператор, действующий из гильбертова пространства $\mathcal{G}_1$ в гильбертово пространство $\mathcal{G}_2$, обозначим символом $0_{\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2}$.

Пусть заданы операторы $K_1 \in \{\mathcal{G}_1\}_{\geq}$, $K_2 \in \{\mathcal{G}_2\}_{\geq}$, $L_1, L_2 \in \{\mathcal{G}_2, \mathcal{G}_1\}$, $v_1 \in \{\mathcal{H}, \mathcal{G}_1\}$, $u_2 \in \{\mathcal{H}, \mathcal{G}_2\}$. И пусть эти операторы удовлетворяют *основному тождеству* (ОТ)

$$K_1 L_1 - L_2 K_2 = -v_1 u_2^*. \quad (1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Упорядоченный набор операторов

$$\mathcal{P} = \{K_1, L_1, v_1, K_2, L_2, u_2\}, \quad (2)$$

удовлетворяющих ОТ (1), называется *обобщенной интерполяционной задачей стильесовского типа*, а пространства $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{H}$ называются *масштабными пространствами*.

Рассмотрим операторы

$$T_1 = L_2 L_1^*, \quad T_2 = L_1^* L_2, \quad u_1 = L_2 u_2, \quad v_2 = L_1^* v_1. \quad (3)$$

Непосредственно из определений операторов T_1 и T_2 имеем

$$T_1 L_2 = L_2 T_2, \quad T_2 L_1^* = L_1^* T_1. \quad (4)$$

Пусть операторы T_r таковы, что о.ф. $R_{T_r}(z) = (I_{\mathcal{G}_r} - z T_r)^{-1}$, $r = 1, 2$, мероморфны в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Множество особых точек о.ф. R_{T_1} и R_{T_2} в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ обозначим символом $\mathcal{Z}$. И пусть $\mathcal{Z} = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in \mathcal{Z}\}$. Из мероморфности R_{T_1} и R_{T_2} следует, что множества $\mathcal{Z}$ и $\mathcal{Z}$ дискретны в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, т.е. не имеют предельных точек в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$.

Из этих определений и из (4) следует, что

$$\begin{aligned} R_{T_1}(z)L_2 &= L_2R_{T_2}(z), & R_{T_2}(z)L_1^* &= L_1^*R_{T_1}(z), \\ (t-z)R_{T_r}(z)T_rR_{T_r}(t) &= R_{T_r}(t) - R_{T_r}(z) & \forall z, t \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_+ \cup \mathcal{X}\}. \end{aligned} \quad (5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Оператор-функция $w: \mathbb{C}_+ \rightarrow \{\mathcal{H}\}$ называется *неванлинновской*, если она голоморфна в $\mathbb{C}_+$ и $\{w(z) - w^*(z)\}/(2i) \geq 0_{\mathcal{H}} \quad \forall z \in \mathbb{C}_+$.

Класс всех таких о.ф. обозначим $\mathcal{R}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Неванлинновская о.ф. $s: \mathbb{C}_+ \rightarrow \{\mathcal{H}\}$ называется *стильесовской*, если она определена и непрерывна на полуоси $\mathbb{R}_-$ и $s(x) \geq 0_{\mathcal{H}} \quad \forall x \in \mathbb{R}_-$.

Каждая стильесовская о.ф. s по принципу симметрии $s(z) = s^*(\bar{z})$ продолжается до голоморфной в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ о.ф. Класс всех продолженных по принципу симметрии стильесовских о.ф. обозначим символом $\mathcal{S}$.

В [16] доказано, что стильесовские о.ф. можно описать с помощью специальных интегральных представлений.

ЛЕММА 1. Для любой о.ф. $s \in \mathcal{S}$ найдется оператор $\gamma \in \{\mathcal{H}\}_{\geq}$ и монотонно возрастающая о.ф. $\sigma: \mathbb{R}_+ \rightarrow \{\mathcal{H}\}_H$ такие, что существует интеграл $\int_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{t+1} u$

$$s(z) = \gamma + \int_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{t-z} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+. \quad (6)$$

Это представление единственно с точностью до нормировки о.ф. σ в точках ее разрывов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Оператор-функция $s \in \mathcal{S}$ называется *решением обобщенной интерполяционной задачи* (2), если она удовлетворяет следующей системе основных матричных неравенств (ОМН) В.П. Потапова:

$$\left[\begin{array}{c|c} K_r & R_{T_r}(z)\{v_r z^{r-1}s(z) - u_r\} \\ \hline * & \{z^{r-1}s(z) - \bar{z}^{r-1}s^*(z)\}/\{z - \bar{z}\} \end{array} \right] \geq 0_{\mathcal{G}_r \oplus \mathcal{H}}, \quad z \in \mathbb{C}_\pm \setminus \mathcal{X}, \quad r = 1, 2. \quad (7)$$

Множество всех решений обобщенной интерполяционной задачи (2) обозначим символом $\mathcal{F}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Обобщенная интерполяционная задача (2) называется *вполне неопределенной*, если

$$\begin{aligned} K_1 \in \{\mathcal{G}_1\}_>, \quad K_2 \in \{\mathcal{G}_2\}_> \quad \forall h \in \mathcal{H}, \quad v_r h = 0 \in \mathcal{G}_r \Leftrightarrow h = 0 \in \mathcal{H} \\ \forall h \in \mathcal{H}, \quad u_r h = 0 \in \mathcal{G}_r \Leftrightarrow h = 0 \in \mathcal{H}, \quad r = 1, 2. \end{aligned} \quad (8)$$

Далее в этой статье мы будем рассматривать только вполне неопределенную обобщенную интерполяционную задачу (2).

Рассмотрим две о.ф.

$$U_1(z) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} I_{\mathcal{H}} + zv_2^* R_{T_2^*}(z) K_2^{-1} u_2 & -zv_1^* R_{T_1^*}(z) K_1^{-1} v_1 \\ \hline u_2^* R_{T_2^*}(z) K_2^{-1} u_2 & I_{\mathcal{H}} - zu_1^* R_{T_1^*}(z) K_1^{-1} v_1 \end{array} \right],$$

$$U_2(z) = \left[\begin{array}{c|c} I_{\mathcal{H}} + zv_2^* R_{T_2^*}(z) K_2^{-1} u_2 & -v_1^* R_{T_1^*}(z) K_1^{-1} v_1 \\ \hline zu_2^* R_{T_2^*}(z) K_2^{-1} u_2 & I_{\mathcal{H}} - zu_1^* R_{T_1^*}(z) K_1^{-1} v_1 \end{array} \right]. \quad (9)$$

Здесь $R_{T_r^*}(z) = (I_{\mathcal{G}_r} - zT_r^*)^{-1}$, $r = 1, 2$, а разбиение на блоки понимаем в соответствии с представлением $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Ясно, что о.ф. U_1 и U_2 голоморфны в $\mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_+ \cup \overline{\mathcal{F}}\}$ и $U_1, U_2: \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_+ \cup \overline{\mathcal{F}}\} \rightarrow \{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}\}$.

Оператор-функция U_1 называется *резольвентной матрицей* обобщенной интерполяционной задачи (2).

Введем операторы в пространстве $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$:

$$J = \begin{bmatrix} 0_{\mathcal{H}} & -iI_{\mathcal{H}} \\ iI_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{H}} \end{bmatrix}, \quad J_{\pi} = \begin{bmatrix} 0_{\mathcal{H}} & I_{\mathcal{H}} \\ I_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{H}} \end{bmatrix}.$$

Непосредственные вычисления с использованием (1), (3)–(5) приводят к следующим выражениям для J -форм о.ф. U_r , $r = 1, 2$,

$$J - U_r(z)JU_r^*(\lambda) = i(z - \bar{\lambda}) \begin{bmatrix} v_r^* \\ u_r^* \end{bmatrix} R_{T_r^*}(z)K_r^{-1}R_{T_r^*}^*(\lambda)[v_r, u_r]. \quad (10)$$

Умножим последнее равенство справа на J и подставим в него $\bar{z}$ вместо λ . Учитывая равенство $J^2 = I_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}}$, приходим к принципу симметрии

$$U_r^{-1}(z) = JU_r^*(\bar{z})J, \quad r = 1, 2.$$

Подставим в (10) $\bar{z}$ вместо z и λ и затем умножим (10) слева и справа на J . Из принципа симметрии и очевидного равенства $R_{T_r^*}^*(\bar{z}) = R_{T_r}(z)$ следует, что

$$J - U_r^{-1*}(z)JU_r^{-1}(z) = i(\bar{z} - z)J \begin{bmatrix} v_r^* \\ u_r^* \end{bmatrix} R_{T_r}^*(z)K_r^{-1}R_{T_r}(z)[v_r, u_r]J. \quad (11)$$

Непосредственные вычисления с использованием (1), (3)–(5) приводят к следующему выражению для J_{π} -формы о.ф. U_1 :

$$\begin{aligned} & U_1(z)J_{\pi}U_1^*(z) - J_{\pi} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha(z)\beta^*(z) + \beta(z)\alpha^*(z) & -I_{\mathcal{H}} + \alpha(z)\delta^*(z) + \beta(z)\gamma^*(z) \\ -I_{\mathcal{H}} + \gamma(z)\beta^*(z) + \delta(z)\alpha^*(z) & \gamma(z)\delta^*(z) + \delta(z)\gamma^*(z) \end{bmatrix} \\ &= -(z + \bar{z}) \begin{bmatrix} v_1^* \\ u_1^* \end{bmatrix} R_{T_1^*}(z)K_1^{-1}R_{T_1^*}^*(z)[v_1, u_1] \\ &\quad + 2 \begin{bmatrix} zv_2^* \\ u_2^* \end{bmatrix} R_{T_2^*}(z)K_2^{-1}R_{T_2^*}^*(z)[\bar{z}v_2, u_2]. \end{aligned} \quad (12)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть о.ф. $p(z)$, $q(z)$ мероморфны в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ и принимают значения в $\{\mathcal{H}\}$. Пара $\text{col} [p(z) \ q(z)]$ называется стилтьесовской, если для нее существует дискретное в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ множество точек $\mathcal{D}_{pq}$ такое, что

- 1) $p^*(z)p(z) + q^*(z)q(z) > 0_{\mathcal{H}} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_+ \cup \mathcal{D}_{pq}\};$
- 2) $[p^*(z), q^*(z)] \frac{J}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix} \geq 0_{\mathcal{H}} \quad \forall z \in \mathbb{C}_{\pm} \setminus \mathcal{D}_{pq};$
- 3) $[p^*(z), \bar{z}q^*(z)] \frac{J}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} p(z) \\ zq(z) \end{bmatrix} \geq 0_{\mathcal{H}} \quad \forall z \in \mathbb{C}_{\pm} \setminus \mathcal{D}_{pq}.$

Можно доказать, что в этом определении условие 3) можно заменить эквивалентным условием

$$3') \quad [p^*(z), q^*(z)] J_{\pi} \begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix} \geq 0_{\mathcal{H}} \quad \forall z \in \Pi_- \setminus \mathcal{D}_{pq}.$$

Легко видеть, что всякая стилтьесовская о.ф. $s \in \mathcal{S}$ порождает стилтьесовскую пару $\text{col} [I_{\mathcal{H}} \ s(z)]$. Однако не всякая стилтьесовская пара представляется в таком виде. Например, пара $\text{col} [0_{\mathcal{H}} \ I_{\mathcal{H}}]$ является стилтьесовской, но она не порождается стилтьесовской о.ф.

На множестве стилтьесовских пар введем отношение эквивалентности: пары $\text{col} [p_1(z) \ q_1(z)]$ и $\text{col} [p_2(z) \ q_2(z)]$ называются эквивалентными, если существует о.ф. $Q(z)$, принимающая значения в $\{\mathcal{H}\}$, такая, что в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ мероморфны обе о.ф. $Q(z)$, $(Q(z))^{-1}$ и $p_1(z) = p_2(z)Q(z)$, $q_1(z) = q_2(z)Q(z)$. Множество классов эквивалентности стилтьесовских пар обозначим через $\mathcal{S}_{\infty}$.

В [7] доказано, что система ОМН (7) эквивалентна следующей факторизованной системе ОМН В.П. Потапова ($r = 1, 2$):

$$[I_{\mathcal{H}} \ \bar{z}^{r-1}s^*(z)] \frac{U_r^{-1*}(z)JU_r^{-1}(z)}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} \\ z^{r-1}s(z) \end{bmatrix} \geq 0_{\mathcal{H}}, \quad z \in \mathbb{C}_{\pm} \setminus \mathcal{L}. \quad (13)$$

Множество $\mathcal{F}$ всех решений обобщенной интерполяционной задачи (2) можно описать и в терминах дробно-линейных преобразований (см. [17], [18]). А именно формула

$$s(z) = \{\gamma_1(z)p(z) + \delta_1(z)q(z)\} \cdot \{\alpha_1(z)p(z) + \beta_1(z)q(z)\}^{-1} \quad (14)$$

устанавливает биективное соответствие между $\mathcal{F}$ и $\mathcal{S}_{\infty}$.

§ 2. Главные решения

Легко видеть, что каждая из пар $\text{col} [I_{\mathcal{H}} \ 0_{\mathcal{H}}]$ и $\text{col} [0_{\mathcal{H}} \ I_{\mathcal{H}}]$ является стилтьесовской парой. Подставляя эти пары в дробно-линейное преобразование (14), получим два *главных* решения обобщенной интерполяционной задачи (2):

$$s_F(z) = \gamma_1(z)\alpha_1^{-1}(z) \in \mathcal{F}, \quad s_K(z) = \delta_1(z)\beta_1^{-1}(z) \in \mathcal{F}. \quad (15)$$

При этом о.ф. s_F называется *решением Фридрихса*, а о.ф. s_K — *решением Крейна* обобщенной интерполяционной задачи. Для случая скалярной проблемы моментов такие термины были предложены в статье [19]. Мы вводим и изучаем решения Фридрихса и Крейна для обобщенной интерполяционной задачи (2).

