Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Борисюк, Глобальные бифуркации на бутылке Клейна. Общий случай, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 4, 3–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1281>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 15:44:29

УДК 514.747

А. Р. Борисюк

Глобальные бифуркации на бутылке Клейна. Общий случай

В настоящей работе рассматривается однопараметрическое семейство гладких векторных полей в пространстве большой размерности такое, что при критическом значении параметра соответствующее поле обладает седлоузловым циклом. Рассматривается случай, когда гомоклинические орбиты этого цикла вместе с циклом образуют гладкую бутылку Клейна. Задача состоит в описании поведения множества траекторий при изменении параметра.

Библиография: 8 названий.

§ 1. Введение

1.1. Гомоклиническая бутылка Клейна седлоузлового цикла. Рассмотрим однопараметрическое семейство векторных полей в фазовом пространстве размерности не ниже четырех. Предположим, что нулевому (критическому) значению параметра в этом семействе соответствует седлоузловой цикл — периодическая орбита, один мультипликатор которой равен 1, а остальные не лежат на единичной окружности. Такое вырождение неустранимым образом встречается в однопараметрических семействах. Предположим также, что гомоклинические траектории седлоузлового цикла заполняют гладкую поверхность, диффеоморфную бутылке Клейна. Это предположение не увеличивает коразмерности выражения.

При определенных условиях типичности, наложенных на семейство [1; § 5.5.3], в нем происходят следующие бифуркации. При малом отклонении параметра ε в любую сторону от критического значения $\varepsilon = 0$ гладкое инвариантное многообразие, диффеоморфное бутылке Клейна, сохраняется и гладко зависит от параметра. Эта теорема о сохранении (без утверждения о гладкости по параметру) доказана для четырехмерного фазового пространства в [2], а для произвольной размерности в [3] и [2].

Инвариантная бутылка Клейна при нулевом значении параметра оказывается нормальным гиперболическим многообразием в смысле [4]. Теорема о сохранении и гладкости для таких многообразий доказана Н. Феничелем [5]. На ней и основано современное доказательство сохранения гомоклинической бутылки Клейна [3]. Теорема Феничеля утверждает больше. А именно, нормальная гиперболичность сохраняется при малых возмущениях. Кроме того, в малой окрестности притягивающего нормального гиперболического многообразия каждая траектория не

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00482) и CRDF (грант № RM1-2358-MO-02).

только приближается к этому многообразию, но и “выбирает” траекторию на инвариантном многообразии и к ней экспоненциально стремится. Таким образом, с точки зрения численного эксперимента каждая точка, близкая к инвариантному многообразию, за конечное время выходит на это многообразие, а затем движется по одной из траекторий ограничения системы на это многообразие. Тем самым для описания поведения системы вблизи многообразия достаточно изучить систему на этом многообразии. Поэтому ниже рассматриваются только семейства уравнений на бутылке Клейна. Критическому значению параметра соответствует седлоузловой цикл, гомоклинические траектории которого заполняют всю бутылку. При отклонении параметра ε в одну сторону от критического значения (скажем, влево) седлоузловой цикл распадается на два грубых: устойчивый и неустойчивый; при отклонении в другую сторону (скажем, вправо) – исчезает. При этом и происходят наиболее интересные бифуркации; они исследуются ниже.

При возвращении параметра справа к критическому значению $\varepsilon = 0$ происходит “катастрофа голубого неба”, открытая впервые В.С. Медведевым [6]. Малому положительному значению параметра соответствуют два предельных цикла, которые удлиняются при стремлении параметра к нулю и в пределе исчезают (см. [1; §5.5] и п. 1.1.1 ниже). Кроме того, происходит бесконечное число бифуркаций удвоения, а также рождения и исчезновения предельного цикла. Эти бифуркации так же, как и их “периодический” характер, обнаружены в [1]. Слово “периодический” поставлено в кавычки, так как периодичность бифуркаций в зависимости от параметра наблюдается лишь приблизительно и только после замены параметра: $a = T(\varepsilon)$, $T \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Цель настоящей работы – полностью описать последовательность бифуркаций за период.

Оказывается, что по уравнению, соответствующему критическому значению параметра $\varepsilon = 0$ ($a = \infty$), можно построить конечный набор функций одного переменного, взаимное расположение максимумов и минимумов которых полностью определяет последовательность происходящих в семействе бифуркаций. Другими словами, по критическому уравнению можно описать полный бифуркационный сценарий, реализующийся в семействах общего положения на гомоклинической бутылке Клейна.

Этому описанию и посвящена настоящая работа. Теорема 1 позволяет построить бифуркационный сценарий по данному семейству. Теоремы 2 и 3 описывают множество всех бифуркационных сценариев, которые при этом построении возникают.

1.1.1. *Глобальное отображение Пуанкаре.* В работе [7] показано, что исследование глобальных бифуркаций в семействе гомоклинических бутылок Клейна может быть сведено к изучению семейства меняющих ориентацию диффеоморфизмов окружности (глобальное отображение Пуанкаре). Итак, рассмотрим семейство

$$\tilde{f}_a: x \mapsto -x + a + h_a(x), \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{S}^1$, а семейство функций h_a сходится к некоторой функции h_0 при $a \rightarrow \infty$ в норме пространства C^3 . Отображение (1) – диффеоморфизм, если и только если

$$h'_a(x) < 1. \quad (2)$$

В [7] исследованы бифуркации этого семейства в случае, когда функция h_0 (а следовательно, функция $h_a(x)$ для любого достаточно большого a) унимодальная (морсовская с одним минимумом и одним максимумом на своем периоде). В этой статье мы рассмотрим семейство (1) с произвольной функцией h_a , удовлетворяющей требованиям типичности, которые будут сформулированы ниже.

Приведем два элементарных утверждения, доказательства которых можно найти в [1; § 5.5].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Меняющий ориентацию диффеоморфизм окружности имеет ровно две неподвижные точки.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Отображение окружности степени (-1) не имеет циклов периода больше двух.*

В системе (1) встречаются два типа бифуркаций: при изменении параметра неподвижная точка может поменять свою устойчивость, при этом рождается или исчезает 2-цикл (происходит бифуркация удвоения периода или обратная к ней); бифуркация седлоузловой периодической орбиты периода 2: исчезновение (рождение) циклов периода 2 через слияние двух циклов.

Настоящая работа преследует две цели. Во-первых, построить бифуркационный сценарий по заданному семейству функций h_a . Во-вторых, описать все возможные бифуркационные сценарии для произвольной функции h_a с фиксированным числом экстремумов. Поставленная задача сначала решена для частного случая отображения (1), когда $h_a \equiv h$:

$$f_a: x \mapsto -x + a + h(x), \quad (3)$$

а затем показано, что результаты остаются верными и в случае семейства (1).

1.2. Основные предположения. В этом пункте мы сформулируем требования общности положения на функции h_a , рассматриваемые ниже.

- 1) При любом фиксированном значении параметра a функция h_a 2π -периодическая.
- 2) При любом фиксированном значении параметра a функция h_a морсовская с $n + 1$ экстремумом на своем периоде $[0; 2\pi)$. В силу предположения 1 n – нечетное число.

Покажем, что семейство функций h_a может быть нормировано. Далее все рассуждения проводятся для нормированного семейства.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Рассмотрим семейство диффеоморфизмов окружности (1) с функциями h_a , стремящимися к функции h по норме пространства C^3 при $a \rightarrow \infty$. Тогда поворотом окружности на угол $\xi(a)$, стремящийся к пределу при $a \rightarrow \infty$, и заменой параметра a семейство (1) можно преобразовать в семейство аналогичного вида с функциями h_a , удовлетворяющими следующим условиям: $h_a(0) = h_a(2\pi) = 0$; $h'_a(0) = h'_a(2\pi) = 0$; $h_a(x) > 0$ при $x \in (0; 2\pi)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\xi(a) \in [0; 2\pi]$ – абсцисса глобального минимума функции $h_a(x)$, а $\eta(a)$ – ордината.

