Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Штерн, Топологические группы с конечными групповыми алгебрами фон Неймана типа I, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 3, 143–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1279>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 18:10:51

УДК 512.546+517.987

А. И. Штерн

Топологические группы с конечными групповыми алгебрами фон Неймана типа I

Получено полное описание всех топологических групп, допускающих разделяющее семейство непрерывных неприводимых конечномерных унитарных представлений, размерности которых ограничены в совокупности. Аналогичное описание получено и для формально более широкого класса всех унитарно представимых топологических групп, алгебра фон Неймана которых является суммой однородных слагаемых конечных и ограниченных в совокупности степеней. Получен ряд родственных результатов, в частности, описание всех локально ограниченных топологических групп, все неприводимые унитарные представления которых конечномерны.

Библиография: 74 названия.

§ 1. Введение

Изучение локально компактных групп, все неприводимые унитарные представления которых конечномерны, начал Капланский в 1950 г., статья [1] которого была несомненной поддержкой молодому, только что созданному журналу “Proceedings of the American Mathematical Society”. Там было доказано, что все неприводимые унитарные представления данной локально компактной группы конечномерны и имеют ограниченные в совокупности размерности тогда и только тогда, когда групповая алгебра этой локально компактной группы удовлетворяет некоторому “матричному” (полиномиальному) тождеству. С точки зрения тождеств эту проблему позже изучал Амицур [2], который описал (дискретные) группы, все неприводимые представления которых имеют размерности, не превосходящие 2.

Существенный успех был достигнут Айзексом и Пассманом [3] в 1964 г. Используя родство рассматриваемой задачи с классической теоремой Жордана (дающей оценку индекса абелева нормального делителя в *конечной группе* по размерности точного представления группы), они доказали, в частности, что если группа G дискретна, образ групповой алгебры в каждом неприводимом комплексном представлении группы G конечномерен над централизатором этого образа и размерность каждого неприводимого представления конечна, то группа G является конечным расширением коммутативной группы. Следующий чрезвычайно важный и трудный шаг был осуществлен Тома в [4], [5], где было доказано, что дискретная группа принадлежит типу I (т.е. любое унитарное представление этой группы

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00574) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-619.2003.1).

порождает алгебру фон Неймана типа I [6]) тогда и только тогда, когда эта группа является конечным расширением коммутативной группы, т.е. содержит коммутативный нормальный делитель конечного индекса. На основе этих достижений К. Мур [7] получил полную характеристику локально компактных групп, размерности неприводимых представлений которых ограничены в совокупности. В той же статье Мур получил полную характеристику более общего класса локально компактных групп, а именно локально компактных групп, все неприводимые непрерывные унитарные представления которых конечномерны. Этот класс получил название [Moore] или [FIR]¹. Независимо и несколько позже автор настоящей статьи получил другую характеристику этого класса [8], которая окажется полезной ниже. Близкие классы групп – группы с условиями компактности – интенсивно изучались в семидесятые годы (см., например, [9], [10]). Некоторые итоги этого этапа изучения были подведены в статье Палмера [11]² и книге Пассмана [12], в которой цитированный выше результат Айзекса–Пассмана был распространен на случай любого поля характеристики нуль [12; следствие 5.3.8].

В дальнейшем эти результаты неоднократно успешно применялись при изучении структуры C^* -алгебр групп с конечномерными неприводимыми представлениями и геометрических свойств групповых алгебр локально компактных групп. Забытые результаты Эрнста [13], [14] (ученика Фелла) были заново получены другими авторами и включены в развитую картину, основанную на свойствах алгебр Фурье и Фурье–Стилтьеса (локально компактных групп), введенных Эймаром [15] еще в 1964 г. Связь между топологическими и алгебраическими свойствами локально компактных групп и геометрией групповых алгебр, включая алгебру мер, изучалась в десятках работ. Некоторые из них мы непосредственно используем ниже. В связи с новыми результатами по теории банаховых пространств с определяемыми ниже свойствами Данфорда–Петтиса, Радона–Никодима и Асплунда [16]–[20] мы цитируем работы, в которых изучаются и упомянутые выше и некоторые другие геометрические свойства банаховых пространств для различных групповых алгебр локально компактных групп [16], [21]–[31]. Кроме того, в это же время результаты Мура о локально компактных группах, размерности неприводимых представлений которых ограничены в совокупности, были упрощены и распространены на случай однородных пространств локально компактных групп [32], [33], а Пассман [34] указал своему ученику на возможность изучения аналогичной задачи в чисто алгебраической ситуации, продуктивность которой была проверена еще в их совместной статье с Айзексом.³

С другой стороны, в последнее время интенсивно разрабатывается теория бо-

¹FIR = finite-dimensional irreducible representations.

²В [11] имеется информация о локально компактных группах, имеющих фундаментальную систему окрестностей единичного элемента, инвариантных относительно внутренних автоморфизмов, группах с предкомпактными классами сопряженных элементов, группах полиномиального роста, группах типа I, группах с T_1 -пространством примитивных идеалов, группах с вполне симметричными групповыми алгебрами и т.д. Большой известностью пользуются соответствующие диаграммы.

³В частности, в [34] показано, что если K – поле характеристики нуль, G – такая дискретная группа, что все неприводимые KG -модули над групповой алгеброй KG конечномерны, и конечно порожденные подгруппы в G являются конечными расширениями коммутативных групп, то и вся группа G является конечным расширением коммутативной группы.

лее общих топологических групп, как метризуемых, так и не обязательно метризуемых, в особенности псевдокомпактных, локально псевдокомпактных, (вполне) ограниченных и локально ограниченных групп [35]–[45]. Особое внимание уделяется при этом топологическим свойствам боровской компактификации – как для (не обязательно локально компактных) коммутативных групп [41], так и для (локально компактных) групп Мура [42]. Тем самым, с одной стороны, решенные в классе локально компактных групп задачи, – в частности, связанные с характеристиками различных классов топологических групп, все неприводимые унитарные представления которых конечномерны, – своевременно пытаются решать за пределами этого класса. Но, с другой стороны, с точки зрения теории представлений при такой постановке задачи мы оказываемся за пределами применимости теоремы Гельфанда–Райкова и актуальными становятся вопросы представимости, т.е. наличия семейства представлений того или иного класса, разделяющих точки группы. В этом направлении есть как положительные результаты (например в [46] доказано, что топологическая группа представима (имеет достаточно много представлений) в рефлексивных банаховых пространствах тогда и только тогда, когда она допускает гомоморфное непрерывное вложение в компактную полугруппу; доказательство существенно использует результаты статьи [47]), так и отрицательные (в [48]–[50] построены примеры коммутативных топологических групп (так называемых *сильно экзотических*), не допускающих нетривиальных непрерывных представлений в гильбертовом пространстве). По этой причине во всех ситуациях, не допускающих вовлечения техники локально компактных групп, следует иметь в виду существенность условия представимости группы при изучении ее средствами теории представлений.

