Общероссийский математический портал

С. В. Григорьева, В. Ю. Пахотинских, А. А. Успенский, В. Н. Ушаков, Конструирование решений в некоторых дифференциальных играх с фазовыми ограничениями, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 4, 51–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1284>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 18:26:06

УДК 512

С. В. Григорьева, В. Ю. Пахотинских, А. А. Успенский, В. Н. Ушаков

Конструирование решений в некоторых дифференциальных играх с фазовыми ограничениями

Исследуется дифференциальная игра сближения-уклонения с фиксированным моментом окончания. Предполагается, что на фазовый вектор конфликтно-управляемой системы наложены ограничения, представляющие собой замкнутое множество в пространстве позиций. Для решения задачи используется идеология стабильных мостов.

Предлагается метод свертки, с помощью которого для ряда задач эффективно строится оператор стабильного поглощения, задающий стабильные мосты. Предлагается метод приближенного построения максимального стабильного моста в этой игре. Выписаны соотношения, определяющие систему множеств, аппроксимирующую максимальный стабильный мост, и процедура управления с поводом, с помощью которой можно получить приближенное решение задачи сближения.

Библиография: 21 название.

§ 1. Постановка задачи

Пусть задана конфликтно-управляемая система, поведение которой на промежутке времени $[t_0, \vartheta]$, $t_0 \leq \vartheta < \infty$, описывается системой

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad x(t_0) = x_0, \quad u \in P, \quad v \in Q. \quad (1.1)$$

Здесь x — m -мерный фазовый вектор из евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, u — управление первого игрока, v — управление второго игрока, P и Q — компакты в евклидовых пространствах $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$ соответственно.

Предполагается, что выполнены следующие условия.

- А) Вектор-функция $f(t, x, u, v)$ определена и непрерывна по совокупности переменных (t, x, u, v) на множестве $I \times \mathbb{R}^m \times P \times Q$ и удовлетворяет условию: для любого компакта $D \subset I \times \mathbb{R}^m$ найдется такое $L = L(D) \in (0, \infty)$, что

$$\|f(t, x^{(1)}, u, v) - f(t, x^{(2)}, u, v)\| \leq L \|x^{(1)} - x^{(2)}\| \quad (1.2)$$

для любых $(t, x^{(i)}, u, v)$ из $D \times P \times Q$, $i = 1, 2$.

- Б) Существует такое число $\mu \in (0, \infty)$, что

$$\|f(t, x, u, v)\| \leq \mu(1 + \|x\|)$$

для любых $(t, x, u, v) \in I \times \mathbb{R}^m \times P \times Q$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 02-01-00769, № 02-01-96424) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-791.2003.1).

Здесь и далее I — отрезок времени, содержащий внутри себя $[t_0, \vartheta]$, т.е. $[t_0, \vartheta] \subset \text{int } I$; $\|f\|$ — норма вектора f в соответствующем евклидовом пространстве.

Рассматриваемая дифференциальная игра является антагонистической и складывается из задачи о сближении и задачи об уклонении [1]. Игра происходит в ограниченной и замкнутой области Φ пространства переменных t, x , $t \in [t_0, \vartheta]$, $x \in \mathbb{R}^m$. В задаче о сближении, стоящей перед первым игроком, требуется обеспечить попадание движения $x(t)$, $(t, x(t)) \in \Phi$, $t \in [t_0, \vartheta]$, системы (1.1) в момент ϑ на замкнутое множество M , содержащееся в $\Phi(\vartheta) = \{x \in \mathbb{R}^m : (\vartheta, x) \in \Phi\}$. Решение задачи требуется обеспечить в классе позиционных процедур управления первого игрока [1].

В [1] было показано, что для сформулированной дифференциальной игры справедлива альтернатива, а именно: существует такое замкнутое множество $W^0 \subset \Phi$, называемое *множеством позиционного поглощения*, что для всех исходных позиций $(t_*, x_*) \in W^0$ разрешима задача о сближении, а для всех исходных позиций $(t_*, x_*) \in \Phi \setminus W^0$ разрешима задача об уклонении. При этом установлено, что W^0 есть максимальный u -стабильный мост. Свойство стабильности можно определить различными способами, и самая ранняя формулировка этого свойства дана в работах Н. Н. Красовского и А. И. Субботина (см., например, [2], [3]). В 70-е годы в теории дифференциальных игр формируется новое направление — унификация дифференциальных игр. Здесь прежде всего отметим исследования Н. Н. Красовского [4], [5], в которых было дано определение унификационных моделей, изучены их свойства и указаны перспективы применения в различных классах дифференциальных игр. Суть унификации, представленной в [4], [5], состоит том, что свойство стабильности может быть выражено в терминах векторов сопряженных переменных и гамильтониана конфликтно-управляемой системы (1.1). Унификации посвящены также работы [6]–[8]. В настоящей статье используется одна из последних унификационных формулировок свойства стабильности [7], [8] в весьма общем виде (аксиомы А.1)–(А.3)). Для некоторых классов систем указан метод формирования семейств множеств (метод свертки), удовлетворяющих А.1)–А.3). В §2 определяется оператор стабильного поглощения, задающий свойство стабильности.

Множество W^0 допускает аналитическое описание лишь в редких случаях, поэтому важен вопрос о приближенном построении множества W^0 , который рассматривается в §3. С использованием попятных конструкций вводится система множеств $\{\widetilde{W}^{(n)}(t_i) : t_i \in \Gamma_i\}$, отвечающая некоторому конечному разбиению Γ_n отрезка $[t_0, \vartheta]$. Обосновывается сходимость системы множеств $\{\widetilde{W}^{(n)}(t_i) : t_i \in \Gamma_n\}$ к W^0 при стремлении к нулю диаметра разбиения Γ_n . В этом смысле система $\{\widetilde{W}^{(n)}(t_i) : t_i \in \Gamma_n\}$ является аппроксимирующей системой множеств для моста W^0 .

В §4 приводится позиционная процедура управления с поводирем первого игрока, отвечающая разбиению Γ_n промежутка $[t_0, \vartheta]$, и определяется движение $x[t] = x[t; t_k, x[t_k], \Gamma_n]$, $t \in [t_k, \vartheta]$, с начальным значением $x[t_k] \in \widetilde{W}^{(n)}(t_k)$, отвечающее разбиению Γ_n (аппроксимационное движение). Устанавливается, что для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$, для всех разбиений Γ_n с достаточно малым диаметром $\Delta^{(n)}$ любое аппроксимационное движение $x[t] = x[t; t_k, x[t_k], \Gamma_n]$,

$t \in [t_*, \vartheta]$, $(t_k, x[t_k]) \in \widetilde{W}^{(n)}(t_k)$, удовлетворяет включениям

$$(t, x[t]) \in \Phi_\varepsilon, \quad t \in [t_*, \vartheta], \quad x[\vartheta] \in M_\varepsilon.$$

В заключительной части §4 для точек $(t_*, x_*) \in W^0$ определяется движение $x(t)$, $t \in [t_*, \vartheta]$, $x(t_*) = x_*$, как предел аппроксимационных движений $x[t] = x[t; t_k, x[t_k], \Gamma_n]$, $t \in [t_k, \vartheta]$, $(t_k, x[t_k]) = (\tau_n, x_n)$, где $(\tau_n, x_n) \in \widetilde{W}^{(n)}(\tau_n)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (\tau_n, x_n) = (t_*, x_*)$. Это предельное движение $x(t)$, $t \in [t_*, \vartheta]$, называемое *движением системы* (1.1), порожденным процедурой управления с поводьрем первого игрока, удовлетворяет включениям $(t, x(t)) \in \Phi$, $t \in [t_*, \vartheta]$, и $x(\vartheta) \in M$.

§2. Оператор стабильного поглощения и стабильные мосты

Поскольку W^0 – максимальный u -стабильный мост [1], то свойство стабильности является ключевым при выделении множества W^0 в Φ . Стабильность множества W , содержащегося в Φ , означает слабую инвариантность W относительно некоторого семейства дифференциальных включений, связанных с (1.1) и рассматриваемых на $[t_0, \vartheta]$. Семейство дифференциальных включений мы определяем здесь в достаточно общей форме аксиоматически при помощи условий А.1)–А.3) и затем приводим примеры конкретных семейств дифференциальных включений, удовлетворяющих А.1)–А.3). Отметим также, что свойство слабой инвариантности дифференциальных включений хорошо изучено (см., например, [9], [10]).

Для описания семейства дифференциальных включений, удовлетворяющих А.1)–А.3), введем в рассмотрение функцию (гамильтониан) системы

$$H(t, x, l) = \max_{u \in P} \min_{v \in Q} \langle l, f(t, x, u, v) \rangle, \quad l \in \mathbb{R}^m,$$

$\langle l, f \rangle$ – скалярное произведение векторов l и f из $\mathbb{R}^m$.