Сделаем замену координат $y = x - \xi(a)$. Отображение примет вид:

$$\begin{aligned} f_a: y + \xi(a) &\mapsto -y - \xi(a) + a + h_a(y + \xi(a)), \\ f_a: y &\mapsto -y + (a - 2\xi(a) + \eta(a)) + h_a(y + \xi(a)) - \eta(a), \end{aligned}$$

где $y \in [0; 2\pi]$. Пусть $\tilde{a} = a - 2\xi(a) + \eta(a)$, $\tilde{h}_{\tilde{a}}(y) = h_a(y + \xi(a)) - \eta(a)$, тогда $f_{\tilde{a}}: y \mapsto -y + \tilde{a} + \tilde{h}_{\tilde{a}}(y)$, причем в этих координатах семейство отображений $f_{\tilde{a}}$ будет удовлетворять условиям предложения.

Глобальный минимум $\xi(a)$ функции h_a удовлетворяет уравнению $h'_a = 0$. Поскольку функция h морсовская, ее производная в окрестности каждого своего нуля обратима. Кроме того, никакие два критические значения функции h не совпадают. Поэтому ее глобальный минимум гладко зависит от параметра a . Следовательно, зависимость $\tilde{h}_{\tilde{a}}$ от параметра $\tilde{a}$ является C^3 -гладкой по построению. Предложение полностью доказано.

Для того чтобы сформулировать последние два требования, введем ряд определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Рассмотрим функцию h , удовлетворяющую условию (2), требованиям типичности 1), 2) и условиям нормировки. Определим разбиение $\Omega = \{\omega_i\}$ отрезка $[0; 2\pi]$, порожденное функцией h так, что точки разбиения – прообразы критических значений функции h .

Рис. 1. Построение разбиения Ω

Данное определение проиллюстрировано на рис. 1. Приведенная функция h будет использована ниже для иллюстрации основных утверждений.

В п. 2.2 будет доказано следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Число отрезков разбиения Ω , порожденного нормированной функцией h с n экстремумами на интервале $(0; 2\pi)$ (n нечетно), может принимать любое значение из множества

$$A(n) = \left\{ 3n - 1 + 4k \mid k = 0, 1, \dots, \frac{(n-1)(n-3)}{8} \right\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Два отрезка разбиения Ω называются *эквивалентными*, если их h -образы совпадают.

Определение 2 задает отношение эквивалентности и, следовательно, разбивает множество отрезков разбиения Ω на классы эквивалентности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Базисным отрезком в классе эквивалентности отрезков разбиения* назовем левый (с наименьшими координатами концов) отрезок данного класса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Любым двум эквивалентным отрезкам разбиения ω_k и ω_j поставим в соответствие функции i_{kj} и i_{jk} по следующему правилу: $i_{kj}: \omega_k \rightarrow \omega_j$ так, что $h(x) = h(i_{kj}(x))$, функция i_{jk} строится аналогично на отрезке ω_j . Функции i_{kj} для всех возможных номеров k, j назовем *инволютивными функциями*.

Определение мотивировано тем, что $\omega_k \xrightarrow{i_{kj}} \omega_j \xrightarrow{i_{jk}} \omega_k$, причем $i_{jk}(i_{kj}(x)) = x$, $x \in \omega_k$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Функции $p_{kj}(x)$, принадлежащие набору

$$\{a = p_{kj}(x) = x + i_{kj}(x) - h(x), x \in \omega_k\},$$

называются *функциями циклов семейства (3)*.

Теперь мы можем сформулировать условия типичности, которые налагаются на функцию h , задающую семейство (3) (в дополнение к сформулированным выше предположениям 1), 2)).

- 3) Функция циклов $p_{kj}(x)$, $x \in \omega_k$, для любых номеров k и j является морсовской.
- 4) Любые две функции циклов $p_{k_1 k_2}$, $p_{k_3 k_4}$ (за исключением случая, когда $k_1 = k_4$, $k_2 = k_3$) не имеют одинаковых критических значений.

ЗАМЕЧАНИЕ. Справедливо следующее: $p_{jk} = p_{kj} \circ i_{jk}$.

1.3. Бифуркационный сценарий. Для описания полного бифуркационного сценария надо задать все пары точек (x, a) , где x — точка 2-цикла семейства $f_a: x \mapsto -x + a + h(x)$ при значении параметра a . Мы предполагаем, что функция h нормированная и удовлетворяет требованиям типичности 1)–4) из п. 1.2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Рассмотрим семейство (3) и разбиение отрезка $[0; 2\pi]$, порожденное функцией h . Пусть $\{i_{kj}\}$ — набор инволютивных функций, где номера (k, j) пробегают номера всех пар эквивалентных отрезков. Рассмотрим набор функций $\{a = p_{kj}(x) = x + i_{kj}(x) - h(x), x \in \omega_k\}$. Множество точек (x, a) , принадлежащих графикам функций набора $\{p_{kj}\}$, совпадает с множеством пар (x, a) , где x — точка 2-цикла семейства f_a .

ТЕОРЕМА 1. В семействе (3) с функцией h , удовлетворяющей требованиям типичности, с возрастанием параметра a происходят следующие бифуркации (см. рис. 2).

1) При прохождении параметра через локальный минимум (максимум) одной из функций циклов набора $\{p_{kj}\}$, не соответствующий критическому значению функции h , происходит рождение (исчезновение) двух периодических орбит периода 2: одна устойчивая, другая неустойчивая.

2) При значениях параметра, равных $a_j = 2x_j - h(x_j)$, где x_j – точка локального экстремума функции h , происходит бифуркация удвоения периода (при прохождении параметра через локальный минимум одной из функций циклов) или бифуркация, обратная к бифуркации удвоения периода (при прохождении через локальный максимум).

Доказательства этих утверждений приведены в п. 2.2.

Рис. 2. Бифуркационный сценарий

Пояснения к рис. 2. Ось абсцисс разбита на отрезки разбиения Ω , как это было показано ранее на рис. 1. На каждом отрезке разбиения определены функции циклов. Опишем картину при фиксированных значениях параметра a .

- 1) Значение параметра $a = "a0"$. Согласно предложению 1 система имеет ровно две неподвижные точки при каждом значении параметра. Линия $a = "a0"$ пересекает линии, соответствующие линиям неподвижных точек, и не пересекает функции циклов, а следовательно, система не имеет циклов периода два при этом значении параметра.
- 2) Значение параметра $a = "a1"$. При этом значении левая неподвижная точка меняет устойчивость и рождается цикл периода два (случай 2) в теореме 1).

