Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А.-Р. К. Рамазанов, Характеризация полинома наилучшего приближения непрерывной функции со знакочувствительным весом, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 3, 89–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1277>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 12:02:49

УДК 517.5

А.-Р. К. Рамазанов

Характеризация полинома наилучшего приближения непрерывной функции со знакочувствительным весом

Найдены необходимые и достаточные условия полинома наилучшего равномерного приближения непрерывной функции с произвольным, вообще говоря, неограниченным знакочувствительным весом; компоненты веса могут принимать также и бесконечные значения, поэтому найденные условия охватывают, в частности, аппроксимации с интерполяцией в заданных точках и аппроксимации односторонние; в случае веса с единичными компонентами приходим к классической теореме о чебышёвском альтернансе.

Библиография: 6 названий.

Введение

Знакочувствительным весом на отрезке $\Delta = [a, b]$ называется упорядоченная пара $p = (p_-, p_+)$ однозначных неотрицательных функций $p_-(x)$ и $p_+(x)$, определенных на Δ и принимающих, вообще говоря, также и значение $+\infty$ (см. [1], [2]).

Вес p назовем *ограниченным* (или *непрерывным*), если таковы обе его компоненты $p_-(x)$ и $p_+(x)$ на Δ , и *неограниченным*, если на Δ не ограничена хотя бы одна из этих компонент.

Для определенной на Δ функции $f(x)$ положим

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \max\{f(x), 0\}, & f^-(x) &= (-f(x))^+, \\ (f, p)(x) &= f^+(x)p_+(x) - f^-(x)p_-(x) \end{aligned}$$

и p -нормой функции $f(x)$ по отрезку Δ назовем величину

$$|f|_p = |f|_{p, \Delta} = \sup\{|(f, p)(x)| : x \in \Delta\}$$

(считаем $0 \cdot (+\infty) = +\infty \cdot 0 = 0$, $c \cdot (+\infty) = +\infty \cdot c = +\infty$ ($-\infty$) для положительных (отрицательных) чисел c).

Легко увидеть, что p -норма $|f|_p = |f|_{p, \Delta}$ в общем случае не является нормой. Она представляет собой положительный сублинейный (т.е. неотрицательный, выпуклый и положительно однородный), вообще говоря, неограниченный функционал на пространстве $M(\Delta)$ ограниченных на Δ функций:

$$|f|_p \geq 0, \quad |f + g|_p \leq |f|_p + |g|_p, \quad |cf|_p = c|f|_p$$

для любых $f, g \in M(\Delta)$ и неотрицательного числа c ; однако, вообще говоря, p -норма является несимметричной (т.е. возможно неравенство $|-f|_p \neq |f|_p$).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-01-01019) и Министерства образования РФ.

Очевидно, для единичного веса (т.е. при $p_-(x) \equiv p_+(x) \equiv 1$) p -норма совпадает с обычной равномерной нормой:

$$\|f\|_{\Delta} = \sup\{|f(x)| : x \in \Delta\}.$$

Отметим, что положительные сублинейные функционалы в качестве масштабных функций в конечномерном пространстве рассматривал Г. Минковский [3]. Для веса $p = (p_-, p_+)$ с непрерывными и строго положительными компонентами p -норму в качестве несимметричной нормы рассматривали М. Г. Крейн и А. А. Нудельман [4]; в случае такого веса для полиномиальных приближений функций, непрерывных на отрезке Δ , ими получен аналог теоремы Чебышёва об альтернансе. Е. П. Долженко и Е. А. Севастьянов [1] показали, что наличие (обобщенного) чебышёвского альтернанса является критериальным свойством полинома $Q(x)$ наилучшего приближения непрерывной функции $f(x)$ в p -норме для произвольного ограниченного веса $p = (p_-, p_+)$, компоненты $p_-(x)$ и $p_+(x)$ которого являются полунепрерывными сверху (в случае приближения непрерывной функции непрерывными же функциями из некоторого класса достаточно рассматривать только такие веса); при этом в качестве альтернанса они рассматривали точки экстремума функции $(Q - f, p)(x)$, являющейся прямым обобщением разности $Q(x) - f(x)$ испытуемого полинома $Q(x)$ и приближаемой функции $f(x)$, рассматриваемой в классической теореме Чебышёва. В [5] получен критерий алгебраического (тригонометрического) полинома наилучшего приближения произвольной ограниченной функции в p -норме с произвольным ограниченным весом $p = (p_-, p_+)$; в этом случае, вообще говоря, наличие чебышёвского p -альтернанса уже не выступает как единое характеристическое свойство полинома наилучшего приближения.

Ниже рассматривается общий случай приближения непрерывных функций в p -норме с произвольным, вообще говоря, разрывным и неограниченным весом $p = (p_-, p_+)$ на отрезке Δ ; равенства $p_-(x) = +\infty$ и $p_+(x) = +\infty$ также не исключаются. Поэтому нужны новые построения, связанные именно с неограниченностью рассматриваемого веса. Заметим, что введение весов, компоненты которых принимают и значение ∞ , позволяют рассматривать с единой точки зрения и аппроксимации с интерполяцией в наперед заданных точках, и односторонние аппроксимации.

Основным результатом работы является доказательство необходимого и достаточного условия на алгебраический полином $Q(x)$ для того, чтобы он был полиномом наилучшего приближения для заданной непрерывной функции $f(x)$ относительно заданного знакочувствительного веса $p(x)$, вообще говоря, разрывного, неограниченного и принимающего значение $+\infty$ (теорема 1 – если степень $Q(x)$ меньше мощности множества точек одновременной неограниченности компонент $p_-(x)$ и $p_+(x)$ веса $p(x)$, и теорема 4 – если степень $Q(x)$ не меньше мощности этого множества).

§1. Обозначения и уточнение постановки задачи

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $\Delta = [a, b]$, на котором определен вес $p = (p_-, p_+)$; $\mathcal{P}_n$ – множество всех алгебраических полиномов степени не выше n , $n = 0, 1, \dots$, с действительными коэффициентами.

Наименьшее полиномиальное отклонение (наилучшее приближение) порядка n

функции $f(x)$ в p -норме определим равенством

$$E_n(f, p, \Delta) = \inf\{|P - f|_{p, \Delta} : P \in \mathcal{P}_n\}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Если для некоторого полинома $Q \in \mathcal{P}_n$ выполняется равенство

$$|Q - f|_{p, \Delta} = E_n(f, p, \Delta), \quad (1)$$

то Q назовем полиномом наилучшего приближения порядка n функции $f(x)$ в p -норме или с весом $p = (p_-, p_+)$ на отрезке Δ .

Через Δ_-^∞ (Δ_+^∞) обозначим множество всех тех точек x отрезка Δ , в любой окрестности каждой из которых не ограничена компонента $p_-(x)$ (соответственно $p_+(x)$) или для которых $p_-(x) = +\infty$ ($p_+(x) = +\infty$).

Предварительно рассмотрим случай, когда для данного веса $p = (p_-, p_+)$ мощность множества $F = \Delta_-^\infty \cap \Delta_+^\infty$ превосходит порядок наилучшего полиномиального приближения данной функции в p -норме.

ТЕОРЕМА 1. Пусть на отрезке $\Delta = [a, b]$ заданы произвольный вес $p = (p_-, p_+)$ и непрерывная функция $f(x)$; для данного n , $n = 0, 1, \dots$, полином $Q \in \mathcal{P}_n$, $L(x, f, T)$ обозначает интерполяционный полином степени не выше n функции $f(x)$ с множеством узлов T ; мощность множества $F = \Delta_-^\infty \cap \Delta_+^\infty$ больше n .

Тогда для выполнения равенства (1) с данным полиномом $Q(x)$ необходимо и достаточно существование такого набора различных точек $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset F$, что $L(x, f, T) \equiv Q(x)$ или $|L(\cdot, f, T) - f|_{p, \Delta} = \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для полинома $Q \in \mathcal{P}_n$ выполнено равенство (1). Будем считать $|\cdot|_p = |\cdot|_{p, \Delta}$ и рассмотрим два случая.

1) $|Q - f|_p < \infty$. Тогда при любом $x \in F$ имеем $Q(x) = f(x)$; в частности, $Q(x) = f(x)$, $x \in T$ для любого набора различных точек $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset F$, а поэтому $L(x, f, T) \equiv Q(x)$ для каждого такого набора T .

2) $|Q - f|_p = \infty$. Тогда $E_n(f, p, \Delta) = \infty$, поэтому для любого полинома степени не выше n , в частности для $L(x, f, T)$, при любом выборе $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ различных точек из F получим $|L(\cdot, f, T) - f|_p = \infty$.

Необходимость доказана, докажем достаточность.

Пусть существует набор различных точек $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset F$ с $L(x, f, T) \equiv Q(x)$. Тогда $Q(x) = f(x)$ при $x \in T$.

Если при этом $|Q - f|_p < \infty$, то для любого другого полинома $P \in \mathcal{P}_n$, $P \neq Q$, имеем $|P - f|_p = \infty$.

Действительно, в противном случае $P(x) = f(x)$ при $x \in F$, откуда следует $P(x) = f(x) = Q(x)$ при $x \in T$, а поэтому $P(x) \equiv Q(x)$.

Следовательно, для полинома $Q(x)$ выполняется равенство (1).

Пусть теперь $|Q - f|_p = \infty$. В этом случае исследуемое первое $Q(x) \equiv L(x, p, T)$ из условий теоремы приводит ко второму, а поэтому остается рассмотреть случай $|L(\cdot, f, T) - f|_p = \infty$. Тогда $E_n(f, p, \Delta) = \infty$, так как величина $|P - f|_p$ при $P \in \mathcal{P}_n$ и мощности множества F большей n может быть конечной лишь для $P(x) \equiv L(x, f, T)$.

Следовательно, для любого полинома $P \in \mathcal{P}_n$ (вместо $Q(x)$), в частности самого полинома $Q(x)$, выполняется равенство (1) и теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как следует из теоремы 1, интерполяционный полином $L(x, f, T)$ является полиномом наилучшего приближения порядка n функции $f(x)$ в p -норме, однако, как следует из приведенного доказательства, интерполяционность не является необходимым условием полинома наилучшего приближения.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если для данного веса $p = (p_-, p_+)$, как и выше, мощность множества $F = \Delta_-^\infty \cap \Delta_+^\infty$ больше n , $n = 0, 1, \dots$, то для любых двух различных полиномов $P, Q \in \mathcal{P}_n$, очевидно, имеем $|P - Q|_p = \infty$. Отсюда вытекает еще одно достаточное условие полинома наилучшего приближения в рассматриваемом случае: если для данного полинома $Q \in \mathcal{P}_n$ и функции $f(x)$ величина $|(Q - f)|_p = |f - Q|_p$ конечна, то выполняется равенство (1) (так как тогда из неравенства $|P - Q|_p \leq |P - f|_p + |f - Q|_p$ имеем $|P - f|_p = \infty$ при любом другом полиноме $P \in \mathcal{P}_n$).

Отметим также, что если функция $f(x)$ непрерывна на Δ , полином $Q \in \mathcal{P}_n$, $n = 0, 1, \dots$, и существует точка $x \in \Delta_-^\infty$ с $Q(x) < f(x)$ или существует точка $x \in \Delta_+^\infty$ с $Q(x) > f(x)$, то $|Q - f|_p = \infty$, а следовательно, для этого случая равенство (1) выполняется тогда и только тогда, когда $E_n(f, p, \Delta) = \infty$.

Поэтому всюду ниже, если не оговорено противное, будем считать, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $\Delta = [a, b]$, полином $Q \in \mathcal{P}_n$, $n = 0, 1, \dots$, $Q(x) \geq f(x)$ при $x \in \Delta_-^\infty$, $Q(x) \leq f(x)$ при $x \in \Delta_+^\infty$ и, в частности, $Q(x) = f(x)$ при $x \in F$, мощность множества F не больше n для данного на Δ веса $p = (p_-, p_+)$.

Через $\Delta(p_-)$ и $\Delta(p_+)$ обозначим множества соответственно $(-)$ - и $(+)$ -точек p -экстремума разности $Q(x) - f(x)$ на отрезке Δ , т.е. таких точек $y \in \Delta$, что при $E = (y - \delta, y + \delta) \cap \Delta$ и любом $\delta > 0$ выполняются соответственно равенства

$$\sup\{[Q(x) - f(x)]^- p_-(x) : x \in E\} = |Q - f|_{p, \Delta}, \quad (2)$$

$$\sup\{[Q(x) - f(x)]^+ p_+(x) : x \in E\} = |Q - f|_{p, \Delta}. \quad (3)$$

Если равенства (2) и (3) выполняются при $E = (y - \delta, y] \cap \Delta$ ($E = [y, y + \delta) \cap \Delta$), то будем говорить, что точка y принадлежит $\Delta(p_-)$ и соответственно $\Delta(p_+)$ относительно своих левых (правых) окрестностей.