Для удобства последующих рассуждений, особенно тех, которые относятся к построению позиционной процедуры управления с поводьрем первого игрока, обеспечивающей не точное решение задачи о сближении, а ε -решение, осуществим погружение области Φ в более широкую ограниченную и замкнутую область $D \subset I \times \mathbb{R}^m$. Эта область D выбрана таким образом, что для некоторого наперед заданного $\varepsilon^* \in (0, \infty)$ верно включение $\Phi_{\varepsilon^*} \subset D$.

Здесь Φ_ε ($\varepsilon \in (0, \infty)$) – ε -окрестность в пространстве переменных (t, x) .

Пусть $(t, x) \mapsto G(t, x) \subset \mathbb{R}^m$, $(t, x) \in D$, – непрерывное в хаусдорфовой метрике многозначное отображение, $G(t, x)$ – выпуклые компакты в $\mathbb{R}^m$, удовлетворяющие включению

$$F(t, x) \subset G(t, x),$$

$F(t, x) = \text{co}\{f(t, x, u, v) : u \in P, v \in Q\}$, $\text{co}\{f\}$ – выпуклая оболочка множества $\{f\}$.

Пусть также задано некоторое множество Ψ элементов ψ и семейство $\{F_\psi : \psi \in \Psi\}$ отображений $F_\psi : (t, x) \mapsto F_\psi(t, x) \subset \mathbb{R}^m$, $(t, x) \in D$, удовлетворяющее следующим условиям:

А.1) для любых $(t, x, \psi) \in D \times \Psi$ множество $F_\psi(t, x)$ выпукло, замкнуто в $\mathbb{R}^m$ и удовлетворяет включению $F_\psi(t, x) \subset G(t, x)$;

А.2) для любых $(t, x, l) \in D \times S$ выполняется равенство

$$\min_{\psi \in \Psi} h_{F_\psi(t, x)}(l) = H(t, x, l);$$

А.3) существует такая функция $\omega^*(\delta)$ ($\omega^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$), что

$$d(F_\psi(t^*, x^*), F_\psi(t_*, x_*)) \leq \omega^*(|t^* - t_*| + \|x^* - x_*\|), \\ (t_*, x_*), (t^*, x^*) \in D, \quad \psi \in \Psi.$$

Здесь $h_F(l) = \sup_{f \in F} \langle l, f \rangle$ при $F \subset \mathbb{R}^m$, $S = \{l \in \mathbb{R}^m : \|l\| = 1\}$, $d(F^*, F_*)$ – хаусдорфово расстояние между множествами F^* и F_* из $\mathbb{R}^m$.

В качестве примеров семейств отображений, удовлетворяющих условиям А.1)–А.3), укажем семейства $\{G_l : l \in S\}$:

$$G_l(t, x) = \{f \in G(t, x) : \langle l, f \rangle \leq H(t, x, l)\},$$

$$\{F_{v(\cdot)} : v(\cdot) \in V\};$$

$$F_{v(\cdot)}(t, x) = \overline{\text{co}}\{f \in \mathbb{R}^m : f = f(t, x, u, v(u)), u \in P\};$$

здесь $G(t, x) = G = \{f \in \mathbb{R}^m : \|f\| \leq K < \infty\}$ – шар в $\mathbb{R}^m$, удовлетворяющий включению $F(t, x) \subset G(t, x)$, $(t, x) \in D$, и V – совокупность всех отображений $v(\cdot) : P \rightarrow Q$, $\overline{\text{co}}\{\cdot\}$ – замкнутая выпуклая оболочка множества $\{\cdot\}$.

Важным классом семейств отображений, удовлетворяющих А.1)–А.3), является семейство $\{F_l : l \in S\}$:

$$F_l(t, x) = \{f \in G(t, x) : \langle l, f \rangle \leq H(t, x, l)\}$$

(см. [11]) в случае, когда выполняются условия

$$G(t, x) = F(t, x), \\ H_*(t, x, l) < H(t, x, l) < H^*(t, x, l), \quad l \in S, \\ H_*(t, x, l) = \min_{(u, v) \in P \times Q} \langle l, f(t, x, u, v) \rangle, \\ H^*(t, x, l) = \max_{(u, v) \in P \times Q} \langle l, f(t, x, u, v) \rangle.$$

Для некоторых классов управляемых систем, в частности для систем (1.1) с правой частью

$$f(t, x, u, v) = g(t, x) + B(t, x)u + C(t, x)v$$

и ограничениями P и Q – выпуклыми многогранниками с конечным числом вершин, можно ввести семейство отображений, удовлетворяющее условиям А.1)–А.3), которое соответствует конечному множеству Ψ . В качестве такого множества Ψ можно взять набор вершин $v^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, J$, многогранника Q , а в качестве множеств $F_\psi(t, x)$ – множества

$$F_{v^{(j)}}(t, x) = \{f = g(t, x) + B(t, x)u + C(t, x)v^{(j)} : u \in P\}, \quad j = 1, 2, \dots, J.$$

Такое задание семейства $\{F_{v(j)}, j = 1, 2, \dots, J\}$ позволяет эффективно осуществить, по крайней мере для систем второго порядка, приближенное построение множества W^0 .

Рассмотрим еще один важный метод построения семейства отображений, удовлетворяющего условиям А.1)–А.3) [12], [13]. При этом построении мы будем отталкиваться от “стандартной” унифицированной схемы, основу которой составляет семейство отображений $(t, x) \mapsto F_l(t, x)$. Этот метод можно охарактеризовать как метод свертки унифицированной системы множеств $\{F_l(t, x) : l \in S\}$ в некоторую конечную систему множеств $\{F_\psi(t, x) : \psi \in \Psi\}$. Он тесно связан с идеей разбиения пространства векторов l на участки выпуклости положительно-однородной по l функции $H(t, x, l)$ и подходит для тех управляемых систем, гамильтониан которых допускает конечное число участков выпуклости, не зависящих от (t, x) . Идея разбиения пространства векторов l на участки выпуклости функции Гамильтона $H(t, x, l)$ впервые применялась В. С. Пацко при изучении дифференциальных игр качества второго порядка в [14] и при построении функции цены дифференциальных игр в [15].

Итак, пусть управляемой системе (1.1) и отвечающему ей гамильтониану $H(t, x, l)$ можно сопоставить конечное число замкнутых подмножеств L_ψ , $\psi \in \Psi$, сферы S , удовлетворяющих следующим условиям:

- В.1) конус $K(L_\psi)$ – выпуклое множество;
- В.2) $H(t, x, l)$ – выпуклая по l на $K(L_\psi)$ функция при любых $(t, x) \in D$;
- В.3) $S = \bigcup_{\psi \in \Psi} L_\psi$.

Здесь $K(L_\psi) = \{l^* \in \mathbb{R}^m : l^* = \lambda l, \lambda \geq 0, l \in L_\psi\}$ – конус в $\mathbb{R}^m$, натянутый на множество L_ψ .

Таким образом, система множеств L_ψ , $\psi \in \Psi$, представляет собой покрытие сферы $S \subset \mathbb{R}^m$, а система конусов $K(L_\psi)$, $\psi \in \Psi$, представляет собой покрытие пространства $\mathbb{R}^m$ конечным набором выпуклых и замкнутых конусов.

Введем в рассмотрение множества (см. рис. 2.1)

$$\begin{aligned} \Pi_l(t, x) &= \{f \in \mathbb{R}^m : \langle l, f \rangle \leq H(t, x, l)\}, \\ A_\psi(t, x) &= \bigcap_{l \in L_\psi} \Pi_l(t, x), \quad \Lambda^\psi(t, x) = \partial A_\psi(t, x) \cap \text{int } F(t, x), \\ L_\psi(t, x) &= \text{cl}\{l \in S : \langle l, z \rangle = h_{A_\psi(t, x)}(l) \text{ для некоторого } z \in \Lambda^\psi(t, x)\}, \\ F_\psi(t, x) &= A_\psi(t, x) \cap F(t, x) = \bigcap_{l \in L_\psi} F_l(t, x). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь ∂A и $\text{cl } A$ – соответственно граница и замыкание множества A .

Предположим также, что выполняется условие

- В.4) $\text{int } F_\psi(t, x) \neq \emptyset, (t, x, \psi) \in D \times \Psi$.

Справедливо утверждение

ТЕОРЕМА 2.1. Семейство отображений $\{F_\psi : D \rightarrow 2^{\mathbb{R}^m}\}$, отвечающее множеству Ψ и заданное равенствами (2.1), удовлетворяет условиям А.1)–А.3).

