Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Кузьмин, Размерные подгруппы расширений с абелевым ядром, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 5, 65–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm128>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 14:52:57

УДК 512.04

Ю. В. Кузьмин

Размерные подгруппы расширений с абелевым ядром

Известно, что проблема размерных подгрупп решается положительно в классе групп, факторы нижнего центрального ряда которых не имеют кручения. В статье доказано, что то же самое верно для любого расширения группы этого класса с помощью абелевой группы.

Библиография: 19 названий.

1. Введение. Пусть G – некоторая группа, $\Delta = \Delta(G)$ – фундаментальный идеал ее группового кольца $\mathbb{Z}G$. Напомним, что n -я размерная подгруппа $D_n(G)$ определяется равенством

$$D_n(G) = \{g \in G \mid g = 1 \bmod \Delta^n\}.$$

Легко доказать, что $D_n(G)$ содержит n -ый член нижнего центрального ряда $\gamma_n(G)$. Существуют однако группы, для которых $D_n(G) \neq \gamma_n(G)$ [1], [2]. Задача описания подгрупп $D_n(G)$ и нахождения условий, при которых $D_n(G) = \gamma_n(G)$ известна как проблема размерных подгрупп. Если факторы нижнего центрального ряда группы G не имеют кручения, то для всех n $D_n(G) = \gamma_n(G)$. В неявном виде эта теорема содержится еще в работе А. И. Мальцева 1949 года [3, §2, п. 8]. Несколько позднее она была также доказана Дженнингсом [4] и Ф. Холлом [5]. Мы докажем следующее обобщение этого результата.

ТЕОРЕМА 1. *Если A – абелев нормальный делитель группы G такой, что факторы нижнего центрального ряда группы G/A не имеют кручения, то для всех n $D_n(G) = \gamma_n(G)$.*

Отметим, что если расширение

$$E: 1 \longrightarrow A \longrightarrow G \longrightarrow G/A \longrightarrow 1 \quad (1)$$

с абелевым ядром A расщепляется, то, как доказал Сандлингс [6], из равенства $D_n(G/A) = \gamma_n(G/A)$ следует равенство $D_n(G) = \gamma_n(G)$. Для произвольного расширения с абелевым ядром это неверно. Действительно, если это было бы так, то, факторизуя по $\gamma_n(G)$ и используя индукцию по ступени разрешимости, можно было бы доказать, что $D_n(G) = \gamma_n(G)$ для любой группы G .

2. Доказательство теоремы 1. Вместо теоремы 1 удобно доказывать более общий результат. Именно, пусть задано произвольное расширение E с абелевым ядром A , и пусть $\Delta_A = \Delta(A)$ – идеал группового кольца $\mathbb{Z}G$, порожденный элементами вида $a - 1$ ($a \in A$). Назовем n -ой размерной подгруппой расширения E подгруппу

$$D_n(E) = \{g \in G \mid g = 1 \bmod \Delta \Delta_A + \Delta^n\}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-01-00733) и INTAS (4373).

ТЕОРЕМА 2. *Если в расширении E с абелевым ядром A факторы нижнего центрального ряда группы G/A не имеют кручения, то для всех n $D_n(E) = \gamma_n(G)$.*

Так как $\gamma_n(G) \subseteq D_n(G) \subseteq D_n(E)$, теорема 1 следует из теоремы 2. Доказательство теоремы 2 проведем в три шага.

ШАГ 1. *Если в расширении (1) факторы нижнего центрального ряда группы G без кручения, то $D_n(E) = \gamma_n(G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Факторизуя по $\gamma_n(G)$, можно считать, что $\gamma_n(G) = 1$ и доказывать равенство $D_n(E) = 1$. Нильпотентная группа без кручения вкладывается в группу с однозначным извлечением корней – свое мальцевское пополнение. Класс нильпотентности при этом не меняется, а размерная подгруппа $D_n(E)$ может лишь увеличиться. По этой причине можно предполагать, что $\gamma_n(G) = 1$ и в G однозначно извлекаются корни. Факторы нижнего центрального ряда такой группы – векторные пространства над полем рациональных чисел. Образ $D_n(E)$ в G/A очевидно содержится в $D_n(G/A)$. Как следует из теоремы Мальцева–Дженнингса–Холла, $D_n(G/A) = 1$, поэтому $D_n(E) \subseteq A$. Надо доказать, что если $a \in A$ и $a - 1 \in \Delta\Delta_A + \Delta^n$, то $a = 1$. Мы сделаем это с помощью теоремы Квиллена.