Через $\Delta(p_-, n)$ обозначим множество точек $y \in \Delta \setminus \Delta(p_-)$, для которых при сколь угодно малых $\delta > 0$ и $\alpha > 0$ найдется точка $x \in (y - \delta, y + \delta) \cap \Delta$ с

$$(f(x) - Q(x) + \alpha|x - y|^n) p_-(x) \geq |Q - f|_{p, \Delta}. \quad (4)$$

Если при аналогичных δ, α, x для $y \in \Delta \setminus \Delta(p_+)$ вместо (4) выполняется неравенство

$$(Q(x) - f(x) + \alpha|x - y|^n) p_+(x) \geq |Q - f|_{p, \Delta}, \quad (5)$$

то по определению точка $y \in \Delta(p_+, n)$. При этом точка $y \in \Delta(p_-, n)$ или точка $y \in \Delta(p_+, n)$ относительно своих левых (правых) окрестностей, если неравенство (4) или соответственно (5) выполняется при $x \in (y - \delta, y] \cap \Delta$ ($x \in [y, y + \delta) \cap \Delta$).

Определим также множества

$$\begin{aligned} \Delta_-^\infty(Q = f) &= \{x \in \Delta_-^\infty \setminus \Delta_+^\infty : Q(x) = f(x)\}, \\ \Delta_+^\infty(Q = f) &= \{x \in \Delta_+^\infty \setminus \Delta_-^\infty : Q(x) = f(x)\} \end{aligned}$$

и множества $\Delta^{\infty}(Q = f)'$, $\Delta_+^{\infty}(Q = f)'$ их предельных точек; при этом, как и выше, скажем, что точка $y \in \Delta^{\infty}(Q = f)'$ или точка $y \in \Delta_+^{\infty}(Q = f)'$ относительно своих левых (правых) окрестностей, если она служит предельной точкой пересечения промежутка $(y - \delta, y]$ ($[y, y + \delta)$) соответственно с $\Delta^{\infty}(Q = f)$ или с $\Delta_+^{\infty}(Q = f)$.

Для сокращения записи всюду ниже положим

$$\begin{aligned} E_- &= \Delta(p_-) \cup \Delta(p_-, n) \cup \Delta^{\infty}(Q = f)', \\ G_- &= \Delta(p_-) \cup \Delta(p_-, n) \cup \Delta^{\infty}(Q = f); \end{aligned}$$

заменяв в правых частях для E_- и G_- все знаки $-$ на знаки $+$, получим соответственно множества E_+ и G_+ ; будем считать также $|\cdot|_p = |\cdot|_{p, \Delta}$.

§ 2. Первое достаточное условие полинома наилучшего приближения

Будем придерживаться обозначений, принятых выше; в частности, на отрезке Δ для данных веса $p = (p_-, p_+)$, функции $f(x)$ и полинома $Q(x)$ множества E_- и E_+ определяются так же, как и в § 1.

ТЕОРЕМА 2. Пусть на отрезке Δ заданы вес $p = (p_-, p_+)$ и непрерывная функция $f(x)$, алгебраический полином $Q(x)$ степени $\leq n$, $n = 0, 1, \dots$, удовлетворяет неравенству $Q(x) \geq f(x)$ при $x \in \Delta^{\infty}$ и неравенству $Q(x) \leq f(x)$ при $x \in \Delta_+^{\infty}$.

Если множество $E_- \cap E_+$ содержит хотя бы одну точку относительно ее односторонних окрестностей, то $Q(x)$ является полиномом наилучшего приближения порядка n функции $f(x)$ в p -норме с весом $p = (p_-, p_+)$ на отрезке Δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как при $|Q - f|_p = 0$ равенство (1), очевидно, выполняется, будем считать $|Q - f|_p > 0$.

Пусть некоторая точка $x_0 \in E_- \cap E_+$ относительно ее, например, правых окрестностей.

Тогда эта точка $x_0 \in F = \Delta^{\infty} \cap \Delta_+^{\infty}$.

Действительно, допустим, что $x_0 \notin \Delta_+^{\infty}$. Тогда из $x_0 \in E_+$ следует $x_0 \in \Delta(p_+)$, а поэтому $Q(x_0) > f(x_0)$. В силу непрерывности $Q(x)$ и $f(x)$ найдется такое $\delta > 0$, что при $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ имеем $Q(x) > f(x)$.

Отсюда, очевидно, следует, что $x_0 \notin \Delta(p_-)$, так как $|Q - f|_p > 0$.

Далее, $x_0 \notin \Delta^{\infty}(Q = f)'$, так как в противном случае по непрерывности получили бы $Q(x_0) = f(x_0)$.

Наконец, так как

$$\max\{f(x) - Q(x) : x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]\} < 0,$$

условие (4) также не может выполняться и $x_0 \notin \Delta(p_-, n)$.

Следовательно, допущение $x_0 \notin \Delta_+^{\infty}$ приводит к противоречию с $x_0 \in E_-$, а поэтому $x_0 \in \Delta_+^{\infty}$.

Аналогично показываем, что $x_0 \in \Delta^{\infty}$.

Так как $x_0 \in F$, то выполняется равенство $Q(x_0) = f(x_0)$.

Допустим теперь, что существует полином $P \in \mathcal{P}_n$, $n = 0, 1, \dots$, такой, что

$$|P - f|_p < |Q - f|_p. \quad (6)$$

Тогда $|P - f|_p$ конечна, а поэтому из $x_0 \in F$ имеем $P(x_0) = f(x_0)$.

Следовательно, выполняется равенство $Q(x_0) = P(x_0)$.

Пусть сначала точка $x_0 \in \Delta(p_-) \cap \Delta(p_+)$ (относительно ее правых окрестностей). Тогда найдутся две последовательности точек $x_j \rightarrow x_0$, $j \rightarrow \infty$, $x_j \geq x_0$, и $y_j \rightarrow x_0$, $j \rightarrow \infty$, $y_j \geq x_0$, такие, что при $j \rightarrow \infty$ обе последовательности $(f(x_j) - Q(x_j))p_-(x_j)$ и $(Q(x_j) - f(x_j))p_+(x_j)$ имеют пределом $|Q - f|_p > 0$.

Если теперь $Q(x) > P(x)$ при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ с некоторым $\delta > 0$, то при $j \rightarrow \infty$ получим

$$|P - f|_p \geq (f(x_j) - P(x_j))p_-(x_j) \geq (f(x_j) - Q(x_j))p_-(x_j) \rightarrow |Q - f|_p.$$

Если же $Q(x) < P(x)$ при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ с некоторым $\delta > 0$, то при $j \rightarrow \infty$ также получим

$$|P - f|_p \geq (P(y_j) - f(y_j))p_+(y_j) \geq (Q(y_j) - f(y_j))p_+(y_j) \rightarrow |Q - f|_p.$$

Оба раза пришли к противоречию с допущением (6).

Следовательно, если некоторая точка $x_0 \in \Delta(p_-) \cap \Delta(p_+)$ относительно ее правых окрестностей, то выполняется равенство (1).

Рассмотрим теперь случай точки $x_0 \in \Delta(p_-) \cap \Delta(p_+, n)$ относительно ее правых окрестностей.

Так как $x_0 \in \Delta(p_-)$ и выполняется (6), существует последовательность $x_j \rightarrow x_0$, $j \rightarrow \infty$, $x_j \geq x_0$, такая, что

$$(Q(x_j) - f(x_j))p_-(x_j) > |P - f|_p$$

для всех достаточно больших номеров j (для них не исключается случай $x_j = x_0$). Тогда

$$\begin{aligned} (Q(x_j) - f(x_j))^- p_-(x_j) &\leq (Q(x_j) - P(x_j))^- p_-(x_j) + |P - f|_p; \\ (Q(x_j) - P(x_j))^- p_-(x_j) &\geq (Q(x_j) - f(x_j))^- p_-(x_j) - |P - f|_p > 0. \end{aligned}$$

Поэтому $Q(x_j) - P(x_j) < 0$ при всех достаточно больших j , откуда $Q(x) < P(x)$ при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ с некоторым достаточно малым $\delta > 0$.

В нашем случае $Q(x_0) = P(x_0)$, поэтому существует $a_m \neq 0$, $1 \leq m \leq n$, и

$$P(x) - Q(x) = a_m(x - x_0)^m + a_{m+1}(x - x_0)^{m+1} + \dots + a_n(x - x_0)^n > 0$$

при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

Возьмем $0 < \alpha < (1/2)|a_m|$. Тогда при достаточно малых $\delta > 0$ для $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ получим

$$P(x) - Q(x) \geq \alpha|x - x_0|^n.$$

Теперь из того, что $x_0 \in \Delta(p_+, n)$, следует, что существует $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ такое, что

$$(Q(x) - f(x) + \alpha|x - x_0|^n)p_+(x) \geq |Q - f|_p,$$

поэтому для такого x имеем

$$\begin{aligned} |P - f|_p &\geq (P(x) - f(x))p_+(x) = (Q(x) - f(x) + P(x) - Q(x))p_+(x) \\ &\geq (Q(x) - f(x) + \alpha|x - x_0|^n)p_+(x) \geq |Q - f|_p, \end{aligned}$$

что противоречит (6), а поэтому при $x_0 \in \Delta(p_-) \cap \Delta(p_+, n)$ (относительно своих правых окрестностей) выполняется равенство (1).

Случай $x_0 \in \Delta(p_+) \cap \Delta(p_-, n)$ рассматривается вполне аналогично.

Пусть теперь точка $x_0 \in \Delta(p_-) \cap \Delta_+^\infty(Q = f)'$ относительно ее правых окрестностей. Тогда, как показано выше, из того, что $x_0 \in \Delta(p_-)$ относительно правых окрестностей, и неравенства (6) следует, что $Q(x) < P(x)$ при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ с некоторым достаточно малым $\delta > 0$.

Из того, что $x_0 \in \Delta_+^\infty(Q = f)'$ относительно правых окрестностей, вытекает, что существует точка $y_0 \in (x_0, x_0 + \delta) \cap \Delta_+^\infty(Q = f)$. Тогда $P(y_0) > Q(y_0) = f(y_0)$, а поэтому $P(x) > f(x)$ (в силу непрерывности) при $x \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ с некоторым $\delta > 0$. Так как $y_0 \in \Delta_+^\infty$, получим

$$|P - f|_p \geq \sup\{(P(x) - f(x))p_+(x) : x \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)\} = +\infty,$$

что противоречит неравенству (6).

Случай $x_0 \in \Delta(p_+) \cap \Delta_-^\infty(Q = f)'$ (относительно правых окрестностей) рассматривается аналогично.

Пусть, далее, точка $x_0 \in \Delta(p_-, n) \cap \Delta(p_+, n)$ относительно ее правых окрестностей. Возьмем $0 < \alpha < (1/2)|a_m|$ для $a_m \neq 0, 1 \leq m \leq n$,

$$P(x) - Q(x) = a_m(x - x_0)^m + a_{m+1}(x - x_0)^{m+1} + \dots + a_n(x - x_0)^n,$$

и $\delta > 0$ такое, что разность $P(x) - Q(x)$ имеет определенный знак и выполняется неравенство

$$|P(x) - Q(x)| \geq \alpha|x - x_0|^n$$

при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Тогда по определению $\Delta(p_-, n)$ и $\Delta(p_+, n)$ найдутся две последовательности точек $x_j, y_j \in (x_0, x_0 + \delta)$ с $x_j \rightarrow x_0, y_j \rightarrow x_0, j \rightarrow \infty$, и

$$\begin{aligned} (f(x_j) - Q(x_j) + \alpha|x_j - x_0|^n)p_-(x_j) &\geq |Q - f|_p, \\ (Q(y_j) - f(y_j) + \alpha|y_j - x_0|^n)p_+(y_j) &\geq |Q - f|_p. \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь первым или вторым из этих неравенств в зависимости от того, выполняется неравенство $Q(x) > P(x)$ или неравенство $Q(x) < P(x)$ при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Пусть, например, $Q(x) > P(x)$ при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Тогда

$$\begin{aligned} |P - f|_p &\geq (f(x_j) - P(x_j))p_-(x_j) = (f(x_j) - Q(x_j) + Q(x_j) - P(x_j))p_-(x_j) \\ &\geq (f(x_j) - Q(x_j) + \alpha|x_j - x_0|^n)p_-(x_j) \geq |Q - f|_p, \end{aligned}$$

что противоречит неравенству (6).

Рассмотрим теперь случай точки $x_0 \in \Delta(p_-, n) \cap \Delta_+^\infty(Q = f)'$ относительно ее правых окрестностей. Если при $x_0 \in \Delta(p_-, n)$ допустить, что выполняется (6) и $Q(x) > P(x)$ для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ с некоторым $\delta > 0$, то, как показано выше, приходим к противоречию. Поэтому пусть $Q(x) < P(x)$ для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ с некоторым $\delta > 0$.

Так как точка $x_0 \in \Delta_+^\infty(Q = f)'$ относительно ее правых окрестностей, то существует $y_0 \in (x_0, x_0 + \delta) \cap \Delta_+^\infty(Q = f)$. Тогда $P(y_0) > Q(y_0) = f(y_0)$ и в силу непрерывности $P(x) > f(x)$ при всех $x \in (y_0 - \eta, y_0 + \eta)$ с некоторым $\eta > 0$. Отсюда и из $y_0 \in \Delta_+^\infty$, как и выше, приходим к противоречию: $|P - f|_p = \infty$.

Случай $x_0 \in \Delta(p_+, n) \cap \Delta_-^\infty(Q = f)'$ относительно правых окрестностей рассматривается аналогично.