В настоящей работе введены некоторые групповые алгебры для общих топологических групп, аналогичные известным алгебрам для локально компактных групп. С их помощью получено полное описание всех представимых топологических групп, все неприводимые унитарные представления которых конечномерны и размерности этих представлений ограничены в совокупности. Кроме того, получено описание всех локально ограниченных топологических групп, все неприводимые унитарные представления которых конечномерны.

Изложение ведется следующим образом. В §2 мы обсуждаем условия существования достаточно большого семейства конечномерных унитарных представлений данной топологической группы. В §3 мы сравниваем условия продолжения по непрерывности с образа соответствующего вложения группы в ее боровский компакт для непрерывных представлений в гильбертовых пространствах и для непрерывных функций. В §4 мы вводим аналоги некоторых групповых алгебр топологических групп и обсуждаем их общие свойства. В §5 напоминаются необходимые геометрические понятия, используемые в характеристиках §§6 и 7. В §6 дается описание представимых топологических групп, размерности неприводимых конечномерных представлений которых ограничены. В §7 определяется семейство локально ограниченных топологических групп, все неприводимые унитарные представления которых конечномерны. Некоторые заключительные замечания высказаны в §8.

Не все определения и обозначения введены явно. Понятия, относящиеся к операторным алгебрам, можно найти в [6], [51], к теории представлений групп – в [52], [53], к общей топологии – в [54], к нормированным линейным пространствам –

в [55], [56], к топологическим векторным пространствам и интегрированию – в [57], [58], к общему гармоническому анализу, теории алгебр Фурье и Фурье–Стилтьеса локально компактных групп и теории инвариантных средних – в [15], [59]–[61], к теории топологических групп – в [35]–[45], [62]–[64], и к теории двойственности для некоммутативных локально компактных групп и алгебр Каца – в [65].

§ 2. Унитарная представимость рефлексивно представимых групп

Знаменитая теорема Гельфанда–Райкова [66] утверждает, что любая локально компактная группа имеет достаточно много непрерывных унитарных представлений (или, что эквивалентно, имеет точное непрерывное унитарное представление). С другой стороны, из теоремы Петера–Вейля следует, что топологическая группа имеет достаточно много конечномерных непрерывных унитарных представлений тогда и только тогда, когда она допускает непрерывное вложение в компактную группу [6; § 19]; такие группы называются [МАР] группами. Критерий (непрерывной) унитарной представимости топологических групп неизвестен автору, но есть критерий представимости топологических групп изометрическими операторами в рефлексивных банаховых пространствах ([46], см. также [67]).

ТЕОРЕМА 1. *Пусть G – топологическая группа. Следующие условия равносильны:*

- (1) *группа G имеет достаточно много (слабо непрерывных) изометрических представлений в рефлексивных банаховых пространствах;*
- (2) *группа G допускает непрерывное гомоморфное вложение в компактную полугруппу с отдельно непрерывным умножением;*
- (3) *алгебра непрерывных слабо почти периодических функций на G разделяет точки группы G .*

Замыкание образа изометрического представления любой топологической группы в конечномерном банаховом пространстве является компактной группой. Следовательно, пространство допускает эквивалентную евклидову норму, в которой представление унитарно. Отсюда непосредственно получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть G – топологическая группа. Следующие условия равносильны:*

- (4) *G – [МАР] группа, т. е. G имеет достаточно много непрерывных унитарных представлений в конечномерных гильбертовых пространствах;*
- (5) *группа G допускает непрерывное гомоморфное вложение в компактную полугруппу с умножением, непрерывным по совокупности переменных.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если G – [МАР] группа, то G допускает вложение в компактную группу (с умножением, непрерывным по совокупности переменных), так что (4) $\Rightarrow$ (5). Обратно, пусть выполнено условие (5) и пусть $G \subset S$, где S – компактная полугруппа с умножением, непрерывным по совокупности переменных. Тогда семейство $C(S)$ непрерывных функций на S разделяет точки G . Кроме того, каждая функция $f \in C(S)$ почти периодична на S ввиду [68; теорема 5.1], поэтому

почти периодична на G и тем самым семейство почти периодических функций на G разделяет точки G . Следовательно, G — [МАР] группа.

Напомним, что есть примеры коммутативных топологических групп (так называемых *сильно экзотических*), не допускающих нетривиальных непрерывных представлений в гильбертовом пространстве [48]–[50]. Более того, каждое бесконечномерное нормированное пространство содержит дискретную подгруппу, факторгруппа по которой не допускает нетривиальных слабо непрерывных представлений в гильбертовом пространстве [48], [49]. В частности, все слабо почти периодические функции на таких факторгруппах постоянны.

§ 3. Продолжение представлений и непрерывных функций

Пусть G — [МАР] группа. Пусть K — ее *боровская компактификация*, известная также под названием *компактной группы, связанной с G* . Пусть G^+ — образ группы G при каноническом вложении группы G в K [19; теорема 16.1.2]. Напомним, что топологическая группа называется (*вполне*) *ограниченной*, если она изоморфна как топологическая группа некоторой подгруппе компактной группы [39]. В частности, группа G^+ всегда вполне ограничена. Аналогично, топологическая группа называется *локально ограниченной*, если она изоморфна как топологическая группа некоторой подгруппе локально компактной группы (определения ограниченной и локально ограниченной функции, принятые здесь, эквивалентны общепринятым [39]). В следующем известном утверждении мы оформляем результат сравнения условий существования непрерывного продолжения для представлений и вещественных функций.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть L — локально компактная группа, G — плотная в ней подгруппа. Любое непрерывное унитарное представление группы G имеет (единственное) непрерывное продолжение до непрерывного унитарного представления группы K . Любая (ограниченная) вещественная функция на G имеет продолжение до непрерывной вещественной функции на K тогда и только тогда, когда группа G локально псевдокомпактна.⁴*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G — топологическая группа, π — (сильно или слабо) непрерывное унитарное представление в гильбертовом пространстве E . Из формулы

$$\|\pi(g)\xi - \pi(h)\xi\| \leq \|\pi(h^{-1}g)\xi - \xi\|, \quad h, g \in G, \quad \xi \in G,$$

следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность U единичного элемента e в G , удовлетворяющая условию

$$\|\pi(g)\xi - \pi(h)\xi\| < \varepsilon \quad \text{для любых таких } g, h \in G, \quad \text{что } g \in hU,$$

а это — условие равномерной непрерывности. Поэтому первое утверждение является непосредственным следствием общей теоремы о продолжении равномерно непрерывного отображения со значениями в полном пространстве на пополнение равномерного пространства [54]. Второе утверждение составляет содержание теоремы 3.2 в [39].

