Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Н. Хабибуллин, Спектральный синтез для пересечения инвариантных подпространств голоморфных функций, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 3, 119–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1278>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 14:10:22

УДК 517.982 + 517.53

Б. Н. Хабибуллин

Спектральный синтез для пересечения инвариантных подпространств голоморфных функций

Пусть Ω — выпуклая область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$; H — пространство голоморфных в Ω функций с топологией равномерной сходимости на компактах из Ω ; W_1 и W_2 — пара инвариантных (относительно дифференцирования) подпространств в H , допускающих спектральный синтез. Даются достаточные условия, при которых пересечение $W_1 \cap W_2$ также допускает спектральный синтез. Следствием этих условий является недавний результат Н. Ф. Абузяровой (в новом конструктивно-количественном обрамлении) о представимости инвариантного подпространства, допускающего спектральный синтез, в виде пространства решений системы двух однородных уравнений свертки.

Использованы новые аппроксимационные теоремы для целых функций экспоненциального типа.

Библиография: 22 названия.

Введение

Всюду в работе под последовательностью чисел (точек) в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ понимается пустая, конечная или бесконечная последовательность вида $\Lambda = \{\lambda_n\} \subset \mathbb{C}$, где $n = 1, 2, \dots$, не имеющая предельных точек в $\mathbb{C}$. При этом, вообще говоря, в последовательностях допускается повторение точек, т.е. возможно, что $\lambda_n = \lambda_k$ при $n \neq k$. Для подмножества $B \subset \mathbb{C}$ полагаем $\Lambda(B) = \sum_{\lambda_n \in B} 1$ — число точек последовательности Λ в B . Полагаем $\Lambda(\lambda) = \Lambda(\{\lambda\})$, $\lambda \in \mathbb{C}$, — дивизор последовательности Λ . Наряду с последовательностями далее эпизодически встречается совокупность всех точек из $\mathbb{C}$, каждая из которых “считается” счетное число раз. Ее для единообразия тоже относим к последовательностям с дивизором, тождественно равным бесконечности.

Для двух последовательностей Λ и Γ в $\mathbb{C}$ естественным образом определяются отношения и операции:

- 1) $\Lambda = \Gamma$, т.е. *последовательности Λ и Γ совпадают*, если $\Lambda(\lambda) \equiv \Gamma(\lambda)$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}$, а в противном случае пишем $\Lambda \neq \Gamma$;
- 2) Γ — *подпоследовательность* последовательности Λ , если справедливо включение $\Gamma \subset \Lambda$, означающее, что $\Gamma(\lambda) \leq \Lambda(\lambda)$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}$ и при этом определена *разность* последовательностей $\Lambda \setminus \Gamma$ через разность дивизоров по правилу $(\Lambda \setminus \Gamma)(\lambda) \equiv \Lambda(\lambda) - \Gamma(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$;

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № № 03-01-00033, 02-01-00030) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1528.2003.1).

- 3) *объединение* $\Lambda \cup \Gamma$ и *пересечение* $\Lambda \cap \Gamma$ последовательностей Λ и Γ определяются соответственно тождествами $(\Lambda \cup \Gamma)(\lambda) \equiv \Lambda(\lambda) + \Gamma(\lambda)$ и $(\Lambda \cap \Gamma)(\lambda) \equiv \min\{\Lambda(\lambda), \Gamma(\lambda)\}$, $\lambda \in \mathbb{C}$;
- 4) *симметрическую разность* $\Lambda \Delta \Gamma$ последовательностей Λ и Γ определяет равенство $\Lambda \Delta \Gamma = \Lambda \cup \Gamma - \Lambda \cap \Gamma$ или эквивалентное ему тождество $(\Lambda \Delta \Gamma)(\lambda) \equiv \max\{\Lambda(\lambda), \Gamma(\lambda)\}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Легко видеть, что введенные отношения и операции над последовательностями обладают свойствами, совпадающими со свойствами аналогичных теоретико-множественных отношений и операций.

Каждой последовательности Λ в $\mathbb{C}$ сопоставляем систему (кратных) экспонент

$$\text{Ехр}_\Lambda = \{z^{k-1}e^{\lambda z} : \lambda \in \Lambda, 1 \leq k \leq \Lambda(\lambda), k = 1, 2, \dots\}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (0.1)$$

При этом $\text{Ехр}_\Lambda \cap \text{Ехр}_\Gamma = \text{Ехр}_{\Lambda \cap \Gamma}$, но $\text{Ехр}_\Lambda \cup \text{Ехр}_\Gamma = \text{Ехр}_{\Lambda \Delta \Gamma}$ (слева – обычные теоретико-множественные пересечение и объединение).

Всюду далее Ω – область¹ в $\mathbb{C}$. Через $H(\Omega)$ обозначаем локально выпуклое пространство голоморфных в Ω функций над $\mathbb{C}$, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах. Там, где это не вызывает разночтений, пространство $H(\Omega)$ обозначаем одним символом H .

Напомним некоторые понятия и сведения по спектральному синтезу на области в $\mathbb{C}$ из основополагающих для настоящей статьи работ И. Ф. Красичкова-Терновского [1], [2], представляющих собой определяющий задел обширной программы его исследований по этой теме и содержащих основные исторические сведения об истоках проблематики.

Замкнутое линейное подпространство W в H называем *инвариантным* (относительно дифференцирования), если вместе с каждой функцией $f \in W$ оно содержит и ее производную $f' \in W$. Очевидно, множество всех инвариантных подпространств на Ω замкнуто относительно пересечения любого числа таких подпространств. *Спектром* нетривиального ($\neq \{0\}$, H) *инвариантного подпространства* W называем максимальную относительно включения последовательность Λ , для которой $\text{Ехр}_\Lambda \subset W$. Спектр инвариантного подпространства обозначаем далее через $\text{Срес } W$. Спектры тривиальных инвариантных подпространств $\{0\}$ и H – соответственно пустое множество и множество повторяющихся счетное число раз точек плоскости $\mathbb{C}$, т.е. в терминах дивизоров $(\text{Срес } \{0\})(\lambda) \equiv 0$ и $(\text{Срес } H)(\lambda) \equiv \infty$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Инвариантное подпространство $W \subset H$ *допускает спектральный синтез* (на Ω), если замыкание $\langle \text{Ехр}_{\text{Срес } W} \rangle$ в пространстве H линейной оболочки $\langle \text{Ехр}_{\text{Срес } W} \rangle$ системы $\text{Ехр}_{\text{Срес } W}$ совпадает с пространством W , или, иначе говоря, система $\text{Ехр}_{\text{Срес } W}$ полна в W . Таким образом, спектр инвариантного подпространства, допускающего спектральный синтез, однозначно определяет само подпространство. Возможна и другая характеристика: *инвариантное подпространство* W *допускает спектральный синтез тогда и только тогда, когда оно минимальное* (относительно отношения включения) *среди всех инвариантных подпространств со спектром* $\text{Срес } W$.

¹Области и компакты в $\mathbb{C}$, если не оговорено противное, непустые.

Задача спектрального синтеза для инвариантного подпространства $W \subset H$ – найти условия, при которых W допускает спектральный синтез.

Наиболее содержательные и полные результаты по спектральному синтезу в H получены в случае, когда область Ω выпукла. И. Ф. Красичков-Терновский доказал [1; теорема 6.1], что *пространство решений однородного уравнения свертки в выпуклой области Ω (обязательно инвариантное) всегда допускает спектральный синтез* (см. ниже). Как показали И. Ф. Красичков-Терновский [2; теорема 8.1] и несколько позже другим методом и в менее общей форме А. Ф. Леонтьев [3], [4; теорема 5.2.8], *всякое инвариантное подпространство на неограниченной выпуклой области Ω допускает спектральный синтез*. В случае невыпуклой области Ω задача спектрального синтеза в H исследовалась, например, И. Ф. Красичковым-Терновским [5] в рамках задачи распространения спектрального синтеза и имеет свою специфику. В связи с этим далее всюду задача спектрального синтеза рассматривается только на выпуклой ограниченной области.

Основная исследуемая нами проблема в несколько менее конкретной форме была сформулирована И. Ф. Красичковым-Терновским в [2; §6]:

Задача о пересечении инвариантных подпространств. При условии, что инвариантные подпространства $W_1, W_2, \dots, W_n$ на области Ω допускают спектральный синтез, исключительно в терминах спектров $\text{Spec } W_1, \text{Spec } W_2, \dots, \text{Spec } W_n$ и области Ω выяснить, допускает ли спектральный синтез пересечение $W = \bigcap_{k=1}^n W_k$.

Мотивировкой такой постановки служит прежде всего задача аппроксимации решений системы однородных уравнений свертки линейными комбинациями элементарных решений.