Рис. 2.1

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Условие независимости множеств L_ψ от позиций (t, x) является достаточно жестким. Его можно ослабить, предположив непрерывную зависимость множеств L_ψ от позиций (t, x) . Однако во избежание усложнения доказательства теоремы 2.1 мы будем предполагать выполнение условий В.1)–В.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем основные факты, используемые при доказательстве:

- С.1) $L_\psi(t, x) \subset L_\psi$ при любых $(t, x, \psi) \in D \times \Psi$;
- С.2) для любых $(t, x) \in D$ и $(l, s) \in S \times S$ имеет место $h_{F_l(t, x)}(l) \leq h_{F_s(t, x)}(l)$;
- С.3) пусть наряду с $F_\psi(t, x)$, $\psi \in \Psi$, в $F(t, x)$ содержится выпуклый компакт Ω такой, что $F_\psi(t, x) \cap \Omega = \emptyset$; тогда существует опорная $F_\psi(t, x)$ гиперплоскость $\Gamma_{l^0}(\alpha^0) = \{f \in \mathbb{R}^m : \langle l^0, f \rangle = \alpha^0\}$, $l^0 \in L_\psi(t, x)$, $\alpha^0 \in (-\infty, +\infty)$, строго разделяющая $F_\psi(t, x)$ и Ω .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Утверждение С.1) представляет собой достаточно простой геометрический факт; утверждение С.2), сформулированное А. И. Субботиным, представляет собой некоторое экстремальное свойство системы множеств $\{F_l(t, x) : l \in S\}$ (оно заключается в том, что при каждом фиксированном $l \in S$ минимум функции $\chi(l, s) = h_{F_s(t, x)}(l)$ переменной $s \in S$ достигается при $s = l$); С.3) представляет собой некоторое утверждение о строгой отделимости непересекающихся замкнутых и выпуклых множеств $F_\psi(t, x)$ и Ω при наличии ограничения $F(t, x)$ на них (суть утверждения С.3) состоит в том, что наличие ограничения на непересекающиеся множества $F_\psi(t, x)$ и Ω дает дополнительную информацию о структуре разделяющих их гиперплоскостей, см. рис. 2.2).

Как показано в [16]–[18], С.2) и С.3) являются полезными фактами при анализе и синтезе решений дифференциальных игр, задач теории оптимального управления, а также обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби.

Приступим к непосредственному доказательству теоремы 2.1.

Докажем А.1). Выпуклость и замкнутость множества $F_\psi(t, x)$, $(t, x, \psi) \in D \times \Psi$, следует из определения $F_\psi(t, x)$ как пересечения выпуклых и замкнутых множеств.

Рис. 2.2

Включение $F_\psi(t, x) \subset G(t, x)$ следует из соотношений $F_\psi(t, x) \subset F(t, x)$, $F(t, x) \subset G(t, x)$.

Докажем А.2). Пусть (t, x, l) — произвольная точка в $D \times S$.

1) Покажем, что

$$\min_{\psi \in \Psi} h_{F_\psi(t, x)}(l) \leq H(t, x, l). \quad (2.2)$$

При некотором $\psi \in \Psi$ имеет место $l \in L_\psi$. Очевидно, что $A_\psi(t, x) \subset \Pi_l(t, x)$ и, значит, $F_\psi(t, x) \subset F_l(t, x)$. Тогда $h_{F_\psi(t, x)}(l) \leq h_{F_l(t, x)}(l) = H(t, x, l)$, откуда следует (2.2).

2) Покажем, что

$$\min_{\psi \in \Psi} h_{F_\psi(t, x)}(l) \geq H(t, x, l). \quad (2.3)$$

Предположив противное неравенству (2.3)

$$\min_{\psi \in \Psi} h_{F_\psi(t, x)}(l) < H(t, x, l), \quad (2.4)$$

получаем, что при некотором $\psi^* \in \Psi$ имеет место $h_{F_{\psi^*}(t, x)}(l) < H(t, x, l)$. Тогда, полагая $\Omega = \{f \in F(t, x) : \langle l, f \rangle \geq H(t, x, l)\}$, получаем $\Omega \cap F_{\psi^*}(t, x) = \emptyset$.

Согласно С.3) найдутся $l^0 \in L_{\psi^*}(t, x)$, $\alpha^0 \in (-\infty, +\infty)$ такие, что гиперплоскость $\Gamma_{l^0}(\alpha^0)$, опорная к $F_{\psi^*}(t, x)$, строго разделяет $F_{\psi^*}(t, x)$ и Ω . Принимая во внимание С.1), получаем $l^0 \in L_{\psi^*}$. Учитывая это включение и то обстоятельство, что на конусе $K(L_{\psi^*})$ опорная функция $h_{F_{\psi^*}(t, x)}(l)$ и функция $H(t, x, l)$ совпадают, получаем $\Gamma_{l^0}(\alpha^0) = \{f \in \mathbb{R}^m : \langle l^0, f \rangle = H(t, x, l^0)\}$. По определению гиперплоскости $\Gamma_{l^0}(\alpha^0)$ имеет место $F_{\psi^*}(t, x) \subset F_{l^0}(t, x)$ и, значит, $\Omega \cap F_{l^0}(t, x) = \emptyset$. Отсюда следует $h_{F_{l^0}(t, x)}(l) < H(t, x, l)$. Из этого неравенства и $H(t, x, l) = h_{F_l(t, x)}(l)$ получаем противоречие с С.2) — экстремальным свойством системы множеств $\{F_l(t, x) : l \in S\}$. Значит, (2.4) не может иметь места и (2.3) установлено, А.2) доказано.

Докажем А.3). Введем в рассмотрение функцию

$$\omega^*(\delta) = \sup_{(t_*, x_*, t^*, x^*, \psi) \in Y} d(F_\psi(t^*, x^*), F_\psi(t_*, x_*)), \quad (2.5)$$

$Y = \{(t_*, x_*, t^*, x^*, \psi) : (t_*, x_*) \in D, (t^*, x^*) \in D, \psi \in \Psi, |t^* - t_*| + \|x^* - x_*\| \leq \delta\}$, $\delta \in (0, \infty)$. Функция $\omega^*(\delta)$ (2.5) удовлетворяет А.3).

Покажем, что $\omega^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$. Действительно, предположив противное и учитывая, что Ψ — конечное множество, получаем следующее: найдутся $\varepsilon > 0$, $\tilde{\psi} \in \Psi$ и последовательности $\{(t_k^*, x_k^*) \in D\}$, $\{(t_k^0, x_k^0) \in D\}$ такие, что $|t_k^* - t_k^0| + \|x_k^* - x_k^0\| \downarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и в то же время

$$d(F_{\tilde{\psi}}(t_k^*, x_k^*), F_{\tilde{\psi}}(t_k^0, x_k^0)) \geq \varepsilon. \quad (2.6)$$

Ненарушая общности рассуждений, считаем, что существует $\lim_{k \rightarrow \infty} (t_k^*, x_k^*) = (\tilde{t}, \tilde{x}) \in D$.

Покажем, что справедливы равенства

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_{\tilde{\psi}}(t_k^*, x_k^*) = F_{\tilde{\psi}}(\tilde{t}, \tilde{x}), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} F_{\tilde{\psi}}(t_k^0, x_k^0) = F_{\tilde{\psi}}(\tilde{t}, \tilde{x}). \quad (2.7)$$

Здесь сходимость множеств понимается как сходимость в хаусдорфовой метрике.

Проверим первое равенство. Пусть $f^* \in \lim_{k \rightarrow \infty} F_{\tilde{\psi}}(t_k^*, x_k^*)$. Для некоторой последовательности $\{f_k \in F_{\tilde{\psi}}(t_k^*, x_k^*)\}$ имеет место $f^* = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$. Векторы f_k удовлетворяют соотношениям $\langle l, f_k \rangle \leq H(t_k^*, x_k^*, l)$, $l \in L_{\tilde{\psi}}$, $f_k \in F(t_k^*, x_k^*)$. Отсюда, учитывая непрерывную зависимость функции $H(t, x, l)$ и множества $F(t, x)$ от t, x , получаем $\langle l, f^* \rangle \leq H(\tilde{t}, \tilde{x}, l)$, $l \in L_{\tilde{\psi}}$, $f^* \in F_{\tilde{\psi}}(\tilde{t}, \tilde{x})$. Тем самым установлено включение $\lim_{k \rightarrow \infty} F_{\tilde{\psi}}(t_k^*, x_k^*) \subset F_{\tilde{\psi}}(\tilde{t}, \tilde{x})$.