ТЕОРЕМА 1. Решения Фридрикса и Крейна обобщенной вполне неопределенной интерполяционной задачи (2) допускают представления

$$s_F(z) = u_2^*(K_2 - zL_1^*K_1L_1)^{-1}u_2, \quad s_K(z) = \{v_1^*(L_2K_2L_2^* - zK_1)^{-1}v_1\}^{-1}. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства

$$s_F(z) = -z^{-1}u_2^*K_2^{-1/2}(K_2^{-1/2}L_1^*K_1L_1K_2^{-1/2} - z^{-1}I_{\mathcal{G}_2})^{-1}K_2^{-1/2}u_2$$

и свойств резольвенты неотрицательного оператора следует, что о.ф. $s_F(z)$ из (16) определена и голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Далее, имеем

$$\begin{aligned} & u_2^*(K_2 - zL_1^*K_1L_1)^{-1}u_2 \cdot \alpha_1(z) \\ &= u_2^*(K_2 - zL_1^*K_1L_1)^{-1}u_2\{I_{\mathcal{H}} + zv_2^*R_{T_2^*}(z)K_2^{-1}u_2\} \\ &= u_2^*(K_2 - zL_1^*K_1L_1)^{-1}\{K_2(I_{\mathcal{G}_2} - zT_2^*) + zu_2v_2^*\}R_{T_2^*}(z)K_2^{-1}u_2 \\ &= u_2^*(K_2 - zL_1^*K_1L_1)^{-1}\{K_2(I_{\mathcal{G}_2} - zT_2^*) + zu_2v_1^*L_1\}R_{T_2^*}(z)K_2^{-1}u_2 \\ &= u_2^*(K_2 - zL_1^*K_1L_1)^{-1}\{K_2(I_{\mathcal{G}_2} - zT_2^*) + z(K_2L_2^* - L_1^*K_1)L_1\}R_{T_2^*}(z)K_2^{-1}u_2 \\ &= u_2^*(K_2 - zL_1^*K_1L_1)^{-1}\{K_2 - zL_1^*K_1L_1\}R_{T_2^*}(z)K_2^{-1}u_2 \\ &= u_2^*R_{T_2^*}(z)K_2^{-1}u_2 = \gamma_1(z). \end{aligned}$$

В этой цепочке равенств первое вытекает из (9), третье – из (3), четвертое – из (1), пятое – из (3), седьмое – из (9). Итак,

$$s_F(z) = \gamma_1(z)\alpha_1^{-1}(z) = u_2^*\{K_2 - zL_1^*K_1L_1\}^{-1}u_2.$$

Первое из равенств (16) доказано. Второе из равенств (16) доказывается аналогичным образом.

ТЕОРЕМА 2. Пусть дана обобщенная вполне неопределенная интерполяционная задача (2) и $\mathcal{F}$ обозначает множество ее решений. И пусть, далее, s_F и s_K – главные решения задачи (2). Тогда о.ф. $\{s_K(z) - s_F(z)\}^{-1}$ определена и голоморфна при $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_+ \cup \mathcal{Z} \cup \overline{\mathcal{Z}}\}$ и

$$\begin{aligned} 1) \quad & \{s_K(z) - s_F(z)\}^{-1} \\ &= -zv_1^*R_{T_1^*}(z)K_1^{-1}R_{T_1}(z)v_1 + z^2v_2^*R_{T_2^*}(z)K_2^{-1}R_{T_2}(z)v_2; \end{aligned} \quad (17)$$

$$2) \quad s_K(x) > s_F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_- \setminus \mathcal{Z}, \quad s_K(x) \geq s_F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_-; \quad (18)$$

$$3) \quad 0_{\mathcal{H}} < s_F(x) \leq s(x) \leq s_K(x) \quad \forall s \in \mathcal{F}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_-. \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Зафиксируем произвольную точку $x \in \mathbb{R}_- \setminus \mathcal{Z}$. Подставим это значение x в (10) вместо z и λ . Получим $J - U_1(x)JU_1^*(x) = 0_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}}$. Но тогда (см. [15]) и $J - U_1^*(x)JU_1(x) = 0_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}}$. Отсюда и из блочного представления (9) следует, что

$$\begin{bmatrix} \alpha_1^*(x)\gamma_1(x) - \gamma_1^*(x)\alpha_1(x) & \alpha_1^*(x)\delta_1(x) - \gamma_1^*(x)\beta_1(x) \\ \beta_1^*(x)\gamma_1(x) - \delta_1^*(x)\alpha_1(x) & \beta_1^*(x)\delta_1(x) - \delta_1^*(x)\beta_1(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{\mathcal{H}} & I_{\mathcal{H}} \\ -I_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{H}} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Таким образом, $-\beta_1^*(x)\gamma_1(x) + \delta_1^*(x)\alpha_1(x) = I_{\mathcal{H}}$. В силу (6) $s_K(x) = s_K^*(x)$. Поэтому

$$\begin{aligned} s_K(x) - s_F(x) &= \beta_1^{-1*}(x)\delta_1^*(x) - \gamma_1(x)\alpha_1^{-1}(x) \\ &= \beta_1^{-1*}(x)\{\delta_1^*(x)\alpha_1(x) - \beta_1^*(x)\gamma_1(x)\}\alpha_1^{-1}(x) = \beta_1^{-1*}(x)\alpha_1^{-1}(x). \end{aligned} \quad (21)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \{s_K(x) - s_F(x)\}^{-1} &= \alpha_1(x)\beta_1^*(x) \\ &= -x\{I_{\mathcal{H}} + xv_2^*R_{T_2}^*(x)K_2^{-1}u_2\}\{v_1^*K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1\} \\ &= -x\{v_1^*K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1 + xv_2^*R_{T_2}^*(x)K_2^{-1}(-L_1^*K_1 + K_2L_2^*)K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1\} \\ &= -x\{v_1^*K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1 - xv_2^*R_{T_2}^*(x)K_2^{-1}L_1^*R_{T_1}(x)v_1 \\ &\quad + xv_2^*R_{T_2}^*(x)L_2^*K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1\} \\ &= -x\{v_1^*K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1 - xv_2^*R_{T_2}^*(x)K_2^{-1}L_1^*R_{T_1}(x)v_1 \\ &\quad + xv_1^*L_1L_2^*R_{T_1}^*(x)K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1\} \\ &= -x\{v_1^*K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1 - xv_2^*R_{T_2}^*(x)K_2^{-1}L_1^*R_{T_1}(x)v_1 \\ &\quad + xv_1^*T_1^*R_{T_1}^*(x)K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1\} \\ &= -x\{v_1^*[I_{\mathcal{G}_1} - xT_1^* + xT_1^*]R_{T_1}^*(x)K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1 \\ &\quad - xv_2^*R_{T_2}^*(x)K_2^{-1}L_1^*R_{T_1}(x)v_1\} \\ &= -x\{v_1^*R_{T_1}^*(x)K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1 - xv_2^*R_{T_2}^*(x)K_2^{-1}L_1^*R_{T_1}(x)v_1\} \\ &= -x\{v_1^*R_{T_1}^*(x)K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1 - xv_2^*R_{T_2}^*(x)K_2^{-1}R_{T_2}(x)v_2\}. \end{aligned}$$

В этой цепочке равенств второе равенство следует из (9), третье – из (1), пятое, шестое и девятое – из (3), (4) и (5). Таким образом, при $x \in \mathbb{R}_- \setminus \mathcal{Z}$

$$\{s_K(x) - s_F(x)\}^{-1} = -x\{v_1^*R_{T_1}^*(x)K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1 - xv_2^*R_{T_2}^*(x)K_2^{-1}R_{T_2}(x)v_2\}.$$

Отсюда в силу аналитичности следует (17).

2) Пусть $x \in \mathbb{R}_- \setminus \mathcal{Z}$. Имеем

$$\begin{aligned} \{s_K(x) - s_F(x)\}^{-1} \\ = -x\{v_1^*R_{T_1}^*(x)K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1 - xv_2^*R_{T_2}^*(x)K_2^{-1}R_{T_2}(x)v_2\} > 0_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Здесь мы последовательно воспользовались (17), (8) и тем фактом, что при $x \in \mathbb{R}_- \setminus \mathcal{Z}$ о.ф. $R_{T_1}(x)$ и $R_{T_2}(x)$ являются обратимыми операторами. Таким образом, доказано первое из неравенств (18). Второе из неравенств (18) получается продолжением по непрерывности первого из неравенств (18) в точки $x \in \mathbb{R}_- \cap \mathcal{Z}$.

3) Пусть о.ф. $s \in \mathcal{T}$. Тогда она допускает представление (14) с некоторой стилтесовской парой $\text{col}[p \ q]$. Пусть $x \in \mathbb{R}_- \setminus \{\mathcal{D}_{pq} \cup \mathcal{Z}\}$. Имеем

$$\begin{aligned} s_K(x) - s(x) &= \delta_1(x)\beta_1^{-1}(x) - \{\gamma_1(x)p(x) + \delta_1(x)q(x)\}\{\alpha_1(x)p(x) + \beta_1(x)q(x)\}^{-1} \\ &= \beta_1^{-1*}(x)\delta_1^*(x) - \{\gamma_1(x)p(x) + \delta_1(x)q(x)\}\{\alpha_1(x)p(x) + \beta_1(x)q(x)\}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta_1^{-1*}(x) \{ [\delta_1^*(x)\alpha_1(x) - \beta_1^*(x)\gamma_1(x)]p(x) + [\delta_1^*(x)\beta_1(x) - \beta_1^*(x)\delta_1(x)]q(x) \} \\
&\quad \times \{ \alpha_1(x)p(x) + \beta_1(x)q(x) \}^{-1} \\
&= \beta_1^{-1*}(x)p(x) \{ \alpha_1(x)p(x) + \beta_1(x)q(x) \}^{-1}.
\end{aligned}$$

В этой цепочке равенств второе равенство следует из эрмитовости $s_K(x)$, а последнее — из (20). Окончательно

$$s_K(x) - s(x) = \beta_1^{-1*}(x)p(x) \{ \alpha_1(x)p(x) + \beta_1(x)q(x) \}^{-1}. \quad (22)$$

Таким образом, разность $s_K(x) - s(x)$ представлена в виде дробно-линейного преобразования над стилтесовской парой $\text{col} [p(z) \ q(z)]$. Матрица дробно-линейного преобразования в (22) имеет вид

$$\tilde{U}(x) = \begin{bmatrix} \alpha_1(x) & \beta_1(x) \\ \beta_1^{-1*}(x) & 0_{\mathcal{H}} \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что ее J_π -форма имеет вид

$$\tilde{U}^*(x)J_\pi\tilde{U}(x) - J_\pi = \begin{bmatrix} \beta_1^{-1}(x)[\beta_1(x)\alpha_1^*(x) + \alpha_1(x)\beta_1^*(x)]\beta_1^{-1*}(x) & 0_{\mathcal{H}} \\ 0_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{H}} \end{bmatrix}.$$

Из (12) следует, что $U_1(x)J_\pi U_1^*(x) - J_\pi \geq 0_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}}$. Но тогда, снова из (12) имеем $\beta_1(x)\alpha_1^*(x) + \alpha_1(x)\beta_1^*(x) \geq 0_{\mathcal{H}}$. Поэтому $\tilde{U}^*(x)J_\pi\tilde{U}(x) \geq J_\pi$. С учетом этого неравенства получаем

$$\begin{aligned}
&[p^*(x)\alpha_1^*(x) + q^*(x)\beta_1^*(x), p^*(x)\beta_1^{-1}(x)]J_\pi \begin{bmatrix} \alpha_1(x)p(x) + \beta_1(x)q(x) \\ \beta_1^{-1*}(x)p(x) \end{bmatrix} \\
&= [p^*(x), q^*(x)] \begin{bmatrix} \alpha_1^*(x) & \beta_1^{-1}(x) \\ \beta_1^*(x) & 0_{\mathcal{H}} \end{bmatrix} J_\pi \begin{bmatrix} \alpha_1(x) & \beta_1(x) \\ \beta_1^{-1*}(x) & 0_{\mathcal{H}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(x) \\ q(x) \end{bmatrix} \\
&= [p^*(x), q^*(x)]\tilde{U}^*(x)J_\pi\tilde{U}(x) \begin{bmatrix} p(x) \\ q(x) \end{bmatrix} \geq [p^*(x), q^*(x)]J_\pi \begin{bmatrix} p(x) \\ q(x) \end{bmatrix} \geq 0_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Последнее неравенство вытекает из определения 6. Таким образом,

$$[p^*(x)\alpha_1^*(x) + q^*(x)\beta_1^*(x), p^*(x)\beta_1^{-1}(x)]J_\pi \begin{bmatrix} \alpha_1(x)p(x) + \beta_1(x)q(x) \\ \beta_1^{-1*}(x)p(x) \end{bmatrix} \geq 0_{\mathcal{H}}.$$

Умножим это неравенство на оператор $\{ \alpha_1(x)p(x) + \beta_1(x)q(x) \}^{-1}$ справа, а слева — на сопряженный оператор. С учетом (22) получим

$$[I_{\mathcal{H}}, s_K^*(x) - s^*(x)]J_\pi \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} \\ s_K(x) - s(x) \end{bmatrix} \geq 0_{\mathcal{H}}.$$

Или, учитывая вид J_π ,

$$s_K^*(x) - s^*(x) + s_K(x) - s(x) \geq 0_{\mathcal{H}}.$$

Оператор-функции s_K и s принадлежат $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$. Из определения класса $\mathcal{S}$ следует, что $s_K(x)$ и $s(x)$ эрмитовы. Но тогда из последнего неравенства имеем $s_K(x) \geq s(x)$. Это неравенство продолжается в точки $x \in \mathbb{R}_- \cap (\mathcal{D}_{pq} \cup \mathcal{L})$ по непрерывности. Неравенство $s_F(x) \leq s(x)$ доказывается аналогичным образом. Неравенство $0_{\mathcal{H}} < s_F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_-$ следует из (16) и (8).