Конкретнее, пусть $\mathcal{S} \in H^*(\Omega)$. Здесь и далее через $H^*(\Omega)$ или H^* обозначается пространство линейных непрерывных функционалов на H ; $\langle \mathcal{S}, f \rangle$ – действие функционала $\mathcal{S}$ на функцию f . По теореме Ф. Рисса функционал $\mathcal{S}$ может быть представлен в интегральной форме $\langle \mathcal{S}, f \rangle = \int f d\sigma, f \in H$, где σ – некоторая борелевская комплекснозначная мера с компактным носителем $\text{supp } \sigma \subset \Omega$. Следовательно, определена свертка “ $*$ ” этого функционала с функциями $f \in H$, действующая из H в $H(\omega_{\mathcal{S}})$, где $\omega_{\mathcal{S}} = \{h \in \mathbb{C} : \text{supp } \sigma + h \subset \Omega\}$ – геометрическая разность области Ω и компакта $\text{supp } \sigma$:

$$(\mathcal{S} * f)(h) = \langle \mathcal{S}, f(\zeta + h) \rangle = \int_{\text{supp } \sigma} f(\zeta + h) d\sigma(\zeta), \quad f \in H, \quad h \in \omega_{\mathcal{S}}.$$

Таким образом, имеет смысл однородное уравнение свертки

$$((\mathcal{S} * f)(h) \equiv 0, \quad h \in \omega_{\mathcal{S}}) \iff (\mathcal{S} * f = 0). \quad (0.2)$$

Пространство его решений образует инвариантное подпространство $W_{\mathcal{S}}$ на Ω . Функционалу $\mathcal{S} \in H^*$ преобразование Лапласа

$$T: \mathcal{S} \rightarrow S(z) = \langle \mathcal{S}, e^{z\zeta} \rangle, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (0.3)$$

сопоставляет *характеристическую функцию* S , которая является целой функцией экспоненциального типа с конечным индикатором роста

$$h_S(\theta) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} r^{-1} \ln |S(re^{i\theta})|, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Последовательность $\text{Zero}_S \subset \mathbb{C}$ всех нулей характеристической функции S , перенумерованная с учетом кратности (каждая точка встречается в последовательности Zero_S ровно столько раз, какова кратность нуля функции S в этой точке), и есть спектр инвариантного подпространства $W_{\mathcal{S}}$, который далее называем также спектром уравнения (0.2). При этом система $\text{Exp}_{\text{Zero}_S}$ – это *элементарные решения уравнения* (0.2). Как уже отмечалось выше, всякое такое инвариантное подпространство $W_{\mathcal{S}}$ допускает спектральный синтез. Положение существенно усложняется при рассмотрении системы $n > 1$ однородных уравнений свертки

$$\begin{cases} \mathcal{S}_1 * f = 0, \\ \mathcal{S}_2 * f = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \mathcal{S}_n * f = 0. \end{cases} \quad (0.4)$$

Пусть $S_k = T(\mathcal{S}_k)$ – характеристическая функция функционала $\mathcal{S}_k$. В то время как пространства решений, соответственно $W_1, W_2, \dots, W_n$, каждого уравнения в отдельности допускают спектральный синтез, для инвариантного подпространства, являющегося пространством решений $\bigcap_{k=1}^n W_k$ системы (0.4), со спектром $\bigcap_{k=1}^n \text{Spec } W_k = \bigcap_{k=1}^n \text{Zero}_{S_k}$ ситуация приобретает альтернативный характер [2]. Она полностью определяется взаимным расположением точек из последовательностей $\text{Spec } W_k = \text{Zero}_{S_k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, и связью его с геометрией области Ω . Таким образом, вопрос о возможности аппроксимации каждого решения системы (0.4) линейными комбинациями элементарных решений – это частный случай задачи о пересечении инвариантных подпространств, и даже он на настоящее время еще очень далек от окончательного решения.

В работе рассматривается задача о пересечении только двух инвариантных подпространств. И в этом случае известно не очень много (см. §1), а законченное решение этой задачи пока не просматривается. В то же время каждое достаточное условие допустимости спектрального синтеза для пересечения двух инвариантных подпространств поставляет целый набор таковых для большего числа подпространств в зависимости от того, в какой последовательности путем пересечения пар подпространств “добираться до конечного пункта” $\bigcap_{k=1}^n W_k$. Кроме того, недавно в работе Н. Ф. Абузяровой [6; теорема 1] (см. также [7; теорема 4.6]) установлено, что *каждое инвариантное подпространство W в H , допускающее спектральный синтез, может быть представлено как пространство решений системы двух однородных уравнений свертки*, т.е. как пересечение двух специальных инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез. Последнее дополнительно стимулирует исследование задачи о пересечении именно двух инвариантных подпространств. В §1 результат Н. Ф. Абузяровой приводится в несколько более детализированной конструктивно-количественной форме как следствие основной теоремы, сформулированной там же и доказанной в §5 (см. также замечание в конце §5).

Ряд общих условий на пространства голоморфных и иных функций, при которых каждое инвариантное подпространство, допускающее спектральный синтез, представляется в виде пространства решений не более чем двух уравнений типа свертки, можно извлечь из двойственной трактовки общих результатов автора [8]–[10] о возможности локального описания и о 2-порожденности замкнутых подмодулей над кольцом многочленов $\mathbb{C}[z]$ в пространствах голоморфных функций. В количественном отношении эти общие условия в значительной мере не “дотягивают” до основной теоремы настоящей работы.

Основная теорема показывает, что при определенной “близости” спектров двух инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез, их пересечение также допускает спектральный синтез. Как и в [1], [2], [5], [6], доказательство основной теоремы и несколько более сильной теоремы 3 из §5 опирается прежде всего на общую двойственную схему И. Ф. Красичкова-Терновского из [1], [2], сводящую задачу спектрального синтеза к задаче локального описания замкнутых подмодулей над кольцом $\mathbb{C}[z]$ в пространстве целых функций экспоненциального типа с ограничениями на их индикаторы роста. Применение этой схемы осуществляется с помощью аппроксимационной теоремы 2 из §4 об аппроксимации тождественного нуля специальной последовательностью целых функций экспоненциального типа. При этом аппроксимационные теоремы 1 и 2 наряду с тем, что во многом продиктованы именно этой схемой, представляют, по-видимому, и самостоятельный интерес.

Изложение замкнуто в себе в том смысле, что формулировки определений приводятся в полном объеме, а аппроксимационная теорема из [11] включена в формулировку уточняющей ее теоремы 1 из §2.

В §3 даны оценки сверху многочленов, которые применяются при доказательстве теоремы 2, но могут быть полезны и в других вопросах. В последнем §6 построен пример, устанавливающий “верхнюю границу близости” спектров двух допускающих спектральный синтез инвариантных подпространств, начиная с которой уже нельзя гарантировать наследования этого свойства их пересечением. Зазор между этой верхней границей близости спектров и близостью спектров в основной теореме пока весьма значителен. В связи с этим в конце §6 выдвигается гипотеза, подтверждение которой означало бы законченное в первом приближении решение задачи о пересечении двух инвариантных подпространств в терминах близости их спектров.

Автор признателен Н. Ф. Абузяровой за предоставленные полезные материалы, а также рецензенту за ценные замечания.

Настоящая работа посвящается семидесятилетию моего учителя И. Ф. Красичкова-Терновского.

§1. Формулировки основного и предшествовавших ему результатов; сравнительный анализ

Для подмножеств $A, B \subset \mathbb{C}$ потребуются следующие обозначения: $\bar{A}$ и ∂A – соответственно замыкание и граница множества A ; запись $A \Subset B$ означает, что $\bar{A}$ – относительно компактное подмножество в B в индуцированной евклидовой топологии; $\text{dist}(A, B)$ – евклидово расстояние между A и B ; $B^* = \{\bar{z} : z \in B\}$ – множество, симметричное B относительно вещественной оси; $p(B)$ –

периметр B , т.е. длина границы ∂B при условии, что она спрямляема;

$$K_B(\theta) = \sup\{\operatorname{Re} z e^{-i\theta} : z \in B\}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

– *опорная функция* множества B .

Далее по теории целых функций в основном используются факты и терминология из книг Б. Я. Левина [12], [13], а по спектральному синтезу – из работ И. Ф. Красичкова-Терновского [1], [2].

Пусть f – целая функция, не равная тождественно нулю (обозначаем $f \not\equiv 0$). Последовательность $\Lambda \subset \mathbb{C}$ называем *последовательностью нулей функции* $f \in H(\mathbb{C})$, если кратность нуля функции f в каждой точке $\lambda \in \mathbb{C}$ равна числу повторений точки λ в последовательности Λ (пишем $\operatorname{Zero}_f = \Lambda$). Говорим, что функция $f \in H(\mathbb{C})$ *обращается в нуль на последовательности* $\Lambda \subset \mathbb{C}$, если кратность нуля функции f в каждой точке $\lambda \in \mathbb{C}$ не меньше числа повторений точки λ в последовательности Λ (пишем $f(\Lambda) = 0$).

Пусть E – некоторое линейное пространство целых функций. Последовательность $\Lambda \subset \mathbb{C}$ называем *последовательностью неединственности для пространства* E , если существует функция $f \in E$ такая, что $f \not\equiv 0$ и $f(\Lambda) = 0$.

Пусть Ω – выпуклая область в $\mathbb{C}$ с опорной функцией K_Ω . Через P_Ω обозначаем пространство целых функций экспоненциального типа L с индикатором роста $h_L(\theta) < K_\Omega(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$. Преобразование Лапласа (0.3) задает линейный изоморфизм пространства H^* на пространство P_{Ω^*} , которое далее часто обозначаем одним символом P . Последовательность неединственности $\Lambda \subset \mathbb{C}$ для P будем называть также *последовательностью неединственности для выпуклой области* Ω . В силу известной взаимосвязи между полнотой и единственностью система $\operatorname{Exp}_\Lambda$ не полна в H тогда и только тогда, когда Λ – последовательность неединственности для Ω .

Каждой последовательности Λ в $\mathbb{C}$ сопоставляем в H инвариантное подпространство $W(\Lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\langle \operatorname{Exp}_\Lambda \rangle}$. Очевидно, подпространствами такого вида исчерпываются все инвариантные подпространства, допускающие спектральный синтез. Для нетривиального подпространства $W(\Lambda)$ его спектр совпадает с последовательностью Λ .

К первым содержательным результатам по задаче о пересечении инвариантных подпространств можно отнести доказанную И. Ф. Красичковым-Терновским [2; предложение 6.5] и приведенную ниже теорему А, которая формулируется здесь в терминах спектров.

ТЕОРЕМА А (И. Ф. Красичков-Терновский). *Если для последовательностей $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$ их симметрическая разность $\Lambda_1 \Delta \Lambda_2 \Delta \dots \Delta \Lambda_n$ – последовательность неединственности для выпуклой области Ω , то пересечение $\bigcap_{k=1}^n W(\Lambda_k)$ допускает спектральный синтез.*

В работе [2; предложение 6.5] установлено, что если замыкание $\overline{\sum_{k=1}^n W(\Lambda_k)}$ суммы $\sum_{k=1}^n W(\Lambda_k)$ инвариантных подпространств $W(\Lambda_k)$ – нетривиальное подпространство, т.е. не совпадает с H , то их пересечение $\bigcap_{k=1}^n W(\Lambda_k)$ допускает

спектральный синтез. Эта исходная формулировка эквивалентна теореме А. Действительно, по теореме Хана–Банаха нетривиальность подпространства

$$\overline{\sum_{k=1}^n W(\Lambda_k)} \neq H$$

эквивалентна существованию ненулевого функционала $\mathcal{S} \in H^*$, аннулирующего это подпространство или аннулирующего каждую из систем Exp_{Λ_k} , $k = 1, 2, \dots$. Другими словами, это равносильно аннулированию системы

$$\bigcup_{k=1}^n \text{Exp}_{\Lambda_k} = \text{Exp}_{\Lambda_1 \Delta \Lambda_2 \Delta \dots \Delta \Lambda_n}$$

некоторым функционалом $\mathcal{S} \neq 0$ из H^* . Для характеристической функции $S \in P$ из (0.3) функционала $\mathcal{S}$ последнее в точности означает, что $S \neq 0$ и

$$S(\Lambda_1 \Delta \Lambda_2 \Delta \dots \Delta \Lambda_n) = 0,$$

т.е. $\Lambda_1 \Delta \Lambda_2 \Delta \dots \Delta \Lambda_n$ – последовательность неединственности для Ω .