Пусть, наконец, точка $x_0 \in \Delta_-^\infty(Q = f)' \cap \Delta_+^\infty(Q = f)'$ относительно ее правых окрестностей. Тогда ввиду конечности $|P - f|_p$ найдутся такие две последовательности различных точек x_j и различных точек y_j , что

$$\begin{aligned} x_j > x_0, \quad x_j \in \Delta_-^\infty, \quad Q(x_j) = f(x_j), \quad f(x_j) - P(x_j) \leq 0, \\ y_j > x_0, \quad y_j \in \Delta_+^\infty, \quad Q(y_j) = f(y_j), \quad f(y_j) - P(y_j) \geq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $Q(x_j) \leq P(x_j)$ и $Q(y_j) \geq P(y_j)$ для всех таких различных точек x_j и y_j , а поэтому $Q(x) \equiv P(x)$, что противоречит неравенству (6).

Итак, в условиях теоремы выполняется равенство (1) и теорема 2 доказана.

§ 3. Точки p -экстремума полной степени. Второе достаточное условие полинома наилучшего приближения

Пусть, как и выше, вес $p = (p_-, p_+)$ определен на отрезке Δ , функция $f(x)$ непрерывна на Δ , $Q(x)$ — заданный алгебраический полином степени не выше n , $n = 0, 1, \dots$, причем $Q(x) \geq f(x)$ при $x \in \Delta_-^\infty$ и $Q(x) \leq f(x)$ при $x \in \Delta_+^\infty$.

При определении точки p -экстремума полной степени будем считать, что на отрезке Δ нет точек, принадлежащих множеству $E_- \cap E_+$ относительно своих односторонних окрестностей. Тогда, в частности, $|Q - f|_p > 0$.

Если точка $z \notin E_-$ относительно ее правых окрестностей, то через $\nu_{r-}(z)$ обозначим наименьшее натуральное $\nu \leq n$, для которого существуют сколь угодно малые $\alpha > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\sup \{ (f(x) - Q(x) + \alpha|x - z|^\nu)p_-(x) : x \in [z, z + \delta] \} < |Q - f|_p. \quad (7)$$

Заметим, что величина $\nu_{r-}(z)$ существует, так как в противном случае получили бы $z \in \Delta(p_-)$ или $z \in \Delta(p_-, n)$, а поэтому $z \in E_-$ относительно правых окрестностей точки z .

Как легко видеть, при $\nu = \nu_{r-}(z)$, натуральных $m < \nu$ и сколь угодно малом $\alpha > 0$ найдется такая последовательность точек $x_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, $x_k \geq z$, что

$$(f(x_k) - Q(x_k) + \alpha|x_k - z|^m)p_-(x_k) \geq |Q - f|_p. \quad (8)$$

Взяв в (7) левую окрестность $[z - \delta, z]$ вместо правой $[z, z + \delta]$, получим определение величины $\nu_{l-}(z)$.

Вполне аналогично относительно другой компоненты веса $p_+(x)$ определяются величины $\nu_{r+}(z)$ и $\nu_{l+}(z)$, при этом условие (7) следует заменить на условие

$$\sup(Q(x) - f(x) + \alpha|x - z|^\nu)p_+(x) < |Q - f|_p, \quad (9)$$

где супремум берется соответственно на $[z, z + \delta]$ и на $[z - \delta, z]$.

Для точек p -экстремума $z \in \Delta(p_-) \cup \Delta(p_+)$ определим также другую характеристику; именно, если точка $z \in \Delta(p_+)$ относительно ее правых окрестностей, то $\mu_{r+}(z)$ означает наименьшее натуральное число $\mu \leq n$, для которого найдется последовательность точек $y_k \rightarrow z, k \rightarrow \infty, y_k \geq z$, такая, что

$$(y_k - z)^\mu p_+(y_k) \rightarrow 0, \quad (Q(y_k) - f(y_k))p_+(y_k) \rightarrow |Q - f|_p \quad (10)$$

при $k \rightarrow \infty$; в противном случае для этой точки $z \in \Delta(p_+)$ положим $\mu_{r+}(z) = n + 1$.

Заметим, что если $\mu_{r+}(z) = n + 1$, то при любом $1 \leq \mu \leq n$ для любой последовательности $y_k \rightarrow z, k \rightarrow \infty, y_k \geq z$, такой, что

$$(Q(y_k) - f(y_k))p_+(y_k) \rightarrow |Q - f|_p,$$

величина $(y_k - z)^\mu p_+(y_k)$ не стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$.

Взяв в (10) последовательность $y_k \leq z$ вместо $y_k \geq z$, получим определение величины $\mu_{l+}(z)$ относительно левых окрестностей точки z .

Аналогично определяются $\mu_{r-}(z)$ и $\mu_{l-}(z)$ для компоненты $p_-(x)$, если точка $z \in \Delta(p_-)$.

Рассмотрим теперь полиномы вида

$$P_{m,n}(x) = Q(x) + a_m(x - z)^m + \dots + a_n(x - z)^n$$

с заданным полиномом $Q(x)$ и действительными коэффициентами $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$, $1 \leq m \leq n$.

Тогда для рассматриваемых на отрезке Δ веса $p = (p_-, p_+)$, непрерывной функции $f(x)$ и полинома $Q(x)$ степени $\leq n$, $n = 0, 1, \dots$, с $Q(x) \geq f(x)$ при $x \in \Delta_-^\infty$ и $Q(x) \leq f(x)$ при $x \in \Delta_+^\infty$ имеют место следующие утверждения.

ЛЕММА 1. Если существует точка $z \in F = \Delta_-^\infty \cap \Delta_+^\infty$, то при $n = 0$ для любого полинома $P(x)$ нулевой степени $|Q - f|_p \leq |P - f|_p$, а при $n \geq 1$ для некоторого полинома $P(x)$ степени не выше n неравенство

$$|P - f|_p < |Q - f|_p \quad (11)$$

возможно лишь при его совпадении с одним из полиномов вида $P_{m,n}(x)$, $1 \leq m \leq n$.

Отметим, что в случае $z \in \Delta(p_-) \cup \Delta(p_+)$ и $n \geq 1$ значение параметра m , при котором полином $P(x) = P_{m,n}(x)$ может удовлетворять неравенству (11), можно дальше уточнить. Лемму 1 дополняет

ЛЕММА 2. При $n \geq 1$ и $z \in F = \Delta_-^\infty \cap \Delta_+^\infty$ неравенство

$$|P_{m,n} - f|_{p,\Delta} < |Q - f|_{p,\Delta}$$

возможно лишь при значении m , удовлетворяющем двойному неравенству

$$\nu_{r-}(z) \leq m < \mu_{r+}(z) \quad (\nu_{l-}(z) \leq m < \mu_{l+}(z))$$

для точки $z \in \Delta(p_+) \subset E_+$ относительно ее правых (левых) окрестностей и двойному неравенству

$$\nu_{r+}(z) \leq m < \mu_{r-}(z) \quad (\nu_{l+}(z) \leq m < \mu_{l-}(z))$$

для точки $z \in \Delta(p_-) \subset E_-$ относительно ее правых (левых) окрестностей. При этом число m четное или нечетное в зависимости от того, точка z принадлежит одному и тому же или разным из двух множеств E_- и E_+ относительно ее левых и правых окрестностей.

Приведенные в лемме 2 двойные неравенства для краткости всюду ниже назовем согласованными с точкой $z \in \Delta(p_-) \cup \Delta(p_+)$ относительно ее соответствующих односторонних окрестностей и определим точки p -экстремума полной степени.

Пусть на отрезке $\Delta = [a, b]$ заданы произвольный вес $p = (p_-, p_+)$ и непрерывная функция $f(x)$; $Q \in \mathcal{P}_n$, $n = 0, 1, \dots$, причем $Q(x) \geq f(x)$ при $x \in \Delta_-^\infty$ и $Q(x) \leq f(x)$ при $x \in \Delta_+^\infty$; точка $z \in \Delta_-^\infty \cap \Delta_+^\infty$, но эта точка $z \notin E_- \cap E_+$ относительно одних и тех же ее односторонних окрестностей.

Через $m(z)$ обозначим натуральное число, четное или нечетное в зависимости от того, точка z принадлежит одному и тому же или разным из двух множеств E_- и E_+ относительно ее правых и левых окрестностей, и произвольное в остальных случаях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Точку $z \in \Delta(p_-) \cup \Delta(p_+)$ назовем *точкой p -экстремума полной степени для разности $Q(x) - f(x)$ на отрезке Δ* , если $n = 0$ или если $n \geq 1$ и хотя бы одно согласованное с этой точкой z двойное неравенство среди следующих четырех неравенств

$$\begin{aligned} \nu_{r\mp}(z) &\leq m < \mu_{r\pm}(z), \\ \nu_{l\mp}(z) &\leq m < \mu_{l\pm}(z) \end{aligned}$$

не имеет решения типа $m = m(z)$.

Из данного определения 1 и лемм 1 и 2 непосредственно вытекает следующая

ТЕОРЕМА 3. Если для заданных на отрезке Δ веса $p = (p_-, p_+)$, непрерывной функции $f(x)$ и полинома $Q \in \mathcal{P}_n$, $n = 0, 1, \dots$, существует хотя бы одна точка p -экстремума полной степени для разности $Q(x) - f(x)$ на Δ , то $Q(x)$ — полином наилучшего приближения порядка n функции $f(x)$ в p -норме с весом $p = (p_-, p_+)$ на отрезке Δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Из $z \in \Delta_-^\infty \cap \Delta_+^\infty$ по условию на полином $Q(x)$ и функцию $f(x)$ имеем $Q(z) = f(z)$.

Поэтому при $n = 0$ получим: $|Q - f|_p = |P - f|_p$, если полиномы $Q(x)$ и $P(x)$ совпадают, и $|P - f|_p = \infty$, если эти полиномы не совпадают.

При $n \geq 1$ из неравенства (11) следует конечность величины $|P - f|_p$, поэтому $P(z) = f(z)$, так как в силу непрерывности $P(x) - f(x)$ при $P(z) > f(z)$ и $P(z) < f(z)$ получим $|P - f|_p = \infty$. Так как $P(z) = f(z) = Q(z)$, то второе утверждение леммы также доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Сначала покажем, что если μ совпадает с одной из четырех величин $\mu_{r\pm}(z)$, $\mu_{l\pm}(z)$ и $\mu \leq m \leq n$, то

$$|Q - f|_p \leq |P_{m,n} - f|_p.$$

Действительно, пусть для определенности существует $\mu = \mu_{r+}(z) \leq m \leq n$. Тогда для последовательности точек y_k из определения величины $\mu_{r+}(z)$ при $k \rightarrow \infty$ получим

$$\begin{aligned} |P_{m,n} - f|_p &\geq (P_{m,n}(y_k) - f(y_k))p_+(y_k) = (Q(y_k) - f(y_k))p_+(y_k) \\ &\quad + (a_m(y_k - z)^m + \dots + a_n(y_k - z)^n)p_+(y_k) \rightarrow |Q - f|_p. \end{aligned}$$

Следовательно, если $z \in F$, μ равно одной из величин $\mu_{r\pm}(z)$, $\mu_{l\pm}(z)$ и для некоторого полинома $P(x)$ степени не выше n выполняется неравенство (11), то $P(x) \equiv P_{m,n}(x)$ при некотором $m < \mu$.

Далее, если неравенство (11) выполняется для некоторого полинома вида $P(x) = P_{m,n}(x)$, то для x из некоторой правой или левой окрестности точки z имеем $a_m(x - z)^m < 0$ при $z \in \Delta(p_+)$ (аналогично, $a_m(x - z)^m > 0$ при $z \in \Delta(p_-)$) относительно (соответственно) правой или левой окрестности точки z .

В самом деле, если $z \in \Delta(p_+)$ и $z \notin \Delta_+^\infty$, то

$$(Q(z) - f(z))p_+(z) = |Q - f|_p > (P(z) - f(z))p_+(z),$$

поэтому $Q(z) > P(z)$ и в силу непрерывности полиномов имеем

$$P(x) - Q(x) = a_m(x - z)^m + \dots + a_n(x - z)^n < 0,$$

откуда $a_m(x - z)^m < 0$ в некоторой окрестности точки z при $x \neq z$.

Если точка $z \in \Delta_+^\infty \cap \Delta(p_+)$ относительно, например, правых ее окрестностей, то найдется последовательность точек $y_k \rightarrow z$, $y_k > z$, с $(Q(y_k) - f(y_k))p_+(y_k) \rightarrow |Q - f|_p$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда из неравенства (11) получим

$$(Q(y_k) - f(y_k))p_+(y_k) > (P(y_k) - f(y_k))p_+(y_k)$$

(начиная с некоторого номера k), а поэтому $Q(y_k) > P(y_k)$ или $Q(x) > P(x)$ при $x \in (z, z + \delta)$ с некоторым $\delta > 0$.

Отсюда и из $P(x) = P_{m,n}(x)$, как и выше, получим $a_m(x-z)^m < 0$ при $x \in (z, z+\delta)$ с некоторым $\delta > 0$.

Случаи $z \in \Delta(p_-) \setminus \Delta_-^\infty$ и $z \in \Delta_-^\infty \cap \Delta(p_-)$ рассматриваются аналогично.

Пусть теперь $z \in \Delta(p_-) \cup \Delta(p_+)$, причем точка z принадлежит одному и тому же из множеств E_+ и E_- относительно обеих своих односторонних окрестностей.

Если при этом выполняется неравенство (11) с $P(x) = P_{m,n}(x)$, то число m четное.

Действительно, если, например, точка $z \in \Delta(p_+)$ относительно ее правых окрестностей, то, как показано, из неравенства (11) следует, что $P(x) = P_{m,n}(x) < Q(x)$ при $x \in (z, z+\delta)$ с некоторым $\delta > 0$.