Проверим обратное включение $\lim_{k \rightarrow \infty} F_{\tilde{\psi}}(t_k^*, x_k^*) \supset F_{\tilde{\psi}}(\tilde{t}, \tilde{x})$. Предположив противное, получаем

$$\text{int } F_{\tilde{\psi}}(\tilde{t}, \tilde{x}) \setminus \lim_{k \rightarrow \infty} F_{\tilde{\psi}}(t_k^*, x_k^*) \neq \emptyset.$$

Пусть $f_* \in \text{int } F_{\tilde{\psi}}(\tilde{t}, \tilde{x}) \setminus \lim_{k \rightarrow \infty} F_{\tilde{\psi}}(t_k^*, x_k^*)$. Ясно, что

$$O_\delta(f_*) = \{f \in \mathbb{R}^m : \|f - f_*\| \leq \delta\} \subset F_{\tilde{\psi}}(\tilde{t}, \tilde{x})$$

при достаточно малом $\delta > 0$, откуда следует

$$\langle l, f_* \rangle + \delta \leq H(\tilde{t}, \tilde{x}, l), \quad l \in L_{\tilde{\psi}}, \quad O_\delta(f_*) \subset F(\tilde{t}, \tilde{x}).$$

В силу непрерывной зависимости $H(t, x, l)$ от t, x, l при достаточно больших k имеем $H(\tilde{t}, \tilde{x}, l) - \delta \leq H(t_k^*, x_k^*, l)$, $l \in L_{\tilde{\psi}}$. Учитывая последние два неравенства, получаем $\langle l, f_* \rangle \leq H(t_k^*, x_k^*, l)$, $l \in L_{\tilde{\psi}}$, при всех достаточно больших k . Кроме того, $f_* \in F(t_k^*, x_k^*)$ при всех достаточно больших k . Таким образом, $f_* \in F_{\tilde{\psi}}(t_k^*, x_k^*)$ при всех достаточно больших k и, значит, $f_* \in \lim_{k \rightarrow \infty} F_{\tilde{\psi}}(t_k^*, x_k^*)$. Получили противоречие с определением точки f_* . Значит, предположение от противного неверно и включение $\lim_{k \rightarrow \infty} F_{\tilde{\psi}}(t_k^*, x_k^*) \supset F_{\tilde{\psi}}(\tilde{t}, \tilde{x})$ установлено. Вместе с тем первое

из равенств (2.7) доказано. Аналогично доказывается второе равенство. Равенства (2.7) противоречат неравенству (2.6). Показано, что предположение от противного (2.6) неверно. Тем самым установлено $\omega^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$ и, значит, А.3) доказано.

Приведем пример, относящийся к построению семейств отображений $(t, x) \mapsto F_\psi(t, x)$, $\psi \in \Psi$, удовлетворяющих А.1)–А.3).

ПРИМЕР 2.1. Рассмотрим конфликтно-управляемую систему

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + u + v, \quad x[t_0] = x_0,$$

где $x \in \mathbb{R}^2$, $u \in P \subset \mathbb{R}^2$, $v \in Q \subset \mathbb{R}^2$, P и Q – выпуклые компакты такие, как на рис. 2.3, а).

Множество Ψ в этом примере состоит из четырех элементов. Множества L_ψ , на которые натянуты конусы $K(L_\psi)$ выпуклости функции Гамильтона, показаны на рис. 2.4, б). Чтобы доказать ее выпуклость на каждом из конусов $K(L_\psi)$, выпишем эту функцию (конусы $S_1, S_2, \dots, S_8$ являются ее конусами линейности, см. рис. 2.3, б)):

$$H(t, x, l) = \begin{cases} \left\langle l, \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle l, \begin{pmatrix} -1 \\ -0.4 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle l, \begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.4 \end{pmatrix} \right\rangle, & l \in S_1; \\ \left\langle l, \begin{pmatrix} 0 \\ 1.2 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle l, \begin{pmatrix} -0.4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle l, \begin{pmatrix} -0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} \right\rangle, & l \in S_2; \\ \left\langle l, \begin{pmatrix} 0 \\ 1.2 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle l, \begin{pmatrix} 0.4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle l, \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} \right\rangle, & l \in S_3; \\ \left\langle l, \begin{pmatrix} -1.2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle l, \begin{pmatrix} 1 \\ -0.4 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle l, \begin{pmatrix} -0.2 \\ -0.4 \end{pmatrix} \right\rangle, & l \in S_4; \\ \left\langle l, \begin{pmatrix} -1.2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle l, \begin{pmatrix} 1 \\ 0.4 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle l, \begin{pmatrix} -0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix} \right\rangle, & l \in S_5; \\ \left\langle l, \begin{pmatrix} 0 \\ -1.2 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle l, \begin{pmatrix} 0.4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle l, \begin{pmatrix} 0.4 \\ -0.2 \end{pmatrix} \right\rangle, & l \in S_6; \\ \left\langle l, \begin{pmatrix} 0 \\ -1.2 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle l, \begin{pmatrix} -0.4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle l, \begin{pmatrix} -0.4 \\ -0.2 \end{pmatrix} \right\rangle, & l \in S_7; \\ \left\langle l, \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle l, \begin{pmatrix} -1 \\ 0.4 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle l, \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix} \right\rangle, & l \in S_8. \end{cases}$$

Для каждого из конусов $K(L_\psi)$ можно доказать выпуклость функции $H(t, x, l)$. На рис. 2.4, а) построены множества $F_\psi(t, x)$, $\psi \in \Psi$.

Вернемся к рассмотрению общего случая дифференциальной игры сближения-уклонения.

Рис. 2.3

Рис. 2.4

Приведем определение оператора стабильного поглощения в рассматриваемой задаче в общей форме, выраженной в терминах отображений $(t, x) \mapsto F_\psi(t, x)$, $\psi \in \Psi$, удовлетворяющих А.1)–А.3).

Полагаем $X_\psi(t^*; t_*, x_*)$ – множество всех $x^* \in \mathbb{R}^m$, в которые приходят в момент $t^* \in [t_*, \vartheta]$ решения $x(\cdot) = \{x(t) : t_* \leq t \leq t^*\}$ дифференциального включения $\dot{x} \in F_\psi(t, x)$, $x(t_*) = x_*$;

$$X_\psi^{-1}(t_*; t^*, X^*) = \{x_* \in \mathbb{R}^m : X_\psi(t^*; t_*, x_*) \cap X^* \neq \emptyset\},$$

X^* – множества из $\mathbb{R}^m$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Оператором стабильного поглощения π в задаче о сближении* назовем отображение $(t_*, t^*, X^*) \rightarrow 2^{\mathbb{R}^m}$, $(t_*, t^*, X^*) \in \Delta \times 2^{\mathbb{R}^m}$, заданное соотношением

$$\pi(t_*; t^*, X^*) = \Phi(t_*) \cap \left(\bigcap_{\psi \in \Psi} X_\psi^{-1}(t_*; t^*, X^*) \right).$$

Здесь $\Delta = \{(t_*, t^*) : t_0 \leq t_* < t^* \leq \vartheta\}$ – множество в пространстве $[t_0, \vartheta] \times [t_0, \vartheta]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Замкнутое множество $W \subset \Phi$ назовем *u -стабильным мостом в задаче о сближении*, если

$$W(\vartheta) \subset M, \quad W(t_*) \subset \pi(t_*; t^*, W(t^*)), \quad (t_*, t^*) \in \Delta.$$

Здесь $W(t) = \{x \in \mathbb{R}^m : (t, x) \in W\}$.

Свойство стабильности является центральным в теории позиционных дифференциальных игр [1]. Приведенное здесь определение 2.2 – более позднее определение стабильности [7], [8]. Однако можно показать, что u -стабильные мосты W^0 , выделяемые в Φ при помощи этого определения и определения из [1], – одни и те же. Это обстоятельство позволяет нам использовать семейства $\{F_\psi : \psi \in \Psi\}$, удовлетворяющие условиям А.1)–А.3), для выделения в Φ максимального u -стабильного моста W^0 – множества позиционного поглощения [1].

При решении задачи о сближении на основе позиционного подхода основная тяжесть ложится на построение моста W^0 . Известно, что описать точно мост W^0 при помощи аналитических соотношений можно лишь для некоторых специальных классов систем (1.1). В общем же случае приходится отказаться от точного выделения W^0 . В связи с этим на передний план выступает задача приближенного построения W^0 . Решению этой задачи посвящен следующий параграф.

§3. Аппроксимирующая система множеств

Предполагаем, что семейство $\{F_\psi : \psi \in \Psi\}$ удовлетворяет также условию А.4) существует число $\lambda \in (0, \infty)$ такое, что

$$d(F_\psi(t, x_*), F_\psi(t, x^*)) \leq \lambda \|x_* - x^*\|$$

для любых $\psi \in \Psi$, (t, x_*) и (t, x^*) из Φ_σ .