- 3) Значение параметра $a = "a2"$. Неподвижная точка меняет свою устойчивость, сливаясь с циклом периода два.
- 4) Значение параметра $a = "a3"$. Это значение является бифуркационным — происходит рождение двух циклов периода два (случай 1) в теореме 1).
- 5) Значение параметра $a = "a4"$. Неподвижная точка меняет свою устойчивость, сливаясь с циклом периода два.
- 6) Значение параметра $a = "a5"$. При этом значении левая неподвижная точка меняет устойчивость и рождается цикл периода два (случай 2) в теореме 1).
- 7) Значение параметра $a = "a6"$. Устойчивый и неустойчивый циклы периода два сливаются и исчезают.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Зафиксируем отрезок разбиения ω_l . Пусть $p_{l1}, \dots, p_{lm}$ — функции циклов, определенные на ω_l . Тогда*

$$\max_{j=l_1, \dots, l_m} \max_{x \in \omega_l} p_{lj}(x) - \min_{j=l_1, \dots, l_m} \min_{x \in \omega_l} p_{lj}(x) < 2\pi.$$

Доказательство этого утверждения можно найти в п. 2.5.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из предложения 6 следует, что последовательность бифуркаций повторяется с периодом 2π , поэтому семейство (3) естественно рассматривать при значениях параметра $a \in [0; 2\pi]$.

1.4. Реализация бифуркационных сценариев. Из теоремы 1 следует, что бифуркационный сценарий полностью задается набором функций циклов $\{p_{kj}\}$. В п. 2.3 будет доказано, что для того, чтобы задать набор $\{p_{kj}\}$, достаточно задать функции циклов на базисных отрезках.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. *Характеристический граф* — ориентированный граф на нумерованных вершинах, удовлетворяющий следующим свойствам: существуют такая нормированная функция h , удовлетворяющая условиям типичности, и соответствующее ей разбиение Ω (см. определение 1), что можно установить взаимно однозначное соответствие между вершинами графа и отрезками разбиения Ω ; каждая вершина, соответствующая базисному отрезку (такие вершины будем называть *базисными*), соединена направленными ребрами со всеми вершинами, которые соответствуют отрезкам того же класса эквивалентности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Ориентированный граф на нумерованных вершинах называется *квазихарактеристическим порядком n* , если он удовлетворяет следующим условиям.

- 1) Вершины бывают двух типов:
 - а) из вершины выходит нечетное число ребер в вершины со старшими номерами;
 - б) в вершину входит ровно одно ребро.
- 2) Количество вершин первого типа (они называются *базисными*) равно n , а общее число вершин принадлежит множеству $A(n)$ (см. предложение 4).

Заметим, что характеристический граф функции h является квазихарактеристическим порядком n , где n — число экстремумов нормированной функции h на интервале $(0; 2\pi)$.

НАПОМИНАНИЕ [8]. *Updown подстановка* – подстановка, у которой каждый элемент либо меньше двух соседних, либо больше соседних.

Из определения 6 видно, что updown подстановка функции h однозначно определяет характеристический граф набора функций циклов для соответствующего семейства диффеоморфизмов окружности (3). В п. 2.3 будет доказано обратное утверждение, а именно:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Пусть задан характеристический граф функции h , удовлетворяющей требованиям типичности. Тогда updown подстановка функции h однозначно восстанавливается по графу.*

ТЕОРЕМА 2. *Существует алгоритм, который определяет является ли квазихарактеристический граф характеристическим.*

Описание алгоритма из теоремы 2 приведено в п. 2.4. Характеристический граф функции h однозначно задает нумерацию функций циклов семейства (3), порожденных данной функцией h и определенных на базисных отрезках. А именно, ребру графа, соединяющему вершины k и j , соответствует функция циклов p_{kj} на базисном отрезке ω_k . Следующее предложение описывает свойства функций циклов p_{kj} на базисных отрезках.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Рассмотрим базисный отрезок ω_k и функции циклов $p_{kk_1}, \dots, p_{kk_m}$, определенные на этом отрезке. Функции циклов p_{kk_i} удовлетворяют следующим условиям.*

- 1) Пусть $\omega_k \leq \omega_{k_1} \leq \dots \leq \omega_{k_m}$ – класс эквивалентных отрезков, тогда для любого $x \in \omega_k$

$$p_{kk_1}(x) \leq p_{kk_2}(x) \leq \dots \leq p_{kk_m}(x),$$

причем равенство может быть только в граничных точках отрезка ω_k .

- 2) Если $j = k_1, k_3, \dots, k_m$, то для любого $x \in \omega_k$ выполнено $p'_{kj}(x) < 1$.
Если $j = k_2, k_4, \dots, k_{m-1}$, то для любого $x \in \omega_k$ выполнено $p'_{kj}(x) > 0$.
- 3) Если $j = k_2, k_4, \dots, k_{m-1}$, то для любого $x \in \omega_k$

$$p'_{kj}(x) > \max_{l=k_1, k_3, \dots, k_m} p'_{kl}(x). \quad (4)$$

- 4) Существуют такие числа a_k , $0 < a_k < x_k$, что в граничных точках базисного отрезка выполнены следующие равенства:

$$\begin{aligned} p_{kk_1}(x_{k-1}) - x_{k_1} &= p_{kk_2}(x_{k-1}) - x_{k_2-1} = \dots = p_{kk_{m-1}}(x_{k-1}) - x_{k_{m-1}-1} \\ &= p_{kk_m}(x_{k-1}) - x_{k_m} = x_{k-1} - a_{k-1}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} p_{kk_1}(x_k) - x_{k_1-1} &= p_{kk_2}(x_k) - x_{k_2} = \dots = p_{kk_{m-1}}(x_k) - x_{k_{m-1}} \\ &= p_{kk_m}(x_k) - x_{k_m-1} = x_k - a_k. \end{aligned} \quad (6)$$

Доказательство этого предложения приведено в п. 2.3. Следующая теорема показывает, что любой набор функций, удовлетворяющий условиям предложения 8, реализуется как набор функций циклов для некоторого h .

ТЕОРЕМА 3. *Зафиксируем характеристический граф. Рассмотрим произвольное разбиение отрезка $[0; 2\pi]$ такое, что количество отрезков разбиения равно числу вершин графа. Пусть отрезок разбиения ω_k соответствует базисной вершине. На ω_k заданы функции p_{kj} , где j пробегает номера всех вершин графа, в которые ведут ребра из k -й вершины. Пусть, кроме того, функции p_{kj} удовлетворяют ограничениям, наложенным на функции циклов предложением 8. Тогда существует морсовская функция h , удовлетворяющая требованиям типичности, такая, что набор функций циклов соответствующего семейства (3) совпадает с заданным набором функций p_{kj} .*

Теперь остается заметить, что теоремы 2, 3 решают проблему реализации бифуркационных сценариев в семействах вида (3).

1.5. Эквивалентность бифуркационных сценариев. Введем понятие эквивалентности бифуркационных сценариев для семейств вида (3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Бифуркационные сценарии семейств отображений $F_a: x \mapsto -x + a + f(x)$ и $G_a(x): x \mapsto -x + a + g(x)$ локально эквивалентны, если характеристические графы для функций $f(x)$ и $g(x)$ одинаковы и, кроме того, для любой фиксированной пары номеров (k, j) соответствующие функции циклов лево-право эквивалентны.

Из этого определения следует, что для локально эквивалентных сценариев экстремумы функций циклов можно поставить во взаимно однозначное соответствие и, следовательно, правомерно следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Два локально эквивалентных сценария называются *эквивалентными*, если выполнено следующее условие. Пусть функции циклов p_{kj}, p_{ms} одного из сценариев имеют экстремумы в точках x_1 и x_2 соответственно, кроме того, $p_{kj}(x_1) > p_{ms}(x_2)$. Тогда соответствующие экстремумы другого сценария находятся в таком же соотношении.

Это определение мотивировано тем, что эквивалентные бифуркационные сценарии представляют собой одинаковые последовательности бифуркаций.