Если теперь точка $z \in E_+$, причем относительно ее левых окрестностей, то относительно своих левых окрестностей точка z принадлежит одному из следующих трех множеств: $\Delta(p_+)$, $\Delta(p_+, n)$ или $\Delta_+^\infty(Q=f)'$.

Если $z \in \Delta(p_+)$ относительно левых окрестностей, то возьмем последовательность точек $y_k \rightarrow z$, $y_k \leq z$, такую, что

$$(Q(y_k) - f(y_k))p_+(y_k) \rightarrow |Q - f|_p > 0$$

при $k \rightarrow \infty$. Тогда, как и выше, $P(y_k) < Q(y_k)$ для некоторой подпоследовательности y_{k_i} , а поэтому $P(x) < Q(x)$ при $x \in (z - \delta, z)$ с некоторым $\delta > 0$.

Следовательно, в некоторой проколотой δ -окрестности точки z выполняется неравенство

$$P(x) - Q(x) = a_m(x-z)^m + \dots + a_n(x-z)^n < 0, \quad (12)$$

а поэтому m четное (так как $P(z) = Q(z)$ и $m \neq 0$).

Если точка $z \in \Delta(p_+, n)$ относительно ее левых окрестностей, то по определению $\Delta(p_+, n)$ при $0 < \alpha < (1/4)|a_m|$ найдется последовательность точек $y_k \rightarrow z$, $y_k \leq z$, такая, что

$$(Q(y_k) - f(y_k) + \alpha|y_k - z|^n)p_+(y_k) \geq |Q - f|_p.$$

Допустим теперь от противного, что при $x \in (z - \delta, z)$ с некоторым $\delta > 0$ имеем, что $P(x) > Q(x)$ и выполняется неравенство

$$P(x) - Q(x) = a_m(x-z)^m + \dots + a_n(x-z)^n > \frac{1}{2}|a_m||x-z|^m.$$

Тогда для всех тех y_k , которые принадлежат интервалу $(z - \delta, z)$, получим

$$\begin{aligned} |P - f|_p &\geq (P(y_k) - f(y_k))p_+(y_k) = (Q(y_k) - f(y_k) + P(y_k) - Q(y_k))p_+(y_k) \\ &\geq \left(Q(y_k) - f(y_k) + \frac{1}{2}|a_m||y_k - z|^m \right) p_+(y_k) \geq |Q - f|_p, \end{aligned}$$

что противоречит неравенству (11).

Следовательно, если $z \in \Delta(p_+, n)$ относительно левых окрестностей, то также выполняется условие (12) и число m четное.

Если, наконец, точка $z \in \Delta_+^\infty (Q = f)'$ относительно ее левых окрестностей, то по определению этого множества найдется последовательность точек $y_k \rightarrow z$, $y_k \leq z$, с $Q(y_k) = f(y_k)$ и $y_k \in \Delta_+^\infty$.

Если теперь допустить, что $P(x) > Q(x)$ при $x \in (z - \delta, z)$ с некоторым $\delta > 0$, то найдется $y_k \in (z - \delta, z)$, $P(y_k) > Q(y_k) = f(y_k)$, причем существует последовательность точек $y_{k,i} \rightarrow y_k$, $p_+(y_{k,i}) \rightarrow +\infty$ при $i \rightarrow \infty$. Тогда, как легко видеть,

$$|P - f|_p \geq (P(y_{k,i}) - f(y_{k,i}))p_+(y_{k,i}) = (P(y_k) - Q(y_k) + \varphi(y_{k,i}))p_+(y_{k,i})$$

с некоторой последовательностью $\varphi(y_{k,i}) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$ и фиксированным значением $P(y_k) - Q(y_k) > 0$, а поэтому $|P - f|_p = \infty$, что противоречит неравенству (11).

Следовательно, выполняется (12) и число m четное.

Вполне аналогично рассматривается случай $z \in \Delta(p_-)$, когда $z \in E_-$ относительно обеих односторонних окрестностей точки z ; в этом случае число m также является четным.

Если же $z \in \Delta(p_-) \cup \Delta(p_+)$, причем точка z принадлежит разным из двух множеств E_+ и E_- относительно левых и правых окрестностей этой точки, и выполняется неравенство (11) с $P(x) = P_{m,n}(x)$, то, аналогично, число m нечетное.

Пусть теперь данная точка $z \in \Delta(p_-) \cup \Delta(p_+)$ принадлежит также множеству $\Delta_-^\infty \cap \Delta_+^\infty$, значение ν совпадает с одной из четырех величин $\nu_{r\pm}(z)$, $\nu_{l\pm}(z)$. Выясним, при каких условиях на ν не существует полинома $P(x)$ степени не выше n , удовлетворяющего неравенству (11).

Если (11) выполнено для полинома $P(x)$ и точка $z \in \Delta_-^\infty \cap \Delta_+^\infty$, то, как уже показано, $P(x)$ совпадает с полиномом вида $P_{m,n}(x)$ при некотором натуральном $m \leq n$ и некоторых действительных значениях коэффициентов $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$.

Пусть для определенности $\nu = \nu_{r-}(z)$ и точка $z \in \Delta(p_+)$ относительно ее правых окрестностей. Допустим, что указанное $m < \nu$.

Тогда из выполнения неравенства (11) вытекает, что $m < \mu_{r+}(z)$ и произведение $a_m(x - z)^m < 0$ при $x \in (z, z + \delta)$ с некоторым $\delta > 0$.

По определению величины $\nu_{r-}(z)$ существует такая последовательность точек $x_k \rightarrow z$, $x_k \geq z$, что выполняется (8). Тогда при достаточно больших номерах k и $0 < \alpha < (1/2)|a_m|$ получим

$$\begin{aligned} & (f(x_k) - P(x_k))p_-(x_k) \\ &= (f(x_k) - Q(x_k) - a_m(x_k - z)^m - \dots - a_n(x_k - z)^n)p_-(x_k) \\ &\geq \left(f(x_k) - Q(x_k) + \frac{1}{2}|a_m||x_k - z|^m \right) p_-(x_k) \geq |Q - f|_p, \end{aligned} \quad (13)$$

что противоречит (11).

Итак, когда $z \in \Delta_-^\infty \cap \Delta_+^\infty$ и эта точка $z \in \Delta(p_+) \subset E_+$ относительно ее правых окрестностей, полином $P(x)$ степени не выше n , $n \geq 1$, с $|P - f|_p < |Q - f|_p$ может существовать, если только $P(x) = P_{m,n}(x)$ со значением m , удовлетворяющим двойному неравенству

$$\nu_{r-}(z) \leq m < \mu_{r+}(z); \quad (14)$$

причем m четное, если дополнительно точка $z \in E_+$ относительно ее левых окрестностей, и m нечетное, если относительно нее $z \in E_-$, т.е. удовлетворяющим двойному неравенству (14), согласованному с точкой $z \in \Delta(p_+)$ относительно ее правых окрестностей.

Вполне аналогичные утверждения справедливы для остальных возможных случаев точки $z \in \Delta(p_+)$ и точки $z \in \Delta(p_-)$, причем для них согласованными будут следующие двойные неравенства:

$$\nu_{l-}(z) \leq m < \mu_{l+}(z)$$

– для $z \in \Delta(p_+)$ относительно ее левых окрестностей;

$$\nu_{r+}(z) \leq m < \mu_{r-}(z) \quad \text{и} \quad \nu_{l+}(z) \leq m < \mu_{l-}(z)$$

– для $z \in \Delta(p_-)$ относительно ее правых и левых окрестностей соответственно.

Лемма 2 доказана.

§ 4. Полиномы оптимального перехода. Индекс альтернанса

Пусть на отрезке $\Delta = [a, b]$ заданы произвольный вес $p = (p_-, p_+)$ и непрерывная функция $f(x)$; полином $Q \in \mathcal{P}_n$, $n = 0, 1, \dots$; мощность множества $F = \Delta_-^\infty \cap \Delta_+^\infty$ равна $k \leq n$; $Q(x) \geq f(x)$ при $x \in \Delta_-^\infty$ и $Q(x) \leq f(x)$ при $x \in \Delta_+^\infty$.

При определении индекса альтернанса будем считать также, что множество $E_- \cap E_+$ не содержит точек p -экстремума полной степени для разности $Q(x) - f(x)$ на Δ и точек, принадлежащих множеству $E_- \cap E_+$ относительно их одних и тех же односторонних окрестностей; тогда, в частности, $|Q - f|_p > 0$ и при $n = 0$ на Δ нет точек множества F (т.е. $k = 0$).

Пусть, далее, $z_1 < z_2 < \dots < z_k$ суть все точки множества F , $z_0 = a$, $z_{k+1} = b$; $z_0 \leq z_1$, $z_k \leq z_{k+1}$. Тогда на каждом из промежутков

$$[z_0, z_1), \quad (z_1, z_2), \quad \dots, \quad (z_k, z_{k+1}]$$

при $F \neq \emptyset$ (и на отрезке $[z_0, z_{k+1}]$ при $F = \emptyset$) найдется самое большее конечное число m_i , $i = 0, 1, \dots, k$, точек

$$t_1^{(i)} < t_2^{(i)} < \dots < t_{m_i}^{(i)}$$

таких, что они не принадлежат множеству $G_- \cup G_+$, а интервалы

$$(z_i, t_1^{(i)}), \quad (t_1^{(i)}, t_2^{(i)}), \quad \dots, \quad (t_{m_i}^{(i)}, z_{i+1})$$

пересекаются то с множеством G_- (их назовем $(-)$ -интервалами), то с множеством G_+ (их назовем $(+)$ -интервалами) с чередованием, причем для каждого промежутка в отдельности, начиная с любого из этих двух множеств; полагаем $m_i = 0$, когда соответствующий промежуток пересекается не более чем с одним из множеств G_- и G_+ .

Для каждой из точек $z = z_i, i = 1, 2, \dots, k$, определим теперь полином $P(x, z)$ оптимального перехода через точку z . Заметим, что речь идет о полиномах, имеющих нули в точках $z \in F$, в любой окрестности которых не ограничены обе компоненты веса; поэтому определяются они в случае полинома $Q \in \mathcal{P}_n$ с $n \geq 1$ (так как у нас $F = \emptyset$ при $n = 0$).

Пусть $z \in F$. Тогда, как следует из определения величин $\nu_{r\pm}(z)$ и $\nu_{l\pm}(z)$, если точка $z \in E_+$ ($z \in E_-$) относительно ее правых или левых окрестностей, то существует $\nu_{r-}(z)$ или $\nu_{l-}(z)$ ($\nu_{r+}(z)$ или $\nu_{l+}(z)$).

Действительно, в случае $z \in E_+$ ($z \in E_-$) относительно данных односторонних окрестностей имеем $z \notin E_-$ (соответственно $z \notin E_+$) относительно тех же односторонних окрестностей, а поэтому указанные величины существуют (у нас $z \notin E_- \cap E_+$ относительно одних и тех же односторонних окрестностей).

Точнее, для данных правых (соответственно левых) окрестностей точки $z \in F$ имеем: если $z \in E_+ \setminus E_-$, то существует $\nu_{r-}(z)$ ($\nu_{l-}(z)$); если $z \in E_- \setminus E_+$, то существует $\nu_{r+}(z)$ ($\nu_{l+}(z)$); если, наконец, $z \notin E_- \cup E_+$, то существуют обе величины $\nu_{r\pm}(z)$ ($\nu_{l\pm}(z)$) (случай $z \in E_- \cap E_+$ относительно односторонних окрестностей исключен; точки p -экстремума полной степени также исключены).

Чтобы определить степень полинома $P(x, z)$ оптимального перехода, для данной точки $z \in F$ возьмем целые решения $m = m(z)$ соответствующих точке z систем неравенств вида

$$\begin{cases} \nu_{r\mp}(z) \leq m < \mu_{r\pm}(z), \\ \nu_{l\mp}(z) \leq m < \mu_{l\pm}(z), \end{cases}$$

точнее, систем с допустимыми (существующими) для данной точки z левыми частями неравенств; причем правая часть неравенства опускается в случае ее несуществования, т.е. при $z \notin \Delta(p_-) \cup \Delta(p_+)$, а в случае существования правой части берется двойное неравенство, согласованное с данной точкой z относительно ее соответствующих односторонних окрестностей.

Пусть, например, точка $z \in E_+ \setminus E_-$ относительно ее правых окрестностей. Тогда в качестве первого неравенства соответствующей этой точке системы берем $\nu_{r-}(z) \leq m < \mu_{r+}(z)$, а второе неравенство выбираем в зависимости от того, какому множеству принадлежит точка z : $z \in E_- \setminus E_+$, $z \in E_+ \setminus E_-$ или $z \notin E_- \cup E_+$ относительно своих левых окрестностей. Получим соответственно три группы систем неравенств: одну систему с неравенством $\nu_{l+}(z) \leq m < \mu_{l-}(z)$ в качестве второго, другую — с неравенством $\nu_{l-}(z) \leq m < \mu_{l+}(z)$ в качестве второго и две системы с неравенствами $\nu_{l+}(z) \leq m$ и $\nu_{l-}(z) \leq m$ в качестве вторых.

Аналогично, по три группы соответствующих систем неравенств получим для точки $z \in E_- \setminus E_+$ относительно ее правых и ее левых окрестностей и три группы систем для точки $z \in E_+ \setminus E_-$ относительно ее левых окрестностей.