Пусть $A, B \in \{\mathcal{H}\}_>$ и выполнено условие $A \leq B$. Операторным интервалом называется

$$[A, B] = \{\kappa \in \{\mathcal{H}\}_> : A \leq \kappa \leq B\}.$$

Число $\text{rank}\{B - A\}$ называется *рангом* операторного интервала (под рангом оператора мы понимаем ранг его матрицы в любом базисе пространства $\mathcal{H}$).

Интервал $[A, B]$ называется *невыврожденным*, если $A < B$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Операторный интервал

$$\mathcal{I}(x) = [s_F(x), s_K(x)], \quad x \in \mathbb{R}_-,$$

называется *интервалом Вейля* в точке x .

Неравенство (19) означает, что $\{s(x) : s \in \mathcal{F}\} \subset \mathcal{I}(x)$.

§ 3. Упорядоченные интерполяционные задачи

Пусть заданы две обобщенные интерполяционные задачи

$$\mathcal{P}^{(1)} = \{K_1^{(1)}, L_1^{(1)}, v_1^{(1)}, K_2^{(1)}, L_2^{(1)}, u_2^{(1)}\} \quad (23)$$

с масштабными пространствами $\{\mathcal{G}_1^{(1)}, \mathcal{G}_2^{(1)}, \mathcal{H}\}$ и

$$\mathcal{P}^{(2)} = \{K_1^{(2)}, L_1^{(2)}, v_1^{(2)}, K_2^{(2)}, L_2^{(2)}, u_2^{(2)}\} \quad (24)$$

с масштабными пространствами $\{\mathcal{G}_1^{(2)}, \mathcal{G}_2^{(2)}, \mathcal{H}\}$.

В обозначения объектов, относящихся к интерполяционной задаче $\mathcal{P}^{(1)}$ (соответственно $\mathcal{P}^{(2)}$), будем добавлять верхний индекс (1) (соответственно (2)).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Обобщенные интерполяционные задачи (23) и (24) называются *унитарно эквивалентными*, если существуют унитарные операторы $\mathcal{U}_1 : \mathcal{G}_1^{(1)} \rightarrow \mathcal{G}_1^{(2)}$, $\mathcal{U}_2 : \mathcal{G}_2^{(1)} \rightarrow \mathcal{G}_2^{(2)}$ такие, что

$$K_1^{(1)} = \mathcal{U}_1^* K_1^{(2)} \mathcal{U}_1, \quad L_1^{(1)} = \mathcal{U}_1^* L_1^{(2)} \mathcal{U}_1, \quad v_1^{(1)} = \mathcal{U}_1^* v_1^{(2)}, \quad (25)$$

$$K_2^{(1)} = \mathcal{U}_2^* K_2^{(2)} \mathcal{U}_2, \quad L_2^{(1)} = \mathcal{U}_2^* L_2^{(2)} \mathcal{U}_2, \quad u_2^{(1)} = \mathcal{U}_2^* u_2^{(2)}. \quad (26)$$

Отсюда и из формул (3) непосредственно вытекают соотношения

$$\begin{aligned} T_1^{(1)} &= \mathcal{U}_1^* T_1^{(2)} \mathcal{U}_1, & T_2^{(1)} &= \mathcal{U}_2^* T_2^{(2)} \mathcal{U}_2, & u_1^{(1)} &= \mathcal{U}_1^* u_1^{(2)}, & v_2^{(1)} &= \mathcal{U}_2^* v_2^{(2)}, \\ R_{T_1^{(1)*}}(z) &= \mathcal{U}_1^* R_{T_1^{(2)*}}(z) \mathcal{U}_1, & R_{T_2^{(1)*}}(z) &= \mathcal{U}_2^* R_{T_2^{(2)*}}(z) \mathcal{U}_2. \end{aligned} \quad (27)$$

ЛЕММА 2. Пусть заданы две интерполяционные задачи $\mathcal{P}^{(r)}$, $r = 1, 2$. И пусть, далее, символы $U_1^{(r)}$, $U_2^{(r)}$, $\mathcal{F}^{(r)}$, $s_F^{(r)}$, $s_K^{(r)}$ обозначают соответствующие объекты, связанные с r -й интерполяционной задачей.

Если интерполяционные задачи $\mathcal{P}^{(1)}$ и $\mathcal{P}^{(2)}$ унитарно эквивалентны, то

$$\begin{aligned} U_1^{(1)}(z) &= U_1^{(2)}(z), \quad U_2^{(1)}(z) = U_2^{(2)}(z), \quad \mathcal{F}^{(1)} = \mathcal{F}^{(2)}, \\ s_F^{(1)}(z) &= s_F^{(2)}(z), \quad s_K^{(1)}(z) = s_K^{(2)}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+. \end{aligned} \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что совпадают резольвентные матрицы унитарно эквивалентных интерполяционных задач. Из (9) и (27) имеем

$$\begin{aligned} U_1^{(1)}(z) &= \left[\begin{array}{c|c} I + zv_2^{(1)*} R_{T_2^{(1)*}}(z) K_2^{(1)-1} u_2^{(1)} & -zv_1^{(1)*} R_{T_1^{(1)*}}(z) K_1^{(1)-1} v_1^{(1)} \\ \hline u_2^{(1)*} R_{T_2^{(1)*}}(z) K_2^{(1)-1} u_2^{(1)} & I - zu_1^{(1)*} R_{T_1^{(1)*}}(z) K_1^{(1)-1} v_1^{(1)} \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} I + zv_2^{(2)*} \mathcal{U}_2 \mathcal{U}_2^* R_{T_2^{(2)*}}(z) \mathcal{U}_2 \mathcal{U}_2^* K_2^{(2)-1} \mathcal{U}_2 \mathcal{U}_2^* u_2^{(2)} & \\ \hline u_2^{(2)*} \mathcal{U}_2 \mathcal{U}_2^* R_{T_2^{(2)*}}(z) \mathcal{U}_2 \mathcal{U}_2^* K_2^{(2)-1} \mathcal{U}_2 \mathcal{U}_2^* u_2^{(2)} & \end{array} \right] \\ &\quad \left[\begin{array}{c} zv_1^{(2)*} \mathcal{U}_1 \mathcal{U}_1^* R_{T_1^{(2)*}}(z) \mathcal{U}_1 \mathcal{U}_1^* K_1^{(2)-1} \mathcal{U}_1 \mathcal{U}_1^* v_1^{(2)} \\ \hline I - zu_1^{(2)*} \mathcal{U}_1 \mathcal{U}_1^* R_{T_1^{(2)*}}(z) \mathcal{U}_1 \mathcal{U}_1^* K_1^{(2)-1} \mathcal{U}_1 \mathcal{U}_1^* v_1^{(2)} \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} I + zv_2^{(2)*} R_{T_2^{(2)*}}(z) K_2^{(2)-1} u_2^{(2)} & -zv_1^{(2)*} R_{T_1^{(2)*}}(z) K_1^{(2)-1} v_1^{(2)} \\ \hline u_2^{(2)*} R_{T_2^{(2)*}}(z) K_2^{(2)-1} u_2^{(2)} & I - zu_1^{(2)*} R_{T_1^{(2)*}}(z) K_1^{(2)-1} v_1^{(2)} \end{array} \right] \\ &= U_1^{(2)}(z). \end{aligned}$$

Итак, мы доказали, что $U_1^{(1)}(z) = U_1^{(2)}(z)$. Аналогичным образом доказываются равенства $U_2^{(1)}(z) = U_2^{(2)}(z)$. Отсюда следует, что для унитарно эквивалентных интерполяционных задач системы ОМН В. П. Потапова (13) совпадают. Поэтому $\mathcal{F}^{(1)} = \mathcal{F}^{(2)}$.

Главные решения интерполяционных задач $\mathcal{P}^{(1)}$ и $\mathcal{P}^{(2)}$ выражаются через элементы резольвентных матриц $U_1^{(1)}$ и $U_1^{(2)}$ по формулам (15). Но резольвентные матрицы $U_1^{(1)}$ и $U_1^{(2)}$ совпадают. Отсюда следуют две последние формулы в (28).

Пусть дана интерполяционная задача

$$\mathcal{P} = \{K_1, L_1, v_1, K_2, L_2, u_2\}, \quad (29)$$

и пусть ее масштабные пространства $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ представлены в виде ортогональной суммы своих подпространств (подпространства $\tilde{\mathcal{G}}_r$ предполагаются ненулевыми)

$$\mathcal{G}_r = \tilde{\mathcal{G}}_r \oplus \widehat{\mathcal{G}}_r, \quad r = 1, 2. \quad (30)$$

Это равенство понимается в смысле естественного изоморфизма $\mathcal{G}_r$ и $\tilde{\mathcal{G}}_r \oplus \hat{\mathcal{G}}_r$. А именно пусть $\tilde{P}_r$ (соответственно $\hat{P}_r$) обозначает ортопроектор пространства $\mathcal{G}_r$ на подпространство $\tilde{\mathcal{G}}_r$ (соответственно $\hat{\mathcal{G}}_r$). Тогда соответствующий изоморфизм имеет вид

$$\forall f \in \mathcal{G}_r \leftrightarrow \text{col}[\tilde{P}_r f, \hat{P}_r f] \in \tilde{\mathcal{G}}_r \oplus \hat{\mathcal{G}}_r. \quad (31)$$

Пусть выполнены условия

$$L_1 \tilde{P}_2 = \tilde{P}_1 L_1 \tilde{P}_2, \quad \tilde{P}_1 L_2 = \tilde{P}_1 L_2 \tilde{P}_2. \quad (32)$$

В соответствии с (30)–(32) введем матричные обозначения ($r = 1, 2$)

$$\begin{aligned} K_r &= \begin{bmatrix} \tilde{K}_r & B_r \\ B_r^* & C_r \end{bmatrix}, \quad L_1 = \begin{bmatrix} \tilde{L}_1 & D_1 \\ 0_{\tilde{\mathcal{G}}_2 \tilde{\mathcal{G}}_1} & \tilde{L}_1 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} \tilde{L}_2 & 0_{\tilde{\mathcal{G}}_2 \tilde{\mathcal{G}}_1} \\ E_2 & \tilde{L}_2 \end{bmatrix}, \\ v_1 &= \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_2 \end{bmatrix}, \quad u_1 = \begin{bmatrix} \tilde{L}_2 \tilde{u}_2 \\ E_2 \tilde{u}_2 + \tilde{L}_2 \tilde{u}_2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} \tilde{L}_1^* \tilde{v}_1 \\ D_1^* \tilde{v}_1 + \tilde{L}_1^* \tilde{v}_1 \end{bmatrix}, \\ T_1 &= L_2 L_1^* = \begin{bmatrix} \tilde{L}_2 \tilde{L}_1^* & 0_{\tilde{\mathcal{G}}_1 \tilde{\mathcal{G}}_1} \\ E_2 \tilde{L}_1^* + \tilde{L}_2 D_1^* & \tilde{L}_2 \tilde{L}_1^* \end{bmatrix}, \quad \tilde{P}_r = \begin{bmatrix} I_{\tilde{\mathcal{G}}_r} & 0_{\tilde{\mathcal{G}}_r \tilde{\mathcal{G}}_r} \\ 0_{\tilde{\mathcal{G}}_r \tilde{\mathcal{G}}_r} & 0_{\tilde{\mathcal{G}}_r} \end{bmatrix}, \\ T_2 &= L_1^* L_2 = \begin{bmatrix} \tilde{L}_1^* \tilde{L}_2 & 0_{\tilde{\mathcal{G}}_2 \tilde{\mathcal{G}}_2} \\ D_1^* \tilde{L}_2 + \tilde{L}_1^* E_2^* & \tilde{L}_1^* \tilde{L}_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{P}_r = \begin{bmatrix} 0_{\tilde{\mathcal{G}}_r} & 0_{\tilde{\mathcal{G}}_r \tilde{\mathcal{G}}_r} \\ 0_{\tilde{\mathcal{G}}_r \tilde{\mathcal{G}}_r} & I_{\tilde{\mathcal{G}}_r} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (33)$$

Отметим, что операторы в левых частях двух первых равенств являются операторами в пространствах $\mathcal{G}_r$, а в правых частях записаны матричные представления тех же самых операторов в пространствах $\tilde{\mathcal{G}}_r \oplus \hat{\mathcal{G}}_r$. Матричные элементы операторов K_r имеют вид

$$\tilde{K}_r = \tilde{P}_r K_r|_{\tilde{\mathcal{G}}_r}, \quad B_r = \tilde{P}_r K_r|_{\tilde{\mathcal{G}}_r}, \quad B_r^* = \hat{P}_r K_r|_{\tilde{\mathcal{G}}_r}, \quad C_r = \hat{P}_r K_r|_{\tilde{\mathcal{G}}_r}.$$

В аналогичном смысле понимаем и остальные равенства в (33).