Приведем определение аппроксимирующей системы множеств, ориентированное на приближенное вычисление множества W^0 . Понятие аппроксимирующей системы множеств возникает при подмене непрерывной (по времени) схемы u -стабильной дискретной схемой. А именно, промежуток $[t_0, \vartheta]$ подменяется разбиением $\Gamma = \{t_0, t_1, \dots, t_n = \vartheta\}$, а множества $X_\psi(t^*; t_*, x_*)$, $\psi \in \Psi$, из определения 2.1 подменяются множествами $x_* + (t^* - t_*)F_\psi(t_*, x_*)$, $\psi \in \Psi$. Далее, определения 2.1 и 2.2 соответствующим образом трансформируются в определения, предназначенные для работы с дискретным временем t_i , $i = 0, 1, \dots, N-1, N$.

Итак, полагаем

$$\begin{aligned}\tilde{X}_\psi(t^*; t_*, x_*) &= x_* + (t^* - t_*)F_\psi(t_*, x_*), \\ \tilde{X}_\psi^{-1}(t_*; t^*, X^*) &= \{x_* \in \mathbb{R}^m : \tilde{X}_\psi(t^*; t_*, x_*) \cap X^* \neq \emptyset\},\end{aligned}$$

где $(t_*, t^*) \in \Delta$, $x_* \in \mathbb{R}^m$, $X^* \subset \mathbb{R}^m$, $\psi \in \Psi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. *Аппроксимирующим оператором стабильного поглощения* π^ε , $\varepsilon \in (0, \sigma)$, в задаче о сближении назовем отображение $(t_*, t^*, X^*) \rightarrow \Delta \times 2^{\mathbb{R}^m}$, заданное соотношением

$$\pi^\varepsilon(t_*; t^*, X^*) = \Phi(t_*)_\varepsilon \cap \left(\bigcap_{\psi \in \Psi} \tilde{X}_\psi^{-1}(t_*; t^*, X^*) \right).$$

Обозначим

$$\begin{aligned}\omega^*(\delta) &= \sup_{\substack{(t_*, x_*), (t^*, x^*) \in \Phi_\sigma \\ |t_* - t^*| + \|x_* - x^*\| \leq \delta}} \omega^*(|t_* - t^*| + \|x_* - x^*\|), \\ \omega(\delta) &= \delta \omega^*((1 + K)\delta), \quad \delta > 0.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Из определения $\omega^*(\delta)$ и $\omega(\delta)$ следует, что они монотонно убывают к нулю при $\delta \downarrow 0$, причем $\lim_{\delta \downarrow 0} (\omega^*(\delta)/\delta) = 0$.

Зададим последовательность таких разбиений $\Gamma_n = \{t_0, t_1, \dots, t_{N(n)} = \vartheta\}$ отрезка $[t_0, \vartheta]$, что диаметры $\Delta^{(n)} = \max\{\Delta_i : 0 \leq i \leq N(n) - 1\}$, $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$, разбиений Γ_n монотонно стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Отметим, что моменты t_i разбиений Γ_n – свои для каждого разбиения Γ_n ; однако чтобы не усложнять обозначений, эту зависимость моментов t_i от номера n явно отражать не будем.

Каждому разбиению Γ_n поставим в соответствие последовательность $\{\varepsilon_i\}$ чисел $\varepsilon_i = \omega(\Delta_{i-1}) + (1 + \lambda \Delta_{i-1})\varepsilon_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, N(n)$, $\varepsilon_0 = 0$.

Примем также, что разбиения Γ_n выбраны настолько “мелкими”, что для любого Γ_n выполняются неравенства

$$\begin{aligned}\max_{0 \leq i \leq N(n)-1} (1 + K)\Delta_i &= (1 + K)\Delta^{(n)} \leq \sigma, \\ \max_{0 \leq i \leq N(n)-1} \varepsilon_i &\leq \sigma.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Поставим в соответствие каждому разбиению Γ_n последовательность $\{\widetilde{W}^{(n)}(t_i)\}$ множеств $\widetilde{W}^{(n)}(t_i) \subset \mathbb{R}^m$, $t_i \in \Gamma_n$, заданную рекуррентными соотношениями, начиная от конечного момента $t_{N(n)} = \vartheta$ разбиения Γ_n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Полагаем

$$\widetilde{W}^{(n)}(\vartheta) = M_{\varepsilon_{N(n)}}, \quad \widetilde{W}^{(n)}(t_i) = \pi^{\varepsilon_i}(t_i; t_{i+1}, \widetilde{W}^{(n)}(t_{i+1})),$$

где $i = N(n) - 1, N(n) - 2, \dots, 1, 0$.

Таким образом, последовательность $\{\widetilde{W}^{(n)}(t_i)\}$ представляет собой попятно заданную последовательность множеств $\widetilde{W}^{(n)}(t_i) \subset \mathbb{R}^m$. Определим предел этой последовательности, когда $\Delta^{(n)}$ – диаметр разбиения Γ_n стремится к нулю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Полагаем Ω^0 – множество всех точек $(t_*, x_*) \in \Phi$, для каждой из которых найдется такая последовательность

$$\{(\tau_n, x_n) : \tau_n = t_n(t_*), x_n \in \widetilde{W}^{(n)}(\tau_n)\}, \quad (3.3)$$

что $(t_*, x_*) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\tau_n, x_n)$, здесь $\tau_n(t_*) = \min_{t_i \in \Gamma_n, t_i \geq t_*} t_i$.

Так как выполняется равенство $\widetilde{W}^{(n)}(\vartheta) = M_{\varepsilon_{N(n)}}$, то сечение $\Omega^0(\vartheta) = \{x \in \mathbb{R}^m : (\vartheta, x) \in \Omega^0\}$ множества Ω^0 определяется равенством $\Omega^0(\vartheta) = M$. Значит, $\Omega^0 \neq \emptyset$. Кроме того, из определения 3.3 следует $\Omega^0 \subset \Phi$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Справедливо равенство $\Omega^0 = W^0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала включение $\Omega^0 \subset W^0$. Для этого покажем, что Ω^0 – u -стабильный мост. В самом деле, выполняется включение $\Omega^0(\vartheta) \subset M$, следующее из равенства $\Omega^0(\vartheta) = M$.

Докажем теперь включение $\Omega^0(t_*) \subset \pi(t_*; t^*, \Omega^0(t^*))$ для любых $(t_*, t^*) \in \Delta$.

Зафиксируем для этого произвольную точку $(t_*, x_*) \in \Omega^0$, $t_* < \vartheta$. Найдется последовательность (3.3) такая, что $(t_*, x_*) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\tau_n, x_n)$.

Рассмотрим произвольный номер n и отвечающий ему отрезок $[\tau_n, \vartheta]$. Из включения $x_n \in \widetilde{W}^{(n)}(\tau_n)$ следует, что существует такая абсолютно непрерывная на $[\tau_n, \vartheta]$ вектор-функция $\tilde{x}^{(n)}(t)$, что для любого $\psi \in \Psi$ верно

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}^{(n)}(t) &\in F_\psi(t_i, \tilde{x}^{(n)}(t_i)), \quad t \in [t_i, t_{i+1}) \subset [\tau_n, \vartheta] \\ \tilde{x}^{(n)}(\tau_n) &= x_n, \quad \tilde{x}^{(n)}(t_i) \in \widetilde{W}^{(n)}(t_i), \quad t_i \in (\tau_n, \vartheta). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Введем в рассмотрение функции, являющиеся непрерывными продолжениями на отрезок $[t_*, \vartheta]$ функций $\tilde{x}^{(n)}(t)$, $t \in [\tau_n, \vartheta]$:

$$\tilde{y}^{(n)}(t) = \begin{cases} \tilde{x}^{(n)}(\tau_n), & t_* \leq t \leq \tau_n; \\ \tilde{x}^{(n)}(t), & \tau_n \leq t \leq \vartheta, \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Так как последовательность $\{\tilde{y}^{(n)}(t)\}$ равномерно ограничена и равномерно непрерывна на $[t_*, \vartheta]$, то из нее можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что это сама последовательность $\{\tilde{y}^{(n)}(t)\}$ равномерно сходится на $[t_*, \vartheta]$. Полагая

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{y}^{(n)}(t), \quad t \in [t_*, \vartheta],$$

получаем

$$\begin{aligned} x(t_*) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{y}^{(n)}(t_*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}^{(n)}(\tau_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_*, \\ x(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{y}^{(n)}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}^{(n)}(t), \quad t \in (t_*, \vartheta]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из соотношений (3.3)–(3.5) следует, что вектор-функция $x(t)$, $t \in [t_*, \vartheta]$, удовлетворяет дифференциальному включению

$$\dot{x} \in F_\psi(t, x) \quad \text{почти всюду на } [t_*, \vartheta] \quad (3.6)$$

и включению

$$(t, x(t)) \in \Omega^0, \quad t \in [t_*, \vartheta]. \quad (3.7)$$

Включение (3.6) доказывается стандартным образом.