Напомним, что произвольной группе G соответствует градуированное кольцо Ли $L(G)$, однородные компоненты которого изоморфны факторам $\gamma_k(G)/\gamma_{k+1}(G)$, а левый коммутатор индуцирован коммутатором в группе G . Рассмотрим универсальное обертывающее кольцо $U(L(G))$ и градуированное кольцо $\text{gr } \mathbb{Z}G$, построенное с помощью фильтрации, состоящей из степеней фундаментального идеала. Нетрудно показать, что отображение $g \rightarrow g - 1$ ($g \in G$) индуцирует эпиморфизм $U(L(G)) \rightarrow \text{gr } \mathbb{Z}G$. Теорема Квиллена утверждает, что после тензорного домножения на поле рациональных чисел это отображение становится изоморфизмом [7]

$$U(L(G)) \otimes \mathbb{Q} \cong \text{gr } \mathbb{Q}G.$$

Возвращаясь к нашей ситуации, положим $B = G/A$ и рассмотрим естественное отображение

$$\sigma_k : \gamma_k(G)/\gamma_{k+1}(G) \rightarrow \gamma_k(B)/\gamma_{k+1}(B).$$

Выберем базис X_k пространства $\gamma_k(G)/\gamma_{k+1}(G)$ в виде объединения $X_k = Y_k \cup Z_k$, где $\sigma_k(Y_k)$ – базис в $\gamma_k(B)/\gamma_{k+1}(B)$, а Z_k – базис в $\ker \sigma_k$. Пусть $X = \bigcup X_k$, $Y = \bigcup Y_k$ и $Z = \bigcup Z_k$. Упорядочим множество X , считая, что элементы из Y предшествуют элементам из Z (в остальном упорядочивание произвольно). По теореме Биркгофа–Витта произведения

$$y_{i_1} \cdots y_{i_s} z_{j_1} \cdots z_{j_t} \quad (s, t \geq 0, y_{i_\alpha} \in Y, z_{j_\beta} \in Z),$$

где $y_{i_1} \leq \cdots \leq y_{i_s}$, $z_{j_1} \leq \cdots \leq z_{j_t}$, образуют базис алгебры $U(L(G)) \otimes \mathbb{Q}$. Фиксируем множество $\bar{X}$ прообразов элементов множества X в группе G . Аналогичный смысл имеют обозначения $\bar{Y}$ и $\bar{Z}$. Прообразы элементов множества Z выберем в нормальной подгруппе A . Ясно, что $\bar{Z}$ – базис пространства A . Будем считать, что множество $\bar{X}$ упорядочено так же, как множество X . Из теоремы Квиллена следует, что в качестве базиса пространства $\mathbb{Q}G/\Delta^n$ можно взять образы упорядоченных произведений

$$(1 - \bar{y}_{i_1}) \cdots (1 - \bar{y}_{i_s})(1 - \bar{z}_{j_1}) \cdots (1 - \bar{z}_{j_t}) \quad (s, t \geq 0, \bar{y}_{i_\alpha} \in \bar{Y}, \bar{z}_{j_\beta} \in \bar{Z}), \quad (2)$$