Теорема А, как и результаты настоящей статьи, наряду с другими вопросами теории функций (интерполяция, аналитическое продолжение и пр.) подчеркивает острую актуальность задачи законченного описания последовательностей неединственности для ограниченной выпуклой области Ω или эквивалентной ей проблемы описания всех полных систем экспонент Exp_{Λ} в пространстве H исключительно в терминах определенного мажорирования различных плотностей последовательности показателей Λ соответствующими геометрическими характеристиками области Ω . В то время как законченное решение этой задачи для *неограниченной* выпуклой области Ω в форме критерия полноты системы экспонент было получено в работе автора [14; теорема 2], удовлетворительного описания последовательностей неединственности, к сожалению, до сих пор не существует ни для какой *ограниченной* выпуклой области Ω (подробнее по этому поводу см. [15] и наш краткий обзор [16]). Здесь на этой задаче мы не останавливаемся, поскольку она далеко не тривиальна и требует отдельного рассмотрения.

Другой аспект, обеспечивающий допустимость спектрального синтеза для пересечений пространств решений двух уравнений свертки, – определенная “близость” спектров этих уравнений – по-видимому, впервые нашел отражение в фактически ключевом для ее работы результате Н. Ф. Абузяровой [6; предложение] (см. также [7; теорема 3.1], [17; теорема 1]). Он сформулирован в оригинале как достаточное условие возможности локального описания замкнутого подмодуля над кольцом $\mathbb{C}[z]$, порожденного двумя функциями, в топологическом модуле P над $\mathbb{C}[z]$. Здесь для удобства сравнения с основным результатом статьи приведем его в двойственной (см. [1], [2]) форме в виде условия допустимости спектрального синтеза для пересечения двух инвариантных подпространств.

ТЕОРЕМА В (Н. Ф. Абузярова). Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ и Λ' , $\Gamma = \{\gamma_n\}$ и Γ' – четыре последовательности в $\mathbb{C}$, являющиеся последовательностями нулей целых функций экспоненциального типа соответственно F и f , G и g , $0 \notin \Lambda \cup \Gamma$; Ω – ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$; разложения Адамара

для F и G имеют вид

$$F(z) = e^{az} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) \exp \frac{z}{\lambda_n}, \quad G(z) = e^{bz} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\gamma_n}\right) \exp \frac{z}{\gamma_n}.$$

Предположим, что функции $\mathcal{F} = fF$ и $\mathcal{G} = gG$ принадлежат P .

Положим

$$\delta_0 = \left| a - b + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\gamma_n} \right) \right|, \quad \Delta = \max \left\{ \sup_n \frac{n}{|\lambda_n|}, \sup_n \frac{n}{|\gamma_n|} \right\}; \quad (1.2)$$

$\mu(\chi)$ – функция, обратная к функции $\chi(\mu) = (1/\mu) \ln(1+\mu) + \ln(1+1/\mu)$. Предположим, что существуют число $\delta > 0$ и такая тригонометрически выпуклая функция $h(\theta)$, что $h(\theta) + \delta_0 + \delta < K_{\Omega^*}(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$. Если существует постоянная C такая, что для всех $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$, $r \geq 0$, выполнены оценки $|f(z)\mathcal{G}(z)| \leq C \exp(h(\theta)r)$, $|g(z)\mathcal{F}(z)| \leq C \exp(h(\theta)r)$ и справедливо соотношение

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\sum_{k \geq n} |1/\lambda_k - 1/\gamma_k|)}{\max_{k \leq n} \{|\lambda_k|, |\gamma_k|\}} < -\mu\left(\frac{\delta}{\Delta}\right) \left(\frac{h}{\sqrt{3}} + \delta\right), \quad (1.3)$$

где $h = \max_{\theta \in \mathbb{R}} (h(\theta + \pi/2) - h(\theta - \pi/2))$, то инвариантное подпространство $W(\Lambda \cup \Lambda') \cap W(\Gamma \cup \Gamma')$ допускает спектральный синтез в H .

Приведем основной результат настоящей статьи, который следует из несколько более сильной теоремы 3 из §5. Полагаем $\ln^+ t = \max\{0, \ln t\}$.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ и Λ' , $\Gamma = \{\gamma_n\}$ и Γ' – четыре последовательности в $\mathbb{C}$ и $\Lambda \cup (\Lambda' \triangle \Gamma')$ – последовательность неединственности для некоторой выпуклой области $D \Subset \Omega$. Положим $d = \text{dist}(D, \partial\Omega)$, $p = p(D)$ – периметр D . Если

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\sum_{k \geq n} |1/\lambda_k - 1/\gamma_k|)}{\max_{k \leq n} |\lambda_k|} \leq -\frac{p}{2\pi} \left(1 + e \ln^+ \frac{ep}{2\pi d}\right), \quad (1.4)$$

то $W(\Lambda \cup \Lambda') \cap W(\Gamma \cup \Gamma')$ допускает спектральный синтез в H .

Отметим, что в основной теореме, если исключить тривиальную постановку, последовательность $\Lambda \cup \Lambda'$ обязана быть последовательностью неединственности для некоторой выпуклой области $D \Subset \Omega$.

Теорема А для $n = 2$ получается из основной теоремы, если положить в ней $\Lambda = \Gamma = \emptyset$, а последовательности Λ' , Γ' переобозначить соответственно как Λ_1, Λ_2 . Относительно теоремы В заметим, что, во-первых, переход от последовательностей нулей целых функций экспоненциального типа в теореме В к последовательности неединственности в основной теореме, равно как и замена априорных условий теоремы В на несколько целых функций одним условием лишь на последовательность $\Lambda \cup (\Lambda' \triangle \Gamma')$, уже значительно расширяет сферу применимости основной теоремы по сравнению с теоремой В. Во-вторых, правая часть неравенства (1.3) теоремы В существенно зависит даже от малых “шевелений” отдельных

точек последовательностей Λ и Γ . Например, правая часть в (1.3) может значительно уменьшиться при смещении в малую окрестность нуля хотя бы одной точки из Λ или Γ (см. определение величины Δ в (1.2) и ее участие в условии (1.3); при $\chi \rightarrow 0$ порядок роста функции $\mu(\chi)$ близок к $1/\chi$). Это означает, что в отличие от условия (1.4) основной теоремы условие (1.3) в теореме В не асимптотическое относительно распределения точек из Λ или Γ , хотя по сути рассматриваемой задачи обязано быть таковым. Ради справедливости отметим, что эту погрешность в определенной степени можно ликвидировать и в рамках доказательства Н. Ф. Абузяровой теоремы В.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть нетривиальное инвариантное подпространство W из H допускает спектральный синтез, а последовательность точек $\Lambda = \{\lambda_n\}$ дополняет спектр $\text{Spec } W$ до последовательности нулей $\text{Zero}_L = \Lambda \cup \text{Spec } W$ характеристической функции $L \not\equiv 0$ некоторого функционала $\mathcal{L} \in H^*(D) \subset H^*$, где $D \Subset \Omega$ – выпуклая область, т.е. $h_L < K_{D^*}$. Тогда для любой последовательности $\Gamma = \{\gamma_n\}$, не пересекающейся с Λ и удовлетворяющей в обозначениях основной теоремы условию (1.4), найдется такой функционал $\mathcal{G} \in H^*(D)$, что для его характеристической функции G имеют место равенства $\text{Zero}_G = \Gamma \cup \text{Spec } W$ и $h_G = h_L$, а подпространство W при этом совпадает с пространством решений системы

$$\begin{cases} \mathcal{L} * f = 0, \\ \mathcal{G} * f = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Следует отметить, что для любого нетривиального инвариантного подпространства в H существует бесконечное разнообразие способов дополнения его спектра до последовательности нулей характеристической функции ненулевого функционала из $H^*(D)$, если выпуклая область $D \Subset \Omega$ достаточно велика. Таким образом, приведенное следствие содержательно для любого W , допускающего спектральный синтез. Если отвлечься от его конструктивно-количественного обрамления, в качественном смысле оно совпадает с результатом Н. Ф. Абузяровой [6; теорема 1] о возможности представления такого W в виде пространства решений некоторой системы (1.5).

§ 2. Первая аппроксимационная теорема

Пусть L – целая функция. При условии $L(\lambda) = 0$, $\gamma \in \mathbb{C}$, как и в работе [11], введем следующее обозначение:

$$L_{[\lambda]}^{[\gamma]}(z) = \frac{1 - z/\gamma}{1 - z/\lambda} L(z), \quad \lambda \cdot \gamma \neq 0. \quad (2.1)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть L – целая функция, $L(\lambda) = 0$, $\lambda \neq 0$. Тогда для комплексной точки $\gamma \neq 0$ для любого числа $\delta > 0$ выполнена оценка

$$|L(z) - L_{[\lambda]}^{[\gamma]}(z)| \leq \frac{|z|}{\delta} \left| \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\gamma} \right| \cdot \begin{cases} |L(z)|, & |z - \lambda| \geq \delta|\lambda|, \\ \max_{|\zeta - \lambda| = \delta|\lambda|} |L(\zeta)|, & |z - \lambda| < \delta|\lambda|. \end{cases} \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся тождеством

$$L(z) - L_{[\lambda]}^{[\gamma]}(z) \equiv L(z) \frac{z\lambda}{z-\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\gamma} \right), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.3)$$

Отсюда при $|z - \lambda| \geq \delta|\lambda|$ имеем

$$|L(z) - L_{[\lambda]}^{[\gamma]}(z)| \leq |L(z)| \frac{|z\lambda|}{|z-\lambda|} \left| \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\gamma} \right| \leq \frac{|z||\lambda|}{\delta|\lambda|} \left| \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\gamma} \right| |L(z)|,$$

что дает первую строку в (2.2).