Докажем включение (3.7). Зафиксируем произвольный момент $t \in [t_*, \vartheta]$. Для этого момента имеет место равенство $x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{y}^{(n)}(t)$. По построению функции $\tilde{y}^{(n)}(t)$, $t \in [t_*, \vartheta]$, выполняется включение $\tilde{y}^{(n)}(t_n(t)) = \tilde{x}^{(n)}(t_n(t)) \in \widetilde{W}^{(n)}(t_n(t))$, где момент $t_n(t)$ определен выше.

Полагаем $\eta_n = t_n(t)$ и $y_n = \tilde{x}^{(n)}(\eta_n) = \tilde{x}^{(n)}(t_n(t))$. Тогда

$$\begin{aligned} \|(t, x(t)) - (\eta_n, y_n)\| &\leq \|(t, x(t)) - (t, \tilde{y}^{(n)}(t))\| \\ &+ \|(t, \tilde{y}^{(n)}(t)) - (t_n(t), \tilde{y}^{(n)}(t_n(t)))\| \leq \|x(t) - \tilde{y}^{(n)}(t)\| + (1 + K)\Delta^{(n)}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание это неравенство и предельные соотношения

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{y}^{(n)}(t), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta^{(n)} = 0,$$

получаем

$$(t, x(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\eta_n, y_n), \quad \eta_n = t_n(t), \quad y_n \in \widetilde{W}^{(n)}(\eta_n).$$

Тем самым включение (3.7) доказано. Итак, показано, что для любой точки $(t_*, x_*) \in \Omega^0$, $t_* < \vartheta$, и любого $\psi \in \Psi$ найдется решение $x(t)$, $t \in [t_*, \vartheta]$, дифференциального включения (3.6), удовлетворяющее включению (3.7). Из (3.6), (3.7) следует $\Omega^0(t_*) \in \pi(t_*; t^*, \Omega^0(t^*))$ для любых $(t_*, t^*) \in \Delta$. Значит, Ω^0 — u -стабильный мост в рассматриваемой задаче о сближении и $\Omega^0 \subset W^0$.

Докажем обратное включение $W^0 \subset \Omega^0$.

Рассмотрим разбиение Γ_n отрезка $[t_0, \vartheta]$ и все те сечения $W^0(t_i)$, $t_i \in \Gamma_n$, моста W^0 , которые непусты. Обозначим $T_n = \{t_i \in \Gamma_n : W^0(t_i) \neq \emptyset\}$. Множество T_n непусто, так как $W^0(t_N) = M \neq \emptyset$. Кроме того, множество T_n обладает свойством: если $t_i \in T_n$, то $t_{i+1} \in T_n$.

Согласно определениям 2.1, 2.2 справедливы включения

$$W^0(t_i) \subset \Phi(t_i) \cap X_\psi^{-1}(t_i; t_{i+1}, W^0(t_{i+1})), \quad t_i \in T_n, \quad (3.8)$$

для любого $\psi \in \Psi$.

Выберем произвольный момент $t_i \in T_n$, $t_i < \vartheta$, и рассмотрим множества $W^0(t_i)$ и $W^0(t_{i+1})_{\omega(\Delta_i)}$, числа $\omega(\Delta_i)$ определены выше.

Справедливо включение

$$W^0(t_i) \subset \tilde{X}_\psi^{-1}(t_i; t_{i+1}, W^0(t_{i+1})_{\omega(\Delta_i)}), \quad t_i \in T_n. \quad (3.9)$$

Покажем это. Пусть $x(t_i) \in W^0(t_i)$.

Рассмотрим произвольное решение $x(t)$, $t \geq t_i$, дифференциального включения

$$\dot{x} \in F_\psi(t, x), \quad t \geq t_i,$$

с начальным значением $x(t_i)$.

Так как $(t_i, x(t_i)) \in W^0 \subset \text{int } \Phi_\sigma$, то при всех $t \in [t_i, t_{i+1}]$, достаточно близких к t_i , верно включение $(t, x(t)) \in \text{int } \Phi_\sigma$.

Покажем, что при сделанных относительно Γ_n предположениях верно включение $(t, x(t)) \in \text{int } \Phi_\sigma$ при всех $t \in [t_i, t_{i+1}]$.

Допустим противное: существует момент $t^\sharp \in [t_i, t_{i+1}]$, в который точка $(t, x(t))$ выходит на границу $\partial\Phi_\sigma$ множества Φ_σ . Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что $t^\sharp$ — момент первого выхода точки $(t, x(t))$, $t \geq t_i$, на границу $\partial\Phi_\sigma$, т.е. $(t, x(t)) \in \text{int } \Phi_\sigma$ при $t \in [t_i, t^\sharp]$ и $(t^\sharp, x(t^\sharp)) \in \partial\Phi_\sigma$. Отсюда следует, что почти всюду на $[t_i, t^\sharp]$ выполняется равенство

$$\dot{x}(t) = f(t), \quad \|f(t)\| \leq K.$$

Тогда точка $(t^\sharp, x(t^\sharp))$ удовлетворяет неравенству

$$\|(t^\sharp, x(t^\sharp)) - (t_i, x(t_i))\| \leq (t^\sharp - t_i) + K(t^\sharp - t_i) < (1 + K)\Delta_i < \sigma.$$

Отсюда и из $(t_i, x(t_i)) \in \Phi$ следует включение $(t^\sharp, x(t^\sharp)) \in \text{int } \Phi_\sigma$, противоречащее определению момента $t^\sharp$. Вместе с тем установлено, что $(t, x(t)) \in \text{int } \Phi_\sigma \subset \Phi_\sigma$ при всех $t \in [t_i, t_{i+1}]$.

Для выбранной нами точки $x(t_i) \in W^0(t_i)$ рассмотрим $X_\psi(t_{i+1}; t_i, x(t_i))$. Каждая точка $x(t_{i+1}) \in X_\psi(t_{i+1}; t_i, x(t_i))$ есть значение в момент t_{i+1} некоторого решения $x(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, дифференциального включения $\dot{x} \in F_\psi(t, x)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, с начальным значением $x(t_i)$. Справедливо равенство

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t) dt, \quad t \in [t_i, t_{i+1}],$$

где $f(t)$ — интегрируемая по Лебегу функция, удовлетворяющая включению $f(t) \in F_\psi(t, x(t))$ почти всюду на $[t_i, t_{i+1}]$.

Принимая во внимание включения $(t_i, x(t_i)) \in \Phi_\sigma$, $(t, x(t)) \in \Phi_\sigma$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, а также определение функции $\omega^*(\Delta)$, получаем

$$\begin{aligned} d(F_\psi(t, x(t)), F_\psi(t_i, x(t_i))) &\leq \omega^*(|t - t_i| + \|x(t) - x(t_i)\|) \leq \omega^*((1 + K)\Delta_i), \\ t &\in [t_i, t_{i+1}]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Значит, справедливо включение

$$f(t) \in F_\psi(t_i, x(t_i))_{\omega^*((1+K)\Delta_i)}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}],$$

из которого следует

$$\frac{1}{\Delta_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t) dt \in F_\psi(t_i, x(t_i))_{\omega^*((1+K)\Delta_i)}. \quad (3.11)$$

Из (3.11) имеем

$$x(t_{i+1}) \in \tilde{X}_\psi(t_{i+1}; t_i, x(t_i))_{\omega(\Delta_i)}. \quad (3.12)$$

Учитывая, что соотношение (3.12) получено для произвольной точки $x(t_{i+1}) \in X_\psi(t_{i+1}; t_i, x(t_i))$, заключаем, что

$$X_\psi(t_{i+1}; t_i, x(t_i)) \subset \tilde{X}_\psi(t_{i+1}; t_i, x(t_i))_{\omega(\Delta_i)}.$$

Из включения $x(t_i) \in W^0(t_i)$ следует, что

$$W^0(t_{i+1}) \cap X_\psi(t_{i+1}; t_i, x(t_i)) \neq \emptyset$$

и, значит,

$$W^0(t_{i+1})_{\omega(\Delta_i)} \cap \tilde{X}_\psi(t_{i+1}; t_i, x(t_i)) \neq \emptyset. \quad (3.13)$$

Поскольку момент $t_i \in T_n$ и точка $x(t_i) \in W^0(t_i)$ выбраны произвольно, то из (3.13) вытекает (3.9).