в которых сумма размерностей соответствующих элементов $y_{i_\alpha}, z_{j_\beta} \in L(G)$ меньше n . Идеал $\Delta\Delta_A$ совпадает с линейной оболочкой элементов вида $(g-1)(a-1)$ ($g \in G, a \in A$). В разложении $\text{mod } \Delta^n$ такого элемента по базису (2) каждое слагаемое содержит по крайней мере два сомножителя, один из которых имеет вид $1 - \bar{z}$ ($\bar{z} \in \bar{Z}$), т.е. все слагаемые также принадлежат $\Delta\Delta_A$. Отсюда следует, что факторизуя по $\Delta\Delta_A + \Delta^n$, мы получим пространство с базисом, состоящим из элементов (2), в которых либо $t = 0$, либо $s = 0$ и $t = 1$. В частности, все элементы вида $1 - \bar{z}$ ($\bar{z} \in \bar{Z}$) линейно независимы по модулю $\Delta\Delta_A + \Delta^n$, и, значит, отображение $a \rightarrow a - 1$ ($a \in A$) индуцирует вложение $A \rightarrow \mathbb{Q}G/\Delta\Delta_A + \Delta^n$.

ШАГ 2. Пусть задана коммутативная диаграмма расширений одной и той же группы B

$$\begin{array}{ccccccc} E_1 : 1 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & B \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow \varphi & & \parallel \\ E_2 : 1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & G_2 & \longrightarrow & B \longrightarrow 1. \end{array}$$

Если отображение $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ — эпиморфизм, то индуцированное отображение $\varphi_n: D_n(E_1) \rightarrow D_n(E_2)$ — также эпиморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $I_k = \Delta(G_k)\Delta(A_k) + \Delta^n(G_k)$ ($k = 1, 2$), и пусть $g \in D_n(E_2)$, т.е. $g - 1 \in I_2$. Выберем прообраз $\bar{g} \in G_1$ элемента g , и пусть $A = \ker \varphi$. Тогда $\bar{g} - 1 \in I_1 + \Delta(A)$. Из условия очевидно следует, что $A \subseteq A_1$. По модулю $\Delta(G_1)\Delta(A)$ любой элемент идеала $\Delta(A)$ имеет вид $a - 1$, где $a \in A$, поэтому $(\bar{g} - 1) - (a - 1) \in I_1$ для некоторого $a \in A$. Но по модулю $\Delta(G_1)\Delta(A)$ этот элемент равен $\bar{g}a^{-1} - 1$, поэтому $\bar{g}a^{-1} - 1 \in I_1$, и, значит, $\bar{g}a^{-1} \in D_n(E_1)$. Так как $\varphi(\bar{g}a^{-1}) = \varphi(\bar{g}) = g$, это заканчивает доказательство.

Отметим, что классические размерные подгруппы $D_n(G)$ не обладают подобным свойством. Если $G_1 \rightarrow G_2$ — эпиморфизм, то соответствующее отображение $D_n(G_1) \rightarrow D_n(G_2)$ не обязано быть отображением “на”. Действительно, для любой группы G существует эпиморфизм $\varphi: F \rightarrow G$, где F — свободная группа. Как доказали еще Грюн [8] и Магнус [9], $D_n(F) = \gamma_n(F)$. Очевидно, $\varphi(\gamma_n(F)) = \gamma_n(G)$, поэтому равенство $\varphi(D_n(F)) = D_n(G)$ означало бы, что $D_n(G) = \gamma_n(G)$, что, вообще говоря, неверно.

Последнее замечание подсказывает как надо действовать дальше. Используя утверждение, доказанное на шаге 2, можно свести доказательство к случаю свободного расширения с абелевым ядром. Именно, фиксируем некоторый эпиморфизм $f: F \rightarrow G$, где F — свободная группа, и пусть $N = f^{-1}(A)$. Таким образом, $F/N \cong G/A = B$. Поскольку нормальная подгруппа A абелева, $N' = [N, N] \subseteq \ker f$, следовательно, f индуцирует эпиморфизм $\varphi: F/N' \rightarrow G$. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} E^\varphi : 1 & \longrightarrow & N/N' & \longrightarrow & F/N' & \longrightarrow & B \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow \varphi & & \parallel \\ E : 1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & G & \longrightarrow & B \longrightarrow 1. \end{array}$$

Нам достаточно доказать, что $D_n(E^\varphi) = \gamma_n(F/N')$. Благодаря доказанному на первом шаге это сводится к следующему утверждению.