В случае, когда точка $z \notin E_- \cup E_+$ относительно обеих своих односторонних окрестностей, получим одну группу из четырех соответствующих этой точке систем, образованных всеми парами разных неравенств из $\nu_{r\pm}(z) \leq m$, $\nu_{l\pm}(z) \leq m$.

Возьмем теперь группу соответствующих данной точке $z \in F$ систем неравенств рассматриваемого вида и найдем наименьшее целое решение $m = m(z)$ отдельно для каждой системы неравенств этой группы. При этом $m(z)$ обозначает чис-

ло четное или нечетное в тех случаях, когда точка z принадлежит одному и тому же или, соответственно, разным из двух множеств E_- и E_+ относительно ее правых и левых окрестностей, а также в тех случаях, когда $z \notin E_- \cap E_+$, но является общим концом двух соответственно одноименных или разноименных $(+)$ - и $(-)$ -интервалов.

С найденным $m = m(z)$ составим выражение $\pm(x - z)^m$, причем знак $+$ или $-$ выбирается таким образом, чтобы в правой и, отдельно, в левой окрестности точки z это выражение было положительно или отрицательно в зависимости от того, содержит данная система неравенство с величиной $\nu_{r+}(z)$ или с другой $\nu_{r-}(z)$ и соответственно с $\nu_{l+}(z)$ или с $\nu_{l-}(z)$; в случае точки $z \in E_- \cup E_+$ это эквивалентно $z \in E_- \setminus E_+$ или $z \in E_+ \setminus E_-$ относительно правых окрестностей и соответственно левых окрестностей точки z .

Пусть сначала точка $z \in F$ является общим концом двух каких-нибудь $(+)$ - и/или $(-)$ -интервалов (α, z) и (z, β) . Если при этом $z \in E_- \cup E_+$ относительно данных левых или правых окрестностей и на $(+)$ -интервале (на $(-)$ -интервале) (α, z) или (z, β) выражение $\pm(x - z)^m$ (с уже выбранным знаком $+$ или $-$) окажется положительным (соответственно отрицательным), то возьмем дополнительно точку $z - \delta \in (\alpha, z)$ или $z + \delta \in (z, \beta)$ с достаточно малым $\delta > 0$; в противном случае дополнительная точка $z - \delta$ или $z + \delta$ не берется. Тогда в зависимости от существования дополнительных точек получится один из следующих четырех полиномов:

$$\begin{aligned} \pm(x - z)^m(x - z + \delta)(x - z - \delta), & \quad \pm(x - z)^m, \\ \pm(x - z)^m(x - z + \delta), & \quad \pm(x - z)^m(x - z - \delta), \end{aligned}$$

степень $\gamma(z)$ которого равна одному из чисел $m(z) + 2$, $m(z)$ или $m(z) + 1$.

Если для данной точки z группа соответствующих ей систем неравенств содержит более одной системы, то в этой группе выбираем ту систему неравенств, для которой степень $\gamma(z)$ получается наименьшей. Соответствующий полином $P(x, z)$ среди указанных четырех полиномов назовем *полиномом оптимального перехода через точку z* .

В случае, когда концы отрезка $\Delta = [a, b]$ принадлежат F и являются концами $(+)$ - или $(-)$ -интервалов, вместо системы неравенств берем соответствующее данному концу одно из этих неравенств (как и выше, в зависимости от того, какому из множеств E_- или E_+ данный конец отрезка принадлежит или не принадлежит).

Заметим, что на отрезке Δ найдется хотя бы одна точка множества $\Delta(p_-) \cup \Delta(p_+)$; она может совпадать с одной из точек z_i , $i = 0, 1, \dots, k + 1$, или принадлежать одному из интервалов (z_i, z_{i+1}) , $i = 0, 1, \dots, k$. На тех интервалах, которые пересекаются с $G_- \cup G_+$, построим $(+)$ - и/или $(-)$ -интервалы.

Рассмотрим теперь такие точки z_i и z_j (если существуют), что каждая из них в отдельности принадлежит $E_- \cup E_+$ или $z_i(z_j)$ — правый (левый) конец некоторого $(+)$ - или $(-)$ -интервала и на (z_i, z_j) нет вообще $(+)$ - или $(-)$ -интервалов; при этом возможны равенства $a = z_i$ и $b = z_j$.

Для каждой из точек $z = z_i, z_{i+1}, \dots, z_j$ возьмем, как и выше, группу соответствующих систем неравенств, найдем минимальное целое решение $m = m(z)$ каждой системы и построим полиномы вида $\pm(x - z)^m$, причем при $z = z_l$, $l = i, i + 1, \dots, j$, знак $+$ или $-$ перед $(x - z)^{m(z)}$ выбирается так, чтобы полученное

после этого выражение было положительным (отрицательным) в некоторой правой окрестности точки z , если $\nu_{r+}(z) \leq m(z)$ ($\nu_{r-}(z) \leq m(z)$), и положительным (отрицательным) в некоторой левой окрестности точки z , если $\nu_{l+}(z) \leq m(z)$ ($\nu_{l-}(z) \leq m(z)$).

Наконец, выбираем тот набор полиномов $\pm(x-z)^m$, $m = m(z)$, $z = z_l$, $l = i, i+1, \dots, j$, произведение которых с учетом возможных дополнительных множителей вида $(x - z_l \pm \delta)$ дает полином с наименьшей суммарной степенью

$$\gamma(z_i) + \gamma(z_{i+1}) + \dots + \gamma(z_j);$$

здесь, как и выше, $\gamma(z)$ означает степень полинома $P(x, z)$ оптимального перехода через точку z и равна одному из чисел $m(z) + 2$, $m(z)$ или $m(z) + 1$, что зависит от выбранных знаков для всех выражений $\pm(x-z)^{m(z)}$, $z = z_l$, $l = i, i+1, \dots, j$; так, пара точек z_l и z_{l+1} порождает один дополнительный множитель $(x - z_l - \delta)$, если только соответствующие выражения $\pm(x-z)^{m(z)}$ при $z = z_l$ и $z = z_{l+1}$ имеют противоположные знаки на (z_l, z_{l+1}) , $l = i, i+1, \dots, j-1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Индексом альтернанса порядка n , $n = 0, 1, \dots$, разности $Q(x) - f(x)$ с весом $p = (p_-, p_+)$ на отрезке $\Delta = [a, b]$ назовем следующую величину:

$$N_n(Q, f, p, \Delta) = 1 + \sum_{i=1}^k \gamma_i + \sum_{i=0}^k m_i,$$

где k — мощность множества F , $\gamma_i = \gamma(z_i)$ — степень полинома $P(x, z_i)$ оптимального перехода через точку $z_i \in F$, $i = 1, 2, \dots, k$, число m_i на единицу меньше количества $(+)$ - и $(-)$ -интервалов на (z_i, z_{i+1}) , $i = 0, 1, \dots, k$; при этом считаем $m_i = 0$, если (z_i, z_{i+1}) пересекается не более чем с одним из множеств G_- и G_+ ; при $n = 0$ имеем $k = 0$ и индекс альтернанса равен $1 + m_0$.

§ 5. Основной результат

Напомним, что если для данного полинома $Q \in \mathcal{P}_n$, $n = 0, 1, \dots$, и непрерывной на отрезке Δ функции $f(x)$ при заданном на этом отрезке весе $p = (p_-, p_+)$ существует точка $x \in \Delta_-^\infty$ с $Q(x) < f(x)$ или точка $x \in \Delta_+^\infty$ с $Q(x) > f(x)$, то $Q(x)$ является полиномом наилучшего приближения порядка n для $f(x)$ относительно p -нормы, т.е. выполняется равенство (1), если только $E_n(f, p, \Delta) = \infty$; случай, когда мощность множества $F = \Delta_-^\infty \cap \Delta_+^\infty$ всех точек, в любой окрестности каждой из которых не ограничены обе компоненты веса p , превосходит порядок полинома наилучшего приближения n , также рассмотрен выше.

ТЕОРЕМА 4. Пусть на отрезке $\Delta = [a, b]$ заданы произвольный вес $p = (p_-, p_+)$ и непрерывная функция $f(x)$; $Q \in \mathcal{P}_n$, $n = 0, 1, \dots$; мощность множества F не больше n , причем $Q(x) \geq f(x)$ при $x \in \Delta_-^\infty$ и $Q(x) \leq f(x)$ при $x \in \Delta_+^\infty$.

Тогда для справедливости равенства (1) с данным полиномом $Q(x)$ необходимо и достаточно выполнения хотя бы одного из следующих условий:

- 1) множество $E_- \cap E_+$ содержит некоторую точку относительно ее односторонних окрестностей;

- 2) найдется точка p -экстремума полной степени для разности $Q(x) - f(x)$ на отрезке Δ ;
- 3) индекс альтернанса разности $Q(x) - f(x)$ с весом p на отрезке Δ удовлетворяет неравенству $N_n(Q, f, p, \Delta) \geq n + 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Если $|Q - f|_p = 0$, то, очевидно, выполняется условие 1). Пусть $|Q - f|_p > 0$, выполняется равенство (1) и не выполняются условия 1)–3).

Тогда не существует $z \in \Delta$ с $z \in E_- \cap E_+$ относительно ее односторонних окрестностей и на Δ нет точек p -экстремума полной степени разности $Q(x) - f(x)$, а поэтому можно определить индекс альтернанса $N_n(Q, f, p, \Delta)$.

Так как не выполняется условие 3), имеем $N_n(Q, f, p, \Delta) < n + 2$.

Пусть $z_1 < z_2 < \dots < z_k$ суть все точки множества F , $z_0 = a$, $z_{k+1} = b$; $z_0 \leq z_1$; $z_k \leq z_{k+1}$.

На каждом из интервалов (z_i, z_{i+1}) , $i = 0, 1, \dots, k$, пересекающемся с множеством $G_- \cup G_+$, возьмем $(+)$ - и $(-)$ -интервалы

$$(z_i, t_1^{(i)}), (t_1^{(i)}, t_2^{(i)}), \dots, (t_{m_i}^{(i)}, z_{i+1});$$

так как не выполняется условие 1), их конечное число (пусть на (z_i, z_{i+1}) получится $(m_i + 1)$ интервалов).

Для каждой точки z_i , $i = 1, 2, \dots, k$, построим свой полином $P(x, z_i)$ степени γ_i оптимального перехода через точку z_i ; при этом берем $\delta > 0$ (когда $\gamma_i = \gamma(z_i) \neq m(z_i)$, необходимо брать дополнительные нули $z_i - \delta$ и/или $z_i + \delta$ в соответствии с определением этого полинома) такое, что $t_{m_i-1}^{(i-1)} < z_i - \delta$, $z_i + \delta < t_1^{(i)}$ и $[z_i - \delta, z_i] \cap G_{\pm} = \emptyset$ и/или $(z_i, z_i + \delta] \cap G_{\pm} = \emptyset$. В случае существования это значение $\delta > 0$ фиксируем и обозначим через τ . Если при этом точка $z_i + \tau$ принадлежит $(+)$ -интервалу, то вместо него получим два новых интервала: $(-)$ -интервал $(z_i, z_i + \tau)$ и $(+)$ -интервал $(z_i + \tau, t_1^{(i)})$; если же эта точка $z_i + \tau$ принадлежит $(-)$ -интервалу, то получим $(+)$ -интервал $(z_i, z_i + \tau)$ и $(-)$ -интервал $(z_i + \tau, t_1^{(i)})$; аналогично поступаем с точкой $z_i - \tau$. Построим теперь полиномы вида

$$P_i(x) = \pm(x - t_1^{(i)})(x - t_2^{(i)}) \dots (x - t_{m_i}^{(i)}), \quad i = 0, 1, \dots, k,$$

причем знак $+$ или $-$ выбирается так, что $P_i(x) < 0$ на $(+)$ -интервалах и $P_i(x) > 0$ на $(-)$ -интервалах из промежутка (z_i, z_{i+1}) .

Взяв произведение всех полиномов $P_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, k$, и всех полиномов $P(x, z_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$, получим некоторый алгебраический полином

$$R(x) = \pm \prod_{i=1}^k P(x, z_i) \prod_{i=0}^k P_i(x) \quad (15)$$

степени

$$\sum_{i=1}^k \gamma_i + \sum_{i=0}^k m_i = N_n(Q, f, p, \Delta) - 1 \leq n.$$

Чтобы выбрать знак $+$ или $-$ в равенстве (15) для $R(x)$, заметим, что на отрезке Δ , очевидно, существует хотя бы одна точка множества $\Delta(p_-) \cup \Delta(p_+)$. Если она совпадает с одной из точек $z_i \in F$, то знак выбираем так, чтобы $R(x)$ и полином $P(x, z_i)$ имели одинаковые знаки в окрестности точки z_i ; в противном случае имеется $(+)$ - или $(-)$ -интервал, который содержит эту точку p -экстремума или для которого она служит одним из концов. И тогда знак $+$ или $-$ в (15) выбираем таким образом, чтобы на этом интервале выполнялось неравенство $R(x) < 0$, если он служит $(+)$ -интервалом, и неравенство $R(x) > 0$, если он окажется $(-)$ -интервалом.