Из ОТ (1) и представлений (33) следует *индуцированное* ОТ

$$\tilde{K}_1 \tilde{L}_1 - \tilde{L}_2 \tilde{K}_2 = -\tilde{v}_1 \tilde{u}_2^*. \quad (34)$$

Непосредственно убеждаемся в том, что операторы

$$\tilde{\mathcal{P}} = \{\tilde{K}_1, \tilde{L}_1, \tilde{v}_1, \tilde{K}_2, \tilde{L}_2, \tilde{u}_2\} \quad (35)$$

и масштабные пространства $\{\tilde{\mathcal{G}}_1, \tilde{\mathcal{G}}_2, \mathcal{H}\}$ создают вполне неопределенную интерполяционную задачу стилтесовского типа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Интерполяционная задача (35) называется *сужением интерполяционной задачи (29) на подпространства $\tilde{\mathcal{G}}_1$ и $\tilde{\mathcal{G}}_2$* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Пусть даны две обобщенные интерполяционные задачи Стильтеесовского типа

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^{(1)} &= \{K_1^{(1)}, L_1^{(1)}, v_1^{(1)}, K_2^{(1)}, L_2^{(1)}, u_2^{(1)}\}, \\ \mathcal{P}^{(2)} &= \{K_1^{(2)}, L_1^{(2)}, v_1^{(2)}, K_2^{(2)}, L_2^{(2)}, u_2^{(2)}\}.\end{aligned}$$

Говорят, что задача $\mathcal{P}^{(1)}$ *содержится* в задаче $\mathcal{P}^{(2)}$ или, что то же самое, задача $\mathcal{P}^{(2)}$ является *продолжением* задачи $\mathcal{P}^{(1)}$, если в масштабных пространствах $\mathcal{G}_1^{(2)}, \mathcal{G}_2^{(2)}$ существуют подпространства $\tilde{\mathcal{G}}_1^{(2)}, \tilde{\mathcal{G}}_2^{(2)}$, удовлетворяющие условиям (32), такие, что сужение задачи $\mathcal{P}^{(2)}$ на подпространства $\mathcal{G}_1^{(2)}, \mathcal{G}_2^{(2)}$, обозначаемое символом $\tilde{\mathcal{P}}^{(2)}$, унитарно эквивалентно задаче $\mathcal{P}^{(1)}$.

Коротко это записывается так: $\mathcal{P}^{(1)} \subset \mathcal{P}^{(2)}$.

В дальнейшем мы будем пользоваться хорошо известным свойством строго положительных операторов в гильбертовом пространстве. А именно пусть даны два гильбертовых пространства $\tilde{\mathcal{G}}$ и $\hat{\mathcal{G}}$. Тогда

$$\begin{bmatrix} \tilde{K} & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \in \{\tilde{\mathcal{G}} \oplus \hat{\mathcal{G}}\}_> \implies \begin{bmatrix} \tilde{K} & B \\ B^* & C \end{bmatrix}^{-1} \geq \begin{bmatrix} \tilde{K}^{-1} & 0_{\tilde{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{G}}} \\ 0_{\hat{\mathcal{G}}\tilde{\mathcal{G}}} & 0_{\hat{\mathcal{G}}} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть даны две обобщенные интерполяционные задачи $\mathcal{P}^{(1)}$ и $\mathcal{P}^{(2)}$, причем $\mathcal{P}^{(1)} \subset \mathcal{P}^{(2)}$. Пусть $U_1^{(k)}, U_2^{(k)}, \mathcal{X}^{(k)}, \mathcal{F}^{(k)}, s_F^{(k)}, s_K^{(k)}$ обозначают определенные выше объекты для интерполяционных задач $\mathcal{P}^{(k)}$, $k = 1, 2$. Тогда справедливо следующее.

1. Имеют место неравенства

$$\begin{aligned}\frac{J - U_r^{(2)}(z)JU_r^{(2)*}(z)}{i(z - \bar{z})} &\geq \frac{J - U_r^{(1)}(z)JU_r^{(1)*}(z)}{i(z - \bar{z})}, \\ \frac{U_r^{(2)-1*}(z)JU_r^{(2)-1}(z)}{i(\bar{z} - z)} &\leq \frac{U_r^{(1)-1*}(z)JU_r^{(1)-1}(z)}{i(\bar{z} - z)},\end{aligned} \quad (37)$$

$$r = 1, 2, \quad \forall z \in \mathbb{C}_\pm \setminus \{\mathcal{X}^{(1)} \cup \mathcal{X}^{(2)} \cup \overline{\mathcal{X}^{(1)}} \cup \overline{\mathcal{X}^{(2)}}\};$$

$$\begin{aligned}U_1^{(2)}(z)J_\pi U_1^{(2)*}(z) - J_\pi &\geq U_1^{(1)}(z)J_\pi U_1^{(1)*}(z) - J_\pi \\ \forall z \in \Pi_- \setminus \{\overline{\mathcal{X}^{(1)}} \cup \overline{\mathcal{X}^{(2)}}\}.\end{aligned} \quad (38)$$

2. Множество решений задачи $\mathcal{P}^{(2)}$ содержится в множестве решений задачи $\mathcal{P}^{(1)}$:

$$\mathcal{F}^{(2)} \subset \mathcal{F}^{(1)}. \quad (39)$$

3. Имеют место неравенства

$$0 < s_F^{(1)}(x) \leq s_F^{(2)}(x) \leq s_K^{(2)}(x) \leq s_K^{(1)}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_-. \quad (40)$$

Более того, $s_F^{(2)}(x) < s_K^{(2)}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_- \setminus \{\mathcal{X}^{(1)} \cup \mathcal{X}^{(2)}\}$.

В терминах интервалов Вейля последние неравенства можно записать в виде $\mathcal{I}^{(2)}(x) \subset \mathcal{I}^{(1)}(x)$. Причем эти оба интервала невырождены во всех точках $x \in \mathbb{R}_- \setminus \{\mathcal{X}^{(1)} \cup \mathcal{X}^{(2)}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделаем предварительные замечания. Из условия теоремы следует, что масштабные пространства $\mathcal{G}_1^{(2)}$ и $\mathcal{G}_2^{(2)}$ интерполяционной задачи $\mathcal{P}^{(2)}$ представимы в виде

$$\mathcal{G}_r^{(2)} = \tilde{\mathcal{G}}_r^{(2)} \oplus \hat{\mathcal{G}}_r^{(2)}, \quad r = 1, 2,$$

так что выполнены условия (32) и сужение интерполяционной задачи $\mathcal{P}^{(2)}$ на подпространства $\tilde{\mathcal{G}}_r^{(2)}$, обозначаемое символом $\tilde{\mathcal{P}}^{(2)}$, унитарно эквивалентно интерполяционной задаче $\mathcal{P}^{(1)}$. Пусть $\tilde{U}_1^{(2)}, \tilde{s}_F^{(2)}$ обозначают резольвентную матрицу и решение Фридрихса интерполяционной задачи $\tilde{\mathcal{P}}^{(2)}$. По лемме 2

$$\tilde{U}_1^{(2)}(z) = U_1^{(1)}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_+ \cup \overline{\mathcal{Z}}\}, \quad \tilde{s}_F^{(2)}(x) = s_F^{(1)}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_-. \quad (41)$$

Теперь приступим к доказательству теоремы.

1. Имеем (для упрощения нижеследующих выражений мы отождествляем запись операторов в пространствах $\mathcal{G}_r^{(2)}$ с их матричными представлениями как операторов в пространствах $\tilde{\mathcal{G}}_r^{(2)} \oplus \hat{\mathcal{G}}_r^{(2)}$)

$$\begin{aligned} \frac{J - U_r^{(2)}(z)JU_r^{(2)*}(z)}{i(z - \bar{z})} &= \begin{bmatrix} v_r^{(2)*} \\ u_r^{(2)*} \end{bmatrix} R_{T_r^{(2)*}}(z) K_r^{(2)-1} R_{T_r^{(2)*}}^*(z) [v_r^{(2)}, u_r^{(2)}] \\ &\geq \begin{bmatrix} v_r^{(2)*} \\ u_r^{(2)*} \end{bmatrix} R_{T_r^{(2)*}}(z) \begin{bmatrix} \tilde{K}_r^{(2)-1} & 0_{\tilde{\mathcal{G}}_r^{(2)} \tilde{\mathcal{G}}_r^{(2)}} \\ 0_{\tilde{\mathcal{G}}_r^{(2)} \tilde{\mathcal{G}}_r^{(2)}} & 0_{\tilde{\mathcal{G}}_r^{(2)}} \end{bmatrix} R_{T_r^{(2)*}}^*(z) [v_r^{(2)}, u_r^{(2)}] \\ &= \begin{bmatrix} v_r^{(2)*} \\ u_r^{(2)*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\tilde{\mathcal{G}}_r^{(2)}} & 0_{\tilde{\mathcal{G}}_r^{(2)} \tilde{\mathcal{G}}_r^{(2)}} \\ 0_{\tilde{\mathcal{G}}_r^{(2)} \tilde{\mathcal{G}}_r^{(2)}} & 0_{\tilde{\mathcal{G}}_r^{(2)}} \end{bmatrix} R_{T_r^{(2)*}}(z) \begin{bmatrix} I_{\tilde{\mathcal{G}}_r^{(2)}} & 0_{\tilde{\mathcal{G}}_r^{(2)} \tilde{\mathcal{G}}_r^{(2)}} \\ 0_{\tilde{\mathcal{G}}_r^{(2)} \tilde{\mathcal{G}}_r^{(2)}} & 0_{\tilde{\mathcal{G}}_r^{(2)}} \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \tilde{K}_r^{(2)-1} & 0_{\tilde{\mathcal{G}}_r^{(2)} \tilde{\mathcal{G}}_r^{(2)}} \\ 0_{\tilde{\mathcal{G}}_r^{(2)} \tilde{\mathcal{G}}_r^{(2)}} & 0_{\tilde{\mathcal{G}}_r^{(2)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\tilde{\mathcal{G}}_r^{(2)}} & 0_{\tilde{\mathcal{G}}_r^{(2)} \tilde{\mathcal{G}}_r^{(2)}} \\ 0_{\tilde{\mathcal{G}}_r^{(2)} \tilde{\mathcal{G}}_r^{(2)}} & 0_{\tilde{\mathcal{G}}_r^{(2)}} \end{bmatrix} \\ &\quad \times R_{T_r^{(2)*}}^*(z) \begin{bmatrix} I_{\tilde{\mathcal{G}}_r^{(2)}} & 0_{\tilde{\mathcal{G}}_r^{(2)} \tilde{\mathcal{G}}_r^{(2)}} \\ 0_{\tilde{\mathcal{G}}_r^{(2)} \tilde{\mathcal{G}}_r^{(2)}} & 0_{\tilde{\mathcal{G}}_r^{(2)}} \end{bmatrix} [v_r^{(2)}, u_r^{(2)}] \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{v}_r^{(2)*} \\ \tilde{u}_r^{(2)*} \end{bmatrix} R_{\tilde{T}_r^{(2)*}}(z) \tilde{K}_r^{(2)-1} R_{\tilde{T}_r^{(2)*}}^*(z) [\tilde{v}_r^{(2)}, \tilde{u}_r^{(2)}] \\ &= \frac{J - \tilde{U}_r^{(2)}(z)J\tilde{U}_r^{(2)*}(z)}{i(z - \bar{z})} = \frac{J - U_r^{(1)}(z)JU_r^{(1)*}(z)}{i(z - \bar{z})}. \end{aligned}$$

В этой цепочке первое равенства следует из (10), неравенство – из (36), второе и третье равенства – из (33), четвертое равенство – из определения интерполяционной задачи $\tilde{\mathcal{P}}^{(2)}$, пятое – из (41). Остальные неравенства в (37) и (38) доказываются аналогичным образом.

2. Пусть $s \in \mathcal{F}^{(2)}$. Тогда для s выполнена система ОМН В.П. Потапова (13). Воспользовавшись (37), получим ($r = 1, 2$)

$$\begin{aligned} 0_{\mathcal{H}} &\leq [I_{\mathcal{H}} \quad \bar{z}^{r-1}s^*(z)] \frac{U_r^{(2)-1*}(z)JU_r^{(2)-1}(z)}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} \\ z^{r-1}s(z) \end{bmatrix} \\ &\leq [I_{\mathcal{H}} \quad \bar{z}^{r-1}s^*(z)] \frac{U_r^{(1)-1*}(z)JU_r^{(1)-1}(z)}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} \\ z^{r-1}s(z) \end{bmatrix} \\ &\quad \forall z \in \mathbb{C}_{\pm} \setminus \{\mathcal{Z}^{(1)} \cup \mathcal{Z}^{(2)}\}. \end{aligned}$$

Поэтому $s \in \mathcal{F}^{(1)}$. Таким образом, $\mathcal{F}^{(2)} \subset \mathcal{F}^{(1)}$.

3. В теореме 2 доказано, что $s_F^{(2)}(x) \leq s_K^{(2)}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_-$ и $s_F^{(2)}(x) < s_K^{(2)}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_- \setminus \{\mathcal{X}^{(1)} \cup \mathcal{X}^{(2)}\}$.

Далее, $s_F^{(2)}, s_K^{(2)}(x) \in \mathcal{F}^{(2)} \subset \mathcal{F}^{(1)}$. По теореме 2 для всех $x \in \mathbb{R}_-$ имеем $s_F^{(1)}(x) \leq s_F^{(2)}(x)$ и $s_K^{(2)}(x) \leq s_K^{(1)}(x)$. Неравенство $0 < s_F^{(1)}(x)$ следует из формулы (16) и условий полной неопределенности (8).

§ 4. Предельная интерполяционная задача

Пусть символ $\mathcal{L}$ обозначает произвольное непустое ограниченное сверху подмножество в множестве вещественных чисел и A — его точная верхняя грань (случай $A = +\infty$ не исключается). И пусть в любой левой полукрестности A имеется бесконечное множество элементов из $\mathcal{L}$. Множество $\mathcal{L}$ назовем множеством индексов, а его элементы будем обозначать так: $l \in \mathcal{L}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Говорят, что задано *упорядоченное семейство интерполяционных задач стилтьесовского типа*, если каждому индексу $l \in \mathcal{L}$ поставлена в соответствие обобщенная интерполяционная задача стилтьесовского типа $\mathcal{P}^{(l)}$ так, что для любых индексов $l_1 \leq l_2$ выполнено условие $\mathcal{P}^{(l_1)} \subset \mathcal{P}^{(l_2)}$.