⁴По этой причине утверждение 2.13 в [36], где (со ссылкой на [39]) утверждается наличие непрерывного продолжения любой непрерывной функции на локально ограниченной группе до непрерывной функции на ее пополнении по Райкову, не может восприниматься буквально.

§ 4. Групповые алгебры топологических групп

В этом параграфе мы вводим для топологических групп аналоги некоторых хорошо известных групповых алгебр локально компактных групп.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть G – топологическая группа, π – ее (сильно или, что равносильно, слабо) непрерывное унитарное представление в гильбертовом пространстве $E = E_\pi$. Пусть $\mathcal{L}(E)$ – алгебра всех ограниченных линейных операторов в E . *Матричным элементом* представления π называется любая функция $u: G \rightarrow \mathbb{C}$ вида $u(g) = (\pi(g)\xi, \eta)$, $g \in G$, $\xi, \eta \in E$. *Алгеброй фон Неймана* $VN(\pi)$ представления π называется подалгебра фон Неймана $VN(\pi) \subset \mathcal{L}(E)$, порожденная семейством операторов представления π . Таким образом,

$$VN(\pi) = \{\pi(g) \mid g \in G\}'' ,$$

где

$$X' = \{a \mid a \in \mathcal{L}(E), ax = xa \text{ для любого } x \in X\}$$

(X' – “коммутант множества X ”).

Как известно [57; гл. 6, § 1], каждый слабо непрерывный линейный функционал на $VN(\pi)$ имеет вид

$$a \mapsto \sum_{i=1}^n (a\xi_i, \eta_i), \quad a \in VN(\pi),$$

для некоторых векторов $\xi_i, \eta_i \in E$, $i = 1, \dots, n$. Так как семейство линейных комбинаций операторов представления плотно в $VN(\pi)$ в слабой операторной топологии, то слабо непрерывный линейный функционал на $VN(\pi)$ определяется линейной комбинацией матричных элементов представления π . Снабдим семейство всех линейных комбинаций матричных элементов представления π нормой функционала (в пространстве, предвойственном к $VN(\pi)$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть G – топологическая группа, π – ее сильно непрерывное унитарное представление в гильбертовом пространстве $E = E_\pi$. Назовем *алгеброй Фурье–Стилтьеса* группы G семейство $B(G)$ всех матричных элементов всевозможных непрерывных унитарных представлений группы G , снабженных указанной выше нормой. Назовем *групповой алгеброй фон Неймана* $VN(G)$ группы G алгебру фон Неймана, порожденную семейством операторов представления, являющегося прямой суммой унитарных представлений, определяемых стандартной конструкцией представления по положительно определенной функции, для всевозможных непрерывных положительно определенных функций на G . Назовем *алгеброй Фурье представления* π группы G семейство $A_\pi(G)$, получаемое замыканием в пространстве $B(G)$ (по введенной выше норме) векторного пространства всех матричных элементов представления π группы G .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть G – топологическая группа. Алгебра Фурье–Стилтьеса группы G является банаховой алгеброй относительно обычного умножения функций и относительно введенной выше нормы. Это утверждение следует из стандартного рассмотрения тензорного произведения представлений и соответствующего тензорного произведения функционалов (напомним, что из построения семейства $B(G)$ следует, что любой слабо непрерывный линейный функционал на груп-

повой алгебре фон Неймана допускает представление в виде одного матричного элемента представления). Кроме того, очевидно, что группа G унитарно представима, т.е. семейство непрерывных унитарных представлений группы G разделяет точки группы G тогда и только тогда, когда алгебра Фурье–Стилтьеса $B(G)$ группы G разделяет точки группы.

Из определения непосредственно следует, что алгебра Фурье–Стилтьеса $B(G)$ естественно (изометрически) изоморфна пространству, преддвойственному к алгебре фон Неймана $VN(G)$, а алгебра Фурье $A_\pi(G)$ представления π группы G естественно (изометрически) изоморфна пространству, преддвойственному к алгебре фон Неймана $VN(\pi)$ представления π .

В случае локально компактной группы G введенная здесь алгебра $B(G)$ совпадает с общепринятой алгеброй Фурье–Стилтьеса, введенной Эймаром [15], а алгебра Фурье $A_\pi(G)$ представления π группы G совпадает с алгеброй, введенной Арсаком [21]. Если группа G локально компактна, то введенная здесь групповая алгебра фон Неймана $VN(G)$ совпадает с обертывающей алгеброй фон Неймана $(C^*(G))^{**}$ групповой C^* -алгебры $C^*(G)$ группы G .⁵

§ 5. Фрагментируемость и свойства Радона–Никодима, Крейна–Мильмана, Данфорда–Петтиса и Асплунда

Напомним некоторые определения геометрических свойств топологических и, в частности, банаховых пространств. Каждое из этих свойств допускает несколько (иногда несколько десятков) содержательных эквивалентных определений, и приведенное ниже определение необходимо только для того, чтобы придать приведенным в заголовке словосочетаниям стандартный смысл.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть T – топологическое пространство, d – некоторая метрика на T . Пространство T называется *фрагментируемым с помощью метрики d* , если любое подмножество пространства T содержит непустые относительно открытые подмножества сколь угодно малого диаметра относительно метрики d .

Пусть E – банахово пространство. Говорят, что пространство E имеет *свойство Радона–Никодима*, если для любого ограниченного множества $A \subset E$ существуют его подмножества вида $\{x \in A \mid f(x) > \sup f(A) - \varepsilon\}$, где $f \in E^*$ и $\varepsilon > 0$, имеющие сколь угодно малый диаметр. Говорят, что пространство E имеет *свойство Крейна–Мильмана*, если любое ограниченное замкнутое выпуклое подмножество в E есть замкнутая выпуклая оболочка множества своих крайних точек. Говорят, что пространство E имеет *свойство Данфорда–Петтиса*, если $f_n(x_n) \rightarrow 0$ для любой слабо стремящейся к нулю последовательности $\{x_n\}$ в E и любой слабо стремящейся к нулю последовательности $\{f_n\}$ в E^* . Говорят, что пространство E имеет *свойство Асплунда*, если любое сепарабельное подпространство в E имеет сепарабельное сопряженное пространство.

Известно (см., например, [20]), что следующие условия равносильны для любого банахова пространства E :

(6) E имеет свойство Асплунда;

⁵ Тем самым, алгебра $VN(G)$ совпадает с алгеброй, введенной Эрнстом в [13], [14] и на его докладе на международном конгрессе математиков в Москве в 1966 г. и многократно использованной в дальнейшем [30], [31] без ссылок на Эрнста.