При $|z - \lambda| < \delta|\lambda|$ из (2.3) по принципу максимума для целой функции $L(z)/(z - \lambda)$ получаем

$$|L(z) - L_{[\lambda]}^{[\gamma]}(z)| \leq \max_{|\zeta - \lambda| = \delta|\lambda|} \left| \frac{L(\zeta)}{\zeta - \lambda} \right| |z\lambda| \left| \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\gamma} \right| = \frac{|z||\lambda|}{\delta|\lambda|} \left| \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\gamma} \right| \cdot \max_{|\zeta - \lambda| = \delta|\lambda|} |L(\zeta)|,$$

что завершает доказательство (2.2).

Воспроизведем одно определение из [11; определение 1].

Пусть $L \not\equiv 0$ — целая функция и $\Lambda = \{\lambda_n\} \subset \text{Zero}_L$, а $\Gamma = \{\gamma_n\}$ — последовательность в $\mathbb{C}$, $n = 1, 2, \dots$, и $0 \notin \Lambda \cup \Gamma$.

Рекуррентно заданную последовательность целых функций

$$L_1(z) = L(z), \quad L_{n+1}(z) = (L_n)_{[\lambda_n]}^{[\gamma_n]}(z), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.4)$$

где функции вида $L_{[\lambda]}^{[\gamma]}$ определены в (2.1), называем канонической последовательностью (рода 0) для функции L , сдвигающей подпоследовательность нулей $\Lambda \subset \text{Zero}_L$ в последовательность Γ .

ТЕОРЕМА 1 (аппроксимационная). Пусть $L \not\equiv 0$ — целая функция экспоненциального типа с индикатором роста h_L , $\Lambda = \{\lambda_n\} \subset \text{Zero}_L$ — подпоследовательность нулей функции L , а $\Gamma = \{\gamma_n\}$ — последовательность в $\mathbb{C}$, $n = 1, 2, \dots$, $0 \notin \Lambda \cup \Gamma$, и пусть сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\gamma_k} \right| < \infty. \quad (2.5)$$

Тогда каноническая последовательность целых функций экспоненциального типа $\{L_n\}$, сдвигающая подпоследовательность нулей Λ в последовательность Γ , сходится равномерно на компактах из $\mathbb{C}$ к целой функции экспоненциального типа $G \not\equiv 0$, $G(0) = L(0)$, с индикатором роста $h_G = h_L$ и с последовательностью нулей $\text{Zero}_G = (\text{Zero}_L \setminus \Lambda) \cup \Gamma$. При этом:

- а) для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется постоянная A_ε такая, что последовательность $\{L_n\}$ удовлетворяет равномерной по n оценке

$$|L_n(z)| \leq A_\varepsilon \exp \left(\left(h_L(\theta) + \frac{\varepsilon}{3} \right) r \right), \quad z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}, \quad r \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}; \quad (2.6)$$

- б) скорость сходимости такова, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется постоянная C_ε , с которой при всех $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$, $r \geq 0$, и при всех $n = 1, 2, \dots$ выполнены оценки

$$|L_n(z) - G(z)| \leq C_\varepsilon \sum_{k=n}^{\infty} \left| \frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\gamma_k} \right| \cdot \exp((h_L(\theta) + \varepsilon)r). \quad (2.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все утверждения теоремы, включая п. а), за исключением утверждения о скорости сходимости из п. б), доказаны в [11; аппроксимационная теорема 1]. Докажем п. б).

В силу равномерной непрерывности тригонометрически выпуклой функции h_L можно подобрать число $\delta > 0$ столь малым, что выполнена оценка

$$\max \left\{ \left| \left(h_L(\theta) + \frac{\varepsilon}{3} \right) r - \left(h_L(\varphi) + \frac{\varepsilon}{3} \right) t \right| : |re^{i\theta} - te^{i\varphi}| \leq 2\delta t, r, t \geq 0 \right\} \leq \frac{\varepsilon}{3} r.$$

Это вместе с (2.6) и оценкой (2.2) предложения 2.1 дает оценку

$$\begin{aligned} |L_n(z) - L_{n+1}(z)| &= |L_n(z) - (L_n)_{[\lambda_n]}^{[\gamma_n]}(z)| \\ &\leq \frac{|z|}{\delta} \left| \frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\gamma_n} \right| \cdot A_\varepsilon \exp \left(\left(h_L(\theta) + \frac{2\varepsilon}{3} \right) r \right), \quad z = re^{i\theta}, \quad r \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Отсюда левая часть (2.7) оценивается сверху как

$$\begin{aligned} |L_n(z) - G(z)| &\leq \sum_{k=n}^{\infty} |L_k(z) - L_{k+1}(z)| \\ &\leq A_\varepsilon \sum_{k=n}^{\infty} \left| \frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\gamma_k} \right| \cdot \frac{r}{\delta} \exp \left(\left(h_L(\theta) + \frac{2\varepsilon}{3} \right) r \right), \quad z = re^{i\theta}, \quad r \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

и при $C_\varepsilon = (A_\varepsilon/\delta) \sup_{r \geq 0} (r \exp(-\varepsilon r/3))$ получаем оценку (2.7).

§ 3. Оценка сверху многочленов

Пусть Λ – последовательность в $\mathbb{C}$, $0 \notin \Lambda$; $n_\Lambda(t) = \Lambda(\overline{D}(t))$ – считающая функция последовательности Λ , где $\overline{D}(t) \subset \mathbb{C}$ – замкнутый круг радиуса t с центром в нуле. При этом полагаем, что

$$\overline{\Delta}_\Lambda = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{n_\Lambda(t)}{t}, \quad N_\Lambda(t) = \int_0^t \frac{n_\Lambda(t)}{t} dt, \quad \overline{p}_\Lambda = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{N_\Lambda(t)}{t} \quad (3.1)$$

– соответственно *верхняя плотность, усредненная* (проинтегрированная) *считающая функция* и *верхняя усредненная плотность* последовательности Λ (см. [18; I.1]).

Легко устанавливаются неравенства (см. [13; с. 18], [18; I.1])

$$\overline{p}_\Lambda \leq \overline{\Delta}_\Lambda \leq e\overline{p}_\Lambda. \quad (3.2)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть Λ – последовательность конечной верхней плотности $\overline{\Delta}_\Lambda$, $0 \notin \Lambda$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ найдутся постоянные $C_\varepsilon \geq 0$ и $T_\varepsilon \geq 0$ такие, что для интеграла

$$I_\Lambda(r; T) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T \ln \left(1 + \frac{r}{t} \right) dn_\Lambda(t) \quad (3.3)$$

при всех $r > 0$ и $T \geq T_\varepsilon$ справедлива оценка

$$I_\Lambda(r; T) \leq (\overline{\Delta}_\Lambda + \varepsilon) T \ln \left(1 + \frac{r}{T} \right) + (\overline{p}_\Lambda + \varepsilon) r \ln \left(1 + \frac{T}{r} \right) + C_\varepsilon. \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя интегрирование по частям, получаем

$$I_{\Lambda}(r; T) \leq \int_0^T \ln\left(1 + \frac{r}{t}\right) dn_{\Lambda}(t) = n_{\Lambda}(T) \ln\left(1 + \frac{r}{T}\right) + \int_0^T \frac{r}{r+t} \frac{n_{\Lambda}(t)}{t} dt,$$

где последний интеграл равен

$$\int_0^T \frac{r}{r+t} dN_{\Lambda}(t) = \frac{rN_{\Lambda}(T)}{r+T} + \int_0^T \frac{rN_{\Lambda}(t)}{(r+t)^2} dt.$$

Отсюда

$$I_{\Lambda}(r; T) \leq n_{\Lambda}(T) \ln\left(1 + \frac{r}{T}\right) + \frac{rN_{\Lambda}(T)}{r+T} + \int_0^T \frac{rN_{\Lambda}(t)}{(r+t)^2} dt, \quad r \geq 0. \quad (3.5)$$

В силу (3.2) и конечности верхней плотности $\bar{\Delta}_{\Lambda}$ усредненная верхняя плотность $\bar{p}_{\Lambda}$ также конечна. Значит, при любом $\varepsilon > 0$ найдется постоянная $c_{\varepsilon} \geq 0$ такая, что

$$n_{\Lambda}(t) \leq \left(\bar{\Delta}_{\Lambda} + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + c_{\varepsilon}, \quad N_{\Lambda}(t) \leq (\bar{p}_{\Lambda} + \varepsilon)t + c_{\varepsilon}, \quad t \geq 0. \quad (3.6)$$

Применение (3.6) к (3.5) дает оценку

$$\begin{aligned} I_{\Lambda}(r; T) &\leq \left(\left(\bar{\Delta}_{\Lambda} + \frac{\varepsilon}{2}\right)T + c_{\varepsilon}\right) \ln\left(1 + \frac{r}{T}\right) + r \frac{(\bar{p}_{\Lambda} + \varepsilon)T + c_{\varepsilon}}{r+T} \\ &\quad + r \int_0^T \frac{(\bar{p}_{\Lambda} + \varepsilon)t + c_{\varepsilon}}{(r+t)^2} dt. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Вычислим последний интеграл в правой части (3.7):

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{(\bar{p}_{\Lambda} + \varepsilon)t + c_{\varepsilon}}{(r+t)^2} dt &= (\bar{p}_{\Lambda} + \varepsilon) \int_0^T \frac{t dt}{(r+t)^2} + c_{\varepsilon} \int_0^T \frac{dt}{(r+t)^2} \\ &= (\bar{p}_{\Lambda} + \varepsilon) \int_0^T t d\left(-\frac{1}{(r+t)}\right) + c_{\varepsilon} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+T}\right) \\ &= \left(-(\bar{p}_{\Lambda} + \varepsilon) \frac{T}{r+T} + \int_0^T \frac{dt}{(r+t)}\right) + c_{\varepsilon} \frac{T}{r(r+T)} \\ &= -\frac{(\bar{p}_{\Lambda} + \varepsilon)T}{r+T} + (\bar{p}_{\Lambda} + \varepsilon) \ln\left(1 + \frac{T}{r}\right) + \frac{c_{\varepsilon}T}{r(r+T)}. \end{aligned}$$