Упорядоченное семейство интерполяционных задач обозначим через $\{\mathcal{P}^{(l)}\}_{l \in \mathcal{L}}$. В этом контексте обобщенные интерполяционные задачи $\mathcal{P}^{(l)}$ называются *усеченными интерполяционными задачами*.

Теперь мы исследуем свойства введенных выше объектов при изменяющихся l . Для этого в обозначения объектов введем верхний индекс (l) , который будет указывать, что соответствующие интервалы Вейля, резольвентные матрицы и т.д. связаны с l -й интерполяционной задачей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Пусть дано упорядоченное семейство интерполяционных задач $\{\mathcal{P}^{(l)}\}_{l \in \mathcal{L}}$, и пусть $\mathcal{F}^{(l)}$ обозначает множество всех решений интерполяционной задачи $\mathcal{P}^{(l)}$. Оператор-функция $s \in \mathcal{S}$ называется *решением предельной интерполяционной задачи*, если $s \in \mathcal{F}^{(l)} \quad \forall l \in \mathcal{L}$.

Множество решений предельной интерполяционной задачи обозначим символом $\mathcal{F}^{(\infty)}$, а саму предельную интерполяционную задачу — символом $\mathcal{P}^{(\infty)}$.

Пусть $A \in \{\mathcal{H}\}$. Из свойств скалярного произведения и линейности оператора A следует *поляризационное тождество*

$$4(f, Ah) = (f + h, A(f + h)) - (f - h, A(f - h)) - i(f + ih, A(f + ih)) + i(f - ih, A(f - ih)) \quad \forall f, h \in \mathcal{H}. \quad (42)$$

ЛЕММА 3. Пусть для семейства стилтьесовских о.ф. $\{s^{(l)}\}_{l \in \mathcal{L}}$ существует вещественная константа $C > 0$ такая, что в некоторой точке $x_0 \in \mathbb{R}_-$ выполняется неравенство $\|s^{(l)}(x_0)\| \leq C \quad \forall l \in \mathcal{L}$.

Тогда для любого компакта $K \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ существует вещественная константа $C(K) > 0$ такая, что $\|s^{(l)}(z)\| \leq C(K) \quad \forall l \in \mathcal{L}, \forall z \in K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем вектор $f \in \mathcal{H}$ и рассмотрим функции

$$\{s_f^{(l)}(z) := (f, s^{(l)}(z)f), z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+\}_{l \in \mathcal{L}}.$$

Это скалярные стилтьесовские функции, и они ограничены в точке x_0 . Из представления (6) следует, что $s_f^{(l)}(z) + s_f^{(l)*}(z) \geq 0$, $z \in \Pi_-$. Поэтому каждая из функций $w^{(l)}(z) := i s_f^{(l)}(iz)$, $z \in \mathbb{C}_+$, $l \in \mathcal{L}$, является неванлинновской и эти функции ограничены в точке $-ix_0 \in \mathbb{C}_+$. Но тогда (см. [20; § 2, лемма 3]) семейство неванлинновских функций $\{w^{(l)}\}_{l \in \mathcal{L}}$ равномерно ограничено на компактах, содержащихся в $\mathbb{C}_+$. Отсюда и из определения функций $w^{(l)}$ следует, что семейство функций $\{s_f^{(l)}\}_{l \in \mathcal{L}}$ равномерно ограничено на компактах из Π_- .

Пусть некоторая точка $z_0 \in \mathbb{C}_+ \cap \Pi_-$. По уже доказанному семейство неванлинновских функций $\{s_f^{(l)}(z), z \in \mathbb{C}_+\}_{l \in \mathcal{L}}$ ограничено в точке z_0 . Но тогда (см. [20; § 2, лемма 3]) это семейство функций равномерно ограничено на компактах из $\mathbb{C}_+$. Из принципа симметрии $s_f^{(l)}(z) = \overline{s_f^{(l)}(\bar{z})}$ следует, что семейство функций $\{s_f^{(l)}(z), z \in \mathbb{C}_-\}_{l \in \mathcal{L}}$ равномерно ограничено на компактах из $\mathbb{C}_-$.

Семейство функций $\{s_f^{(l)}(z), z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+\}_{l \in \mathcal{L}}$ равномерно ограничено на компактах из полуплоскостей $\mathbb{C}_+$, $\mathbb{C}_-$ и Π_- . Поэтому оно равномерно ограничено и на компактах, содержащихся в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$.

Итак, при любом векторе $f \in \mathcal{H}$ семейство функций $s_f^{(l)}(z) := (f, s^{(l)}(z)f)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $l \in \mathcal{L}$, равномерно ограничено на компактах, содержащихся в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Но тогда в силу поляризационного тождества (42) на компактах, содержащихся в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, равномерно ограничено семейство $\{s_{gf}^{(l)}(z) := (g, s^{(l)}(z)f), z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+, \}_{l \in \mathcal{L}}$ при любых $f, g \in \mathcal{H}$. Отсюда следует, что семейство о.ф. $\{s^{(l)}\}_{l \in \mathcal{L}}$ по норме равномерно ограничено на компактах, содержащихся в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$.

ЛЕММА 4. Пусть семейство стилтьесовских о.ф. $\{s^{(l)}\}_{l \in \mathcal{L}}$ таково, что существуют пределы $\lim_{l \rightarrow A} s^{(l)}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_-$.

Тогда существуют равномерные на компактах из $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ пределы

$$s^{(\infty)}(z) := \lim_{l \rightarrow A} s^{(l)}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \quad \text{и} \quad s^{(\infty)} \in \mathcal{S}. \quad (43)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K — произвольный компакт из $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Обозначим через Ω односвязную открытую область с гладкой границей такую, что

- а) $K \subset \Omega$,
- б) замыкание Ω является компактом в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$,
- в) область Ω содержит некоторый интервал $(a, b) \subset \mathbb{R}_-$.

В любой точке $x_0 \in \mathbb{R}_-$ семейство операторов $\{s_M^{(l)}(x_0)\}_{l \in \mathcal{L}}$ сходится при $l \rightarrow A$ и, следовательно, ограничено по норме. По лемме 4 семейство о.ф. $\{s_M^{(l)}\}_{l \in \mathcal{L}}$ равномерно ограничено в замыкании области Ω . Семейство операторов $\{s_M^{(l)}(x)\}_{l \in \mathcal{L}}$ сходится $\forall x \in (a, b)$. По теореме Витали семейство о.ф. $\{s_M^{(l)}\}_{l \in \mathcal{L}}$ равномерно сходится при $z \in K$. Ясно, что предельная о.ф. $s^{(\infty)} \in \mathcal{S}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть задано упорядоченное семейство обобщенных интерполяционных задач стильесовского типа $\{\mathcal{P}^{(l)}\}_{l \in \mathcal{L}}$, и пусть $\mathcal{F}^{(l)}$ обозначает множество решений задачи $\mathcal{P}^{(l)}$, а $\mathcal{F}^{(\infty)}$ – множество решений соответствующей предельной интерполяционной задачи. И пусть, далее, $s_F^{(l)}$ и $s_K^{(l)}$ являются главными решениями задачи $\mathcal{P}^{(l)}$. Тогда справедливо следующее.

1. Существуют равномерные на компактах $K \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ пределы

$$s_K^{(\infty)}(z) := \lim_{l \rightarrow A} s_K^{(l)}(z) \in \mathcal{F}^{(\infty)}, \quad s_F^{(\infty)}(z) := \lim_{l \rightarrow A} s_F^{(l)}(z) \in \mathcal{F}^{(\infty)}. \quad (44)$$

2. Для всех $s \in \mathcal{F}^{(\infty)}$ выполняются неравенства

$$0_{\mathcal{H}} < s_F^{(\infty)}(x) \leq s(x) \leq s_K^{(\infty)}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_-. \quad (45)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Зафиксируем некоторый индекс $j \in \mathcal{L}$. Из неравенств (40) следует, что $\forall x \in \mathbb{R}_-$

$$s_F^{(l_1)}(x) \leq s_F^{(l_2)}(x) \leq s_K^{(j)}(x), \quad l_1, l_2 \in \mathcal{L}, \quad l_1 \leq l_2 \leq j.$$

Поэтому в каждой точке $x \in \mathbb{R}_-$ семейство эрмитовых операторов $\{s_F^{(l)}(x)\}_{l \in \mathcal{L}}$ монотонно возрастает и ограничено сверху оператором $s_K^{(j)}(x)$. Отсюда следует, что существует предел $\lim_{l \rightarrow A} s_F^{(l)}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_-$. По лемме 4 отсюда следует существование первого из пределов в (44). Аналогично доказывается существование второго предела в (44).

Пусть зафиксированы два индекса $l_1, l \in \mathcal{L}$, и пусть $l_1 < l$. По теореме 3 о.ф. $s_F^{(l)} \in \mathcal{F}^{(l_1)}$ и, следовательно, выполнена система ОМН В.П. Потапова ($r = 1, 2$):

$$\left[I_{\mathcal{H}} - \bar{z}^{r-1} s_F^{(l)*}(z) \right] \frac{U_r^{(l_1)-1*}(z) J U_r^{(l_1)-1}(z)}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} \\ z^{r-1} s_F^{(l)}(z) \end{bmatrix} \geq 0_{\mathcal{H}}, \quad z \in \mathbb{C}_{\pm} \setminus \mathcal{Z}^{(l_1)}.$$

Перейдем в этих неравенствах к пределу $l \rightarrow A$. Получим, что $s_F^{(\infty)} \in \mathcal{F}^{(l_1)}$. В силу произвольности l_1 отсюда следует, что $s_F^{(\infty)} \in \mathcal{F}^{(\infty)}$. Утверждение относительно $s_K^{(\infty)}$ доказывается аналогичным образом.

2. Пусть задана некоторая о.ф. $s \in \mathcal{F}^{(\infty)}$. По определению $s \in \mathcal{F}^{(l)} \quad \forall l \in \mathcal{L}$. По теореме 2 имеют место неравенства $0_{\mathcal{H}} < s_F^{(l)}(x) \leq s(x) \leq s_K^{(l)}(x)$. Переходя к пределу $l \rightarrow A$, получим (45). При этом первое из неравенств остается строгим неравенством и после предельного перехода в силу монотонного возрастания по l семейства операторов $s_F^{(l)}(x)$.

Доказанная теорема прежде всего указывает на то, что множество решений предельной интерполяционной задачи непусто. Например, $s_F^{(\infty)}, s_K^{(\infty)} \in \mathcal{F}^{(\infty)}$. Из неравенств (45) следует, что решения предельной интерполяционной задачи $s_F^{(\infty)}, s_K^{(\infty)}$ для множества $\mathcal{F}^{(\infty)}$ играют такую же роль, какую решения $s_F^{(l)}, s_K^{(l)}$ играют для множества $\mathcal{F}^{(l)}$. Поэтому представляется естественным назвать $s_F^{(\infty)}$ и $s_K^{(\infty)}$ главными решениями Фридрихса и Крейна предельной интерполяционной

задачи. Если решения Фридрихса и Крейна предельной интерполяционной задачи совпадают, то они задают единственное решение предельной интерполяционной задачи. Это следует из неравенств (45). В противном случае предельная интерполяционная задача имеет бесконечно много решений. Действительно, пусть заданы два числа $p, q \in \mathbb{R}_+$ такие, что $p + q = 1$. Тогда о.ф. $s(z) = ps_F^{(\infty)}(z) + qs_K^{(\infty)}(z) \in \mathcal{F}^{(l)} \forall l \in \mathcal{L}$ (см. вид системы ОМН (7)). Таким образом, $s \in \mathcal{F}^{(\infty)}$. По аналогии с определением 7 дадим определение предельных интервалов Вейля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Операторный интервал

$$\mathcal{J}^{(\infty)}(x) := [s_F^{(\infty)}(x), s_K^{(\infty)}(x)], \quad x \in \mathbb{R}_-,$$

называется *предельным интервалом Вейля* в точке $x \in \mathbb{R}_-$.

Из (45) следует включение $\{s(x) : s \in \mathcal{F}^{(\infty)}\} \subset \mathcal{J}^{(\infty)}(x)$.