§ 2. Бифуркационный сценарий

2.1. Неподвижные точки. Приведем доказательство предложения 1 в несколько расширенной форме.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Меняющий ориентацию диффеоморфизм окружности имеет ровно две неподвижные точки. Неподвижные точки семейства (3) и только они задаются равенством $a = \alpha(x) = 2x - h(x)$. Мультипликатор μ_{x_0} отображения f_a в неподвижной точке x_0 по модулю меньше единицы тогда и только тогда, когда $h'(x_0) > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим диффеоморфизм f_a . Пусть $\hat{f}_a$ — накрывающее отображение:

$$\hat{f}_a(x + 2\pi) = \hat{f}_a(x) - 2\pi, \quad \hat{f}'_a(x) < 0.$$

Без ограничения общности $\hat{f}_a(0) = q \in [0; 2\pi)$. Пусть x_0 — неподвижная точка f_a , тогда $\hat{f}_a(x) = x \pmod{2\pi}$. График $\hat{f}_a(x) = \tau$ один раз пересекает каждую из

прямых $l_0: \tau = x$, $l_{-1}: \tau = x - 2\pi$ и никогда не пересекает линии $l_n: \tau = x + 2\pi n$ при $n \neq 0, -1$. Следовательно, f_a имеет ровно две неподвижные точки.

Неподвижные точки отображения f_a задаются уравнением $f_a(x) = x$, которое записывается в виде $-x + a + h(x) = x$. Отсюда получаем, что $a = \alpha(x) = 2x - h(x)$.

Далее, пусть $f_a(x) = x$. Имеем $f'_a(x) = -1 + h'(x)$. Из условия (2) следует, что $f'_a < 0$. Поэтому условия $|f'_a(x)| < 1$ и $h'(x) > 0$ равносильны.

2.2. Периодические траектории. Приведем некоторые очевидные свойства разбиения Ω , порожденного функцией h , удовлетворяющей требованиям типичности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. 1) *Функция h монотонна на любом отрезке разбиения.*

2) *Возможны три варианта взаимного расположения h -образов отрезков разбиения Ω : не пересекаются, имеют одну общую граничную точку, совпадают.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть при некотором $i_0 \exists x, \tilde{x} \in \omega_{i_0}: h(x) = h(\tilde{x})$, но в силу непрерывности функции h это означает, что между x и $\tilde{x}$ лежит локальный экстремум функции h , а это невозможно, так как точки локальных экстремумов — точки разбиения. Пришли к противоречию.

2) Пусть h -образы отрезков ω_j и ω_k пересекаются во внутренней точке, т.е. для некоторого $x_0 \in \omega_j$ найдется $\tilde{x}_0 \in \omega_k$ такое, что $h(x_0) = h(\tilde{x}_0)$. Покажем, что в этом случае h -образы отрезков ω_j, ω_k совпадают. Предположим противное: найдется $x \in \omega_i$, для которого не существует $\tilde{x} \in \omega_k$ такого, что $h(x) = h(\tilde{x})$. Но тогда в силу непрерывности функции h на $[0; 2\pi]$ и монотонности этой функции на ω_j и ω_k получим, что существует $\hat{x} \in \omega_j$ такое, что $h(\hat{x}) = h(x^m)$, где x^m — локальный экстремум функции $h(x)$. Пришли к противоречию с определением разбиения Ω . Утверждение полностью доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4. Согласно определению 1 точками разбиения являются прообразы критических значений функции h . Следовательно, количество точек разбиения зависит от взаимного расположения локальных экстремумов функции h .

1) Прежде всего отметим, что точки локальных экстремумов (n штук) и концы отрезка $[0; 2\pi]$ являются точками разбиения.

2) Найдём минимальное число точек разбиения $\Omega - \tilde{A}_{\min}$, полученных при пересечении прямых $y = x^j$ (x^j — локальные экстремумы $h(x)$) с графиком функции $y = h(x)$. Каждый экстремум (кроме глобального максимума) даёт как минимум две точки разбиения. Следовательно, число точек разбиения принимает минимальное значение в том и только том случае, когда все экстремумы дают ровно две точки разбиения. Итак, $\tilde{A}_{\min} = 2(n - 1)$.

3) Произвольная функция h может быть получена из функции $h_{\min}$, дающей минимальное число точек разбиения, конечным числом повторов следующей процедуры. Изменим один из локальных минимумов так, чтобы он стал меньше одного из локальных максимумов. При этом число точек разбиения увеличится на 4. Так как единственное, что влияет на число точек разбиения, — взаимное расположение локальных экстремумов по оси Oy , то число точек разбиения может принимать любое значение вида $\tilde{A} = \tilde{A}_{\min} + 4k$ до некоторого $\tilde{A}_{\max}$.

4) Максимальное число точек разбиения $\tilde{A}_{\max}$ возникает в том случае, когда все локальные минимумы функции h меньше ее локальных максимумов. Первый (с наименьшей y -координатой) локальный минимум дает две точки разбиения, а каждый последующий на две точки больше; первый локальный максимум дает столько же точек разбиения, сколько и последний минимум, а каждый последующий на две меньше. Следовательно,

$$\tilde{A}_{\max} = \left(2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2 \cdot \left(\frac{n-1}{2} \right) \right) \cdot 2 = \frac{n^2 - 1}{2}.$$

Итак, число точек разбиения может принимать любое значение из множества

$$\tilde{A} = \left\{ n + 2 + \tilde{A}_{\min} + 4k \mid k = 0, 1, \dots, \left(\frac{\tilde{A}_{\max} - \tilde{A}_{\min}}{4} \right) \right\},$$

а число отрезков разбиения

$$A = \left\{ n + 1 + \tilde{A}_{\min} + 4k \mid k = 0, 1, \dots, \left(\frac{\tilde{A}_{\max} - \tilde{A}_{\min}}{4} \right) \right\}.$$

Предложение 4 доказано.

Теперь все готово для доказательства основных утверждений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 5. Уравнение 2-цикла: $f_a(f_a(x)) = x$. Имеем

$$f_a(f_a(x)) = x - a - h(x) + a + h(f_a(x)) = x - h(x) + h(f_a(x)) = x.$$

Получаем $h(x) = h(f_a(x))$. Нас интересует случай $x \neq f_a(x)$, т.е. x не является неподвижной точкой. Из предложения 10 следует, что уравнение 2-циклов имеет решение тогда и только тогда, когда $x \in \omega_k$, $f_a(x) \in \omega_j$, где ω_k и ω_j – эквивалентные отрезки. Тогда в силу определения 4 получаем, что $f_a(x) = i_{kj}(x)$. Пусть теперь (k, j) – всевозможные пары номеров эквивалентных отрезков разбиения Ω . Итак, мы будем иметь 2-цикл $(x, i_{kj}(x))$, $x \in \omega_k$, при значении параметра $a = p_{kj}(x)$, где $p_{kj}(x) = x + i_{kj}(x) - h(x)$. Предложение 5 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Пусть ω_k и ω_j – произвольные эквивалентные отрезки разбиения Ω , причем отрезок ω_k лежит левее отрезка ω_j . Рассмотрим $x \in \omega_k$, тогда 2-цикл $(x, i_{kj}(x))$ семейства f_a имеет мультипликатор μ_x такой, что

$$|\mu_x| < 1 \Leftrightarrow h'(i_{kj}(x))p'_{kj}(x) < 0, \quad |\mu_x| > 1 \Leftrightarrow h'(i_{kj}(x))p'_{kj}(x) > 0,$$

где $p_{kj}(x)$ – функция циклов семейства f_a , соответствующая эквивалентным отрезкам ω_k , ω_j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим цикл $(x, i_{kj}(x))$, $x \in \omega_k$. Данный 2-цикл устойчив тогда и только тогда, когда

$$|(f_a(f_a(x)))'| < 1, \quad (f_a(f_a(x)))' = (1 - h'(i_{kj}(x)))(1 - h'(x)), \quad x \in \omega_k, \quad (7)$$