Подставляя результат в правую часть (3.7), получаем

$$\begin{aligned} I_{\Lambda}(r; T) &\leq \left(\bar{\Delta}_{\Lambda} + \frac{\varepsilon}{2}\right)T \ln\left(1 + \frac{r}{T}\right) + c_{\varepsilon} \ln\left(1 + \frac{r}{T}\right) \\ &\quad + r \frac{c_{\varepsilon}}{r+T} + r(\bar{p}_{\Lambda} + \varepsilon) \ln\left(1 + \frac{T}{r}\right) + \frac{c_{\varepsilon}T}{r(r+T)}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

При $T \geq 2c_{\varepsilon}/\varepsilon$ сумма первых двух слагаемых в правой части оценивается сверху величиной

$$(\bar{\Delta}_{\Lambda} + \varepsilon)T \ln\left(1 + \frac{r}{T}\right) + \left(c_{\varepsilon} - \frac{\varepsilon T}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{r}{T}\right) \leq (\bar{\Delta}_{\Lambda} + \varepsilon)T \ln\left(1 + \frac{r}{T}\right).$$

Отсюда согласно (3.8) получаем

$$I_{\Lambda}(r; T) \leq (\bar{\Delta}_{\Lambda} + \varepsilon)T \ln\left(1 + \frac{r}{T}\right) + (\bar{p}_{\Lambda} + \varepsilon)r \ln\left(1 + \frac{T}{r}\right) + 2c_{\varepsilon},$$

что при $T \geq T_{\varepsilon} = 2c_{\varepsilon}/\varepsilon$ и $C_{\varepsilon} = 2c_{\varepsilon}$ дает требуемую оценку (3.4).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть $0 < d < +\infty$, а Λ – последовательность конечной верхней плотности $\overline{\Delta}_\Lambda$, $0 \notin \Lambda$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ найдутся постоянные $C_\varepsilon \geq 0$ и $T_\varepsilon \geq 0$ такие, что при всех $T \geq T_\varepsilon$ справедлива оценка

$$\sup_{r \geq 0} (I_\Lambda(r; T) - dr) \leq T \cdot b(\overline{\Delta}_\Lambda + \varepsilon, \overline{p}_\Lambda + \varepsilon, d) + C_\varepsilon, \quad (3.9)$$

где для $\Delta, p \geq 0$ и $d > 0$

$$0 \leq b(\Delta, p, d) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x > 0} \left(\Delta \ln(1+x) + px \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - dx \right) < +\infty. \quad (3.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение (3.9) сразу следует из предложения 3.1, если после вычитания из $I_\Lambda(r; T)$ величины dr в (3.4) и применения к обеим частям полученного неравенства операции $\sup_{r \geq 0}$ использовать замену $x = r/T$ в правой части.

В связи с оценкой (3.9) нам потребуются достаточно элементарные оценки и свойства величины $b(\Delta, p, d)$ из (3.10), которые дает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Функция $b(\cdot, \cdot, \cdot)$ является непрерывной по каждой из трех переменных, не убывающей по двум первым переменным и невозрастающей по последней переменной. При (ср. с (3.2))

$$p \leq \Delta \leq ep \quad (3.11)$$

в обозначениях $a^+ = \max\{a, 0\}$, $\ln^+ x = \max\{\ln x, 0\}$ справедливы оценки

$$b(\Delta, p, d) \leq p \frac{\Delta}{d} \ln \left(1 + \frac{d}{\Delta} \right) + \Delta \ln^+ \frac{\Delta}{d} - (\Delta - d)^+ \quad (3.12a)$$

$$\leq p + \Delta \ln^+ \frac{\Delta}{d} \quad (3.12b)$$

$$\leq p + ep \ln^+ \frac{ep}{d}. \quad (3.12c)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательства свойств функции b , касающиеся ее поведения по каждой переменной, опускаем как элементарные. Установим оценки (3.12).

Непрерывная на $(0, +\infty)$ функция

$$m(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta \ln(1+x) + px \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - dx, \quad x > 0, \quad (3.13)$$

продолженная по непрерывности значением $m(0) = 0$ в точку 0, стремится к $-\infty$ при $x \rightarrow +\infty$, т.е. достигает своего максимального значения на $[0, +\infty)$. В частности, выполнены неравенства (3.10).

Пусть x_m – точка максимума функции $m(x)$ на $[0, +\infty)$. Тогда либо $x_m = 0$, либо число x_m удовлетворяет уравнению

$$m'(x) = \frac{\Delta - p}{1 + x} + p \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - d = 0, \quad x > 0. \quad (3.14)$$

При $p \leq \Delta$ имеем

$$m''(x) = -\left(\frac{\Delta - p}{(1 + x)^2} + \frac{p}{x(1 + x)}\right) < 0$$

для всех $x > 0$, т.е. функция $m'(x)$ – строго монотонно убывающая на $(0, +\infty)$. Кроме того, $\lim_{x \rightarrow 0} m'(x) = +\infty$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} m'(x) = -d < 0$. Следовательно, уравнение (3.14) имеет единственное положительное решение, которое и будет точкой максимума x_m . При этом

$$0 = \frac{\Delta - p}{1 + x_m} + p \ln\left(1 + \frac{1}{x_m}\right) - d \leq \frac{\Delta - p}{1 + x_m} + \frac{p}{x_m} - d = \frac{\Delta x_m + p}{(1 + x_m)x_m} - d \leq \frac{\Delta}{x_m} - d,$$

т.е. $x_m \leq \Delta/d$ при $p \leq \Delta$. Отсюда и из определений (3.13) и (3.10) при условии $p \leq \Delta$ в силу возрастания функции $x \ln(1 + 1/x)$, $x > 0$, получаем

$$\begin{aligned} b(\Delta, p, d) &= m(x_m) = px_m \ln\left(1 + \frac{1}{x_m}\right) + (\Delta \ln(1 + x_m) - dx_m) \\ &\leq p \frac{\Delta}{d} \ln\left(1 + \frac{d}{\Delta}\right) + \max_{x \geq 0} (\Delta \ln(1 + x) - dx). \end{aligned}$$

Если $\Delta/d \geq 1$, то последний максимум здесь достигается в точке $x = \Delta/d - 1 = (\Delta/d - 1)^+$, а в противном случае – в точке $x = 0 = (\Delta/d - 1)^+$. Таким образом,

$$b(\Delta, p, d) \leq p \frac{\Delta}{d} \ln\left(1 + \frac{d}{\Delta}\right) + \Delta \ln\left(1 + \left(\frac{\Delta}{d} - 1\right)^+\right) - d \left(\frac{\Delta}{d} - 1\right)^+.$$

Правая часть здесь совпадает с правой частью неравенства (3.12а), продолжение – (3.12б) – использует элементарное неравенство $x \ln(1 + 1/x) \leq 1$, а дальнейшее – (3.12с) – следует из правой части условия (3.11).

Перенесем последние результаты на многочлены, нормированные в нуле значением 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ – последовательность конечной верхней плотности, $0 \notin \Lambda$, и число $d > 0$. Если $\overline{\Delta}_\Lambda < \overline{\Delta}$ и $\overline{p}_\Lambda < \overline{p}$, то найдется постоянная $C_d > 0$ такая, что при любом n для всех $z \in \mathbb{C}$ справедлива оценка

$$\left| \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) \right| \leq C_d \exp\left(b(\overline{\Delta}, \overline{p}, d) \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k|\right) \cdot \exp(d|z|). \quad (3.15)$$

Ослабляя, вообще говоря, эту оценку, можно заменить в правой части (3.15) величину $b(\overline{\Delta}, \overline{p}, d)$, определенную в (3.10), на правую часть в неравенствах (3.12а), (3.12б) или (3.12с) с $\Delta = \overline{\Delta}$ и $p = \overline{p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $T_n = \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k|$. Тогда в обозначении (3.3) при $r = |z|$ имеем

$$\sum_{k=1}^n \ln \left| 1 - \frac{z}{\lambda_k} \right| \leq \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{r}{|\lambda_k|} \right) \leq I_\Lambda(r; T_n).$$

Отсюда оценка (3.9) предложения 3.2 влечет за собой то, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$, для которого $\overline{\Delta}_\Lambda + \varepsilon < \overline{\Delta}$ и $\overline{p}_\Lambda + \varepsilon < \overline{p}$, найдутся постоянные C_ε и T_ε такие, что при всех достаточно больших n , для которых $T_n \geq T_\varepsilon$, справедлива оценка

$$\begin{aligned} \sup_{|z| \geq 0} \left(\sum_{k=1}^n \ln \left| 1 - \frac{z}{\lambda_k} \right| - d|z| \right) &\leq T_n \cdot b(\overline{\Delta}_\Lambda + \varepsilon, \overline{p}_\Lambda + \varepsilon, d) + C_\varepsilon \\ &\leq \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k| \cdot b(\overline{\Delta}, \overline{p}, d) + C_\varepsilon. \end{aligned}$$

Увеличивая, если необходимо, постоянную C_ε , распространяем последнюю оценку на все n . Ее потенцирование дает (3.15). Заключительное замечание об ослабленных вариантах оценки (3.15) – это очевидное следствие неравенств (3.12) предложения 3.3.