Далее, зададим систему $\{\widehat{W}^{(n)}(t_i) : t_i \in T_n\}$ множеств $\widehat{W}^{(n)}(t_i)$ равенствами $\widehat{W}^{(n)}(t_i) = W^0(t_i)_{\varepsilon_i}$ (числа ε_i определены выше в §2). По определению множеств $\widehat{W}^{(n)}(t_i)$, $t_i \in T_n$, выполняются включения $W^0(t_i) \subset \widehat{W}^{(n)}(t_i)$, $t_i \in T_n$.

Для любого $\psi \in \Psi$ справедливо

$$\widehat{W}^{(n)}(t_i) \subset \tilde{X}_\psi^{-1}(t_i; t_{i+1}, \widehat{W}^{(n)}(t_{i+1})), \quad t_i \in T_n. \quad (3.14)$$

Докажем это. Пусть $x(t_i) \in \widehat{W}^{(n)}(t_i)$ и $x^*(t_i)$ — ближайшая точка на $W^0(t_i)$ к точке $x(t_i)$. Справедливо неравенство $\|x(t_i) - x^*(t_i)\| \leq \varepsilon_i$.

Из включений $x^*(t_i) \in W^0(t_i)$ и (3.9) следует соотношение

$$W^0(t_{i+1})_{\omega(\Delta_i)} \cap \tilde{X}_\psi(t_{i+1}; t_i, x^*(t_i)) \neq \emptyset. \quad (3.15)$$

Тогда существует точка

$$x^*(t_{i+1}) = x^*(t_i) + \Delta_i f^*(t_i), \quad f^*(t_i) \in F_\psi(t_i, x^*(t_i)), \quad (3.16)$$

содержащаяся в $W^0(t_{i+1})_{\omega(\Delta_i)}$.

Так как $(t_i, x^*(t_i)) \in W^0 \subset \Phi_\sigma$ и $(t_i, x(t_i)) \in W_{\varepsilon_i}^0 \subset W_\sigma^0 \subset \Phi_\sigma$, то согласно условию А.4) выполняется неравенство

$$d(F_\psi(t_i, x(t_i)), F_\psi(t_i, x^*(t_i))) \leq \lambda \|x(t_i) - x^*(t_i)\|.$$

Принимая во внимание это неравенство, выберем вектор $f(t_i) \in F_\psi(t_i, x(t_i))$, удовлетворяющий неравенству

$$\|f(t_i) - f^*(t_i)\| \leq \lambda \|x(t_i) - x^*(t_i)\| \leq \varepsilon_i.$$

Тогда оказывается, что точка $x(t_{i+1}) = x(t_i) + \Delta_i f(t_i)$ отстоит от точки $x^*(t_{i+1})$ не более чем на величину

$$\|x(t_i) - x^*(t_i)\| + \Delta_i \|f(t_i) - f^*(t_i)\| \leq (1 + \lambda \Delta_i) \varepsilon_i.$$

Значит, $x(t_{i+1}) \in \widehat{W}^{(n)}(t_{i+1})$.

Таким образом, показано, что для любого $\psi \in \Psi$ и любых $t_i \in T_n$ и $x(t_i) \in \widehat{W}^{(n)}(t_i)$ выполняется соотношение

$$\widehat{W}^{(n)}(t_{i+1}) \cap \widetilde{X}_\psi(t_{i+1}; t_i, x(t_i)) \neq \emptyset,$$

отсюда следует (3.14).

Справедливы также включения

$$\widehat{W}^{(n)}(t_i) \subset \widetilde{W}^{(n)}(t_i), \quad t_i \in T_n. \quad (3.17)$$

Докажем (3.16) методом математической индукции. В самом деле, выполняются соотношения

$$\widehat{W}^{(n)}(t_i) = W^0(t_i)_{\varepsilon_i} \subset \Phi(t_i)_{\varepsilon_i}, \quad t_i \in T_n, \quad (3.18)$$

$$\widehat{W}^{(n)}(t_{N(n)}) = W^0(t_{N(n)})_{\varepsilon_{N(n)}} = M_{\varepsilon_{N(n)}} = \widetilde{W}(t_{N(n)}). \quad (3.19)$$

Следовательно, для $i = N(n)$ включение $\widehat{W}^{(n)}(t_i) \subset \widetilde{W}^{(n)}(t_i)$ выполняется.

Докажем, что включение (3.17) выполняется при всех остальных i , для которых $t_i \in T_n$.

Для этого предположим, что $t_i \in T_n$, $i \leq N(n) - 1$, и для момента $t_{i+1} \in T_n$ имеет место включение

$$\widehat{W}^{(n)}(t_{i+1}) \subset \widetilde{W}^{(n)}(t_{i+1}). \quad (3.20)$$

Докажем, что $\widehat{W}^{(n)}(t_i) \subset \widetilde{W}^{(n)}(t_i)$. В самом деле, из (3.14) и (3.18) следует, что

$$\widehat{W}^{(n)}(t_i) \subset \Phi(t_i)_{\varepsilon_i} \cap \widetilde{X}_\psi^{-1}(t_i; t_{i+1}, \widehat{W}^{(n)}(t_{i+1})), \quad \psi \in \Psi,$$

а из (3.20) следует

$$\Phi(t_i)_{\varepsilon_i} \cap \widetilde{X}_\psi^{-1}(t_i; t_{i+1}, \widehat{W}^{(n)}(t_{i+1})) \subset \Phi(t_i)_{\varepsilon_i} \cap \widetilde{X}_\psi^{-1}(t_i; t_{i+1}, \widetilde{W}^{(n)}(t_{i+1})), \quad \psi \in \Psi,$$

т.е. получаем, что $\widehat{W}^{(n)}(t_i) \subset \widetilde{W}^{(n)}(t_i)$. Соотношения (3.17) доказаны.

Применим (3.17) к доказательству включения $W^0 \subset \Omega^0$.

В случае, когда $t_* = \vartheta$, выполняются равенства $W^0(t_*) = M$, $\Omega^0(t_*) = M$ и, значит, $W^0(t_*) = \Omega^0(t_*)$.

Пусть $t_* < \vartheta$. Выберем произвольную точку $(t_*, x_*) \in W^0$. Верны неравенства $t_* \leq t_n(t_*) \leq t_* + \Delta^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$.

Так как $(t_*, x_*) \in W^0$, то для любого $\psi \in \Psi$ существует решение $x(t)$, $t \in [t_*, \vartheta]$, дифференциального включения $\dot{x} \in F_\psi(t, x)$, $x(t_*) = x_*$, удовлетворяющее включению $(t, x(t)) \in W^0$, $t \in [t_*, \vartheta]$. Отсюда следует включение

$$x(t_n(t_*)) \in W^0(t_n(t_*)) \subset \widehat{W}^{(n)}(t_n(t_*)) \subset \widetilde{W}^{(n)}(t_n(t_*)).$$

Значит, при каждом n найдется такая точка $x(t_n(t_*)) \in \widetilde{W}^{(n)}(t_n(t_*))$, что

$$\|x(t_n(t_*)) - x_*\| \leq K(t_n(t_*) - t_*).$$

Принимая во внимание равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} (t_n(t_*) - t_*) = 0$, получаем, что последовательность $\{(t_n(t_*), x(t_n(t_*)))\}$ точек из W^0 удовлетворяет соотношению $(t_*, x_*) = \lim_{n \rightarrow \infty} (t_n(t_*), x(t_n(t_*)))$ и, значит, $(t_*, x_*) \in \Omega^0$.

Показано, что $W^0(t_*) \subset \Omega^0(t_*)$, $t_* < \vartheta$.

Из соотношений $W^0(\vartheta) \subset \Omega^0(\vartheta)$ и $W^0(t_*) \subset \Omega^0(t_*)$, $t_* < \vartheta$, следует включение $W^0 \subset \Omega^0$. Из включений $\Omega^0 \subset W^0$ и $W^0 \subset \Omega^0$ следует равенство $\Omega^0 = W^0$. Теорема 3.1 доказана.

Рассмотрим класс управляемых динамических систем второго порядка, в которых управляющее воздействие второго игрока отсутствует. Для этих систем множество позиционного поглощения W^0 , отвечающее промежутку времени $[t_0, \vartheta]$, представляет собой множество всех начальных позиций (t_*, x_*) , из которых разрешима задача о приведении движений системы на целевое множество M за время, не превосходящее $\vartheta - t_0$.