но в силу предположения (2) $(f_a(f_a(x)))' > 0 \quad \forall x \in \omega_k$, поэтому исходное неравенство сводится к неравенству $(f_a(f_a(x)))' < 1$. Из равенства $h(i_{kj}(x)) = h(x)$ имеем $h'(i_{kj}(x))i'_{kj}(x) = h'(x)$. Подставим это в выражение (7) и получим

$$\begin{aligned} -h'(i_{kj}(x)) - h'(i_{kj}(x))i'_{kj}(x) + h'^2(i_{kj}(x))i'_{kj}(x) &< 0, \\ -h'(i_{kj}(x))(1 + i'_{kj}(x) - h'(i_{kj}(x))i'_{kj}(x)) &< 0, \\ -h'(i_{kj}(x))(1 + i'_{kj}(x) - h'(x)) &< 0. \end{aligned}$$

Кроме того, мы знаем, что

$$p'_{kj}(x) = 1 + i'_{kj}(x) - h'(x). \quad (8)$$

Теперь утверждение предложения 11 немедленно следует из выписанных соотношений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть

$$a_{\min} = \min_{(k,j)} \left\{ \min_{x \in \omega_k} p_{kj}(x) \right\}, \quad a_{\max} = \max_{(k,j)} \left\{ \max_{x \in \omega_k} p_{kj}(x) \right\}.$$

Рассмотрим семейство прямых $y = a$, где a изменяется от $a_{\min}$ до $a_{\max}$. Пусть прямая $y = a$ пересекает графики набора функций циклов $p_{kj}(x)$ над отрезком $[0; 2\pi]$ в $2m$ точках с абсциссами $x^1, \dots, x^{2m}$; точки x^j не критические для функций циклов. Число точек пересечения будет четное, так как $p_{jk}(i_{kj}(x)) = p_{kj}(x)$, $x \in \omega_k$, т.е. если прямая $y = a$ пересекает график функции p_{kj} в точке $x \in \omega_k$, то эта прямая пересекает и график функции p_{jk} в точке $i_{kj}(x) \in \omega_j$. Тогда согласно предложению 5 семейство f_a имеет m 2-циклов $(x^l, i_{kj}(x^l))$, $k < j$, при значении параметра a .

Докажем утверждения теоремы в случае прохождения параметра через локальный минимум одной из функций циклов. Утверждения для локальных максимумов доказываются аналогично.

1) Пусть $\tilde{a}$ – невырожденный минимум функции циклов $p_{kj}(x)$, $x \in \omega_k$. Пусть прямая $y = \tilde{a} - \varepsilon$ при некотором малом ε пересекает график функции $p_{kj}(x)$ в q точках, тогда в силу морсовости функции p_{kj} для $y = \tilde{a} + \varepsilon$ точек пересечения будет $q + 2$, т.е. рождаются два 2-цикла. В силу предположения типичности 4) количество точек пересечения прямой $y = a$ с остальными графиками функций циклов при прохождении a через $\tilde{a}$ не изменится.

2) Пусть x_{j+1} – точка локального экстремума функции h . Тогда отрезки разбиения ω_j и ω_{j+1} эквивалентны и возникает функция циклов p_{jj+1} такая, что $p_{jj+1}(x_{j+1}) = 2x_{j+1} - h(x_{j+1})$. Тем самым мы получили утверждение 2) теоремы.

Перейдем к доказательству теорем 2 и 3, которые вместе составляют теорему о реализации.

2.3. Восстановление updown подстановки по ее характеристическому графу.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. *Рассмотрим разбиение Ω , соответствующее функции h . Рассмотрим класс эквивалентных отрезков этого разбиения. Тогда функция h и функции циклов на небазисных отрезках этого класса однозначно восстанавливаются по значениям функции h и функций циклов на базисном отрезке этого класса.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ω_k – базисный отрезок рассматриваемого класса, ω_{j_1} и ω_{j_2} – два других отрезка того же класса. По функции $h|_{\omega_k}$ и функциям циклов p_{kj_1}, p_{kj_2} восстанавливаются инволютивные функции $i_{kj_1,2} = p_{kj_1,2} + x + h(x)$. По этим данным восстанавливаются функции $h|_{\omega_{j_1,2}}$ и $p_{j_1j_2}$:

$$\begin{aligned} h|_{\omega_{j_1,2}} &= h|_{\omega_k} \circ i_{j_1,2k}, \\ i_{j_1j_2} &= i_{kj_2} \circ i_{j_1k}. \end{aligned}$$

Напомним, что $i_{jk} = i_{kj}^{-1}$. Следовательно, $p_{j_1j_2} = i_{j_1j_2} - x - h|_{\omega_{j_1}}$. Предложение 12 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. На каждом базисном отрезке определено столько функций циклов, сколько существует отрезков, эквивалентных данному базисному, причем число этих функций нечетно.

Опишем сначала соответствие между свойствами функции h и ее характеристического графа.

- 1) Общая вершина двух соседних эквивалентных отрезков разбиения является экстремумом функции h .
- 2) Максимумы и минимумы нормированной морсовской функции h чередуются; самый левый ненулевой экстремум на интервале $(0; 2\pi)$ – максимум.
- 3) Занумеруем классы эквивалентных отрезков разбиения Ω в порядке появления соответствующих базисных отрезков при проходе периода $[0; 2\pi)$ слева направо. Если общая точка двух соседних эквивалентных отрезков разбиения – максимум, то она отображается функцией h в правую вершину базисного отрезка из того же класса эквивалентности; если – минимум, то в левую. Тем самым номер класса эквивалентности экстремума характеризует значение функции h в нем, и его можно интерпретировать как “номер класса эквивалентности по вертикали”.

Теперь все готово для доказательства предложения 7. Проиллюстрируем доказательство этого предложения на примере, обсуждавшемся выше при доказательстве теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 7. Рассмотрим характеристический граф функции h с нумерованными вершинами (см. пример на рис. 3 для функции h , приведенной на рис. 1). Двум соседним эквивалентным (т.е. соединенным с одной базисной) вершинам соответствует критическая точка функции h . Занумеруем эти точки по возрастанию номеров соответствующих пар вершин графа. Самая левая

ненулевая из этих пар точек – максимум функции h ; дальше минимумы и максимумы чередуются.

Занумеруем базисные вершины графа числами от 1 до n в порядке возрастания их номеров как вершин графа. Припишем номер базисной вершины всем эквивалентным, т.е. соединенным с ней ребрами, вершинам. Каждому максимуму сопоставим номер класса эквивалентности соответствующих соседних эквивалентных вершин графа. Каждому минимуму сопоставим аналогичный номер, уменьшенный на 1. Таким образом, j -му экстремуму функции h отвечает номер соответствующей базисной вершины для максимумов и тот же номер, уменьшенный на 1, для минимумов. Полученная подстановка $\{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ обозначается δ . Подстановка $\{0, 1, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$, $0 \mapsto 0$, $j \mapsto \delta(j)$, $j \neq 0$, и является updown подстановкой функции h .

Рис. 3. Характеристический граф: $\bullet$ – базисные вершины, $\square$ – небазисные вершины

В рассматриваемом примере парам вершин $(2, 3)$ и $(5, 6)$ соответствуют максимумы функции h , а паре $(3, 4)$ соответствует локальный минимум. Подстановка выглядит следующим образом: $\delta: (1, 2, 3) \mapsto (2, 1, 3)$, а updown подстановка $(0, 2, 1, 3)$.