Версию (3.12с) неравенств (3.12) предложения 3.3 дополняет

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Пусть число $d > 0$, D – выпуклая область в $\mathbb{C}$ периметра $p = p(D) < \infty$ и $\Lambda = \{\lambda_n\}$ – последовательность неединственности для D , $0 \notin \Lambda$. Тогда справедливо неравенство

$$b(\overline{\Delta}_\Lambda, \overline{p}_\Lambda, d) < \frac{p}{2\pi} \left(1 + e \ln^+ \frac{ep}{2\pi d} \right). \quad (3.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (3.2) по предложению 3.3 из заключительной оценки (3.12с) цепочки неравенств (3.12) следует неравенство

$$b(\overline{\Delta}_\Lambda, \overline{p}_\Lambda, d) < \overline{p}_\Lambda + e\overline{p}_\Lambda \ln^+ \frac{e\overline{p}_\Lambda}{d}. \quad (3.17)$$

Далее используется элементарная

ЛЕММА 3.1. Верхняя усредненная плотность $\overline{p}_\Lambda$ последовательности неединственности Λ , $0 \notin \Lambda$, для выпуклой области D периметра p строго меньше чем $p/(2\pi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. По определению последовательности неединственности для D найдется функция $L \in P_{D^*}$ такая, что $L \not\equiv 0$ и $L(\Lambda) = 0$. Не умаляя общности, можно считать, что $L(0) = 1$. По определению (3.1) и по классической формуле Йенсена для L имеем

$$\begin{aligned} \overline{p}_\Lambda &\leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{N_{\text{Zero}_L}(t)}{t} = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi t} \int_0^{2\pi} \ln |L(te^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_L(\theta) d\theta \\ &< \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_{D^*}(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Последний интеграл, как известно [12; гл. I, § 19], [19; гл. I, § 2], есть периметр области D^* , т.е. равен p , что и требовалось.

По лемме 3.1 правая часть в (3.17) увеличится, если заменить в ней верхнюю усредненную плотность $\overline{p}_\Lambda$ на большую величину $p/(2\pi)$.

§ 4. Вторая аппроксимационная теорема

Следующая аппроксимационная теорема напрямую нацелена на доказательство основной теоремы.

ТЕОРЕМА 2 (аппроксимационная). Пусть число $d > 0$, $L \neq 0$ — целая функция экспоненциального типа и $\Lambda = \{\lambda_n\} \subset \text{Zero}_L$, $0 \notin \Lambda$, $\overline{\Delta}_\Lambda$ и $\overline{p}_\Lambda$ — конечные верхняя и верхняя усредненная плотности последовательности Λ соответственно. Если для некоторой последовательности $\Gamma = \{\gamma_n\} \subset \mathbb{C}$, $0 \notin \Gamma$, выполнено соотношение

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\sum_{k \geq n} |1/\lambda_k - 1/\gamma_k|)}{\max_{k \leq n} |\lambda_k|} < -b(\overline{\Delta}_\Lambda, \overline{p}_\Lambda, d), \quad (4.1)$$

где правая часть определена равенством (3.10), то найдется целая функция экспоненциального типа $G \neq 0$, $G(0) = L(0)$, с индикатором роста $h_G = h_L$ и с последовательностью нулей $\text{Zero}_G = (\text{Zero}_L \setminus \Lambda) \cup \Gamma$ такая, что некоторая подпоследовательность $\{M_{n_k}\}$, $k = 1, 2, \dots$, последовательности целых функций экспоненциального типа

$$M_n(z) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{\gamma_k}\right) \cdot L(z) - \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) \cdot G(z), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.2)$$

стремится к тождественному нулю равномерно на компактах из $\mathbb{C}$ и найдется постоянная $C \geq 0$, с которой выполнены равномерные по k оценки

$$|M_{n_k}(z)| \leq C \exp((h_L(\theta) + d)r), \quad z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}, \quad r \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выполнены все условия теоремы 1. В частности, ряд (2.5) сходится в силу условия (4.1). В качестве функции G выбираем предел канонической последовательности (2.4) для функции L целых функций экспоненциального типа $\{L_n\}$, сдвигающей подпоследовательность нулей Λ в последовательность Γ из заключения теоремы 1. Тогда с учетом теоремы 1 остается доказать только существование подпоследовательности $\{M_{n_k}\}$, $k = 1, 2, \dots$, последовательности (4.2) с требуемыми свойствами.

Положим

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} \left| \frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\gamma_k} \right|, \quad T_n = \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k|, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.4)$$

Функция $b(\cdot, \cdot, \cdot)$, определенная равенством (3.10), как отмечалось в предложении 3.3, непрерывна по каждой из трех переменных. Поэтому существуют числа $\overline{\Delta}$, $\overline{p}$, $\overline{d} > 0$ такие, что

$$\overline{\Delta}_\Lambda < \overline{\Delta}, \quad \overline{p}_\Lambda < \overline{p}, \quad \overline{d} < d, \quad (4.5)$$

а условие (4.1) сохраняется и после замены в правой части $\overline{\Delta}_\Lambda$, $\overline{p}_\Lambda$ и d соответственно на $\overline{\Delta}$, $\overline{p}$ и $\overline{d}$. В этом случае в обозначениях (4.4) условие (4.1) означает,

что найдется подпоследовательность $\{n_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, натуральных чисел, для которых

$$R_{n_k} \leq C_0 \exp(-b(\overline{\Delta}, \overline{p}, \overline{d})T_{n_k}), \quad (4.6)$$

где постоянная C_0 не зависит от k . Выберем число $\varepsilon > 0$ столь малым, что

$$\overline{d} < \overline{d} + \varepsilon \leq d. \quad (4.7)$$

Каждая целая функция экспоненциального типа M_n , определенная в (4.2), представима в виде

$$M_n(z) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) \cdot \left(\prod_{k=1}^n \frac{1 - z/\gamma_k}{1 - z/\lambda_k} L(z) - G(z)\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Здесь в последней скобке стоит разность $L_n - G$, где $\{L_n\}$ — упоминавшаяся выше каноническая последовательность для L , сдвигающая Λ в Γ . Таким образом, для всех $z \in \mathbb{C}$ справедлива оценка

$$|M_n(z)| \leq \left| \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) \right| \cdot |L_n(z) - G(z)|, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.8)$$

Ввиду сходимости последовательности $\{L_n\}$ к G это обеспечивает пока, как минимум, *поточечную сходимость* последовательности $\{M_n\}$ к тождественному нулю.

Из (4.8) по аппроксимационной теореме 1 из оценки скорости сходимости (2.7) для некоторой постоянной C_ε при всех $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ получаем

$$|M_n(z)| \leq \left| \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) \right| \cdot C_\varepsilon R_n \exp((h_L(\theta) + \varepsilon)r), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.9)$$

Кроме того, из соотношений (4.5) по предложению 3.4 найдется постоянная $C_{\overline{d}}$ такая, что выполнена оценка (3.15) с $\overline{d}$ вместо d . Эта оценка вместе с (4.9) дает оценку

$$|M_n(z)| \leq C_{\overline{d}} \exp(b(\overline{\Delta}, \overline{p}, \overline{d})T_n) \cdot C_\varepsilon R_n \exp((h_L(\theta) + \overline{d} + \varepsilon)r), \\ z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Переходя здесь к подпоследовательности $\{M_{n_k}\}$, из (4.6) получаем

$$|M_{n_k}(z)| \leq C_{\overline{d}} \exp(b(\overline{\Delta}, \overline{p}, \overline{d})T_{n_k}) \\ \times C_\varepsilon C_0 \exp(-b(\overline{\Delta}, \overline{p}, \overline{d})T_{n_k}) \cdot \exp((h_L(\theta) + \overline{d} + \varepsilon)r) \\ = C_{\overline{d}} C_\varepsilon C_0 \exp((h_L(\theta) + \overline{d} + \varepsilon)r), \quad z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Отсюда согласно условию (4.7) на выбор $\overline{d}$ при $C = C_{\overline{d}} C_\varepsilon C_0$ следуют равномерные по k оценки (4.3). Из поточечной сходимости последовательности $\{M_{n_k}\}$ к нулю и равномерных по k оценок (4.3) по теореме Витали о сходимости [20; 5.2.1] последовательность функций $\{M_{n_k}\}$ сходится к нулю равномерно на компактах из $\mathbb{C}$.

§ 5. Доказательства основной теоремы и следствия

Используются сведения, подробно изложенные в работах [1], [2], [6], [17].

Пусть Ω – ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$. Преобразование Лапласа (0.3) осуществляет изоморфизм сопряженного пространства H^* на пространства целых функций экспоненциального типа P и индуцирует на P топологию сильно сопряженного пространства H^* . Можно дать и внутреннее определение этой индуцированной топологии как некоторой естественной топологии индуктивного предела на P . Отсылая за деталями к [1], [2], отметим здесь лишь условия сходимости последовательности: *последовательность $\{F_n\} \subset P$ сходится в топологии P , если и только если она сходится равномерно на компактах в $\mathbb{C}$ и одновременно для некоторой тригонометрически выпуклой функции $h < K_{\Omega^*}$ существует постоянная C такая, что справедливы равномерные по n оценки $|F_n(z)| \leq C \exp(h(\theta)r)$, $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$, $r \geq 0$, $n = 1, 2, \dots$.*

Следуя [1], [2], для подпространства $W \subset H$ подпространство всех функционалов из H^* , аннулирующих W , обозначаем через W^0 , а подпространство в P всех преобразований Лапласа (0.3), т.е. характеристических функций, функционалов из W^0 обозначаем $T(W^0)$.

В основе доказательства приведенной ниже теоремы 3 и основной теоремы лежит следующее основополагающее для задачи о пересечении инвариантных подпространств

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1 [2; предложение 6.2]. *Пусть инвариантные подпространства $W_1, \dots, W_n$ в H допускают спектральный синтез. Пересечение $\bigcap_{k=1}^n W_k$ допускает спектральный синтез тогда и только тогда, когда для любого набора $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ комплексных чисел, связанных условием $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0$, и какой-либо точки $\lambda \in \mathbb{C}$, не принадлежащей спектру ни одного из пространств W_k , $k = 1, \dots, n$, замыкание в P множества*

$$\mathcal{T}(\bar{\alpha}, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \{F = F_1 + \dots + F_n : F_k \in T(W_k^0), F_k(\lambda) = \alpha_k, 1 \leq k \leq n\} \quad (5.1)$$

содержит тождественный нуль.