Так как по построению знаки каждого полинома $P(x, z_i)$ согласованы со знаками полинома $P_{i-1}(x)$ на промежутке (z_{i-1}, z_i) и со знаками полинома $P_i(x)$ на (z_i, z_{i+1}) , то $R(x) < 0$ на всех $(+)$ -интервалах и $R(x) > 0$ на всех $(-)$ -интервалах отрезка Δ .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Согласованности знаков полинома $R(x)$ на $(+)$ - и $(-)$ -интервалах можно добиться и другим путем. Сначала с помощью простых нулей в точках t_j^i , $j = 1, 2, \dots, m_i$, $i = 0, 1, \dots, k$, простых (для нечетных $m(z_i)$) или двойных (для четных $m(z_i)$) нулей в точках z_i , $i = 1, 2, \dots, k$, а также простых нулей в возможных дополнительных точках $z_i - \tau$ и/или $z_i + \tau$, $i = 1, 2, \dots, k$, строим вспомогательный полином $R_1(x)$, имеющий требуемые для $R(x)$ знаки на $(+)$ - и $(-)$ -интервалах. Затем умножаем $R_1(x)$ на неотрицательные множители вида $(x - z_i)^{m(z_i)-1}$ для простых нулей среди z_i (что соответствует нечетному $m(z_i)$) или вида $(x - z_i)^{m(z_i)-2}$ для двойных нулей среди z_i (что соответствует четному $m(z_i)$).

Чтобы получить противоречие с допущением, остается выбрать достаточно малое число $h > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$|(Q + hR) - f|_{p, \Delta} < |Q - f|_{p, \Delta} = |Q - f|_p. \quad (16)$$

Для этого отрезок Δ разобьем на три группы подотрезков: окрестности точек z_i , окрестности точек t_j^i и $z_i \pm \tau$ и отрезки, которые остаются между указанными окрестностями. Таких возможных подотрезков конечное число. Покажем, что на каждом таком подотрезке $[\alpha, \beta]$ при достаточно малом $h > 0$ выполняется неравенство

$$\sup\{|(Q + hR - f, p)(x)| : x \in [\alpha, \beta]\} < |Q - f|_p. \quad (17)$$

Рассмотрим сначала окрестность точки z_i , $i = 1, 2, \dots, k$, для определенности — правую ее окрестность $[z_i, z_i + \delta]$ с достаточно малым $\delta > 0$.

Если $\gamma_i = \gamma(z_i)$ — степень полинома $P(x, z_i)$ оптимального перехода через точку z_i , то существует значение $m = m(z_i)$ (решение соответствующей системы неравенств из определения такого полинома), при котором γ_i равно одному из значений $m + 2$, $m + 1$ или m . Тогда $\nu_{r-}(z_i) \leq m < \mu_{r+}(z_i)$ или $\nu_{r+}(z_i) \leq m < \mu_{r-}(z_i)$ (при этом правая часть неравенств опускается, если соответствующее $\mu_{r+}(z_i)$ или $\mu_{r-}(z_i)$ не существует).

В первом случае z_i является левым концом $(+)$ -интервала и существуют сколь угодно малые $\alpha > 0$ и $\delta > 0$, для которых при этом $m = m(z_i)$ выполняется неравенство

$$\sup\{(f(x) - Q(x) + \alpha|x - z_i|^m)p_-(x) : x \in [z_i, z_i + \delta]\} < |Q - f|_p.$$

Тогда при $x \in [z_i, z_i + \delta]$ для $h > 0$ с $h|R(x)| \leq \alpha|x - z_i|^m$ получим

$$\begin{aligned} (Q(x) + hR(x) - f(x))^- p_-(x) &= \max\{0, (f(x) - Q(x) - hR(x))p_-(x)\} \\ &\leq \max\{0, (f(x) - Q(x) + \alpha|x - z_i|^m)p_-(x)\} \\ &\leq \max\{0, \sup\{(f(x) - Q(x) + \alpha|x - z_i|^m)p_-(x) : x \in [z_i, z_i + \delta]\}\} \\ &< |Q - f|_p. \end{aligned} \quad (18)$$

Далее, если точка $z_i \notin \Delta(p_+)$ относительно ее правой окрестности, то при $x \in [z_i, z_i + \delta]$ с достаточно малым $\delta > 0$ полином $R(x) \leq 0$ (так как z_i служит левым концом $(+)$ -интервала), а поэтому

$$(Q(x) + hR(x) - f(x))p_+(x) \leq \sup\{(Q(x) - f(x))p_+(x) : x \in [z_i, z_i + \delta]\} < |Q - f|_p.$$

Пусть теперь $z_i \in \Delta(p_+)$. Тогда по определению величины $\mu_{r+}(z_i)$ при $m = m(z_i)$ для любой последовательности точек $y_j \rightarrow z_i, j \rightarrow \infty, y_j \geq z_i$, такой, что

$$(Q(y_j) - f(y_j))p_+(y_j) \rightarrow |Q - f|_p,$$

последовательность $(y_j - z_i)^m p_+(y_j)$ не стремится к нулю при $j \rightarrow \infty$. Поэтому найдется такое $\delta > 0$, что

$$\sup\{(Q(x) + hR(x) - f(x))p_+(x) : x \in [z_i, z_i + \delta]\} < |Q - f|_p. \quad (19)$$

Действительно, в противном случае из $R(x) < 0$ при $x \in (z_i, z_i + \delta]$ для всех достаточно малых $\delta > 0$ получим

$$\sup\{(Q(x) + hR(x) - f(x))p_+(x) : x \in [z_i, z_i + \delta]\} = |Q - f|_p.$$

Тогда найдется последовательность точек $y_j \rightarrow z_i, j \rightarrow \infty, y_j \geq z_i$, такая, что

$$(Q(y_j) + hR(y_j) - f(y_j))p_+(y_j) \rightarrow |Q - f|_p, \quad j \rightarrow \infty,$$

при этом

$$(Q(y_j) + hR(y_j) - f(y_j))p_+(y_j) \leq (Q(y_j) - f(y_j))p_+(y_j) \leq |Q - f|_p.$$

Следовательно, для этой же последовательности y_j имеем

$$(Q(y_j) - f(y_j))p_+(y_j) \rightarrow |Q - f|_p, \quad j \rightarrow \infty,$$

а поэтому (взяв разность) при $j \rightarrow \infty$ получим

$$hR(y_j)p_+(y_j) \rightarrow 0.$$

Так как $R(x)$ и $(x - z_i)^m, m = m(z_i)$, — бесконечно малые функции одного порядка при $x \rightarrow z_i$, то также имеем

$$(y_j - z_i)^m p_+(y_j) \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty,$$

что противоречит неравенству $m = m(z_i) < \mu_{r+}(z_i)$.

Из (18) и (19) получим (17) для $[\alpha, \beta] = [z_i, z_i + \delta]$ с достаточно малым $\delta > 0$ в случае $\nu_{r-}(z_i) \leq m(z_i) < \mu_{r+}(z_i)$; другой возможный случай $\nu_{r+}(z_i) \leq m(z_i) < \mu_{r-}(z_i)$ рассматривается вполне аналогично.

Случаи окрестностей точек вида $t_j^{(i)}$ и точек вида $z_i \pm \tau$ рассматриваются аналогично друг другу; пусть t — точка одного из этих двух видов. Так как $t \notin G_- \cup G_+$, найдется достаточно малое $\delta > 0$ такое, что

$$\sup\{|(Q - f, p)(x)| : x \in [t - \delta, t + \delta]\} < |Q - f|_p. \quad (20)$$

Пусть, например, t служит левым концом $(+)$ -интервала и правым концом $(-)$ -интервала. Тогда $R(x) \leq 0$ при $x \in [t, t + \delta]$, поэтому из (20) получим

$$\begin{aligned} & \sup\{(Q(x) + hR(x) - f(x))p_+(x) : x \in [t, t + \delta]\} \\ & \leq \sup\{(Q(x) - f(x))p_+(x) : x \in [t, t + \delta]\} < |Q - f|_p. \end{aligned}$$

Если $t \notin \Delta_-^\infty$, то возьмем достаточно малое $\delta > 0$, для которого $p_-(x)$ ограничена при $x \in [t, t + \delta]$. Тогда с использованием (20) имеем

$$\begin{aligned} & \sup\{(f(x) - Q(x) - hR(x))p_-(x) : x \in [t, t + \delta]\} \\ & \leq \sup\{(Q(x) - f(x))p_-(x) : x \in [t, t + \delta]\} \\ & \quad + h \sup\{|R(x)|p_-(x) : x \in [t, t + \delta]\} < |Q - f|_p \end{aligned}$$

при достаточно малом $h > 0$.

Если $t \in \Delta_-^\infty$, то неравенство $Q(t) < f(t)$ исключено по условию; равенство $Q(t) = f(t)$ означало бы $t \in G_-$, чего не может быть для рассматриваемого случая точки t ; остается $Q(t) > f(t)$. Поэтому в силу непрерывности $Q(x) > f(x)$ при $x \in [t, t + \delta]$ с достаточно малым $\delta > 0$ (которое выбирается так, чтобы выполнялось и неравенство (20)).

Выберем теперь число $h > 0$ столь малым, чтобы при $x \in [t, t + \delta]$ выполнялось неравенство

$$h|R(x)| < \min\{Q(x) - f(x) : x \in [t, t + \delta]\}.$$

Тогда при всех $x \in [t, t + \delta]$ имеем

$$(Q(x) + hR(x) - f(x))^- p_-(x) = 0.$$

Итак, существуют достаточно малые $\delta > 0$ и $h > 0$ такие, что

$$\sup\{|(Q + hR - f, p)(x)| : x \in [t, t + \delta]\} < |Q - f|_p.$$

Аналогичная же оценка получается в случае левой окрестности $[t - \delta, t]$ точки t .

Наконец, рассмотрим отрезки $[\alpha, \beta]$, расположенные на данном $(+)$ - или $(-)$ -интервале, концы α и β которых являются точками вида $t_j^{(i)} \pm \delta$ или $(z_i \pm \tau) \pm \delta$; пусть для определенности $[\alpha, \beta]$ расположен на одном из $(+)$ -интервалов, тогда $R(x) < 0$ при $x \in [\alpha, \beta]$.

Если $[\alpha, \beta] \cap \Delta(p_+) = \emptyset$, то, очевидно,

$$\sup\{(Q(x) + hR(x) - f(x))p_+(x) : x \in [\alpha, \beta]\} < |Q - f|_p. \quad (21)$$

Пусть $[\alpha, \beta] \cap \Delta(p_+) \neq \emptyset$. Так как $R(x) < 0$ при $x \in [\alpha, \beta]$, левая часть неравенства (21) не может быть строго больше его правой части. Поэтому допустим, что в этом случае вместо неравенства в (21) выполняется равенство. При этом не существует точки $x_0 \in [\alpha, \beta]$ такой, что

$$(Q(x_0) + hR(x_0) - f(x_0))p_+(x_0) = |Q - f|_p,$$

так как в случае существования такой точки получили бы $p_+(x_0) \neq 0$ (у нас $|Q - f|_p > 0$), что ввиду $R(x_0) < 0$ приводит к противоречию

$$(Q(x_0) + hR(x_0) - f(x_0))p_+(x_0) < (Q(x_0) - f(x_0))p_+(x_0) \leq |Q - f|_p.$$

Следовательно, при $x_0 \in \Delta(p_+) \cap [\alpha, \beta]$ найдется последовательность точек $y_j \rightarrow x_0, j \rightarrow \infty, y_j \neq x_0$, такая, что

$$(Q(y_j) + hR(y_j) - f(y_j))p_+(y_j) \rightarrow |Q - f|_p \quad (22)$$

при $j \rightarrow \infty$.

Тогда из неравенств

$$(Q(y_j) + hR(y_j) - f(y_j))p_+(y_j) \leq (Q(y_j) - f(y_j))p_+(y_j) \leq |Q - f|_p$$

вытекает, что при $j \rightarrow \infty$

$$(Q(y_j) - f(y_j))p_+(y_j) \rightarrow |Q - f|_p. \quad (23)$$

Из (22), (23) и $R(x_0) \neq 0$ следует $p_+(y_j) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, что противоречит (23), так как $|Q - f|_p > 0$ и $Q(x) - f(x)$ непрерывна.

Итак, если отрезок $[\alpha, \beta]$ расположен на $(+)$ -интервале, то выполняется строгое неравенство (21).

Рассмотрим теперь случай отрезка $[\alpha, \beta]$, расположенного на $(+)$ -интервале, для другой компоненты $p_-(x)$ веса.

Если $[\alpha, \beta] \cap \Delta^\infty = \emptyset$, то (так как $[\alpha, \beta] \cap \Delta(p_-) = \emptyset$) имеем

$$\begin{aligned} & \sup\{(f(x) - Q(x) - hR(x))p_-(x) : x \in [\alpha, \beta]\} \\ & \leq \sup\{(f(x) - Q(x))p_-(x) : x \in [\alpha, \beta]\} + h \sup\{|R(x)|p_-(x) : x \in [\alpha, \beta]\} \\ & < |Q - f|_p \end{aligned}$$

при достаточно малом $h > 0$.

Поэтому пусть $[\alpha, \beta] \cap \Delta^\infty \neq \emptyset$. Тогда множество $D = \{x \in [\alpha, \beta] \cap \Delta^\infty : Q(x) > f(x)\}$ замкнуто.

Действительно, Δ_-^∞ замкнуто и по условию при $x \in \Delta_-^\infty$ выполняется неравенство $Q(x) \geq f(x)$, причем отрезок $[\alpha, \beta]$ расположен на $(+)$ -интервале, а поэтому не пересекается с $\Delta_-^\infty(Q = f) \subset G_-$.