2.4. Распознавание характеристических графов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Рассмотрим квазихарактеристический граф с n базисными вершинами и установим, является ли он характеристическим графом. Для этого применим алгоритм из предыдущего пункта.

- 1) Занумеруем пары соседних эквивалентных вершин характеристического графа в порядке возрастания их номеров. Назовем эти пары *квазиэкстремумами*.
- 2) Самую левую из этих пар назовем *квазимаксимумом*. Далее квазиэкстремумы разбиваются на чередующиеся квазиминимумы и квазимаксимумы.
- 3) Занумеруем базисные вершины квазихарактеристического графа в порядке возрастания их номеров в множестве всех вершин графа. Полученный номер вершины назовем “*вертикальным*”. Если число базисных вершин не совпадает с числом квазиэкстремумов, алгоритм останавливается. Здесь и далее это означает, что квазихарактеристический граф не является характеристическим.
- 4) Если число базисных вершин совпадает с числом квазиэкстремумов, припишем каждому квазиэкстремуму “вертикальный” номер по следующему правилу. Этот номер равен “вертикальному” номеру соответствующей базисной вершины для квазимаксимума и на единицу меньше этого номера для

квазиминимума. Обозначим через δ полученное отображение множества $\{1, \dots, n\}$ в себя. Если отображение $\sigma: \{0, 1, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$, $0 \mapsto 0$, $j \mapsto \delta(j)$, $j \neq 0$, не является updown подстановкой, алгоритм останавливается.

- 5) В противном случае берется морсовская функция на окружности с построенной updown подстановкой. Затем строится ее характеристический граф. Если он не совпадает с исходным, алгоритм останавливается. В противном случае исходный граф является характеристическим графом.

Описание алгоритма на этом закончено, и теорема 2 тем самым доказана.

2.5. Свойства функций циклов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 6. Предположим, что утверждение неверно, т.е. найдутся такой отрезок разбиения ω_β и такая точка $\xi \in \omega_\beta$, что

$$p_{\beta\beta_1}(\xi) + 2\pi = p_{\beta\beta_m}(\xi).$$

Это равенство можно расписать следующим образом:

$$\xi + i_{\beta\beta_1}(\xi) - h(\xi) + 2\pi = \xi + i_{\beta\beta_m}(\xi) - h(\xi),$$

откуда мы получаем, что должно быть выполнено $i_{\beta\beta_1}(\xi) + 2\pi = i_{\beta\beta_m}(\xi)$. Однако мы знаем, что $i_{\beta\beta_1}(\xi) \in \omega_{\beta_1}$, $i_{\beta\beta_m}(\xi) \in \omega_{\beta_m}$, следовательно, $i_{\beta\beta_m}(\xi) \leq 2\pi$, $i_{\beta\beta_1}(\xi) + 2\pi > 2\pi$. Итак, предположение было неверно и предложение 6 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 8. 1) Предположим, что существуют такие эквивалентные отрезки $\omega_j \leq \omega_l$, что для некоторого $\hat{x} \in \omega_k$ будет выполнено $p_{kj}(\hat{x}) > p_{kl}(\hat{x})$. Согласно определению 5 последнее неравенство можно преобразовать следующим образом:

$$\hat{x} + i_{kj}(\hat{x}) - h(\hat{x}) > \hat{x} + i_{kl}(\hat{x}) - h(\hat{x}).$$

Отсюда получаем, что должно быть выполнено $i_{kj}(\hat{x}) > i_{kl}(\hat{x})$, но мы знаем, что $i_{kj}(\hat{x}) \in \omega_j$, $i_{kl}(\hat{x}) \in \omega_l$ и $\omega_j \leq \omega_l$. Пришли к противоречию.

2) Заметим, что согласно определению базисного отрезка при $x \in \omega_k$ $h'(x) > 0$. Кроме того, при $j = k_1, k_3, \dots, k_m$ $i'_{kj}(x) < 0$. Отсюда получаем, что при $x \in \omega_k$ $p'_{kj}(x) = 1 + i'_{kj}(x) - h'(x) < 1$. Если же $j = k_2, k_4, \dots, k_{m-1}$, то при $x \in \omega_j$ $h'(x) > 0$, а следовательно, $i'_{kj}(x) > 0$. Значит, при $x \in \omega_k$ $p'_{kj}(x) = 1 + i'_{kj}(x) - h'(x) > 1 - h'(x)$. Воспользовавшись предположением (2), получаем утверждение 2) предложения 8.

Для доказательства пп. 3) и 4) заметим, что для любого $x \in \omega_k$ и любого j должно выполняться равенство $p_{kj}(x) - i_{kj}(x) = x - h(x)$. Так как правая часть не зависит от номера j , получаем важное соотношение, выполненное для всех $x \in \omega_k$,

$$p_{kk_1}(x) - i_{kk_1}(x) = p_{kk_2}(x) - i_{kk_2}(x) = \dots = p_{kk_m}(x) - i_{kk_m}(x) = x - h(x). \quad (9)$$

Утверждение 4) предложения 8 немедленно следует из полученного соотношения. Для доказательства утверждения 3) продифференцируем равенство (9). При этом для $j = k_1, k_3, \dots, k_m$: $i'_{kj}(x) < 0$, $p'_{kj}(x) - i'_{kj}(x) > p'_{kj}(x)$, а при $j = k_2, k_4, \dots, k_{m-1}$: $i'_{kj}(x) > 0$, $p'_{kj}(x) - i'_{kj}(x) < p'_{kj}(x)$. Для того чтобы выполнялось равенство для производных при всех j , необходимо, чтобы функции p_{kj} удовлетворяли 3). Предложение полностью доказано.

2.6. Теорема о реализации.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Зафиксируем базисный отрезок ω_k . Пусть отрезки разбиения $\omega_{k_1}, \omega_{k_2}, \dots, \omega_{k_m}$ эквивалентны зафиксированному базисному отрезку. Построим на ω_k гладкую функцию $g_k(x)$ такую, что

$$\forall x \in \omega_k \quad \max \left\{ 0, \max_{j=k_1, k_3, \dots, k_m} p'_{kj}(x) \right\} < g_k(x) < \min \left\{ \min_{j=k_2, k_4, \dots, k_{m-1}} p'_{kj}(x), 1 \right\} \quad (10)$$

и со следующими граничными условиями:

- 1) если x_k — точка разбиения между базисным и небазисным отрезками, то $g_k(x_k^-) = 1$;
- 2) если x_k — точка разбиения между двумя базисными отрезками, то $0 < g_k(x_k^-) = g_{k+1}(x_k^+) < 1$;
- 3) если же x_{k-1} — точка разбиения между небазисным и базисным отрезками, то $0 < g_k(x_{k-1}^+) < 1$.

Кроме того, потребуем, чтобы

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} g_k(y) dy = x_{k_1} - x_{k_1-1} + p_{kk_1}(x_k) - p_{kk_1}(x_{k-1}) = Q. \quad (11)$$

Существование функции g_k во внутренних точках базисного отрезка ω_k следует из неравенства (4), а достижимость граничных условий доказана ниже.

1) Справедливо следующее:

$$\min_{j=k_2, k_4, \dots, k_{m-1}} p'_{kj}(x_k^-) > \max_{j=k_1, k_3, \dots, k_m} p'_{kj}(x_k^-) \geq p'_{kk_1}(x_k^-).$$

Так как x_k — точка разбиения между базисным отрезком ω_k и небазисным ω_{k+1} , то эти отрезки эквивалентны, а следовательно, $p'_{kk_1}(x_k^-) = p'_{kk_1+1}(x_k^-) = 1$.