В этом параграфе из последнего предложения потребуются только достаточность в следующей форме (ср. [2; предложение 6.4]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Пусть W_1, W_2 – инвариантные подпространства в H , допускающие спектральный синтез, и $0 \notin \text{Spec } W_1 \cap \text{Spec } W_2$. Если для целых функций $L \in T(W_1^0)$ и $G \in T(W_2^0)$ с условием $L(0) = G(0) = 1$ найдутся последовательности многочленов $\{g_n\}$ и $\{l_n\}$ такие, что $g_n(0) = l_n(0) = 1$, а последовательность $g_n L - l_n G$ стремится к тождественному нулю в P , то инвариантное подпространство $W_1 \cap W_2$ также допускает спектральный синтез.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пространство P естественным образом наделяется структурой топологического модуля над кольцом $\mathbb{C}[z]$. При этом подпространства $T(W_1^0)$, $T(W_2^0)$ образуют замкнутые подмодули в топологическом модуле P над $\mathbb{C}[z]$. Значит, $g_n L \in T(W_1^0)$ и $l_n G \in T(W_2^0)$ при любом $n = 1, 2, \dots$. Отсюда

множество $T(\bar{\alpha}, 0)$ из (5.1) при $n = 2$, $\bar{\alpha} = (\alpha, -\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, включает в себя последовательность

$$\{\alpha g_n L + (-\alpha l_n G) : n = 1, 2, \dots\},$$

предел которой в P – тождественный нуль. Остается воспользоваться предложением 5.1.

Пусть B – выпуклое множество в $\mathbb{C}$, число $d > 0$. Выпуклое множество

$$B^d \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{z \in B} \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z| < d\} \quad (5.2)$$

называем² d -вздутием множества B . Для опорных функций множеств B и его d -вздутия B^d справедливо тождество [19; гл. I, § 4]

$$K_{B^d}(\theta) \equiv K_B(\theta) + d, \quad \theta \in \mathbb{R}. \quad (5.3)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ и Λ' , $\Gamma = \{\gamma_n\}$ и Γ' – четыре последовательности в $\mathbb{C}$, $\bar{\Delta}_\Lambda$ и $\bar{p}_\Lambda$ – соответственно верхняя и верхняя усредненная плотности последовательности Λ , а последовательность $\Lambda \cup (\Lambda' \Delta \Gamma')$ является последовательностью неединственности для некоторой выпуклой области $D \Subset \Omega$, т.е. $d = \text{dist}(D, \partial\Omega) > 0$. Если выполнено соотношение (4.1), то инвариантное подпространство $W(\Lambda \cup \Lambda') \cap W(\Gamma \cup \Gamma')$ в H допускает спектральный синтез.

Заключение теоремы остается в силе, если заменить в правой части условия (4.1) величину $b(\bar{\Delta}_\Lambda, \bar{p}_\Lambda, d)$ (см. (3.10)) на правую часть в неравенствах (3.12a), (3.12b) или (3.12c) с $\Delta = \bar{\Delta}_\Lambda$ и $p = \bar{p}_\Lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие на последовательность $\Lambda_0 \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda \cup (\Lambda' \Delta \Gamma')$ эквивалентно существованию целой функции экспоненциального типа $L \not\equiv 0$, обращающейся в нуль на последовательности Λ_0 , с индикатором роста $h_L(\theta) < K_{D^*}(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$. Не ограничивая общности, можно считать (возможно, после сдвига $\mathbb{C}$ и последующего домножения функции L на некоторую ненулевую константу) выполненными условия $0 \notin \Lambda \cup \Lambda' \cup \Gamma \cup \Gamma' \cup \text{Zero}_L$, $L(0) = 1$. Неравенство $h_L < K_{D^*}$ вместе со свойством $L(\Lambda_0) = 0$ означает, что функционал $\mathcal{L} \in H^*(D) \subset H^*$ с характеристической функцией L аннулирует систему экспонент Exp_{Λ_0} , определенную как в (0.1), а значит, и замыкание ее линейной оболочка $\overline{\langle \text{Exp}_{\Lambda_0} \rangle} = W(\Lambda_0) \supset W(\Lambda \cup \Lambda')$. Таким образом, $L \in T((W(\Lambda \cup \Lambda'))^0)$. Ввиду условия (4.1) по аппроксимационной теореме 2 найдется целая функция экспоненциального типа $G \not\equiv 0$, $G(0) = L(0) = 1$, с индикатором роста $h_G = h_L$ и с последовательностью нулей

$$\text{Zero}_G = (\text{Zero}_L \setminus \Lambda) \cup \Gamma \supset (\Lambda_0 \setminus \Lambda) \cup \Gamma = (\Lambda' \Delta \Gamma') \cup \Gamma \supset \Gamma \cup \Gamma', \quad (5.4)$$

и при этом выполнены все свойства последовательности целых функций экспоненциального типа (4.2) из заключения аппроксимационной теоремы 2.

² В теории выпуклых множеств множество B^d называют также *множеством*, *параллельным множеству B на расстоянии d* [19; гл. I, § 4].

Равенство индикаторов роста $h_G = h_L$ вместе с (5.4) означает, что функционал $\mathcal{G} \in H^*(D) \subset H^*$ с характеристической функцией G аннулирует систему экспонент $\text{Exp}_{\Gamma \cup \Gamma'}$, а значит, и подпространство $\langle \text{Exp}_{\Gamma \cup \Gamma'} \rangle = W(\Gamma \cup \Gamma')$. Таким образом, $G \in T((W(\Gamma \cup \Gamma'))^0)$.

Введем в рассмотрение многочлены

$$l_n(z) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right), \quad g_n(z) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{\gamma_k}\right), \quad l_n(0) = g_n(0) = 1.$$

В этих обозначениях последовательность (4.2) есть последовательность $g_n L - l_n G$. По аппроксимационной теореме 2 некоторая подпоследовательность $\{M_{n_k}\}$ последовательности функций $M_n = g_n L - l_n G$ стремится к тождественному нулю равномерно на компактах из $\mathbb{C}$ и для этой подпоследовательности выполнены равномерные по k оценки (4.3). Из неравенства $h_L < K_{D^*}$ согласно (5.2) и (5.3) следует $h_L + d < K_{D^*} + d = K_{(D^d)^*}$, где $D^d - d$ -вздутие выпуклой области. По описанию сходимости последовательностей в пространствах типа P последние два предложения означают, что подпоследовательность $\{M_{n_k}\}$ сходится к тождественному нулю в пространстве $P_{(D^d)^*}$. Тем более она сходится к нулю в пространстве P , поскольку по определению числа $d = \text{dist}(D, \partial\Omega)$ имеет место включение $D^d \subset \Omega$. Таким образом, последовательность функций $M_{n_k} = g_{n_k} L - l_{n_k} G$, $k = 1, 2, \dots$, $L(0) = G(0) = l_{n_k}(0) = g_{n_k}(0) = 1$, стремится к нулю в P . Отсюда по предложению 5.2 пересечение $W(\Lambda \cup \Lambda') \cap W(\Gamma \cup \Gamma')$ допускает спектральный синтез на Ω .

Заключительное замечание об усилении условия (4.1) является очевидным следствием неравенств (3.12) предложения 3.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ. Согласно оценке (3.16) предложения 3.5 условие (1.4) основной теоремы влечет условие (4.1) теоремы 3, из которой сразу следует основная теорема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ. В силу условия (1.4) ряд (2.5) сходится. В качестве требуемой функции G по теореме 1 можно выбрать предел в P канонической последовательности функций, сдвигающей подпоследовательность нулей $\Lambda \subset \text{Zero}_L$ в последовательность Γ .

Пусть $\mathcal{L}$ и $\mathcal{G}$ – функционалы с характеристическими функциями L и G соответственно. Оба эти функционала принадлежат $H^*(D)$, поскольку $h_G = h_L < K_{D^*}$. Каждое из пространств $W_{\mathcal{L}}$ и $W_{\mathcal{G}}$ решений однородных уравнений свертки $\mathcal{L} * f = 0$ и $\mathcal{G} * f = 0$ соответственно допускает спектральный синтез, и спектры их соответственно $\text{Zero}_L = \Lambda \cup \text{Spec } W$ и $\text{Zero}_G = \Gamma \cup \text{Spec } W$. Следовательно,

$$W_{\mathcal{L}} = W(\Lambda \cup \text{Spec } W), \quad W_{\mathcal{G}} = W(\Gamma \cup \text{Spec } W).$$

Отсюда имеет место равенство

$$W(\Lambda \cup \text{Spec } W) \cap W(\Gamma \cup \text{Spec } W) = W_{\mathcal{L}} \cap W_{\mathcal{G}}, \quad (5.5)$$

где правая часть – пространство решений системы (1.5). Применяя основную теорему при $\Lambda' = \Gamma' = \text{Spec } W$, убеждаемся, что инвариантное подпространство в левой части (5.5) допускает спектральный синтез. Его спектр совпадает с пересечением $(\Lambda \cup \text{Spec } W) \cap (\Gamma \cup \text{Spec } W) = \text{Spec } W$, поскольку последовательности Λ и Γ

не пересекаются. Два допускающих спектральный синтез инвариантных подпространства с одинаковыми спектрами совпадают, значит, левая часть в (5.5) – это в точности подпространство W .

ЗАМЕЧАНИЕ. Еще более заостряя формулировку следствия в отношении конструктивности, подчеркнем, что согласно его доказательству функция G строится по функции L в явном виде – как предел конкретной последовательности (2.4). Более того, можно выписать разложение Адамара для функции G , пользуясь разложением Адамара функции L (точное выражение см. в [11; §1, п. 6, (1.37)]).

§ 6. Один пример

В этом параграфе для определенных выпуклых областей Ω строится пример последовательностей неединственности $\Lambda = \{\lambda_n\}$ и $\Gamma = \{\gamma_n\}$ для Ω , скорость сближения которых задается оценкой

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\sum_{k \geq n} |1/\lambda_k - 1/\gamma_k|)}{\ln \max_{k \leq n} |\lambda_k|} \leq -a, \quad (6.1)$$

где $a > 0$ – некоторая постоянная, но пересечение $W(\Lambda) \cap W(\Gamma)$ уже не допускает спектральный синтез. Другими словами, в основной теореме в знаменателе дроби из правой части (1.4) нельзя заменить величину $\max_{k \leq n} |\lambda_k|$ на ее логарифм, если постоянная a в (6.1) мала. В частности, только сходимости ряда (2.5) уже недостаточно для справедливости основной теоремы.