- (7) единичный шар в E^* , рассматриваемый в слабой* топологии, фрагментируем относительно метрики, определяемой нормой;
- (8) E^* имеет свойство Крейна–Мильмана;
- (9) E^* имеет свойство Радона–Никодима.

Кроме того, известно (см. [25]), что следующие условия равносильны для любой алгебры фон Неймана B :

- (10) B имеет свойство Данфорда–Петтиса;
- (11) $B = \bigoplus_k B_k$, где B_k – алгебра фон Неймана типа I_{n_k} и $\sup_k n_k < \infty$.

Далее, известно (см. [23]), что следующие условия равносильны для любой алгебры фон Неймана B :

- (12) пространство B_* , предвойственное к рассматриваемой алгебре фон Неймана B , имеет свойство Данфорда–Петтиса;
- (13) B – конечная алгебра фон Неймана типа I.

Наконец, известно (см. [24]), что следующие условия равносильны для любой алгебры фон Неймана B :

- (14) пространство B_* , предвойственное к рассматриваемой алгебре фон Неймана B , имеет свойство Радона–Никодима;
- (15) B является прямой суммой факторов типа I.

Эти общие факты позволяют получить некоторые характеристики групп, все неприводимые непрерывные унитарные представления которых конечномерны, не предполагая локальной компактности группы (и тем самым усилить соответствующие результаты в [22], [26]).

ТЕОРЕМА 3. Пусть G – топологическая группа, семейство неприводимых непрерывных унитарных представлений которой разделяет точки группы G . Следующие условия (16), (17) равносильны:

- (16) все неприводимые непрерывные унитарные представления группы G конечномерны, и их размерности ограничены в совокупности;
- (17) алгебра фон Неймана $VN(G)$ группы G имеет свойство Данфорда–Петтиса.

Кроме того, следующие условия (18)–(20) равносильны:

- (18) любое непрерывное унитарное факторпредставление группы G кратно конечномерному неприводимому представлению этой группы;
- (19) алгебра Фурье–Стилтьеса $B(G)$ группы G имеет свойство Данфорда–Петтиса;
- (20) алгебра фон Неймана $VN(G)$ группы G – конечная алгебра фон Неймана типа I.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если некоторое семейство неприводимых представлений алгебры фон Неймана (рассматриваемой как C^* -алгебра) разделяет точки этой алгебры фон Неймана, причем все эти представления конечномерны и их размерности ограничены в совокупности, то эта алгебра фон Неймана удовлетворяет полиномиальному тождеству и поэтому не может иметь никаких неприводимых представлений (не обязательно нормальных) размерности, превосходящей верхнюю грань размерностей данного семейства [6; § 3.6]. В частности, данная алгебра

фон Неймана имеет тип I. Теперь эквивалентность $(16) \Leftrightarrow (17)$ следует из эквивалентности $(10) \Leftrightarrow (11)$.

Обсудим эквивалентности $(18) \Leftrightarrow (19) \Leftrightarrow (20)$. С одной стороны, из условия (18) непосредственно следует, что в каноническом разложении алгебры фон Неймана $VN(G)$ группы G нет ни непрерывных, ни чисто бесконечных слагаемых [69; 2.3.3], т.е. $VN(G)$ – конечная алгебра фон Неймана типа I, что доказывает импликацию $(18) \Rightarrow (20)$, а импликация $(18) \Rightarrow (19)$ следует из импликации $(13) \Rightarrow (12)$. С другой стороны, из условия (19) и импликации $(12) \Rightarrow (13)$ следует, что $VN(G)$ – конечная алгебра фон Неймана типа I и поэтому образ алгебры $VN(G)$ в любом ее нормальном представлении есть конечная алгебра фон Неймана типа I, так что $(20) \Rightarrow (18)$. Наконец, импликация $(19) \Rightarrow (20)$ следует из импликации $(12) \Rightarrow (13)$.

Аналогичные эквивалентности справедливы также для алгебры фон Неймана $VN(\pi)$ данного представления π и для алгебры Фурье $A_\pi(G)$ этого представления.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть G – топологическая группа, семейство унитарных представлений которой разделяет точки. Тогда следующие условия (21), (22) равносильны:

- (21) группа G допускает вложение в компактную группу, и любое непрерывное унитарное представление группы G определяется непрерывным унитарным представлением этой компактной группы;
- (22) алгебра Фурье–Стилтьеса $B(G)$ группы G одновременно имеет свойство Данфорда–Петтиса и свойство Радона–Никодима.

Действительно, согласно эквивалентностям $(12) \Leftrightarrow (13)$ и $(14) \Leftrightarrow (15)$ из (22) следует, что алгебра фон Неймана $VN(G)$ – прямая сумма конечномерных факторов типа I. Унитарная группа этой алгебры фон Неймана компактна, и по построению любое непрерывное циклическое представление алгебры фон Неймана $VN(G)$ (а тем самым и группы G) определяется прямым слагаемым этой прямой суммы и потому непрерывным представлением компактной унитарной группы K , что доказывает импликацию $(22) \Rightarrow (21)$.

Если выполнено (21), то $B(G)$ изоморфна $B(K)$ для компактной группы K , а тогда наличие свойств Данфорда–Петтиса и Радона–Никодима следует из [26; теорема 4.5].

§ 6. Представимые топологические группы с условиями конечномерности неприводимых представлений и их групповые алгебры

ТЕОРЕМА 4. Пусть G – топологическая группа, имеющая семейство неприводимых непрерывных унитарных представлений, разделяющее точки группы. Следующие условия равносильны:

- (23) все неприводимые непрерывные унитарные представления группы G конечномерны, и их размерности ограничены в совокупности;
- (24) в семействе всех неприводимых непрерывных унитарных представлений группы G имеется подкольцо представлений, разделяющее точки

группы, разложимых в конечные прямые суммы неприводимых представлений, и все неприводимые подпредставления представлений, входящих в подкольцо, конечномерны и их размерности ограничены в совокупности;

- (25) *группа G имеет коммутативный нормальный делитель конечного индекса, т.е. является конечным расширением коммутативной топологической группы, семейство непрерывных унитарных характеров которой разделяет точки группы G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (23) $\Rightarrow$ (24) очевидно.