2) Пусть ω_k и ω_{k+1} базисные отрезки. Для удобства вместо ω_{k+1} будем писать ω_μ . Знаем, что $\omega_k \cap \omega_\mu = x_k$, и хотим доказать, что $g_k(x_k^+) = g_\mu(x_k^-)$. Для этого достаточно показать, что верны следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \max_{j=\mu_1, \mu_3, \dots, \mu_\lambda} p'_{\mu j}(x_k^-) &\leq \min_{j=k_2, k_4, \dots, k_{m-1}} p'_{kj}(x_k^+), \\ \max_{j=k_1, k_3, \dots, k_m} p'_{kj}(x_k^+) &\leq \min_{j=\mu_2, \mu_4, \dots, \mu_{\lambda-1}} p'_{\mu j}(x_k^-). \end{aligned}$$

Докажем первое из этих неравенств:

$$\begin{aligned} p'_{kk_1}(x_k^+) - i'_{kk_1}(x_k^+) &= \dots = p'_{kk_m}(x_k^+) - i'_{kk_m}(x_k^+) = 1 - h'(x_k^+), \\ p'_{\mu\mu_1}(x_k^-) - i'_{\mu\mu_1}(x_k^-) &= \dots = p'_{\mu\mu_\lambda}(x_k^-) - i'_{\mu\mu_\lambda}(x_k^-) = 1 - h'(x_k^-). \end{aligned}$$

Так как $h'(x_k^+) = h'(x_k^-)$, то $\forall j, l \quad p'_{\mu j}(x_k^-) - i'_{\mu j}(x_k^-) = p'_{kl}(x_k^+) - i'_{kl}(x_k^+)$. Более того,

$$\begin{aligned} \forall j = \mu_2, \mu_4, \dots, \mu_{\lambda-1} \quad i'_{\mu j}(x_k^-) &\geq 0, \\ \forall l = k_1, k_3, \dots, k_m \quad i'_{kl}(x_k^+) &\leq 0, \\ p'_{kl}(x_k^+) &\leq p'_{kl}(x_k^+) - i'_{kl}(x_k^+) = p'_{\mu j}(x_k^-) - i'_{\mu j}(x_k^-) \leq p'_{\mu j}(x_k^-). \end{aligned} \quad (12)$$

Второе неравенство доказывается аналогично.

3) Немедленно следует из неравенства (4).

Осталось показать, что можно добиться выполнения (11). Из условий (5), (6) следует, что $Q = x_k - h(x_k) - (x_{k-1}) - h(x_{k-1})$, а это означает, что $0 < Q < x_k - x_{k-1}$. Остается заметить, что $0 < g_k(x) < 1$ и интегрирование ведется по базисному отрезку ω_k .

Итак, функция g_k построена.

Далее на базисном отрезке ω_k построим функцию

$$i'_{kj}(x) = p'_{kj}(x) - g_k(x). \quad (13)$$

Легко заметить, что в силу неравенств (10) при $j = k_1, k_3, \dots, k_m$ имеем $i'_{kj}(x) < 0$, а при $j = k_2, k_4, \dots, k_{m-1}$ $i'_{kj}(x) > 0$. Проинтегрировав равенство (13), получаем

$$i_{kj}(x) = p_{kj}(x) - \int_{x_{k-1}}^x g_k(y) dy + c. \quad (14)$$

Константа c выбирается так, чтобы выполнялись граничные условия

$$i_{kk_1}(x_{k-1}) = x_{k_1}, \quad i_{kk_1}(x_k) = x_{k_1-1}$$

(в силу равенств (5), (6) граничные условия для $i_{kk_2}, \dots, i_{kk_m}$ также будут выполнены). Из первого условия находим, что $c = x_{k_1} - p_{kk_1}(x_{k-1})$, при этом второе условие будет выполнено в силу условия (11).

Искомая функция h теперь может быть построена на отрезке $[0; 2\pi]$. На базисном отрезке ω_k функция h задается равенством $h(x) = x + i_{kj}(x) - p_{kj}(x)$. Для построения функции h на небазисном отрезке ω_l рассмотрим базисный отрезок ω_K , эквивалентный ω_l . Тогда $h(x) = h(i_{Kl}^{-1}(x))$, $x \in \omega_l$. Правая часть равенства нам известна, следовательно, мы построили функцию h на всех отрезках разбиения. Осталось проверить, что построенная таким образом функция h удовлетворяет требованиям типичности и $h'(x) < 1$.

Требования типичности 1), 3) и 4) выполнены в силу выбора функций p_{kj} и построения функции h . Осталось показать, что построенная функция h имеет $n + 1$ экстремум на интервале $[0; 2\pi)$ и является морсовской. Для этого решим уравнение $h'(x) = 0$. На базисном отрезке ω_k верно следующее преобразование:

$$h'(x) = 1 + i'_{kj}(x) - p'_{kj}(x) \stackrel{(13)}{=} 1 - g_k(x) \stackrel{(10)}{\neq} 0.$$

Пусть на небазисном отрезке ω_l существует точка x_0 такая, что $h'(x_0) = 0$. Согласно формуле, задающей функцию h на небазисном отрезке,

$$h'(x_0) = h'(i_{kl}^{-1}(x_0))(i_{kl}^{-1}(x_0))' = 0.$$

Как показано выше, производная функции h не обращается в нуль на базисном отрезке, а следовательно, должно выполняться следующее равенство: $(i_{kl}^{-1}(x_0))' = 0$. По теореме об обратной функции это равенство преобразуется в следующее:

$$\frac{1}{i'_{kl}(y_0)} = 0, \quad y_0 \in \omega_k.$$

Откуда в силу (13) получаем $1/(p'_{kl}(y_0) - g_k(y_0)) = 0$, а это противоречит ограниченности $p'_{kl}(y_0) - g_k(y_0)$. Итак, предположение о существовании точки x_0 было неверным.

Из вышесказанного следует, что функция h может иметь экстремумы только в точках разбиения Ω . Зафиксируем точку разбиения x_s и рассмотрим все возможные случаи расположения отрезков разбиения.

- а) Отрезок ω_s базисный, ω_{s+1} — нет. В этом случае согласно граничному условию, наложенному на функцию g_s при построении, $g_s(x_s^-) = 1$, следовательно, в силу гладкости функции g_s $h'(x_s) = 1 - g_s(x_s) = 0$. Итак, точка разбиения x_s , слева от которой находится базисный отрезок, а справа небазисный, является точкой локального экстремума функции h .
- б) Отрезки ω_s и ω_{s+1} базисные. Из построения g_s следует, что $h'(x_s^-) = h'(x_s^+)$ и $h'(x_s) \neq 0$, так как иначе второй отрезок не может быть базисным.
- в) Отрезок ω_s небазисный, а ω_{s+1} базисный. Рассуждения аналогичны предыдущему случаю.
- д) Отрезки ω_s и ω_{s+1} небазисные. Этот случай разобьем на два:
 - і) рассматриваемые отрезки принадлежат одному классу эквивалентности с базисным отрезком ω_k , тогда

$$\begin{aligned} h'(x_s^-) &= (h(i_{ks}^{-1}(x_s^-)))' = h'(i_{ks}^{-1}(x_s^-))(i_{ks}^{-1}(x_s^-))', \\ h'(x_s^+) &= (h(i_{k+1s+1}^{-1}(x_s^+)))' = h'(i_{k+1s+1}^{-1}(x_s^+))(i_{k+1s+1}^{-1}(x_s^+))'; \end{aligned}$$

так как $(i_{ks}^{-1}(x_s^-))' = (i_{k+1s+1}^{-1}(x_s^+))' = 0$, в данном случае точка разбиения является локальным экстремумом функции h ;

- іі) ω_s принадлежит классу эквивалентности с базисным отрезком ω_k , а ω_{s+1} другому классу с базисным отрезком ω_{k+1} , тогда

$$\begin{aligned} h'(x_s^-) &= (h(i_{ks}^{-1}(x_s^-)))' = \frac{h'(i_{ks}^{-1}(x_s^-))}{i'_{ks}(x_k^-)}, \\ h'(x_s^+) &= (h(i_{k+1s+1}^{-1}(x_s^+)))' = \frac{h'(i_{k+1s+1}^{-1}(x_s^+))}{i'_{k+1s+1}(x_k^+)}; \end{aligned}$$

отсюда получаем, что в данном случае $h'(x_s^-) = h'(x_s^+) \neq 0$.