ШАГ 3. Если F – свободная группа, N – ее нормальный делитель и факторы нижнего центрального ряда группы $B = F/N$ не имеют кручения, то факторы нижнего центрального ряда группы F/N' также не имеют кручения.

Напомним близкий по духу результат, принадлежащий Б. Хартли. Если группа F/N аппроксимируется нильпотентными группами без кручения, то и группа F/N' аппроксимируется нильпотентными группами без кручения [10]. Будем называть группу G *магнусовой* (А. Л. Шмелькин [11]), если $\bigcap \gamma_k(G) = 1$ и факторы нижнего центрального ряда группы G не имеют кручения. Пусть $\mathcal{V}$ – некоторое многообразие групп, и V – множество его тождеств. Как доказал Д. И. Эйделькин [12], если группа $B = F/N$ магнусова и свободные группы многообразия $\mathcal{V}$ магнусовы, то группа $F/V(N)$ также магнусова (случай, когда группа B относительно свободна, был ранее рассмотрен Шмелькиным [11]). Если в теореме Эйделькина взять в качестве $\mathcal{V}$ многообразие абелевых групп, то получится утверждение шага 3 с тем, правда, ограничением, что $\bigcap \gamma_k(B) = 1$. Некоторые дополнительные рассуждения позволяют снять это ограничение. Однако автору удалось найти более простое прямое доказательство и мы предпочитаем привести его полностью. Особенностью нашего доказательства является то, что вместо формулы Кемпбелла–Хаусдорфа мы используем теорему Квиллена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\mathcal{B} = L(B)$ и рассмотрим свободное кольцо Ли $\mathcal{F}$ со свободными образующими u_α , которые находятся во взаимно однозначном соответствии со свободными образующими x_α группы F . Смежные классы $t_\alpha = x_\alpha N F'$ порождают $\mathcal{B}$, и отображение $u_\alpha \rightarrow t_\alpha$ продолжается до эпиморфизма $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{B}$, ядро которого – некоторый однородный идеал $\mathcal{N}$ кольца $\mathcal{F}$. Аддитивная группа кольца $\mathcal{B} = \mathcal{F}/\mathcal{N}$ не имеет кручения, так как не имеют кручения факторы нижнего центрального ряда группы B . По теореме Витта [13, теорема 2.4.5] $\mathcal{N}$ – свободное подкольцо, поэтому $\mathcal{N}/\mathcal{N}'$ – свободная абелева группа, и следовательно, аддитивная группа кольца $\mathcal{F}/\mathcal{N}'$ не имеет кручения. В силу этого достаточно установить изоморфизм $\mathcal{F}/\mathcal{N}' \cong L(F/N')$. Естественное отображение $F/N' \rightarrow B$ индуцирует эпиморфизм $L(F/N') \rightarrow \mathcal{B}$, ядро которого – абелев идеал. Отсюда следует, что отображение $u_\alpha \rightarrow x_\alpha$ индуцирует эпиморфизм

$$\varphi: \mathcal{F}/\mathcal{N}' \rightarrow L(F/N').$$

Докажем, что φ – мономорфизм.

Пусть P – свободный $\mathbb{Z}B$ -модуль со свободными образующими e_α , которые находятся во взаимно однозначном соответствии со свободными образующими x_α группы F . Рассмотрим полупрямое произведение $W = BP$. Тогда по теореме Магнуса [14, гл. 3, § 6] отображение $x_\alpha \rightarrow e_\alpha y_\alpha$, где $y_\alpha = x_\alpha N$, продолжается до вложения $\mu: F/N' \rightarrow W$. Обозначим через $l(\mu)$ соответствующий гомоморфизм колец Ли

$$l(\mu): L(F/N') \rightarrow L(W).$$

Отметим, что $\gamma_n(W) = \gamma_n(B)P_n$, где $P_n = P\Delta^{n-1}(B)$, и, следовательно, $L(W)$ – полупрямая сумма кольца $\mathcal{B}$ и градуированного $\mathcal{B}$ -модуля $\text{gr } P$ с однородными компонентами P_n/P_{n+1} .