Пусть выполнено условие (25), пусть A – коммутативный нормальный делитель в G , и пусть фактор-группа $G/A = K$ конечна. Тогда утверждение (25) $\Rightarrow$ (23) состоит из двух частей. Во-первых, нужно убедиться в унитарной представимости группы G . Этот факт доказывается построением представлений группы G , индуцированных непрерывными характерами коммутативной подгруппы A (эти индуцированные представления образуют подкольцо представлений согласно очевидному варианту теоремы II.4.7 в [53]). Во-вторых, нужно доказать, что размерность любого неприводимого представления группы G не превосходит индекса A в G . Это следует из теоремы Айзекса–Пассмана [3]. Предположим теперь, что выполнено условие (24). По теореме двойственности Крейна–Таннаки (современное изложение приведено в [65], [70]) подкольцо конечномерных представлений, упомянутое в условии (24), определяет компактную топологическую группу K , в которую группа G вкладывается с помощью (алгебраического и топологического) гомоморфизма группы G в K , причем элементы данного подкольца представлений образуют (по той же теореме двойственности) полное семейство неприводимых унитарных представлений группы K . Следовательно, размерности всех неприводимых представлений группы K ограничены в совокупности. По теореме Мура о локально компактных группах с представлениями ограниченной размерности [7] группа K является конечным расширением коммутативной группы или, что то же, допускает гомоморфизм на конечную группу с коммутативным ядром. Тогда те же свойства наследуются и подгруппой, являющейся образом группы G в K . Остается напомнить, что этот образ изоморфен группе G , что завершает доказательство утверждения (25), а поэтому и теоремы 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Приведем еще одно условие, равносильное условиям (23)–(25):

- (26) *группа G допускает непрерывное вложение в компактную полугруппу с раздельно непрерывным отображением, допускающую разделяющее семейство конечномерных представлений, размерности которых ограничены в совокупности.*

Действительно, образ группы в компактной полугруппе операторов в конечномерном пространстве является унитарной группой относительно некоторого скалярного произведения, поэтому (26) $\Rightarrow$ (23), а импликация (23) $\Rightarrow$ (26) очевидна.

Существуют группы, не имеющие непрерывных характеров, но имеющие точное непрерывное унитарное представление. Таковы, например, аддитивные группы вещественных топологических векторных пространств L^p с $p < 1$. Непрерывных характеров у них нет, что легко доказывается с помощью результата статьи [71].

С другой стороны, формула

$$f \mapsto T(f), \quad T(f)g = \exp(if)g, \quad f \in L^p, \quad g \in L^2,$$

определяет непрерывное представление (из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости следует, что если $f_n \rightarrow 0$ в L^p , то из любой подпоследовательности последовательности f_n можно выделить подпоследовательность, стремящуюся к нулю в слабой операторной топологии). Поэтому мы приведем вариант предыдущей теоремы, не требующий слишком многого от неприводимых представлений.

ТЕОРЕМА 5. Пусть G – топологическая группа, имеющая семейство непрерывных унитарных представлений, разделяющее точки группы. Следующие условия равносильны:

- (27) алгебра фон Неймана группы G является алгеброй фон Неймана типа I, и степени ее однородных компонент конечны и ограничены в совокупности;
- (28) алгебра фон Неймана группы G удовлетворяет полиномиальному тождеству [6; §3.6];
- (29) группа G имеет коммутативный нормальный делитель конечного индекса, т.е. является конечным расширением коммутативной топологической группы, семейство непрерывных унитарных представлений которой разделяет точки группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается объединением рассуждений в доказательствах теорем 3 и 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Сильно экзотические группы являются примерами групп, все непрерывные неприводимые унитарные представления которых одномерны.

§ 7. Локально ограниченные топологические группы, все неприводимые унитарные представления которых конечномерны

Описание групп этого класса основано на описании локально компактных групп, все неприводимые непрерывные унитарные представления которых конечномерны, полученном в [8].

ТЕОРЕМА 6. Пусть G – локально ограниченная топологическая группа. Следующие условия равносильны:

- (30) все неприводимые непрерывные унитарные представления группы G конечномерны;
- (31) для любых неприводимых непрерывных унитарных представлений группы G их тензорное произведение определяет представление групповой алгебры $L^1(K)$ пополнения Вейля K группы G вполне непрерывными операторами;
- (32) любая окрестность единичного элемента группы G содержит такой замкнутый нормальный делитель N , что некоторый нормальный делитель конечного индекса в G/N изоморфен плотной подгруппе W прямого произведения аддитивной группы конечномерного векторного пространства $\mathbb{R}^n$ и произведения связной компактной группы Ли L

и центральной дискретной группы D , т.е. $G/N \approx W$, $W \subset (D \cdot L) \times V$, $\overline{W} = (D \cdot L) \times V$. (В частности, G/N – плотная подгруппа (несвязной) группы Ли.)

Может случиться, что $D \cap L \neq \{e\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – локально ограниченная топологическая группа, удовлетворяющая условию (30). Согласно [45] локально ограниченную группу G можно рассматривать как плотную подгруппу некоторой локально компактной группы K – так называемого *пополнения Вейля* группы G , – и согласно теореме 2 любое непрерывное унитарное представление группы G имеет (единственное) непрерывное продолжение до непрерывного унитарного представления группы K (в том же гильбертовом пространстве). Тем самым, K – локально компактная топологическая группа, все неприводимые непрерывные унитарные представления которой конечномерны, и согласно основному результату статьи [8] условие (30) равносильно следующим двум условиям:

- (33) для любых неприводимых непрерывных унитарных представлений группы K их тензорное произведение определяет представление групповой алгебры $L^1(K)$ пополнения Вейля K группы G вполне непрерывными операторами;
- (34) локально компактная группа H является проективным пределом групп Ли, каждая из которых содержит такой замкнутый нормальный делитель N , что некоторый нормальный делитель конечного индекса в H/N изоморфен прямому произведению аддитивной группы $\mathbb{R}^n$ конечномерного векторного пространства и произведения связной компактной группы Ли и центральной дискретной группы.

Эти утверждения очевидным образом равносильны условиям (31) и (32) соответственно.