Покажем, что для построенной функции h выполнено условие (2).

На базисном отрезке ω_k имеем $h'(x) = 1 + i'_{kj}(x) - p'_{kj}(x) = 1 - g_k(x)$. В силу (10) $0 < g_k(x) < 1$, а следовательно, для $x \in \omega_k$ выполнено $h'(x) < 1$.

Проверим справедливость этого условия на небазисном отрезке ω_l , эквивалентном базисному отрезку ω_k . По построению при $x \in \omega_l$ имеем

$$h'(x) = h'(i_{kl}^{-1}(x))(i_{kl}^{-1}(x))' = \frac{h'(i_{kl}^{-1}(x))}{i'_{kl}(i_{kl}^{-1}(x))}.$$

Рассмотрим точку z , принадлежащую базисному отрезку ω_k , $z = i_{kl}^{-1}(x)$, и покажем, что $h'(z)/i'_{kl}(z) < 1$. Из вышесказанного мы знаем, что на базисном отрезке $0 < h'(z) < 1$.

Если $i'_{kl}(z) < 0$, то неравенство выполнено.

Предположим, что $i'_{kl}(z) > 0$. По построению функции h имеем $h'(z) = 1 + i'_{kj}(z) - p'_{kj}(z)$, откуда $i'_{kl}(z) - h'(z) = p'_{kj}(z) - 1$. В силу второго утверждения предложения 8 $p'_{kj}(z) - 1 > 0$. Итак, неравенство $h'(z)/i'_{kj}(z) < 1$ доказано, а из него вытекает, что $h'(x) < 1 \ \forall x \in \omega_l$.

Теорема полностью доказана.

§ 3. Случай добавочной функции, зависящей от параметра

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. Пусть семейство функций h_a сходится к функции h по норме пространства C^3 при $a \rightarrow \infty$. Тогда разбиения Ω_a и Ω , порожденные функциями h_a и h соответственно, эквивалентны, т.е. имеют одинаковые характеристические графы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из сходимости следует, что начиная с некоторого a функции h_a и h имеют одинаковые updown подстановки. Как отмечалось ранее, updown подстановка однозначно определяет характеристический граф. Что и требовалось доказать.

Разбиение Ω определено таким образом, что на двух фиксированных эквивалентных отрезках разбиения задача описания циклов периода два сводится к уни-модальному случаю. Следовательно, при фиксированной паре номеров (k, j) применимы утверждения из [7; § 2.6]. Сформулируем эти утверждения для случая произвольной функции h .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. Пусть семейство морсовских функций $h_a(x)$ сходится к морсовской функции h по норме пространства C^3 при $a \rightarrow \infty$. Рассмотрим набор функций $\{i_{kj}(x, a)\}$, определенных равенством $h_a(i_{kj}(x, a)) = h_a(x)$, а также набор функций $\{i_{kj}(x)\}$, заданный равенством $h(i_{kj}(x)) = h(x)$. Тогда каждой функции из первого набора соответствует единственная функция второго набора и наоборот. Более того, при фиксированных (k, j) функция $i_{kj}(x, a)$ сходится к функции $i_{kj}(x)$ по норме пространства C^2 на каждом отрезке, лежащем строго внутри ω_k при $a \rightarrow \infty$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15. Рассмотрим семейство

$$\tilde{f}_a: x \mapsto -x + a + h_a(x), \quad a \in [2\pi t; 2\pi(t+1)], \quad (15)$$

и разбиение Ω_a , которое в силу предложения 13 эквивалентно разбиению Ω при любом значении параметра. Пусть $\{i_{kj}(x, a)\}$ – набор инволютивных функций, где номера (k, j) пробегают номера всех пар эквивалентных отрезков. Тогда множество пар (x, a) , где x – точка 2-цикла семейства $\tilde{f}_a$, совпадает с множеством пар (x, a) , являющихся решениями уравнения

$$a = x + i_{kj}(x, a) - h_a(x) + 2\pi t. \quad (16)$$

Кроме того, для фиксированных (k, j) при достаточно больших значениях t уравнение (16) имеет единственное решение $a = p_{kj}^m(x)$ и при этом решение принадлежит классу C^2 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16. Пусть $\{p_{kj}^m(x)\}$ – набор функций циклов семейства (15) при достаточно больших значениях m . Семейство $\{h_a\}$ сходится к морсовской функции h по норме C^3 при $a \rightarrow \infty$. Набор $\{p_{kj}(x)\}$ является набором функций циклов семейства $f_a: x \mapsto -x + a + h(x)$. Зафиксируем номера k, j эквивалентных отрезков разбиения Ω . Тогда семейство $p_{kj}^m - 2\pi t$ сходится к функции p_{kj} по норме пространства C^2 при $m \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 4. Рассмотрим семейство диффеоморфизмов $\tilde{f}_a: x \mapsto -x + a + h_a(x)$, где семейство функций h_a сходится к функции h по норме C^3 при $a \rightarrow \infty$, и семейство $f_a: x \mapsto -x + a + h(x)$. Тогда при значениях параметра $a \in [2\pi t; 2\pi(t+1)]$ семейство $\tilde{f}_a$ начиная с некоторого достаточно большого t имеет бифуркационный сценарий, эквивалентный в смысле определения 9 бифуркационному сценарию семейства f_a при $a \in [0; 2\pi]$.

Список литературы

1. Ильяшенко Ю. С., Ли Вейгу. Нелокальные бифуркации. М.: МЦНМО ЧеРо, 1999.
2. Афраймович В. С., Шильников Л. П. О некоторых глобальных бифуркациях, связанных с исчезновением неподвижной точки типа седло-узел // Докл. АН СССР. 1974. Т. 219. №3. С. 1281–1285.
3. Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П. Теория бифуркаций // Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем. Фундамент. направления. Динамические системы. Т. 5. М.: ВИНТИ, 1986. С. 5–218.
4. Hirsch V. W., Pugh C. C., Shub M. Invariant manifolds. New York: Springer-Verlag, 1977. (Lecture Notes in Math. V. 583.)
5. Fenichel N. Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows // Indiana Univ. Math. J. 1971. V. 21. P. 193–226.
6. Медведев В. С. О новом типе бифуркаций на многообразиях // Матем. сб. 1980. Т. 113(155). №3. С. 487–492.
7. Борисюк А. Р. Глобальные бифуркации на бутылке Клейна. Унимодальный случай // Матем. заметки. 2002. Т. 71. №3. С. 348–363.
8. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. I. М.: Наука, 1982.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: borisyuk@rbcmail.ru

Поступила в редакцию
07.08.2003 и 09.02.2005