§ 5. Критерий неопределенности

ЛЕММА 5. Пусть дано упорядоченное семейство интерполяционных задач $\{\mathcal{P}^{(l)}\}_{l \in \mathcal{L}}$, и пусть $U_1^{(l)}$ обозначает резольвентную матрицу интерполяционной задачи $\mathcal{P}^{(l)}$, а $s_F^{(l)}$ и $s_K^{(l)}$ — соответствующие главные решения. Тогда для всех $x \in \mathbb{R}_- \setminus \mathcal{Z}^{(l)}$ имеем

$$\begin{aligned} & U_1^{(l)}(x) J_\pi U_1^{(l)*}(x) - J_\pi \\ &= 2 \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{H}} \\ s_F^{(l)}(x) & I_{\mathcal{H}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s_K^{(l)}(x) - s_F^{(l)}(l))^{-1} & 0_{\mathcal{H}} \\ 0_{\mathcal{H}} & s_F^{(l)}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} & s_F^{(l)}(x) \\ 0_{\mathcal{H}} & I_{\mathcal{H}} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (46)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для упрощения записи верхний индекс (l) опускаем.

$$\begin{aligned} U_1(x) &= \begin{bmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ \gamma(x) & \delta(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} & I_{\mathcal{H}} \\ \gamma(x)\alpha^{-1}(x) & \delta(x)\beta^{-1}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(x) & 0_{\mathcal{H}} \\ 0_{\mathcal{H}} & \beta(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} & I_{\mathcal{H}} \\ s_F(x) & s_K(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(x)\beta^*(x) & 0_{\mathcal{H}} \\ 0_{\mathcal{H}} & I_{\mathcal{H}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta^{*-1}(x) & 0_{\mathcal{H}} \\ 0_{\mathcal{H}} & \beta(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} & I_{\mathcal{H}} \\ s_F(x) & s_K(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s_K(x) - s_F(x))^{-1} & 0_{\mathcal{H}} \\ 0_{\mathcal{H}} & I_{\mathcal{H}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta^{*-1}(x) & 0_{\mathcal{H}} \\ 0_{\mathcal{H}} & \beta(x) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (47)$$

В этой цепочке равенств третье следует из (15), а четвертое — из (21) и эрмитовости $s_K(x), s_F(x)$. Далее (для упрощения обозначений опускаем аргумент x),

$$\begin{aligned} & U_1 J_\pi U_1^* - J_\pi \\ &= \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} & I_{\mathcal{H}} \\ s_F & s_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s_K - s_F)^{-1} & 0_{\mathcal{H}} \\ 0_{\mathcal{H}} & I_{\mathcal{H}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta^{*-1} & 0_{\mathcal{H}} \\ 0_{\mathcal{H}} & \beta \end{bmatrix} J_\pi \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \beta^{-1} & 0_{\mathcal{H}} \\ 0_{\mathcal{H}} & \beta^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s_K - s_F)^{-1} & 0_{\mathcal{H}} \\ 0_{\mathcal{H}} & I_{\mathcal{H}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} & s_F \\ I_{\mathcal{H}} & s_K \end{bmatrix} - J_\pi \\ &= \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} & I_{\mathcal{H}} \\ s_F & s_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s_K - s_F)^{-1} & 0_{\mathcal{H}} \\ 0_{\mathcal{H}} & I_{\mathcal{H}} \end{bmatrix} J_\pi \begin{bmatrix} (s_K - s_F)^{-1} & 0_{\mathcal{H}} \\ 0_{\mathcal{H}} & I_{\mathcal{H}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} & s_F \\ I_{\mathcal{H}} & s_K \end{bmatrix} - J_\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 2(s_K - s_F)^{-1} & 2(s_K - s_F)^{-1}s_F \\ 2s_F(s_K - s_F)^{-1} & s_F(s_K - s_F)^{-1}s_K + s_K(s_K - s_F)^{-1}s_F \end{bmatrix} \\
&= 2 \begin{bmatrix} (s_K - s_F)^{-1} & (s_K - s_F)^{-1}s_F \\ s_F(s_K - s_F)^{-1} & (s_F^{-1} - s_K^{-1})^{-1} \end{bmatrix} \\
&= 2 \begin{bmatrix} (s_K - s_F)^{-1} & (s_K - s_F)^{-1}s_F \\ s_F(s_K - s_F)^{-1} & s_F(s_K - s_F)^{-1}s_K \end{bmatrix} \\
&= 2 \begin{bmatrix} (s_K - s_F)^{-1} & (s_K - s_F)^{-1}s_F \\ s_F(s_K - s_F)^{-1} & s_F(s_K - s_F)^{-1}s_F + s_F \end{bmatrix} \\
&= 2 \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{H}} \\ s_F & I_{\mathcal{H}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s_K - s_F)^{-1} & 0_{\mathcal{H}} \\ 0_{\mathcal{H}} & s_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} & s_F \\ 0_{\mathcal{H}} & I_{\mathcal{H}} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Пусть индекс $l \in \mathcal{L}$. Напомним, что множество особых точек мероморфных о.ф. $R_{T_1^{(l)}}$ и $R_{T_2^{(l)}}$ в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ мы обозначили символом $\mathcal{Z}^{(l)}$. Пусть $\mathcal{Z}^{(\infty)} := \bigcup_{l \in \mathcal{L}} \mathcal{Z}^{(l)}$. С этого места и до конца статьи мы будем считать, что все предельные точки $\mathcal{Z}^{(\infty)}$ принадлежат множеству $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. Смысл этого условия состоит в том, что наличие предельной точки множества $\mathcal{Z}^{(\infty)}$ в области $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ приводит к вырождению предельной интерполяционной задачи. Нас же будет интересовать невырожденный случай.

ЛЕММА 6. Пусть дано упорядоченное семейство интерполяционных задач $\{\mathcal{P}^{(l)}\}_{l \in \mathcal{L}}$, и пусть $s_K^{(\infty)}, s_F^{(\infty)} \in \mathcal{F}^{(\infty)}$. Тогда для всех $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_- \setminus \mathcal{Z}^{(\infty)}$ имеет место равенство

$$\text{rank}\{s_K^{(\infty)}(x_1) - s_F^{(\infty)}(x_1)\} = \text{rank}\{s_K^{(\infty)}(x_2) - s_F^{(\infty)}(x_2)\}. \quad (48)$$

Другими словами, ранги предельных интервалов Вейля $\mathcal{J}^{(\infty)}(x)$ не зависят от выбора точки $x \in \mathbb{R}_- \setminus \mathcal{Z}^{(\infty)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (38) следует, что J_π — формы резольвентных матриц монотонно возрастают в левой полуплоскости

$$U_1^{(l)}(z)J_\pi U_1^{(l)*}(z) - J_\pi \geq U_1^{(k)}(z)J_\pi U_1^{(k)*}(z) - J_\pi \quad \forall z \in \Pi_- \setminus \mathcal{Z}^{(\infty)}, \quad l \geq k.$$

Из (12) и (8) имеем

$$U_1^{(l)}(z)J_\pi U_1^{(l)*}(z) - J_\pi > 0_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}} \quad \forall z \in \Pi_- \setminus \mathcal{Z}^{(\infty)}, \quad \forall l \in \mathcal{L}.$$

По теореме С. А. Орлова (см. [14], [21]) существуют пределы

$$\Gamma(z) := \lim_{l \rightarrow A} [U_1^{(l)}(z)J_\pi U_1^{(l)*}(z) - J_\pi]^{-1} \quad \forall z \in \Pi_- \setminus \mathcal{Z}^{(\infty)}$$

и для всех $z_1, z_2 \in \Pi_- \setminus \mathcal{Z}^{(\infty)}$

$$\text{rank} \Gamma(z_1) = \text{rank} \Gamma(z_2). \quad (49)$$

Из (45) следует, что $s_F^{(l)}(x) > 0_{\mathcal{H}} \quad \forall l \in \mathcal{L}, \forall x \in \mathbb{R}_- \setminus \mathcal{Z}^{(\infty)}$. Отсюда и из (46) имеем

$$\Gamma(x) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} & -s_F^{(\infty)}(x) \\ 0_{\mathcal{H}} & I_{\mathcal{H}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_K^{(\infty)}(x) - s_F^{(\infty)}(x) & 0_{\mathcal{H}} \\ 0_{\mathcal{H}} & s_F^{(\infty)-1}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{H}} \\ -s_F^{(\infty)}(x) & I_{\mathcal{H}} \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\text{rank} \Gamma(x) = \text{rank}[s_K^{(\infty)}(x) - s_F^{(\infty)}(x)] + m, \quad m = \text{rank} s_F^{(\infty)}(x) = \dim \mathcal{H}.$$

Отсюда и из (49) следует (48).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Предельная интерполяционная задача $\mathcal{P}^{(\infty)}$ называется *вполне неопределенной*, если все предельные интервалы Вейля

$$\mathcal{J}^{(\infty)}(x) = [s_{\mu}^{(\infty)}(x), s_M^{(\infty)}(x)] \quad \forall x \in \mathbb{R}_- \setminus \mathcal{Z}^{(\infty)}$$

являются невырожденными операторными интервалами.

Из этого определения и леммы 6 непосредственно вытекает

ЛЕММА 7. *Для того чтобы предельная интерполяционная задача $\mathcal{P}^{(\infty)}$ была вполне неопределенной, необходимо, чтобы при всех $x \in \mathbb{R}_- \setminus \mathcal{Z}^{(\infty)}$ выполнялось неравенство*

$$s_F^{(\infty)}(x) < s_K^{(\infty)}(x), \quad (50)$$

и достаточно, чтобы неравенство (50) выполнялось хотя бы для одного $x \in \mathbb{R}_- \setminus \mathcal{Z}^{(\infty)}$.

Другими словами, для неопределенности предельной интерполяционной задачи необходимо, чтобы при всех $x \in \mathbb{R}_- \setminus \mathcal{Z}^{(\infty)}$ предельные интервалы Вейля были невырождены, и достаточно, чтобы хотя бы для одного $x \in \mathbb{R}_- \setminus \mathcal{Z}^{(\infty)}$ был невырожденным соответствующий предельный интервал Вейля.

ТЕОРЕМА 5. Пусть зафиксирована некоторая точка $x_0 \in \mathbb{R}_- \setminus \mathcal{Z}^{(\infty)}$. Для того чтобы предельная интерполяционная задача $\mathcal{P}^{(\infty)}$ была вполне неопределенной, необходимо и достаточно, чтобы существовали строго положительные пределы

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow A} [v_1^{(l)*} R_{T_1^{(l)}}^*(x_0) K_1^{(l)-1} R_{T_1^{(l)}}(x_0) v_1^{(l)}] &> 0_{\mathcal{H}}, \\ \lim_{l \rightarrow A} [v_2^{(l)*} R_{T_2^{(l)}}^*(x_0) K_2^{(l)-1} R_{T_2^{(l)}}(x_0) v_2^{(l)}] &> 0_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (51)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}_- \setminus \mathcal{Z}^{(\infty)}$. Из выбора этой точки следует обратимость операторов $R_{T_r^{(l)}}(x_0)$. Отсюда и из условий полной неопределенности (8) следует положительная определенность операторов

$$v_r^{(l)*} R_{T_r^{(l)}}^*(x_0) K_r^{(l)-1} R_{T_r^{(l)}}(x_0) v_r^{(l)} \in \{\mathcal{H}\}_{>}, \quad r = 1, 2, \quad \forall l \in \mathcal{L}.$$

Эти операторы монотонно возрастают с ростом l (в этом можно убедиться с помощью рассуждений, аналогичных приведенным при доказательстве теоремы 3).

Пусть теперь предельная интерполяционная задача $\mathcal{P}^{(\infty)}$ является вполне неопределенной. Для l -й обобщенной интерполяционной задачи $\mathcal{P}^{(l)}$ запишем (17) при некотором $z = x_0 \in \mathbb{R}_- \setminus \mathcal{Z}^{(\infty)}$. Получим

$$\begin{aligned} \{s_K^{(l)}(x_0) - s_F^{(l)}(x_0)\}^{-1} &= -x_0 v_1^{(l)*} R_{T_1^{(l)}}^*(x_0) K_1^{(l)-1} R_{T_1^{(l)}}(x_0) v_1^{(l)} \\ &\quad + x_0^2 v_2^{(l)*} R_{T_2^{(l)}}^*(x_0) K_2^{(l)-1} R_{T_2^{(l)}}(x_0) v_2^{(l)}. \end{aligned} \quad (52)$$

Оба слагаемых в правой части последнего равенства являются положительно определенными операторами и монотонно возрастают с ростом l . Левая часть в силу неопределенности предельной интерполяционной задачи при $l \rightarrow A$ стремится к положительно определенному оператору $\{s_K^{(\infty)}(x_0) - s_F^{(\infty)}(x_0)\}^{-1}$. Отсюда следует существование и строгая положительность пределов в (51).

Наоборот, пусть существуют и строго положительны оба предела в (51). Совершим теперь предельный переход $l \rightarrow A$ в обеих частях равенства (52). Получим, что $\{s_K^{(\infty)}(x_0) - s_F^{(\infty)}(x_0)\}^{-1} > 0$. Таким образом, предельный интервал Вейля $\mathcal{J}^{(\infty)}(x_0)$ является невырожденным и, следовательно, предельная интерполяционная задача является вполне неопределенной.

§ 6. Описание решений предельной задачи

Пусть дано упорядоченное семейство вполне неопределенных интерполяционных задач $\{\mathcal{P}^{(l)}\}_{l \in \mathcal{L}}$, и пусть это семейство порождает вполне неопределенную предельную интерполяционную задачу $\mathcal{P}^{(\infty)}$. С каждой усеченной задачей $\mathcal{P}^{(l)}$ мы связали две о.ф. $U_1^{(l)}$ и $U_2^{(l)}$. Зафиксируем некоторую точку $x_0 \in \mathbb{R}_- \setminus \mathcal{L}_\infty$, и пусть оператор $\beta^{(l)}(x_0)$ является матричным элементом из представления (9) резольвентной матрицы $U_1^{(l)}(x_0)$. Рассмотрим оператор

$$T^{(l)} = \begin{bmatrix} \beta^{(l)*}(x_0) & 0_{\mathcal{H}} \\ 0_{\mathcal{H}} & \beta^{(l)-1}(x_0) \end{bmatrix} \in \{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}\}.$$

Теперь введем новую нормировку о.ф. $U_1^{(l)}$ и $U_2^{(l)}$:

$$\tilde{U}_1^{(l)}(z) = U_1^{(l)}(z)T^{(l)}, \quad \tilde{U}_2^{(l)}(z) = U_2^{(l)}(z)T^{(l)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_+ \cup \overline{\mathcal{L}_\infty}\}. \quad (53)$$

Из очевидных равенств

$$J - T^{(l)}JT^{(l)*} = 0_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}}, \quad J_\pi - T^{(l)}J_\pi T^{(l)*} = 0_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}} \quad (54)$$

следует, что во всех наших рассуждениях можно заменить о.ф. $U_1^{(l)}$ и $U_2^{(l)}$ на нормированные о.ф. $\tilde{U}_1^{(l)}$ и $\tilde{U}_2^{(l)}$. В точке x_0 (см. (47)) имеем

$$\tilde{U}_1^{(l)}(x_0) = \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} & I_{\mathcal{H}} \\ s_F^{(l)}(x_0) & s_K^{(l)}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s_K^{(l)}(x_0) - s_F^{(l)}(x_0))^{-1} & 0_{\mathcal{H}} \\ 0_{\mathcal{H}} & I_{\mathcal{H}} \end{bmatrix}. \quad (55)$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть дано упорядоченное семейство вполне неопределенных интерполяционных задач $\{\mathcal{P}^{(l)}\}_{l \in \mathcal{L}}$, и пусть это семейство порождает вполне неопределенную предельную интерполяционную задачу $\mathcal{P}^{(\infty)}$. И пусть, далее, дана некоторая точка $x_0 \in \mathbb{R}_- \setminus \mathcal{L}^{(\infty)}$ и нормированные резольвентные о.ф. усеченных задач $\tilde{U}_1^{(l)}$ и $\tilde{U}_2^{(l)}$ определены формулами (53).