Более точный результат, чем условие (32), можно получить в предположении, что группа G локально псевдокомпактна.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть G – локально псевдокомпактная топологическая группа. Следующие условия равносильны:

- (30) все неприводимые непрерывные унитарные представления группы G конечномерны;
- (31) для любых неприводимых непрерывных унитарных представлений группы G их тензорное произведение определяет представление групповой алгебры $L^1(K)$ пополнения Вейля K группы G вполне непрерывными операторами;
- (35) любая окрестность единичного элемента группы G содержит такой замкнутый нормальный делитель N типа G_δ , что некоторый нормальный делитель конечного индекса в G/N изоморфен прямому произведению аддитивной группы конечномерного векторного пространства $\mathbb{R}^n$ и произведения связной компактной группы Ли L и центральной дискретной группы D , т.е. $G/N \approx (D \cdot L) \times \mathbb{R}^n$. (В частности, G/N – (несвязная) группа Ли.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве теоремы 5, обозначим через H пополнение Вейля группы G . Как мы видели выше, локально компактная группа H является проективным пределом групп Ли, каждая из которых содержит такой замкнутый нормальный делитель N , что некоторый нормальный делитель конечного индекса в H/N изоморфен прямому произведению аддитивной группы $\mathbb{R}^n$ конечномерного векторного пространства и произведения связной компактной группы Ли и центральной дискретной группы. Поскольку группы Ли метризуемы, то нормальный делитель M в H , факторгруппа по которому является группой Ли, есть замкнутый нормальный делитель типа G_δ и поэтому $M \cap G$ — псевдокомпактный нормальный делитель в G . Следовательно, факторгруппа $G/(M \cap G)$ локально компактна [38]. Таким образом, эта факторгруппа полна по Дьедонне [54; 8.5.13]. Согласно теореме 4.7 в [43] и теоремам 2.6 и 3.1 в [39] локально компактные факторгруппы $G/(M \cap G)$ и H/M естественно изоморфны, что и приводит к уточнению в условии (35) по сравнению с условием (34).

§ 8. Заключительные замечания

Приведем следующую теорему, обобщающую утверждение теоремы 16.4.6 в [6] и основное утверждение статьи [27]. В локально компактном случае большая часть утверждений в этой теореме известна по работам [11], [27], но некоторые импликации являются новыми даже в локально компактном случае.

Напомним, что топологическая группа называется *почти связной*, если ее факторгруппа по компоненте единицы компактна.

ТЕОРЕМА 7. Пусть G — локально псевдокомпактная группа с почти связным пополнением Вейля H (в частности, H почти связна, если факторгруппа группы G по ее компоненте единицы G_0 компактна). Следующие условия равносильны:

- (36) H — $[MAP]$ группа;
- (37) H — $[FIR]$ группа;
- (38) H — $[SIN]$ группа;
- (39) группа H допускает непрерывное гомоморфное вложение в $[SIN]$ группу;
- (40) группа H — конечное расширение прямого произведения компактной группы и аддитивной группы конечномерного вещественного векторного пространства $\mathbb{R}^n$;
- (41) группа H имеет достаточно много унитарных представлений, непрерывных в смысле нормы оператора;
- (42) группа H имеет достаточно много унитарных представлений конечного типа (I_n и Π_1);
- (43) H_0 — $[FIR]$ группа;
- (44) H_0 — $[SIN]$ группа;
- (45) H_0 — $[MAP]$ группа;
- (46) группа H_0 допускает непрерывное гомоморфное вложение в $[SIN]$ группу;
- (47) группа H_0 — прямое произведение связной компактной группы и аддитивной группы конечномерного вещественного векторного пространства $\mathbb{R}^n$;

- (48) группа H_0 имеет достаточно много унитарных представлений, непрерывных в смысле нормы оператора;
- (49) группа H_0 имеет достаточно много унитарных представлений конечного типа (I_n и Π_1);
- (50) G – $[SIN]$ группа;
- (51) G – $[FIR]$ группа;
- (52) G – конечное расширение прямого произведения псевдокомпактной группы и аддитивной группы конечномерного вещественного векторного пространства $\mathbb{R}^n$;
- (53) любое подмножество типа G_δ в G , содержащее единичный элемент, содержит псевдокомпактный нормальный делитель M в G , факторгруппа по которому G/M является почти связной локально компактной $[FIR]$ группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H – почти связная локально компактная группа.

Утверждения (36), (37), (38), (40), (41) и (42) попарно эквивалентны в силу следствия XII.1 в [72]. Утверждения (43), (44), (45), (47), (48) и (49) попарно эквивалентны в силу теоремы 16.4.6 в [6] (или того же следствия XII.1 в [72]). Очевидно, что условие (47) следует из условия (40). Согласно следствию X.3 в [72] условие (40) следует из условия (47). Очевидно, что $(38) \Rightarrow (39) \Rightarrow (46)$. Согласно основному результату статьи [27] $(46) \Rightarrow (44)$. Таким образом, все утверждения (36)–(49) попарно эквивалентны.

Так как группа G плотна в группе H , то $(50) \Leftrightarrow (38)$ и согласно теореме 2 непрерывные унитарные представления групп G и H находятся в естественном взаимно однозначном соответствии, определяемом ограничением представлений группы H на плотную в H подгруппу G , откуда $(51) \Leftrightarrow (37)$.

Докажем, что $(40) \Leftrightarrow (52)$. Действительно, утверждение $(52) \Leftrightarrow (40)$ очевидно. С другой стороны, если выполнено условие (40), то, рассматривая ограничение канонического гомоморфизма группы H на нормальный делитель конечного индекса на группу G , видим, что группа G допускает непрерывный гомоморфизм (с конечным образом), ядро которого автоматически локально псевдокомпактно и имеет пополнением произведение компактной группы и группы $\mathbb{R}^n$. Пересечения ядра с компонентами этого произведения являются образами локально псевдокомпактной группы при непрерывных гомоморфизмах и потому локально псевдокомпактны. Но локально псевдокомпактная подгруппа псевдокомпактной группы псевдокомпактна, а локально псевдокомпактная подгруппа метризуемой группы полна [39]. Итак, первый множитель псевдокомпактен, а второй совпадает с $\mathbb{R}^n$. Это завершает доказательство импликации $(46) \Rightarrow (42)$ и тем самым доказывает эквивалентность $(42) \Leftrightarrow (46)$.

Докажем теперь эквивалентность $(53) \Leftrightarrow (51)$.

Докажем импликацию $(53) \Rightarrow (51)$. Пусть ρ – неприводимое унитарное представление группы G . Обозначим той же буквой ρ представление группы H (в том же пространстве E), ограничение которого на G совпадает с ρ . По условию непрерывности представления ρ для любого вектора ξ в пространстве E представления ρ группы H существует такая окрестность U единичного элемента $e \in H$, что

$$\|\rho(g)\xi - \xi\| \leq \frac{1}{2} \quad (*)$$

для любого $g \in U$. Эта окрестность содержит компактный нормальный делитель N , факторгруппа по которому является группой Ли, и поэтому N — множество типа G_δ в H . Кроме того, интегрируя неравенство (*) по N , видим, что подпространство N -инвариантных векторов в E нетривиально и инвариантно относительно ρ , так что все векторы в E являются N -инвариантными, и неприводимое унитарное представление ρ группы H может рассматриваться как представление факторгруппы вида H/N . Пересечение $R = N \cap G$ является замкнутым нормальным делителем типа G_δ в G , и представление ρ тождественно на R . По предположению (53) R содержит замкнутый нормальный делитель M типа G_δ в G , факторгруппа по которому является [FIR] группой. Пусть P — замыкание M в H . Так как G/M является локально компактной группой [38], то она полна по Дьедонне [54]. Согласно теореме 4.7 в [43] и теоремам 2.6 и 3.1 в [39] локально компактные факторгруппы G/M и H/P естественно изоморфны, причем можно считать, что ρ — непрерывное неприводимое унитарное представление группы H/P , факторгруппой которой является H/N . Поэтому можно считать, что ρ — непрерывное неприводимое унитарное представление группы G/M . По условию всякое такое представление конечномерно. Так как любое непрерывное неприводимое унитарное представление группы G оказалось конечномерным, то G — [FIR] группа.