Следовательно, предельные точки множества D (в случае их существования) принадлежат самому D .

Тогда в силу непрерывности существует $\min\{(Q(x) - f(x)) : x \in D\} = \eta > 0$.

Пусть теперь J — объединение конечного числа таких интервалов, что $D \subset J$ и при $x \in J \cap [\alpha, \beta]$ выполняется неравенство $Q(x) - f(x) > (1/2)\eta$.

Возьмем $h > 0$ столь малым, чтобы выполнялось неравенство $h|R(x)| < (1/2)\eta$ при $x \in J \cap [\alpha, \beta]$, тогда при всех таких x имеем

$$(Q(x) + hR(x) - f(x))^- p_-(x) = 0.$$

На оставшемся множестве $I = [\alpha, \beta] \setminus J$ компонента $p_-(x)$ веса ограничена и $[\alpha, \beta] \cap \Delta(p_-) = \emptyset$, а поэтому

$$\begin{aligned} & \sup\{(f(x) - Q(x) - hR(x))p_-(x) : x \in I\} \\ & \leq \sup\{(f(x) - Q(x))p_-(x) : x \in I\} + h \sup\{|R(x)|p_-(x) : x \in I\} \\ & < |Q - f|_p \end{aligned}$$

при достаточно малом $h > 0$ (с учетом предыдущих значений h).

Отсюда и из (21) вытекает неравенство (17) в случае отрезка $[\alpha, \beta]$, расположенного на некотором $(+)$ -интервале.

Случай, когда отрезок $[\alpha, \beta]$ расположен на одном из $(-)$ -интервалов, рассматривается вполне аналогично.

Итак, если выполняется равенство (1) и не выполняются условия 1) и 2), то выполняется условие 3), т.е. необходимость доказана.

Достаточность. Если $|Q - f|_p = 0$, то равенство (1), очевидно, выполняется. Поэтому пусть $|Q - f|_p > 0$.

Достаточность каждого из условий 1) и 2) для выполнения равенства (1) доказана выше (теоремы 2 и 3 соответственно).

Остается доказать достаточность условия 3) для выполнения (1), причем достаточно считать, что выполняется условие 3) и не выполняются условия 1) и 2) (так как достаточность последних уже доказана). Тогда можно определить индекс альтернанса. Пусть индекс альтернанса порядка n разности $Q(x) - f(x)$ с весом $p = (p_-, p_+)$ на отрезке $\Delta = [a, b]$ имеет следующий вид:

$$N_n(Q, f, p, \Delta) = 1 + \sum_{i=1}^k \gamma_i + \sum_{i=0}^k m_i,$$

т.е. множество $F = \Delta_-^\infty \cap \Delta_+^\infty$ состоит из k точек

$$z_1 < z_2 < \dots < z_k, \quad z_1 \geq a = z_0, \quad z_k \leq b = z_{k+1},$$

для которых на каждом из промежутков

$$[z_0, z_1), \quad (z_1, z_2), \quad \dots, \quad (z_k, z_{k+1}]$$

найдутся $m_i, i = 0, 1, \dots, k$, точек $t_1^{(i)} < t_2^{(i)} < \dots < t_{m_i}^{(i)}$ таких, что $t_j^{(i)} \notin G_- \cup G_+$, $j = 1, 2, \dots, m_i$, а интервалы

$$(z_i, t_1^{(i)}), (t_1^{(i)}, t_2^{(i)}), \dots, (t_{m_i}^{(i)}, z_{i+1})$$

с чередованием пересекаются то с множеством G_- , то с множеством G_+ ; далее, $\gamma_i = \gamma(z_i)$ равно степени полинома $P(x, z_i)$ оптимального перехода через точку z_i , $i = 1, 2, \dots, k$, причем $\gamma(z_i)$ равно одному из чисел $m(z_i) + 2$, $m(z_i) + 1$ и $m(z_i)$ в зависимости от вида $P(x, z_i)$.

Так как не выполняется условие 2), при $n = 0$ имеем $k = 0$ и $N_0(Q, f, p, \Delta) = 1 + m_0$.

Допустим, что существует такой полином $P \in \mathcal{P}_n$, что выполняется неравенство (6). Тогда, так как еще $z_i \in F$, при $m = m(z_i)$, как и выше, получим

$$P(x) = Q(x) + a_m(x - z_i)^m + a_{m+1}(x - z_i)^{m+1} + \dots + a_n(x - z_i)^n.$$

Пусть сначала на (z_i, z_{i+1}) имеются $(-)$ - и/или $(+)$ -интервалы, для определенности $(z_i, t_1^{(i)})$ является $(-)$ -интервалом и точка $z_i \in E_+$ относительно ее правых окрестностей. Тогда согласно определению полинома $P(x, z_i)$ оптимального перехода через точку z_i берется дополнительная точка $z_i + \delta$ со сколь угодно малым $\delta > 0$.

Так как при этом $(z_i, t_1^{(i)})$ является $(-)$ -интервалом, найдется точка $y \in (z_i + \delta, t_1^{(i)}) \cap G_-$, в которой $Q(y) \leq P(y)$.

Действительно, из $y \in G_-$ имеем $f(y) \geq Q(y)$. Поэтому при $y \in \Delta_-^\infty$, если допустить $Q(y) > P(y)$, найдется последовательность $y_j \rightarrow y$, $j \rightarrow \infty$, с $p_-(y_j) \rightarrow +\infty$ и

$$(f(y_j) - P(y_j))p_-(y_j) \geq (Q(y_j) - P(y_j))p_-(y_j) \rightarrow +\infty$$

при $j \rightarrow \infty$, что противоречит конечности $|P - f|_p$ (ввиду (6)). Если же $y \notin \Delta_-^\infty$, то $y \in \Delta(p_-)$, а поэтому из (6) следует требуемое $Q(y) < P(y)$.

С другой стороны, так как $z_i \in E_+$ относительно ее правых окрестностей и выполняется (6), найдется такая точка $y_1 \in (z_i, z_i + \delta)$, что $Q(y_1) > P(y_1)$.

Следовательно, в рассматриваемом случае на $(z_i, t_1^{(i)})$ найдется еще одна точка x , в которой $Q(x) = P(x)$.

Если точка $z_i \notin E_+$ относительно ее правых окрестностей, то подобной точки $x \in (z_i, t_1^{(i)})$ может не существовать, что соответствует определению степени $\gamma(z_i)$ полинома $P(x, z_i)$.

Аналогично обстоит дело в левой окрестности точки z_i .

Итак, каждой точке $z_i, i = 1, 2, \dots, k$, которая является концом $(-)$ - или $(+)$ -интервалов, соответствует $\gamma_i = \gamma(z_i)$ общих точек полиномов $Q(x)$ и $P(x)$.

Кроме того, на (z_i, z_{i+1}) , $i = 0, 1, \dots, k$, полиномы $Q(x)$ и $P(x)$ имеют еще не менее m_i общих точек, так как при $x \in G_-$ выполняется неравенство $Q(x) \leq P(x)$, а при $x \in G_+$ — неравенство $Q(x) \geq P(x)$.

Пусть теперь $1 \leq i < j \leq k$ и на (z_i, z_j) нет $(-)$ - и $(+)$ -интервалов (при этом возможны равенства $z_i = z_0 = a$ или $z_j = z_{k+1} = b$), причем z_i и/или z_j принадлежат $\Delta(p_-) \cup \Delta(p_+)$ или являются концами $(-)$ - и/или $(+)$ -интервалов (очевидно, имеется хотя бы одна точка множества $\Delta(p_-) \cup \Delta(p_+)$).

Так как все точки $z = z_i, z_{i+1}, \dots, z_j$ принадлежат множеству F и выполняется неравенство (6), для каждой точки z из них и соответствующей степени $m = m(z)$ имеем

$$P(x) = Q(x) + a_m(x-z)^m + \dots + a_n(x-z)^n, \quad m \geq 1.$$

Тогда при достаточно малом $\delta > 0$ для всех $x \in (z, z + \delta)$ либо $P(x) < Q(x)$ и тогда $a_m(x-z)^m < 0$, либо $P(x) > Q(x)$ и тогда $a_m(x-z)^m > 0$.

Если $a_m(x-z)^m < 0$ при $x \in (z, z + \delta)$, то по определению величины $\nu_{r-}(z)$ при $m < \nu_{r-}(z)$, как и выше (см. (13)), придем к противоречию с неравенством (6).

Если же $a_m(x-z)^m > 0$ при $x \in (z, z + \delta)$, то аналогично при $m < \nu_{r+}(z)$ придем к такому же противоречию.

Аналогично обстоит дело в левой окрестности точки z .

Следовательно, при выполнении неравенства (6) для каждой из точек $z = z_i, z_{i+1}, \dots, z_j$ имеем

$$P(x) - Q(x) = O((x-z)^{m(z)}), \quad x \rightarrow z,$$

и выполняется одно из следующих четырех условий (при этом для каждого условия в первой строке считаем $x \in (z, z + \delta)$, а во второй строке $-x \in (z - \delta, z)$ при достаточно малом $\delta > 0$):

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \nu_{r-}(z) \leq m(z), & P(x) - Q(x) < 0, \\ \nu_{l-}(z) \leq m(z), & P(x) - Q(x) < 0; \end{cases} \\ & \begin{cases} \nu_{r-}(z) \leq m(z), & P(x) - Q(x) < 0, \\ \nu_{l+}(z) \leq m(z), & P(x) - Q(x) > 0; \end{cases} \\ & \begin{cases} \nu_{r+}(z) \leq m(z), & P(x) - Q(x) > 0, \\ \nu_{l-}(z) \leq m(z), & P(x) - Q(x) < 0; \end{cases} \\ & \begin{cases} \nu_{r+}(z) \leq m(z), & P(x) - Q(x) > 0, \\ \nu_{l+}(z) \leq m(z), & P(x) - Q(x) > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно, полином $P(x) - Q(x)$ в окрестности каждой из этих точек $z = z_l$, $l = i, i+1, \dots, j$, имеет такие же знаки, что и соответствующий полином $P(x, z)$ оптимального перехода через точку z , и, более того, наименьшие целые решения систем неравенств, которым удовлетворяют числа $m(z)$, образуют степени $\gamma(z)$ этих полиномов $P(x, z)$. Отсюда число нулей (с учетом их кратности) полинома $P(x) - Q(x)$ на промежутке $[z_i, z_j]$ не меньше числа нулей произведения

$$\prod_{l=i}^j P(x, z_l)$$

на этом промежутке.

Если при этом концы промежутка z_i и z_j таковы, что $P(x, z_i)$ содержит сомножитель вида $(x - z_i + \delta)$ и/или $P(x, z_j)$ содержит сомножитель вида $(x - z_j - \delta)$, то, как показано выше, им соответствуют дополнительные нули полинома $P(x) - Q(x)$ на $(t_{m_{i-1}}^{(i-1)}, z_i)$ и/или на $(z_j, t_1^{(j)})$; поэтому число нулей полинома $P(x) - Q(x)$ на $[z_i, z_j]$ вместе с дополнительными нулями не менее

$$\gamma(z_i) + \gamma(z_{i+1}) + \cdots + \gamma(z_j).$$

Заметим, что в этом случае

$$m_i = m_{i+1} = \cdots = m_{j-1} = 0.$$

Следовательно, с учетом предыдущих случаев полином $P(x) - Q(x)$ степени не выше n имеет по меньшей мере

$$\sum_{i=1}^k \gamma_i + \sum_{i=0}^k m_i = N_n(Q, f, p, \Delta) - 1$$

нулей, чего не может быть, так как $N_n(Q, f, p, \Delta) - 1 \geq n + 1$ и выполняется неравенство (6).

Теорема 4 доказана.

§ 6. Некоторые следствия

Ниже будем считать, что исключается тривиальный случай, когда заданные непрерывная на отрезке $\Delta = [a, b]$ функция $f(x)$ и полином $Q \in \mathcal{P}_n$ тождественно совпадают на Δ .

В качестве следствия теоремы 4 получим характеристическое свойство полинома наилучшего приближения непрерывной функции в равномерной метрике с интерполяцией и выясним для этого случая значения параметров, входящих в теорему 4.

Для заданных на отрезке Δ различных точек $z_1 < z_2 < \cdots < z_k$, $k \geq 1$, положим $p_-(z_i) = p_+(z_i) = +\infty$, $p_-(x) = p_+(x) = 1$ при $x \neq z_i$, $x \in \Delta$, $i = 1, 2, \dots, k$, и вес $p = (p_-, p_+)$ с такими компонентами ниже назовем *интерполирующим весом*.

Тогда условие 3) теоремы 4 с интерполирующим весом $p = (p_-, p_+)$ служит характеристическим свойством полинома $Q \in \mathcal{P}_n$, $k \leq n$, наилучшего равномерного приближения непрерывной на Δ функции $f(x)$ в смысле

$$\|Q - f\|_\Delta = A := \inf \{ \|P - f\|_\Delta : P \in \mathcal{P}_n, P(z_i) = f(z_i), i = 1, 2, \dots, k \}, \quad (24)$$

$Q(z_i) = f(z_i)$ при $i = 1, 2, \dots, k$.