Тогда существуют равномерные пределы на компактах $K \subset \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_+ \cup \mathcal{Z}^{(\infty)} \cup \overline{\mathcal{Z}^{(\infty)}}\}$:

$$\begin{aligned} U_1^{(\infty)}(z) &:= \lim_{l \rightarrow A} \tilde{U}_1^{(l)}(z), & U_2^{(\infty)}(z) &:= \lim_{l \rightarrow A} \tilde{U}_2^{(l)}(z), \\ U_1^{(\infty)^{-1}}(z) &:= \lim_{l \rightarrow A} \tilde{U}_1^{(l)^{-1}}(z), & U_2^{(\infty)^{-1}}(z) &:= \lim_{l \rightarrow A} \tilde{U}_2^{(l)^{-1}}(z), \end{aligned} \quad (56)$$

и о.ф. $U_1^{(\infty)}(z)$, $U_2^{(\infty)}(z)$, $U_1^{(\infty)^{-1}}(z)$ и $U_2^{(\infty)^{-1}}(z)$ являются голоморфными при $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_+ \cup \mathcal{Z}^{(\infty)} \cup \overline{\mathcal{Z}^{(\infty)}}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы предположили, что предельные точки множества $\mathcal{Z}^{(\infty)}$ принадлежат $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. Отсюда следует, что в некоторой окрестности точки x_0 при всех $l \in \mathcal{L}$ голоморфны о.ф. $\tilde{U}_1^{(l)}$. Из неопределенности задачи $\mathcal{P}^{(\infty)}$ и из формулы (55) следует, что семейство операторов $\{\tilde{U}_1^{(l)}(x_0)\}_{l \in \mathcal{L}}$ сходится при $l \rightarrow A$.

Далее, из (38), (8) и (12) получаем ($\forall z \in \Pi_- \setminus \{\mathcal{Z}^{(\infty)} \cup \overline{\mathcal{Z}^{(\infty)}}\}$)

$$\begin{aligned} U_1^{(l)}(z) J_\pi U_1^{(l)*}(z) - J_\pi &\geq U_1^{(j)}(z) J_\pi U_1^{(j)*}(z) - J_\pi, \\ U_1^{(l)}(z) J_\pi U_1^{(l)*}(z) - J_\pi &> 0_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}} \quad \forall l, j \in \mathcal{L}, \quad l \geq j. \end{aligned}$$

Из (53) и (54) следует, что J_π -формы о.ф. $U_1^{(l)}(z)$ и $\tilde{U}_1^{(l)}(z)$ совпадают. Поэтому ($\forall z \in \Pi_- \setminus \{\mathcal{Z}^{(\infty)} \cup \overline{\mathcal{Z}^{(\infty)}}\}$)

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1^{(l)}(z) J_\pi \tilde{U}_1^{(l)*}(z) - J_\pi &\geq \tilde{U}_1^{(j)}(z) J_\pi \tilde{U}_1^{(j)*}(z) - J_\pi, \\ \tilde{U}_1^{(l)}(z) J_\pi \tilde{U}_1^{(l)*}(z) - J_\pi &> 0_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}} \quad \forall l, j \in \mathcal{L}, \quad l \geq j. \end{aligned}$$

Отсюда и из сходимости семейства операторов $\{\tilde{U}_1^{(l)}(x_0)\}_{l \in \mathcal{L}}$ следует (см. [21]), что семейство о.ф. $\{\tilde{U}_1^{(l)}(z)\}_{l \in \mathcal{L}}$ равномерно сходится на компактах $K \subset \Pi_- \setminus \{\mathcal{Z}^{(\infty)} \cup \overline{\mathcal{Z}^{(\infty)}}\}$ к о.ф. $U_1^{(\infty)}(z)$.

Аналогичным образом, используя (37), (8) и (10), доказываем равномерную сходимость семейства $\{\tilde{U}_1^{(l)}(z)\}_{l \in \mathcal{L}}$ на компактах $K \subset \mathbb{C}_\pm \setminus \{\mathcal{Z}^{(\infty)} \cup \overline{\mathcal{Z}^{(\infty)}}\}$.

Объединяя полученные результаты, приходим к выводу о равномерной сходимости семейства $\{\tilde{U}_1^{(l)}(z)\}_{l \in \mathcal{L}}$ на компактах $K \subset \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_+ \cup \mathcal{Z}^{(\infty)} \cup \overline{\mathcal{Z}^{(\infty)}}\}$. Отсюда следует голоморфность о.ф. $U_1^{(\infty)}(z)$ при $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_+ \cup \mathcal{Z}^{(\infty)} \cup \overline{\mathcal{Z}^{(\infty)}}\}$.

Доказано первое из соотношений (56). Остальные соотношения в (56) доказываются аналогичным образом.

ТЕОРЕМА 7. Пусть дано упорядоченное семейство вполне неопределенных интерполяционных задач $\{\mathcal{P}^{(l)}\}_{l \in \mathcal{L}}$, и пусть это семейство порождает вполне неопределенную предельную интерполяционную задачу $\mathcal{P}^{(\infty)}$.

Если о.ф. $s \in \mathcal{F}^{(\infty)}$, а о.ф. $U_1^{(\infty)^{-1}}$ и $U_2^{(\infty)^{-1}}$ определены в (56), то выполняется система ОМН В.П. Потапова ($\forall z \in \mathbb{C}_\pm \setminus \{\mathcal{Z}^{(\infty)} \cup \overline{\mathcal{Z}^{(\infty)}}\}$)

$$\left[I \quad \overline{z}^{r-1} s^*(z) \right] \frac{U_r^{(\infty)^{-1}*}(z) J U_r^{(\infty)^{-1}}(z)}{i(\overline{z} - z)} \begin{bmatrix} I \\ z^{r-1} s(z) \end{bmatrix} \geq 0_{\mathcal{H}}, \quad r = 1, 2. \quad (57)$$

Наоборот, если для некоторой о.ф. $s \in \mathcal{S}$ выполняется система ОМН (57), то $s \in \mathcal{F}^{(\infty)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s \in \mathcal{F}^{(\infty)}$. Тогда для всех $l \in \mathcal{L}$ о.ф. $s \in \mathcal{F}^{(l)}$ и выполнена система ОМН ($\forall z \in \mathbb{C}_{\pm} \setminus \{\mathcal{Z}^{(\infty)} \cup \overline{\mathcal{Z}^{(\infty)}}\}$)

$$[I \quad \bar{z}^{r-1}s^*(z)] \frac{\tilde{U}_r^{(l)-1*}(z)J\tilde{U}_r^{(l)-1}(z)}{i(\bar{z}-z)} \begin{bmatrix} I \\ z^{r-1}s(z) \end{bmatrix} \geq 0_{\mathcal{H}}, \quad r = 1, 2.$$

Переходя к пределу $l \rightarrow A$, получаем неравенства (57).

Наоборот, пусть о.ф. $s \in \mathcal{S}$ и удовлетворяет системе ОМН (57). Зафиксируем некоторый индекс $l \in \mathcal{L}$, и пусть индекс $k > l$. В силу (37) имеем ($r = 1, 2$)

$$\frac{\tilde{U}_r^{(l)-1*}(z)J\tilde{U}_r^{(l)-1}(z)}{i(\bar{z}-z)} \geq \frac{\tilde{U}_r^{(k)-1*}(z)J\tilde{U}_r^{(k)-1}(z)}{i(\bar{z}-z)}, \quad z \in \mathbb{C}_+ \setminus \{\mathcal{Z}^{(\infty)} \cup \overline{\mathcal{Z}^{(\infty)}}\}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \rightarrow A$, получаем ($r = 1, 2$)

$$\frac{\tilde{U}_r^{(l)-1*}(z)J\tilde{U}_r^{(l)-1}(z)}{i(\bar{z}-z)} \geq \frac{U_r^{(\infty)-1*}(z)JU_r^{(\infty)-1}(z)}{i(\bar{z}-z)}, \quad z \in \mathbb{C}_+ \setminus \{\mathcal{Z}^{(\infty)} \cup \overline{\mathcal{Z}^{(\infty)}}\}.$$

Умножим это неравенство слева на $[I \quad \bar{z}^{r-1}s^*(z)]$, а справа – на сопряженный оператор. С учетом (57) получим ($r = 1, 2$)

$$[I \quad \bar{z}^{r-1}s^*(z)] \frac{\tilde{U}_r^{(l)-1*}(z)J\tilde{U}_r^{(l)-1}(z)}{i(\bar{z}-z)} \begin{bmatrix} I \\ z^{r-1}s(z) \end{bmatrix} \geq 0, \quad z \in \mathbb{C}_+ \setminus \{\mathcal{Z}^{(\infty)} \cup \overline{\mathcal{Z}^{(\infty)}}\}.$$

Таким образом, $s \in \mathcal{F}^{(l)}$. В силу произвольности l имеем $s \in \mathcal{F}^{(\infty)}$.

ТЕОРЕМА 8. Пусть дано упорядоченное семейство вполне неопределенных интерполяционных задач $\{\mathcal{P}^{(l)}\}_{l \in \mathcal{L}}$, и пусть это семейство порождает вполне неопределенную предельную интерполяционную задачу $\mathcal{P}^{(\infty)}$. И пусть, далее, о.ф. $U_1^{(\infty)}: \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_+ \cup \mathcal{Z}^{(\infty)} \cup \overline{\mathcal{Z}^{(\infty)}}\} \rightarrow \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ определена в (57) и ее естественное матричное представление имеет вид

$$U_1^{(\infty)}(z) = \begin{bmatrix} \alpha^{(\infty)}(z) & \beta^{(\infty)}(z) \\ \gamma^{(\infty)}(z) & \delta^{(\infty)}(z) \end{bmatrix}.$$

Тогда формула

$$s(z) = \{\gamma^{(\infty)}(z)p(z) + \delta^{(\infty)}(z)q(z)\} \cdot \{\alpha^{(\infty)}(z)p(z) + \beta^{(\infty)}(z)q(z)\}^{-1} \quad (58)$$

устанавливает биективное соответствие между $\mathcal{F}^{(\infty)}$ и $\mathcal{S}^{(\infty)}$.

Доказательство этой теоремы опирается на систему ОМН (57) и проводится по той же схеме, что и доказательство аналогичных утверждений в [20], [21].

§ 7. Примеры

7.1. Задача Неванлинны–Пика в классе Стильеса. В задаче Неванлинны–Пика задана бесконечная последовательность попарно различных комплексных чисел $z_1, z_2, \dots, z_k, \dots, z_j \neq \bar{z}_k, j, k \in \mathbb{N}$, и бесконечная последовательность операторов $s_1, s_2, \dots, s_k, \dots$, действующих в пространстве в $\mathcal{H}$. Требуется описать множество о.ф. $s: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \rightarrow \{\mathcal{H}\}$ таких, что

$$s(z_j) = s_j \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad s \in \mathcal{S}. \quad (59)$$

Нас будет интересовать неопределенный случай, когда задача (59) имеет бесконечно много решений. Поэтому мы считаем, что выполнено необходимое условие неопределенности – предельные точки последовательности $\{z_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ принадлежат $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

Вместе с задачей (59) с бесконечным числом узлов интерполяции будем рассматривать и усеченные задачи Неванлинны–Пика. В таких задачах фиксируется число $k \in \mathbb{N}$ и требуется описать множество о.ф. $s: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \rightarrow \{\mathcal{H}\}$ таких, что

$$s(z_j) = s_j, \quad 1 \leq j \leq k, \quad s \in \mathcal{S}. \quad (60)$$

Покажем, что усеченную задачу (60) можно рассматривать как обобщенную интерполяционную задачу стильесовского типа. В качестве масштабных пространств выберем пространство

$$\mathcal{G}_1^{(k)} = \mathcal{G}_2^{(k)} = \underbrace{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}}_{k \text{ слагаемых}}, \quad \mathcal{H}.$$

Операторы $K_1^{(k)}, L_1^{(k)}, v_1^{(k)}, K_2^{(k)}, L_2^{(k)}, u_2^{(k)}$, участвующие в задаче (2), зададим естественными матричными представлениями

$$\begin{aligned} L_1^{(k)} &= \text{diag}\{I_{\mathcal{H}}, \dots, I_{\mathcal{H}}\} \in \{\mathcal{G}_1^{(k)}\}, \quad v_1^{(k)} = \text{col}\{I_{\mathcal{H}}, \dots, I_{\mathcal{H}}\} \in \{\mathcal{H}, G_1^{(k)}\}, \\ L_2^{(k)} &= \text{diag}\{z_1^{-1}I_{\mathcal{H}}, \dots, z_k^{-1}I_{\mathcal{H}}\} \in \{\mathcal{G}_2^{(k)}\}, \\ u_2^{(k)} &= L_2^{(k)-1} \cdot \text{col}\{s_1, \dots, s_k\} \in \{\mathcal{H}, G_2\}, \\ K_r^{(k)} &= L_2^{(k)-1} \cdot \left\{ \frac{z_i^{r-1}s_i - \bar{z}_j^{r-1}s_j^*}{z_i - \bar{z}_j} \right\}_{i,j=1,\dots,k} \cdot L_2^{(k)-1*} \in \{G_r\}, \quad r = 1, 2. \end{aligned}$$

Очевидно, что выполнено ОТ (1). В [7] показано, что необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (60) являются неравенства $K_1^{(k)} \geq 0, K_2^{(k)} \geq 0$. Более того (см. [7]), о.ф. $s \in \mathcal{S}$ является решением усеченной задачи (60) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет системе ОМН (7). Таким образом, множество решений интерполяционной задачи (60) совпадает с множеством решений следующей интерполяционной задачи стильесовского типа:

$$\mathcal{P}^{(k)} = \{K_1^{(k)}, L_1^{(k)}, v_1^{(k)}, K_2^{(k)}, L_2^{(k)}, u_2^{(k)}\}. \quad (61)$$

Условиями полной неопределенности являются условия $K_1^{(k)} > 0$, $K_2^{(k)} > 0$. Легко видеть, что при этом все остальные условия в (8) автоматически выполнены, т.е. задача (61) является вполне неопределенной.