Докажем импликацию (51) $\Rightarrow$ (53). Любая факторгруппа [FIR] группы является [FIR] группой. Кроме того, поскольку группа G псевдокомпактна, то любое G_δ -множество в G , содержащее единичный элемент, содержит замкнутый нормальный делитель типа G_δ , причем факторгруппа локально псевдокомпактной группы по замкнутому нормальному делителю типа G_δ является локально компактной группой [38; замечания 2.13, 4.1]. Кроме того, любая факторгруппа локально компактной почти связной группы почти связна, а факторгруппа [FIR] группы есть [FIR] группа.

Остается доказать, что если факторгруппа группы G по ее компоненте единицы G_0 компактна, то H почти связна. Замыкание N группы G_0 в замыкании Вейля H группы G связно, так что $N \subset H_0$. Образ группы G при каноническом отображении группы H на H/N естественно топологически изоморфен G/G_0 , поскольку G_0 -насыщенные замкнутые множества в G являются пересечениями с G замыканий этих множеств в H , а эти замыкания являются N -насыщенными замкнутыми множествами в H . Следовательно, образ группы G при каноническом отображении группы H на H/N компактен. Так как $N \subset H_0$, то факторгруппа G/H_0 является факторгруппой образа группы G при каноническом отображении группы H на H/N и потому компактна, что завершает доказательство теоремы 7.

Если для данного унитарного представления топологической группы и любого единичного вектора гильбертова пространства представления существует окрестность, удовлетворяющая условию (*), то это представление непрерывно (см. [73], [74]).

Автор благодарен А. С. Мищенко за внимание к работе и участникам его семинара в МГУ за обсуждение результатов.

Список литературы

1. *Kaplansky I.* Groups with representations of bounded degree // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1950. V. 1. P. 449–463.

2. *Amitsur S. A.* Groups with representations of bounded degree. II // Illinois J. Math. 1961. V. 5. P. 198–205.
3. *Isaacs I. M., Passman D. S.* Groups with representations of bounded degree // Canad. J. Math. 1964. V. 16. P. 299–309.
4. *Thoma E.* Über unitäre Darstellungen abzählbarer, diskreter Gruppen // Math. Ann. 1964. V. 153. P. 111–138.
5. *Thoma E.* Eine Charakterisierung diskreter Gruppen vom Typ I // Invent. Math. 1968. V. 6. P. 190–196.
6. *Диксмье Ж.* C^* -алгебры и их представления. М.: Наука, 1974.
7. *Moore C. C.* Groups with finite dimensional irreducible representations // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 166. P. 401–410.
8. *Штерн А. И.* Локально бикомпактные группы с конечномерными неприводимыми представлениями // Матем. сб. 1973. Т. 90 (132). № 1. С. 86–93.
9. *Grosser S., Mosak R., Moskowitz M.* Duality and harmonic analysis on central topological groups. I // Nederl. Akad. Wet. Proc. Ser. A. 1973. V. 76. P. 65–77.
10. *Grosser S., Mosak R., Moskowitz M.* Duality and harmonic analysis on central topological groups. II // Nederl. Akad. Wet. Proc. Ser. A. 1973. V. 76. P. 78–91; *Grosser S., Mosak R., Moskowitz M.* Correction to: Duality and harmonic analysis on central topological groups // Nederl. Akad. Wet. Proc. Ser. A. 1973. V. 76. P. 375.
11. *Palmer T. W.* Classes of nonabelian, noncompact, locally compact groups // Rocky Mountain J. Math. 1978. V. 8. № 4. P. 683–741.
12. *Passman D. S.* The algebraic structure of group rings. New York: Wiley, 1977.
13. *Ernest J.* A new group algebra for locally compact groups // Amer. J. Math. 1964. V. 86. P. 467–492.
14. *Ernest J.* A new group algebra for locally compact groups. II // Canad. J. Math. 1965. V. 17. P. 604–615.
15. *Eymard R.* L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact // Bull. Soc. Math. France. 1964. V. 92. P. 181–236.
16. *Freedman W., Ülger A.* The Phillips properties // Proc. Amer. Math. Soc. 2000. V. 128. № 7. P. 2137–2145.
17. *Maynard H.* A geometric characterization of Banach spaces possessing the Radon–Nikodym property // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. V. 185. P. 493–500.
18. *Namioka I., Phelps R. R.* Banach spaces which are Asplund spaces // Duke Math. J. 1975. V. 42. № 4. P. 735–750.
19. *Stegall C.* The Radon–Nikodym property in conjugate Banach spaces. II // Trans. Amer. Math. Soc. 1981. V. 264. № 2. P. 507–519.
20. *Yost D.* Asplund spaces for beginners // Acta Univ. Carolin. Math. Phys. 1993. V. 34. № 2. P. 159–177.
21. *Arsac G.* Sur l'espace de Banach engendré par les coefficients d'une représentation unitaire // Publ. Dép. Math. (Lyon). 1976. V. 13. № 2. P. 1–101.
22. *Bélangier A., Forrest B. E.* Geometric properties of some subspaces of $VN(G)$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 122. № 1. P. 131–133; Geometric properties of coefficient function spaces determined by unitary representations of a locally compact group // J. Math. Anal. Appl. 1995. V. 193. № 2. P. 390–405.
23. *Bunce L. J.* The Dunford–Pettis property in the predual of a von Neumann algebra // Proc. Amer. Math. Soc. 1992. V. 116. № 1. P. 99–100.
24. *Chu C. H.* A note on scattered C^* -algebras and the Radon–Nikodym property // J. London Math. Soc. (2). 1981. V. 24. № 3. P. 533–536.
25. *Chu C. H., Iochum B., Watanabe S.* C^* -algebras with the Dunford–Pettis property // Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 1992. V. 136. P. 67–70.
26. *Lau A. T.-M., Ülger A.* Some geometric properties on the Fourier and Fourier–Stieltjes algebras of locally compact groups, Arens regularity and related problems // Trans. Amer. Math. Soc. 1993. V. 337. № 1. P. 321–359.
27. *Ordman E. T., Morris S. A.* Almost locally invariant topological groups // J. London Math. Soc. (2). 1974/75. V. 9. P. 30–34.