Рис. 1. К построению примера

Пусть Ω – выпуклая область (см. рис. 1), содержащая замкнутый квадрат

$$\bar{T}_1 = [-1, 1] \times [-i, i] \subset \Omega, \quad \pm 2, \pm 2i \notin \Omega. \quad (6.2)$$

Введем в рассмотрение две целые функции экспоненциального типа и вполне регулярного роста:

$$L(z) = 4i \cos z \sin iz, \quad G(z) = 4i \cos iz \sin z \quad (6.3)$$

с последовательностями нулей соответственно

$$\text{Zero}_L = \Lambda = \Lambda_r \cup \Lambda_i, \quad \text{Zero}_G = \Gamma = \Gamma_r \cup \Gamma_i, \quad (6.4)$$

где

$$\Lambda_r = \{\lambda_n^{(r)}\} = \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n \right\}, \quad \Lambda_i = \{\lambda_k^{(i)}\} = \{\pi k i\}, \quad (6.5L)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_r = \{\gamma_n^{(r)}\} &= \{\pi n\}, & \Gamma_i = \{\gamma_k^{(i)}\} &= \left\{ \frac{\pi i}{2} + \pi k i \right\}, \\ n &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, & k &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (6.5G)$$

Положим при $N \geq 1$

$$R_N^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geq N} \left| \frac{1}{\lambda_n^{(r)}} - \frac{1}{\gamma_n^{(r)}} \right| = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \geq N} \frac{1}{|1/2 + n| |n|}.$$

Тогда из первого столбца в (6.5L), (6.5G) получаем³

$$\ln R_N^{(r)} \sim \ln \sum_{n \geq N} \frac{1}{n^2} \sim -\ln N, \quad N \rightarrow \infty. \quad (6.6)$$

Аналогично из второго столбца в (6.5L), (6.5G) получаем

$$\ln R_N^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \ln \sum_{k \geq N} \left| \frac{1}{\lambda_k^{(i)}} - \frac{1}{\gamma_k^{(i)}} \right| \sim -\ln N, \quad N \rightarrow \infty. \quad (6.7)$$

При этом

$$\ln T_N \stackrel{\text{def}}{=} \ln \max \left\{ \max_{n \leq N} |\lambda_n^{(r)}|, \max_{k \leq N} |\lambda_k^{(i)}| \right\} \sim \ln N, \quad N \rightarrow \infty.$$

Отсюда и из (6.6), (6.7) следует соотношение

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln(R_N^{(r)} + R_N^{(i)})}{T_N} = -1.$$

Последнее означает, что последовательности Λ и Γ из (6.4) можно перенумеровать так, что выполнено соотношение (6.1) с постоянной $a = 1$.

По закону сложения индикаторных (сопряженных) диаграмм функций вполне регулярного роста сопряженные диаграммы функций L и G совпадают с квадратом $\bar{T}_1$, определенным в (6.2), т.е. содержатся в Ω . Следовательно, L и G — характеристические функции двух функционалов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{G}$ из $H^*(\Omega)$ соответственно, которые согласно представлению функций $\sin$ и $\cos$ через функцию $\exp$ и по определению характеристических функций (0.3) действуют при свертке (0.2) по правилу

$$(\mathcal{L} * f)(h) \equiv f(-1 + i + h) + f(-1 - i + h) - f(1 + i + h) - f(1 - i + h), \quad (6.8L)$$

$$(\mathcal{G} * f)(h) \equiv f(-1 + i + h) + f(1 + i + h) - f(-1 - i + h) - f(1 - i + h), \quad (6.8G)$$

³Как обычно, $A_N \sim B_N$, $N \rightarrow \infty$, означает, что $\lim_{N \rightarrow \infty} A_N/B_N = 1$.

когда h пробегает геометрическую разность $\Omega \ominus \bar{I}_1$ области Ω и квадрата $\bar{I}_1$ из (6.2). Инвариантное пространство решений

$$W = W_{\mathcal{L}} \cap W_{\mathcal{G}} = W(\Lambda) \cap W(\Gamma) \quad (6.9)$$

системы двух однородных уравнений свертки (1.5), составленной из сверток (6.8L), (6.8G), согласно (6.4), (6.5) имеет спектр $\text{Spec } W = \Lambda \cap \Gamma = \{0\}$, т.е. инвариантное подпространство содержит единственную экспоненту $e^{0 \cdot z} \equiv 1$. Очевидно, $W(\{0\})$ совпадает с подпространством всех постоянных функций. Покажем, что подпространство W содержит и непостоянные функции. Это и будет означать, что $W \neq W(\{0\})$, т.е. пересечение (6.9) допускающих спектральный синтез инвариантных подпространств не допускает спектральный синтез, что и планировалось.

Рассматривая сумму и разность сверток (6.8L), (6.8G), приходим к выводу, что система (1.5) эквивалентна системе уравнений свертки (в данном случае разностных уравнений)

$$\begin{cases} f(-1+i+h) - f(1-i+h) \equiv 0, \\ f(-1-i+h) - f(1+i+h) \equiv 0, \end{cases} \quad h \in \Omega \ominus \bar{I}_1, \quad (6.10)$$

т.е. W совпадает с пространством решений системы (6.10). Любая двоякопериодическая мероморфная функция с двумя периодами $2 \pm 2i$, голоморфная в открытом квадрате $I_2 = (-2, 2) \times (-2i, 2i)$, содержащем согласно второму условию в (6.2) область Ω , удовлетворяет системе (6.10), т.е. принадлежит W . Но среди таких функций есть и непостоянные (см. [21; гл. VII, § 4]).

ЗАМЕЧАНИЕ. Построенный пример подсказывает возможное направление усиления основной теоремы. Выскажем гипотезу, что в основной теореме условие (1.4) можно заменить на условие вида (6.1), где постоянная $a > 0$ определенным образом связана с геометрическими характеристиками областей D и Ω из основной теоремы. В [22] автором был анонсирован несколько более слабый результат, а именно: если Λ – последовательность неединственности для выпуклой области Ω , то при условии

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \sum_{k \geq n} |1 - \lambda_k / \gamma_k|}{\ln \max_{k \leq n} |\lambda_k|} = -\infty$$

пересечение $W(\Lambda) \cap W(\Gamma)$ допускает спектральный синтез. Но позже выяснилось, что первоначальное доказательство этого утверждения, к сожалению, было ошибочным. К счастью, оно нигде не публиковалось. Таким образом, высказанная выше гипотеза пока не подтвердилась и в такой более слабой форме.

Список литературы

1. Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях // Матем. сб. 1972. Т. 87(129). № 4. С. 459–489.
2. Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный синтез на выпуклых областях // Матем. сб. 1972. Т. 88(130). № 1. С. 3–30.
3. Леонтьев А. Ф. О суммировании ряда Дирихле с комплексными показателями и его применении // Труды МИАН. 1971. Т. 112. С. 300–326.

4. *Леонтьев А. Ф.* Последовательности полиномов из экспонент. М.: Наука, 1980.
5. *Красичков-Терновский И. Ф.* Инвариантные подпространства аналитических функций. III. О распространении спектрального синтеза // Матем. сб. 1972. Т. 88(130). № 3. С. 331–352.
6. *Абузярова Н. Ф.* Об одном свойстве подпространств, допускающих спектральный синтез // Матем. сб. 1999. Т. 190. № 4. С. 3–22.
7. *Абузярова Н. Ф.* Конечно порожденные подмодули в модулях целых функций, определяемых ограничениями на индикатор // Дис. . . . канд. физ.-матем. наук. Уфа: Ин-т математики УНЦ РАН, 2000.
8. *Хабидуллин Б. Н.* Замкнутые идеалы и подмодули голоморфных функций с двумя порождающими // Геометрическая теория функций и краевые задачи. Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 13. Казань: Казанское матем. об-во, 2002. С. 158–163.
9. *Хабидуллин Б. Н.* Замкнутые подмодули голоморфных функций, порожденные подмодулями, допускающими локальное описание // Геометрическая теория функций и краевые задачи. Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 14. Казань: Казанское матем. об-во, 2002. С. 280–298.
10. *Хабидуллин Б. Н.* Замкнутые подмодули голоморфных функций с двумя порождающими // Функц. анализ и его прилож. 2004. Т. 38. № 1. С. 65–80.
11. *Хабидуллин Б. Н.* Аппроксимационная теорема для целых функций экспоненциального типа и устойчивость нуль-последовательностей // Матем. сб. 2004. Т. 195. № 1. С. 143–156.
12. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М.: Физматгиз, 1956.
13. *Levin B. Ya.* Lectures on entire functions. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996. (Transl. Math. Monogr. V. 150.)
14. *Хабидуллин Б. Н.* О росте целых функций экспоненциального типа вдоль мнимой оси // Матем. сб. 1989. Т. 180. № 5. С. 706–719.
15. *Хабидуллин Б. Н.* Множества единственности в пространствах целых функций одной переменной // Изв. АН СССР. 1991. Т. 55. № 5. С. 1101–1123.
16. *Khabibullin B. N.* Completeness of sets of complex exponentials in convex sets // Труды Международной конференции “Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы”. III. Анализ и дифференциальные уравнения. Уфа: Ин-т математики с ВЦ РАН, 2000. С. 56–63.
17. *Абузярова Н. Ф.* Конечно порожденные подмодули в модуле целых функций, определяемом ограничениями на индикатор // Матем. заметки. 2002. Т. 71. № 4. С. 3–17.
18. *Мандельброт С.* Ряды Дирихле. Принципы и методы. М.: Мир, 1973.
19. *Сантало Л.* Интегральная геометрия и геометрические вероятности. М.: Наука, 1983.
20. *Титчмарш Е.* Теория функций. М.: Наука, 1980.
21. *Лаврентьев М. Л., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
22. *Khabibullin B. N.* Spectral synthesis for the intersection of invariant subspaces of holomorphic functions // International conference on complex analysis and potential theory: Abstracts. Kiev: Institute of Mathematics of the National Academy of Ukraine, 2001. P. 24–25.

Башкирский государственный университет,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа
E-mail: khabib-bulat@mail.ru

Поступила в редакцию
17.06.2003 и 23.12.2004