Если $U(\mathcal{B})$ – универсальное обертывающее кольцо и $\mathcal{P}$ – свободный $U(\mathcal{B})$ -модуль со свободными образующими f_α , то можно рассмотреть полупрямую сумму $\mathcal{W} = \mathcal{B} + \mathcal{P}$. Отображение $u_\alpha \rightarrow v_\alpha + f_\alpha$, где $v_\alpha = u_\alpha + \mathcal{N}$, продолжается до вложения

$$\nu: \mathcal{F}/\mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{W}.$$

Это следует из теоремы Шмелькина [11] – аналога теоремы Магнуса для алгебр Ли. Так как $\mathcal{P}$ – свободный $\mathcal{B}$ -модуль, отображение $f_\alpha \rightarrow e_\alpha + P\Delta(B)$ продолжается до гомоморфизма $\mathcal{P} \rightarrow \text{gr } P$, и, следовательно, до гомоморфизма $\psi: \mathcal{W} \rightarrow L(W)$, тождественного на $\mathcal{B}$. Построенные отображения укладываются в следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}/\mathcal{N}' & \xrightarrow{\nu} & \mathcal{W} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ L(F/N') & \xrightarrow{l(\mu)} & L(W). \end{array}$$

В этой диаграмме ν – вложение, поэтому доказательство того, что φ – мономорфизм, сводится к доказательству того, что ψ – мономорфизм. Так как $P = \bigoplus e_\alpha \mathbb{Z}B$, то $\text{gr } P \cong \bigoplus e_\alpha \text{gr } \mathbb{Z}B$. По теореме Квиллена градуированные кольца $\text{gr } \mathbb{Z}B$ и $U(\mathcal{B})$ становятся изоморфны после тензорного домножения на $\mathbb{Q}$, но поскольку аддитивная группа кольца $U(\mathcal{B})$ без кручения, то изоморфизм имеется и над $\mathbb{Z}$. Это заканчивает доказательство.

3. Некоторые следствия теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если G – полная нильпотентная группа, то $D_n(G) = \gamma_n(G)$.*

Действительно, как хорошо известно, периодическая часть $T(G)$ полной нильпотентной группы G лежит в центре. Положим $A = T(G)$. Тогда G/A – полная нильпотентная группа без кручения. Факторы нижнего центрального ряда группы G/A – линейные пространства над полем рациональных чисел, поэтому применима теорема 1.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если A – абелев нормальный делитель группы G такой, что G/A – абелева группа без кручения, то $D_n(G) = \gamma_n(G)$.*

Пусть, например, G – метабелева группа, удовлетворяющая условию

$$g^k = h^k \implies g = h \quad (g, h \in G, k \in \mathbb{Z}).$$

Возьмем в качестве A изолятор коммутанта G'

$$A = \{g \in G \mid \text{для некоторого } k \ g^k \in G'\}.$$

Как легко видеть, A – абелев нормальный делитель. Так как G/A – абелева группа без кручения, то $D_n(G) = \gamma_n(G)$.