28. *Pahor M.* The structure of certain group C^* -algebras // Bull. Austral. Math. Soc. 1993. V. 47. №1. P. 169–174.
29. *Raeburn I.* On group C^* -algebras of bounded representation dimension // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. V. 272. №2. P. 629–644.
30. *Taylor K.* The type structure of the regular representation of a locally compact group // Math. Ann. 1976. V. 222. №2. P. 211–214.
31. *Taylor K.* Geometry of the Fourier algebras and locally compact groups with atomic representations // Math. Ann. 1983. V. 262. №2. P. 183–190.
32. *Schlichting G.* Polynomidentitäten und Darstellungen von Gruppen // Monatsh. Math. 1980. V. 90. №4. P. 311–313.
33. *Schlichting G.* Groups with representations of bounded degree. Berlin: Springer-Verlag, 1979. (Lecture Notes in Math. V. 706.)
34. *Passman D. S., Temple W. V.* Groups with all irreducible modules of finite degree // Algebra (Moscow, 1998). Berlin: de Gruyter, 2000. P. 263–279.
35. *Antonyan S., Sanchis M.* Extension of locally pseudocompact group actions // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 2002. V. 181. P. 239–246.
36. *Arhangel'skii A. V.* On a theorem of W. W. Comfort and K. A. Ross // Comment. Math. Univ. Carolin. 1999. V. 40. №1. P. 133–151.
37. *Arhangel'skii A. V.* Moscow spaces, Pestov–Tkačenko problem, and C -embeddings // Comment. Math. Univ. Carolin. 2000. V. 41. №3. P. 585–595.
38. *Comfort W. W., Soundararajan T., Trigos-Arrieta F. J.* Determining a weakly locally compact group topology by its system of closed subgroups // Papers in general topology and applications / ed. S. Andina et al. New York: New York Acad. Sci., 1994. P. 25–33. (Ann. New York Acad. Sci. V. 728.)
39. *Comfort W. W., Trigos-Arrieta F. J.* Locally pseudocompact topological groups // Topology Appl. 1995. V. 62. №3. P. 263–280.
40. *Dikranjan D., Shakhmatov D.* Algebraic structure of pseudocompact groups. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998. (Mem. Amer. Math. Soc. V. 633.)
41. *Hernandez S., Macario S.* Invariance of compactness for the Bohr topology // Topology Appl. 2001. V. 111. №1–2. P. 161–173.
42. *Remus D., Trigos-Arrieta F. J.* The Bohr topology of Moore groups // Topology Appl. 1999. V. 97. №1–2. P. 85–98.
43. *Sanchis M.* Continuous functions on locally pseudocompact groups // Topology Appl. 1998. V. 86. №1. P. 5–23.
44. *Ткаченко М. Г.* Об ограниченности и псевдокомпактности в топологических группах // Матем. заметки. 1987. Т. 41. №3. С. 400–405.
45. *Weil A.* Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale. Paris: Hermann, 1937.
46. *Shtern A. I.* Compact semitopological semigroups and reflexive representability of topological groups // Russian J. Math. Phys. 1994. V. 2. №1. P. 131–132.
47. *Davis W. J., Figiel T., Johnson W. B., Pelczynski A.* Factoring weakly compact operators // J. Funct. Anal. 1974. V. 17. P. 311–327.
48. *Banaszczyk W.* On the existence of exotic Banach–Lie groups // Math. Ann. 1983. V. 264. №4. P. 485–493.
49. *Banaszczyk W.* Additive subgroups of topological vector spaces. Berlin: Springer-Verlag 1991. (Lecture Notes in Math. V. 1466.)
50. *Herer W., Christensen J. P. R.* On the existence of pathological submeasures and the construction of exotic topological groups // Math. Ann. 1975. V. 213. P. 203–210.
51. *Dixmier J.* Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien. Paris: Gauthier-Villars, 1969.
52. *Gaal S. A.* Linear analysis and representation theory. New York: Springer-Verlag, 1973.
53. *Naimark M. A., Štern A. I. [Shtern]* Theory of group representations. New York: Springer-Verlag, 1982.
54. *Энгелькин Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.
55. *Day M.* Normed linear spaces. New York: Springer-Verlag, 1973.

56. Шефер Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971.
57. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Т. I. М.: ИЛ, 1962.
58. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: Мир, 1969.
59. Гринлиф Ф. Инвариантные средние на топологических группах и их приложения. М.: Мир, 1973.
60. Хьюитт Э., Росс К. А. Абстрактный гармонический анализ. Т. I. М.: Наука, 1975.
61. Вейль А. Интегрирование в топологических группах и его применения. М.: ИЛ, 1950.
62. Ellis R. Locally compact transformation groups // *Duke Math. J.* 1957. V. 24. P. 119–125.
63. Glicksberg I. Uniform boundedness for groups // *Canad. J. Math.* 1962. V. 14. P. 269–276.
64. Виленкин Н. Я. Примечания редактора // Интегрирование в топологических группах и его применения. М.: ИЛ, 1950. С. 167–211.
65. Enock M., Schwartz J.-M. Кac algebras and duality of locally compact groups. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
66. Гельфанд И. М., Райков Д. А. Неприводимые унитарные представления локально бикompактных групп // Матем. сб. 1943. Т. 13 (55). С. 301–316.
67. Shtern A. I. Representations of topological groups in locally convex spaces: continuity properties and weak almost periodicity // *Russian J. Math. Phys.* 2004. V. 11. № 1. P. 81–108.
68. de Leeuw K., Glicksberg I. Applications of almost periodic compactifications // *Acta Math.* 1961. V. 105. P. 63–97.
69. Sakai S. C^* -algebras and W^* -algebras. Berlin: Springer-Verlag, 1971.
70. Joyal A., Street R. An introduction to Tannaka duality and quantum groups // *Category theory* (Como, 1990). Berlin: Springer-Verlag, 1991. P. 413–492. (Lecture Notes in Math. V. 1488.)
71. Waterhouse W. C. Dual groups of vector spaces // *Pacific J. Math.* 1968. V. 26. № 1. P. 193–196.
72. Hofmann K. H., Mostert P. Splitting in topological groups. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1963. (Mem. Amer. Math. Soc. V. 43.)
73. Штерн А. И. Критерии слабой и сильной непрерывности представлений топологических групп в банаховых пространствах // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 9. С. 139–156.
74. Shtern A. I. Continuity of Banach representations in terms of point variations // *Russian J. Math. Phys.* 2002. V. 9. № 2. P. 250–252.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: ashtern@member.ams.org

Поступила в редакцию
28.02.2004