Пусть при всех $k \in \mathbb{N}$ интерполяционные задачи (61) являются вполне неопределенными. Покажем, что интерполяционные задачи (61) являются упорядоченным семейством. Действительно, пусть k и l – произвольные натуральные числа и пусть, для определенности, $k > l$. Тогда пространства $\mathcal{G}_r^{(k)}$ можно представить в виде ортогональной суммы $\mathcal{G}_r^{(k)} = \tilde{\mathcal{G}}_r^{(k)} \oplus \hat{\mathcal{G}}_r^{(k)}$, где

$$\tilde{\mathcal{G}}_r^{(k)} = \underbrace{\mathcal{H} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}}_l \oplus \underbrace{0 \oplus \dots \oplus 0}_{(k-l)}, \quad \hat{\mathcal{G}}_r^{(k)} = \underbrace{0 \oplus \dots \oplus 0}_l \oplus \underbrace{\mathcal{H} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}}_{(k-l)}.$$

Легко видеть, что в естественных матричных представлениях операторы $\tilde{P}_r^{(k)}$ имеют вид

$$\tilde{P}_r^{(k)} = \text{diag}\{ \underbrace{I_{\mathcal{H}}, \dots, I_{\mathcal{H}}}_l, \underbrace{0_{\mathcal{H}}, \dots, 0_{\mathcal{H}}}_{(k-l)} \} \in \{\mathcal{G}_1^{(k)}\}.$$

Отсюда следует, что выполнены условия (32). Рассмотрим интерполяционную задачу $\tilde{\mathcal{P}}^{(k)}$, которая является сужением интерполяционной задачи $\mathcal{P}^{(k)}$ на подпространства $\tilde{\mathcal{G}}_r^{(k)}$. Легко видеть, что интерполяционная задача $\mathcal{P}^{(l)}$ унитарно эквивалентна интерполяционной задаче $\tilde{\mathcal{P}}^{(k)}$. Таким образом, семейство интерполяционных задач (61) упорядочено. Поэтому теорема 5 задает критерий неопределенности предельной интерполяционной задачи (59), а формула (58) дает описание всех решений интерполяционной задачи (59) во вполне неопределенном случае.

7.2. Проблема моментов Стилтеса. В проблеме моментов Стилтеса по заданной последовательности операторов $s_0, \dots, s_k, \dots \in \{\mathcal{H}\}_N$ требуется описать множество монотонно возрастающих о.ф. $\sigma: \mathbb{R}_+ \rightarrow \{\mathcal{H}\}_N$ таких, что

$$s_j = \int_0^{+\infty} t^j d\sigma(t) \quad \forall j \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (62)$$

Можем считать, не изменяя значений интегралов, что о.ф. σ удовлетворяет следующим условиям нормировки: $\sigma(t)$ непрерывна слева при $t \in (0, +\infty)$ и $\sigma(0) = 0$. Множество нормированных решений σ проблемы моментов (62) обозначим символом $\mathcal{M}^{(\infty)}$. С каждой $\sigma \in \mathcal{M}^{(\infty)}$ свяжем о.ф.

$$s(z) = \int_0^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{t - z}. \quad (63)$$

Оператор-функция s определена и голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ и называется *ассоциированной* с проблемой моментов (62). Множество о.ф. s , ассоциированных с проблемой (62), обозначим символом $\mathcal{F}^{(\infty)}$. Из формулы обращения Стилтеса следует, что соответствие, устанавливаемое между $\mathcal{F}^{(\infty)}$ и $\mathcal{M}^{(\infty)}$ формулой (63), является взаимно однозначным. Поэтому вместо описания множества $\mathcal{M}^{(\infty)}$ мы можем ограничиться описанием множества $\mathcal{F}^{(\infty)}$.

Вместе с бесконечной проблемой моментов (62) будем рассматривать и усеченные проблемы моментов Стилтеса. В таких проблемах фиксируется число

$k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и требуется описать все нормированные монотонно возрастающие о.ф. $\sigma: \mathbb{R}_+ \rightarrow \{\mathcal{H}\}_H$ и операторы $M \in \{\mathcal{H}\}_{\geq}$ такие, что

$$s_j = \int_0^{+\infty} t^j d\sigma(t), \quad 0 \leq j \leq k-1, \quad s_k = \int_0^{+\infty} t^k d\sigma(t) + M. \quad (64)$$

При $k = 0$ требуем выполнения только второго условия в (64).

Проблема моментов (64) называется k -й усеченной проблемой моментов Стильтеса, а множество ее решений σ обозначается символом $\mathcal{M}^{(k)}$. Как и в случае проблемы моментов (62), с каждой $\sigma \in \mathcal{M}^{(k)}$ свяжем ассоциированную о.ф. s вида (63). Множество всех о.ф. s , ассоциированных с проблемой (64), обозначим символом $\mathcal{F}^{(k)}$.

Покажем, что задачу описания ассоциированных о.ф. можно рассматривать как обобщенную интерполяционную задачу стильтесовского типа. Рассмотрим отдельно случай четного и нечетного числа моментов.

Пусть $k = 2n$, $n \in \mathbb{N}$. В этом случае в качестве масштабных пространств выберем пространства

$$\mathcal{G}_1^{(k)} = \underbrace{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}}_{n+1}, \quad \mathcal{G}_2^{(k)} = \underbrace{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}}_n, \quad \mathcal{H}.$$

Операторы $K_1^{(k)}$, $L_1^{(k)}$, $v_1^{(k)}$, $K_2^{(k)}$, $L_2^{(k)}$, $u_2^{(k)}$, участвующие в задаче (2), зададим естественными матричными представлениями

$$K_1^{(k)} = \{s_{j+k}\}_{j,k=0}^n, \quad L_1^{(k)} = \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} & \dots & 0_{\mathcal{H}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{\mathcal{H}} & \dots & I_{\mathcal{H}} \\ 0_{\mathcal{H}} & \dots & 0_{\mathcal{H}} \end{bmatrix}, \quad v_1^{(k)} = \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} \\ 0_{\mathcal{H}} \\ \vdots \\ 0_{\mathcal{H}} \end{bmatrix},$$

$$K_2^{(k)} = \{s_{j+k+1}\}_{j,k=0}^{n-1}, \quad L_2^{(k)} = \begin{bmatrix} 0_{\mathcal{H}} & \dots & 0_{\mathcal{H}} \\ I_{\mathcal{H}} & \dots & 0_{\mathcal{H}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{\mathcal{H}} & \dots & I_{\mathcal{H}} \end{bmatrix}, \quad u_2^{(k)} = - \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Пусть $k = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. В этом случае в качестве масштабных пространств выберем пространства

$$\mathcal{G}_1^{(k)} = \mathcal{G}_2^{(k)} = \underbrace{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}}_{n+1}, \quad \mathcal{H}.$$

Операторы $K_1^{(k)}$, $L_1^{(k)}$, $v_1^{(k)}$, $K_2^{(k)}$, $L_2^{(k)}$, $u_2^{(k)}$, участвующие в задаче (2), зададим естественными матричными представлениями

$$K_1^{(k)} = \{s_{j+k}\}_{j,k=0}^n, \quad L_1^{(k)} = \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{H}} & \dots & 0_{\mathcal{H}} \\ 0_{\mathcal{H}} & I_{\mathcal{H}} & \dots & 0_{\mathcal{H}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{H}} & \dots & I_{\mathcal{H}} \end{bmatrix}, \quad v_1^{(k)} = \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} \\ 0_{\mathcal{H}} \\ \vdots \\ 0_{\mathcal{H}} \end{bmatrix},$$

$$K_2^{(k)} = \{s_{j+k+1}\}_{j,k=0}^n, \quad L_2^{(k)} = \begin{bmatrix} 0_{\mathcal{H}} & \dots & 0_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{H}} \\ I_{\mathcal{H}} & \dots & 0_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{H}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{\mathcal{H}} & \dots & I_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{H}} \end{bmatrix}, \quad u_2^{(k)} = - \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}.$$

Непосредственно проверяем, что определенные выше операторы при $k = 2n, n \in \mathbb{N}$, и при $k = 2n + 1, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, удовлетворяют ОТ (1). В [7] показано, что необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (64) являются неравенства $K_1^{(k)} \geq 0, K_2^{(k)} \geq 0$. Более того (см. [7]), о.ф. $s \in \mathcal{F}^{(k)}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет системе ОМН (7). Таким образом, множество $\mathcal{F}^{(k)}$ совпадает со множеством решений следующей интерполяционной задачи стилтьесовского типа:

$$\mathcal{P}^{(k)} = \{K_1^{(k)}, L_1^{(k)}, v_1^{(k)}, K_2^{(k)}, L_2^{(k)}, u_2^{(k)}\}. \quad (65)$$

Условиями полной неопределенности являются условия $K_1^{(k)} > 0, K_2^{(k)} > 0$. Легко видеть, что при этом все остальные условия в (8) автоматически выполнены, т.е. задача (65) является вполне неопределенной. Будем считать, что задачи (65) являются вполне неопределенными при всех k .

Как и в случае задачи Неванлинны–Пика, убеждаемся в том, что интерполяционные задачи (65) являются упорядоченным семейством. Поэтому теорема 5 задает критерий неопределенности предельной интерполяционной задачи (62), а формула (58) дает описание всех решений предельной интерполяционной задачи (62) во вполне неопределенном случае.

Список литературы

1. Нудельман А. А. Об одном обобщении классических интерполяционных задач // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256. № 4. С. 790–793.
2. Иванченко Т. С., Сакнович Л. А. Операторный подход к схеме В. П. Потапова исследования интерполяционных задач // Укр. матем. журн. 1987. Т. 39. № 5. С. 573–578.
3. Кацнельсон В. Э., Хейфец А. Я., Юдицкий П. М. Абстрактная интерполяционная проблема и теория расширений изометрических операторов // Операторы в функциональных пространствах и вопросы теории функций. Сборник научных трудов. Киев: Наукова думка, 1987. С. 83–96.
4. Kheifets A. Ya., Yuditskii P. M. Ah analysis and extension of V. P. Potapov approach to interpolation problems with applications to the generalized bi-tangential Schur–Nevanlinna–Pick problem and J-inner-outer factorization // Oper. Theory Adv. Appl. 1994. V. 72. P. 133–161.
5. Ivanchenko T. S., Sakhnovich L. A. An operator approach to the Potapov scheme for the solution of interpolation problems // Oper. Theory Adv. Appl. 1994. V. 72. P. 48–86.
6. Dyukarev Yu. M. Integral representations of a pair of nonnegative operators and interpolation problems in the Stieltjes class // Oper. Theory Adv. Appl. 1997. V. 95. P. 165–184.
7. Дюкарев Ю. М. Общая схема решения интерполяционных задач в классе Стильтеса, основанная на согласованных интегральных представлениях пар неотрицательных операторов. I // Матем. физика, анализ, геом. 1999. Т. 6. № 1/2. С. 30–54.
8. Bolotnikov V., Sakhnovich L. On an operator approach to interpolation problems for Stieltjes functions // Integral Equations Operator Theory. 1999. V. 35. P. 423–470.
9. Stieltjes T. Recherches sur les fractions continues // Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6). 1894. V. 8. P. 1–122; 1895. V. 9. P. 1–47.
10. Schur I. Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind // J. Reine Angew. Math. 1917. V. 147. P. 205–232; 1918. V. 148. P. 122–145.
11. Hamburger H. Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblem // Math. Ann. 1920. V. 81. P. 235–319; 1921. V. 82. P. 120–164; 1921. V. 82. P. 168–187.
12. Ковалишина И. В., Потапов В. П. Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны–Пика // Докл. АН АрмССР. 1974. Т. 59. № 1. С. 17–22.
13. Ковалишина И. В. Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 3. С. 455–497.

14. *Потапов В. П.* К теории матричных кругов Вейля // Функциональный анализ и прикладная математика. Киев: Наукова думка, 1982. С. 113–121.
15. *Потапов В. П.* Дробно-линейные преобразования матриц // Исследования по теории операторов и их приложениям. Киев: Наукова думка, 1979. С. 75–97.
16. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.
17. *Дюкарев Ю. М., Кацнельсон В. Э.* Мультипликативные и аддитивные классы Стильеса аналитических матриц-функций и связанные с ними интерполяционные задачи // Теория функций, функц. анализ и их прилож. 1981. №36. С. 13–27.
18. *Дюкарев Ю. М., Чоке Риверо А. Е.* Степенная проблема моментов на компактном интервале // Матем. заметки. 2001. Т. 69. №2. С. 200–213.
19. *Simon B.* The classical moment problem as a self-adjoint finite difference operator // Adv. Math. 1998. V. 137. P. 82–203.
20. *Donoghue W. F.* Monotone matrix functions and analytic continuation. Berlin: Springer-Verlag, 1974.
21. *Орлов С. А.* Гнездящиеся матричные круги, аналитически зависящие от параметра, и теоремы об инвариантности рангов радиусов предельных матричных кругов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40. №3. С. 593–644.

Харьковский национальный университет, Украина
E-mail: Yury.M.Dyukarev@univer.kharkov.ua

Поступила в редакцию
03.06.2003