Действительно, пусть для полинома $Q \in \mathcal{P}_n$ в случае интерполирующего веса $p = (p_-, p_+)$ выполнено условие 3) теоремы 4. Тогда по теореме 4 выполняется равенство

$$\|Q - f\|_{p, \Delta} = A_1 := \inf \{ \|P - f\|_{p, \Delta} : P \in \mathcal{P}_n \}.$$

Докажем, что для этого полинома $Q(x)$ выполняется и условие (24). Так как в случае интерполирующего веса $p = (p_-, p_+)$ для полиномов $P \in \mathcal{P}_n$ с $P(z_i) \neq f(z_i)$ хотя бы в одной точке $z_i, i = 1, 2, \dots, k$, величина $|P - f|_{p, \Delta} = \infty$, то выполняется равенство

$$A_1 = A_2 := \inf \{|P - f|_{p, \Delta} : P \in \mathcal{P}_n, P(z_i) = f(z_i), i = 1, 2, \dots, k\},$$

причем $k \leq n$. Поэтому $|Q - f|_{p, \Delta} = A_1 = A_2 < \infty$, а следовательно, $Q(z_i) = f(z_i)$ при $i = 1, 2, \dots, k$.

Ясно, что для интерполирующего веса $p = (p_-, p_+)$ и любого полинома $P \in \mathcal{P}_n$ с $P(z_i) = f(z_i), i = 1, 2, \dots, k$, при $x \in \Delta$ имеем

$$|P(x) - f(x)| = (P(x) - f(x))^+ + (P(x) - f(x))^- = |(P - f, p)(x)|.$$

Поэтому $A = A_2$. Тогда $\|Q - f\|_{\Delta} = |Q - f|_{p, \Delta} = A_1 = A_2 = A$, т.е. для полинома $Q(x)$ выполнено также равенство (24).

Обратно, пусть для данного полинома $Q \in \mathcal{P}_n$ выполнено условие (24) (вместе с $Q(z_i) = f(z_i)$ при $i = 1, 2, \dots, k$). Докажем, что тогда для интерполирующего веса $p = (p_-, p_+)$ выполняется условие 3) теоремы 4 (параллельно выясним в этом случае значения участвующих в теореме 4 параметров).

Как и выше, имеем $|Q - f|_{p, \Delta} = \|Q - f\|_{\Delta} = A = A_2 = A_1$.

Следовательно, по теореме 4 выполняется хотя бы одно из условий 1)–3).

Остается доказать, что условия 1) и 2) теоремы 4 не выполняются (напомним, что считаем $Q(x) \neq f(x)$ хотя бы в одной точке $x \in \Delta$).

Покажем, что в рассматриваемом случае множество $E_- \cap E_+ = \emptyset$.

Так как

$$\Delta_-^{\infty} = \Delta_+^{\infty} = \{z_1, z_2, \dots, z_k\},$$

множества $\Delta_-^{\infty}(Q = f)$ и $\Delta_+^{\infty}(Q = f)$, очевидно, пусты.

Множества $\Delta(p_-, n)$ и $\Delta(p_+, n)$ также пусты, так как в силу непрерывности $f(x) - Q(x)$ для любой точки $y \in \Delta$ с $y \notin \Delta(p_-) \cup \Delta(p_+)$ найдется ее окрестность, во всех точках x которой выполняется строгое неравенство $|f(x) - Q(x)| < |Q - f|_{p, \Delta}$, а поэтому при достаточно малых $\delta > 0$ и $\alpha > 0$ условия (4) и (5) с $p_-(x) = p_+(x) = 1$ не могут выполняться (так как $|Q - f|_{p, \Delta} > 0$), в противном случае по непрерывности функции $|f(x) - Q(x)|$ точка $y \in \Delta(p_-) \cup \Delta(p_+)$.

Следовательно, имеем $E_- = \Delta(p_-)$, $E_+ = \Delta(p_+)$.

Так как $f(x) \neq Q(x)$ хотя бы в одной точке $x \in \Delta$ и $f(x) - Q(x)$ непрерывна на Δ , то, очевидно, множества $\Delta(p_-)$ и $\Delta(p_+)$, а следовательно, и множества E_- и E_+ не пересекаются, т.е. условие 1) теоремы 4 не выполняется.

Покажем, что условие 2) теоремы 4 также не может выполняться.

Действительно, точка p -экстремума полной степени для разности $Q(x) - f(x)$ на Δ должна принадлежать как множеству $F = \Delta_-^{\infty} \cap \Delta_+^{\infty}$, так и множеству $\Delta(p_-) \cup \Delta(p_+)$. В нашем случае $F = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$, в то время как $z_i \notin \Delta(p_-) \cup \Delta(p_+)$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Действительно, при каждом $i = 1, 2, \dots, k$ имеем $Q(z_i) = f(z_i)$, поэтому в силу непрерывности $Q(x) - f(x)$ найдется окрестность точки z_i , в которой

$$|Q(x) - f(x)| < \frac{1}{2}|Q - f|_{p, \Delta},$$

а следовательно, в этой окрестности (для интерполирующего веса) выполняется также неравенство

$$|(Q - f, p)(x)| < \frac{1}{2} \|Q - f\|_{p, \Delta}.$$

Так как полином наилучшего приближения $Q(x)$ для $f(x)$ в p -норме не удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы 4, то согласно этой теореме выполняется условие 3).

Для рассматриваемого интерполирующего веса $p = (p_-, p_+)$ выясним также параметры, входящие в индекс альтернанса $N_n(Q, f, p, \Delta)$ (см. определение 2).

Число m_i на единицу меньше количества $(+)$ - и $(-)$ -интервалов на (z_i, z_{i+1}) , $i = 0, 1, \dots, k$, $z_0 = a$, $z_{k+1} = b$, которые определяются через пересечения с множествами $G_- = E_- = \Delta(p_-)$ и $G_+ = E_+ = \Delta(p_+)$; при этом считаем $m_i = 0$, если (z_i, z_{i+1}) пересекается не более чем с одним из множеств G_- и G_+ , $i = 1, 2, \dots, k$.

Выясним теперь значения γ_i , $i = 1, 2, \dots, k$.

Точки $z = z_i \notin E_- \cup E_+$, $i = 1, 2, \dots, k$, поэтому величины $\nu_{r\pm}(z)$ и $\nu_{l\pm}(z)$ существуют и, как следует из (7) и (8), в случае интерполирующего веса все они равны 1. Так как $z = z_i \notin \Delta(p_-) \cup \Delta(p_+)$, величины $\mu_{r\pm}(z)$ и $\mu_{l\pm}(z)$ не определяются.

Следовательно, при $z = z_i$ для построения полинома оптимального перехода $P(x, z)$ находим наименьшие целые решения $m = m(z)$ четырех систем, образуемых всеми парами разных неравенств из $\nu_{r\pm}(z) \leq m$, $\nu_{l\pm}(z) \leq m$. Так как все левые части этих неравенств равны 1, искомое значение $m(z)$ равно 1 или 2 в зависимости от того, является точка z общим концом разноименных или одноименных среди построенных на Δ $(+)$ - и $(-)$ -интервалов. Отсюда вытекает, что $\gamma_i = \gamma(z_i) = m(z_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$, соответственно равно 1, если z_i — общий конец разноименных, и равно 2, если z_i — общий конец одноименных $(+)$ - и $(-)$ -интервалов.

Рассмотрим теперь другой частный случай веса $p = (p_-, p_+)$ с $p_-(x) = p_+(x) = 1$ при всех $x \in \Delta$. В этом случае p -норма по данному отрезку, очевидно, совпадает с обычной равномерной нормой по этому отрезку. Множества Δ_-^∞ и Δ_+^∞ пусты, условия 1) и 2) теоремы 4 отсутствуют, а условие 3) принимает вид

$$N_n(Q, f, p, \Delta) = 1 + m_0 \geq n + 2$$

и означает наличие на отрезке Δ чебышёвского альтернанса разности $Q(x) - f(x)$ (так как в этом случае, очевидно, $G_- = \Delta(p_-)$, $G_+ = \Delta(p_+)$).

Третье следствие касается односторонних приближений данной непрерывной на отрезке Δ функции $f(x)$, причем для удобства формулировок тривиальный случай тождественного совпадения данных функции $f(x)$ и полинома $Q(x)$ на всем Δ снова исключается.

Пусть $p_-(x) = +\infty$ и $p_+(x) = 1$ при всех $x \in \Delta$. Тогда для веса $p = (+\infty, 1)$ с такими компонентами условие 3) теоремы 4 превращается в характеристическое свойство полинома $Q \in \mathcal{P}_n$ наилучшего одностороннего (сверху) приближения непрерывной на отрезке Δ функции $f(x)$ в смысле

$$\|Q - f\|_\Delta = B := \inf \{ \|P - f\|_\Delta : P \in \mathcal{P}_n, P(x) \geq f(x), x \in \Delta \} \quad (25)$$

с $Q(x) \geq f(x)$ при $x \in \Delta$.

Действительно, пусть для некоторого полинома $Q \in \mathcal{P}_n$ выполнено условие 3) теоремы 4 с весом $p = (+\infty, 1)$. Тогда по теореме 4 с этим весом выполняется равенство

$$|Q - f|_{p,\Delta} = B_1 := \inf\{|P - f|_{p,\Delta} : P \in \mathcal{P}_n\}.$$

Так как в случае веса $p = (+\infty, 1)$ для полиномов $P \in \mathcal{P}_n$ с $P(x) \geq f(x)$, $x \in \Delta$, величина $|P - f|_{p,\Delta}$ конечна, то B_1 , а поэтому и $|Q - f|_{p,\Delta}$ конечна; отсюда получим $Q(x) \geq f(x)$ при всех $x \in \Delta$. Для доказательства равенства (25) заметим, что

$$B_1 = B_2 := \inf\{|P - f|_{p,\Delta} : P \in \mathcal{P}_n, P(x) \geq f(x), x \in \Delta\};$$

но $B_2 = B$, так как при $P(x) \geq f(x)$, $x \in \Delta$, имеем

$$|(P - f, p)(x)| = (P(x) - f(x))p_+(x) = |P(x) - f(x)|.$$

Следовательно, для рассматриваемого полинома $Q(x)$ получим

$$\|Q - f\|_{\Delta} = |Q - f|_{p,\Delta} = B_1 = B_2 = B,$$

т.е. выполняется условие (25).

Обратно, пусть для некоторого полинома $Q \in \mathcal{P}_n$ выполнено условие (25) (вместе с $Q(x) \geq f(x)$ при $x \in \Delta$). Тогда при $p = (+\infty, 1)$ имеем

$$|Q - f|_{p,\Delta} = \|Q - f\|_{\Delta} = B = B_2 = B_1.$$

Поэтому по теореме 4 выполняется хотя бы одно из условий 1)–3). Покажем, что условия 1) и 2) не выполняются. В нашем случае, очевидно, имеем $\Delta_-^{\infty} = \Delta$, $\Delta_+^{\infty} = \emptyset$, $\Delta(p_-) = \emptyset$, $\Delta(p_-, n) \subset \Delta_-^{\infty}(Q = f)$, $\Delta(p_+, n) = \emptyset$, $\Delta_+^{\infty}(Q = f) = \emptyset$, поэтому $G_- = \Delta_-^{\infty}(Q = f) = \{x \in \Delta : Q(x) = f(x)\}$, $G_+ = \Delta(p_+)$. В силу непрерывности $Q(x)$ и $f(x)$ множество G_- замкнуто и может содержать лишь точки $x \in \Delta$ с $Q(x) = f(x)$, поэтому $E_- = G_-$. В то же время множество $E_+ = G_+ = \Delta(p_+)$ состоит из точек максимума $Q(x) - f(x)$ на Δ и может содержать лишь точки $x \in \Delta$ с $Q(x) > f(x)$.

Следовательно, $E_- \cap E_+ = \emptyset$ и условие 1) теоремы 4 не выполняется.

В случае веса $p = (+\infty, 1)$ условие 2) теоремы 4 также не может выполняться, так как $\Delta_+^{\infty} = \emptyset$, а точки p -экстремума полной степени должны по определению принадлежать множеству $F = \Delta_-^{\infty} \cap \Delta_+^{\infty}$.

Следовательно, в случае веса $p = (+\infty, 1)$ выполнение равенства (25) равносильно условию 3) теоремы 4. Отметим также, что индекс альтернанса в этом случае имеет вид $N_n(Q, f, p, \Delta) = 1 + m_0$, так как множество $F = \emptyset$.

Основной результат работы анонсирован в [6].

Список литературы

1. Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. Аппроксимации со знакочувствительным весом (теоремы существования и единственности) // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 6. С. 59–102.
2. Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. Аппроксимация со знакочувствительным весом (устойчивость, приложения к теории ужей и хаусдорфовым аппроксимациям) // Изв. РАН. Сер. матем. 1999. Т. 63. № 3. С. 77–118.

3. *Minkowsky H.* Theorie der konvexen Körper, insbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffs // Ges. Abh. 1911. V. 2. P. 131–229.
4. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.
5. *Рамазанов А.-Р. К., Рамазанов З. А.* Критерии элемента наилучшего приближения для знакочувствительных аппроксимаций // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Тезисы докладов Воронежской зимней математической школы. Воронеж, 2001. С. 219–220.
6. *Рамазанов А.-Р. К.* Характеризация полинома наилучшего приближения непрерывной функции в несимметричной метрике // Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования. Международная конференция, посвященная Л. Д. Кудрявцеву. М.: Физматлит, 2003. С. 91–93.

Дагестанский государственный университет

Поступила в редакцию
29.06.2003 и 12.04.2004