Пусть F – свободная группа, $F^{(k)}$ – k -ый член ее ряда коммутантов. Группу $G = F/[F, F^{(k)}]$ называют свободной центрально-разрешимой группой. Она является центральным расширением свободной разрешимой группы $F/F^{(k)}$. Так как факторы нижнего центрального ряда группы $F/F^{(k)}$ без кручения [15], применима теорема 1.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Пусть G – свободная центрально-разрешимая группа. Тогда $D_n(G) = \gamma_n(G)$.*

При $k = 2$, т.е. для свободной центрально-метабелевой группы, это утверждение доказано в работе К. Гупты и Ф. Левина [16]. Стоит, видимо, напомнить, что во всех известных к настоящему моменту примерах экспонента размерных факторов $D_n(G)/\gamma_n(G)$ делит 2. В то же время свободные центрально-разрешимые группы содержат 2-кручение [17]. Это однако не мешает равенству $D_n(G) = \gamma_n(G)$. На самом деле следствие 3 является частным случаем следующего утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть F – свободная группа, N – ее нормальный делитель. Предположим, что факторы нижнего центрального ряда группы F/N не имеют кручения и пусть $G = F/[F, N']$. Тогда $D_n(G) = \gamma_n(G)$.

Действительно, группа G – центральное расширение группы F/N' . Как мы видели выше, если факторы нижнего центрального ряда группы F/N не имеют кручения, то тем же свойством обладают факторы нижнего центрального ряда группы F/N' . Применяя теорему 1, имеем $D_n(G) = \gamma_n(G)$. Следствие 3 получается при $N = F^{(k-1)}$.

Отметим, что для любого нормального делителя N свободной группы F экспонента периодической части группы $F/[F, N']$ делит 4 [18], и достаточно часто эта периодическая часть нетривиальна [19, §7].

Теорема 1 применима и к случаю, когда факторы нижнего центрального ряда группы G/A тривиальны.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть A – абелев нормальный делитель группы G . Если факторгруппа G/A совпадает со своим коммутантом (например, простая группа), то $D_n(G) = \gamma_n(G)$.

Список литературы

1. Rips E. On the forth integer dimension subgroup // Israel J. Math. 1972. V. 12. P. 342–346.
2. Gupta N. The dimension subgroup conjecture // Bull. London Math. Soc. 1990. V. 22. P. 453–456.
3. Мальцев А. И. Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы // Матем. сб. 1949. Т. 25. С. 347–366.
4. Jennings S. A. The group ring of a class of infinite nilpotent groups // Canad. J. Math. 1955. V. 7. P. 169–187.
5. Hall P. Nilpotent groups // Lectures given at Canadian Congress Summer Seminar: Univ. of Alberta, 1957.
6. Sandlings R. The dimension subgroup problem // J. Algebra. 1972. V. 21. P. 216–231.
7. Quillen D. On the associated graded ring of a group ring // J. Algebra. 1968. V. 10. P. 411–418.
8. Grün O. Über die Faktorgruppen freier Gruppen 1 // Deutsche Math. Jahrgang. 1936. V. 1. №6. P. 772–782.
9. Magnus W. Überbeziehungen zwischen höheren Kommutatoren // J. Reine Angew. Math. 1937. V. 177. P. 105–115.
10. Hartley B. The residual nilpotence of wreath products // Proc. London Math. Soc. 1970. V. (3) 20. P. 365–392.
11. Шмелькин А. Л. Сплетения алгебр Ли и их приложения к теории групп // Труды ММО. 1973. Т. 29. С. 247–260.
12. Эйделькин Д. И. О группах Магнуса // Матем. сб. 1973. Т. 92. С. 209–223.
13. Бахтулин Ю. А. Тожества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985.
14. Нейман Х. Многообразия групп. М.: Мир, 1969.
15. Шмелькин А. Л. Свободные полинильпотентные группы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28. С. 91–122.
16. Gupta K. C., Levin F. Dimension subgroups of free center-by-metabelian groups // Illinois J. Math. 1986. V. 30. P. 258–273.
17. Кузьмин Ю. В. Элементы порядка 2 в свободной центрально-разрешимой группе // Матем. заметки. 1985. Т. 37. С. 643–652.
18. Кузьмин Ю. В. Об элементах конечного порядка в свободных группах некоторых многообразий // Матем. сб. 1982. Т. 119. С. 119–131.
19. Kuzmin Yu. V. Homology theory of free abelianized extensions // Comm. Algebra. 1988. V. 16. P. 2447–2533.