Решается задача численного конструирования W^0 . Для этого строится разбиение $\Gamma = \{t_0, t_1, \dots, t_n = \vartheta\}$ отрезка времени $[t_0, \vartheta]$ с шагом Δ . Область на фазовой плоскости, содержащая а priori сечения по времени множества W^0 , покрывается квадратной сеткой с шагом h , пропорциональным $\Delta^{3/2}$. На сетке с помощью описанных выше попятных процедур строится совокупность множеств $\{\widetilde{W}(t_i)\}$, аппроксимирующая W^0 . Выделение границы каждого элемента совокупности осуществляется пиксельным методом. Аналогичный подход к проблеме построения численных аппроксимаций решений динамических систем применен в [16], [19]–[21]. Согласование шага разбиения промежутка времени и шага разбиения фазового пространства по формуле $h = C\Delta^{3/2}$, где C – постоянная, обеспечивает для рассматриваемого класса задач сходимость конечно-разностных конструкций к множеству W^0 в метрике Хаусдорфа.

Разработанная вычислительная схема применялась для моделирования различных управляемых динамических систем на плоскости. В качестве примера рассмотрим управляемую жесткую пружину, описываемую нелинейной системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y; \\ \dot{y} = -x - x^3 + u, \end{cases} \quad |u| \leq 1.$$

Изучается эволюция динамической системы на отрезке времени $[t_0, \vartheta] = [0, 3]$ при наличии неодносвязного фазового ограничения. В качестве фазового ограничения рассматривается квадрат $B = \{(x, y) : -1.5 \leq x \leq 1.5, -1.5 \leq y \leq 1.5\}$, из которого вырезаны круг радиуса $r = 0.2$ с центром в точке $(x, y) = (0.5, 0.5)$ и пятиконечная звезда с центром в точке $(x, y) = (-0.13, -0.15)$.

Целевым множеством является начало координат $(x, y) = (0, 0)$. Конструируется множество W^0 , которое может быть использовано в дальнейшем при решении задачи о приведении движений динамической системы в начало координат.

На рис. 3.1, 3.2, 3.3 изображены сечения множества W^0 , отвечающие моментам времени $t = 1, 2, 3$ соответственно. При численном моделировании параметр дискретизации составил $\Delta = 0.02$.

Рис. 3.1

Рис. 3.2

Рис. 3.3

§ 4. Процедура управления с поводьрем первого игрока

В этом параграфе опишем позиционную процедуру управления с поводьрем, следуя работе [1]. Отличие ее от процедуры, рассмотренной в [1], состоит лишь в том, что она выражена в унификационной схеме и ориентирована на задачи с фазовыми ограничениями.

Пусть Γ_n – некоторое разбиение из последовательности разбиений отрезка I , заданной в § 3. Предположим, что уже вычислены все $\widetilde{W}^{(n)}(t_i)$, начиная от конечного момента $t_{N(n)} = \vartheta$ разбиения Γ_n . Рассмотрим все непустые множества $\widetilde{W}^{(n)}(t_i)$, $t_i \in \Gamma_n$. Обозначим $\tilde{T}_n = \{t_i \in \Gamma_n : \widetilde{W}^{(n)}(t_i) \neq \emptyset\}$. Множество $\tilde{T}_n$ непусто, так как $\widetilde{W}^{(n)}(t_{N(n)}) \neq \emptyset$. Кроме того, множество $\tilde{T}_n$ обладает свойством: если $t_i \in \tilde{T}_n$, то $t_{i+1} \in \tilde{T}_n$.

Пусть $t_k < t_{N(n)}$ – произвольный момент в $\tilde{T}_n$ и $x_*^{(k)}$ – произвольная точка в $\widetilde{W}^{(n)}(t_k)$. Полагаем $x[t_k] = z[t_k] = x_*^{(k)}$ и рассматриваем отрезок $[t_k, t_{k+1}]$ разбиения Γ_n . Выбираем произвольный элемент $\psi(t_k) \in \Psi$ и вектор $f_{\psi(t_k)} \in F_{\psi(t_k)}(t_k, z[t_k])$ из условия

$$z[t_k] + \Delta_k f_{\psi(t_k)} \in \widetilde{W}^{(n)}(t_{k+1}). \quad (4.1)$$

Поскольку $z[t_k] \in \widetilde{W}^{(n)}(t_k)$, то $\tilde{X}_{\psi(t_k)}(t_{k+1}; t_k, z[t_k]) \cap \widetilde{W}^{(n)}(t_{k+1}) \neq \emptyset$ и, следовательно, вектор $f_{\psi(t_k)}$, удовлетворяющий (4.1), действительно существует.

Положим $z[t_{k+1}] = z[t_k] + \Delta_k f_{\psi(t_k)}$. Вектор-функцию

$$z[t] = z[t_k] + (t - t_k) f_{\psi(t_k)}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}],$$

назовем *движением поводьря на $[t_k, t_{k+1}]$, отвечающим разбиению Γ_n* .

Пусть при этом в управляемой системе (1.1) реализовалось некоторое управление $v(t)$, $t \in [t_k, t_{k+1}]$, второго игрока. Первый игрок выбирает на $[t_k, t_{k+1}]$

произвольный вектор $u_k \in P$ и полагает $u(t) = u_k$, $t \in [t_k, t_{k+1}]$. Отметим, что по постановке задачи первый игрок выбирает свое управление $u(t)$ на $[t_k, t_{k+1}]$, вообще говоря, не зная выбора, сделанного вторым игроком.

Движение $x[t]$ системы (1.1) определяется равенством на $[t_k, t_{k+1}]$

$$\dot{x}[t] = f(t, x[t], u(t), v(t)), \quad x[t_k] = x_*^{(k)}.$$

В результате в момент t_{k+1} получаем две точки — $z[t_{k+1}]$ и $x[t_{k+1}]$, которые являются исходными для построения движений поводья и системы (1.1) на следующем промежутке $[t_{k+1}, t_{k+2}]$.

В случае $z[t_{k+1}] = x[t_{k+1}]$ мы поступаем при построении движений поводья и системы (1.1) аналогично тому, как это делалось на предыдущем отрезке $[t_k, t_{k+1}]$.

Допустим, $z[t_{k+1}] \neq x[t_{k+1}]$ и, значит, $s[t_{k+1}] = z[t_{k+1}] - x[t_{k+1}] \neq 0$. В этом случае определяем вектор $l[t_{k+1}] = s[t_{k+1}] \|s[t_{k+1}]\|^{-1} \in S$ и в совокупности Ψ векторов ψ выбираем вектор $\psi(t_{k+1})$, удовлетворяющий равенству

$$h_{F_{\psi(t_{k+1})}(t_{k+1}, z[t_{k+1}])}(l[t_{k+1}]) = \min_{\psi \in \Psi} h_{F_{\psi}(t_{k+1}, z[t_{k+1}])}(l[t_{k+1}]).$$

Пусть $f_{\psi(t_{k+1})} \in F_{\psi(t_{k+1})}(t_{k+1}, z[t_{k+1}])$ — вектор, удовлетворяющий условию

$$z[t_{k+1}] + \Delta_{k+1} f_{\psi(t_{k+1})} \in \widetilde{W}^{(n)}(t_{k+2}). \quad (4.2)$$

Поскольку $z[t_{k+1}] \in \widetilde{W}^{(n)}(t_{k+1})$, то

$$\widetilde{X}_{\psi(t_{k+1})}(t_{k+2}; t_{k+1}, z[t_{k+1}]) \cap \widetilde{W}^{(n)}(t_{k+2}) \neq \emptyset$$

и, следовательно, вектор $f_{\psi(t_{k+1})}$, удовлетворяющий (4.2), существует.

Положим $z[t_{k+2}] = z[t_{k+1}] + \Delta_{k+1} f_{\psi(t_{k+1})}$. Вектор-функцию

$$z[t] = z[t_{k+1}] + (t - t_{k+1}) f_{\psi(t_{k+1})}, \quad t \in [t_{k+1}, t_{k+2}],$$

назовем *движением поводья на $[t_{k+1}, t_{k+2}]$, отвечающим разбиению Γ_n* .

Пусть при этом в управляемой системе (1.1) реализовалось некоторое управление $v(t)$, $t \in [t_{k+1}, t_{k+2}]$, второго игрока. Первый игрок выбирает на $[t_{k+1}, t_{k+2}]$ вектор $u_{k+1} \in P$ из условия

$$\min_{v \in Q} \langle l[t_{k+1}], f(t_{k+1}, x[t_{k+1}], u_{k+1}, v) \rangle = \max_{u \in P} \min_{v \in Q} \langle l[t_{k+1}], f(t_{k+1}, x[t_{k+1}], u, v) \rangle. \quad (4.3)$$

Полагаем управление первого игрока

$$u(t) = u_{k+1}, \quad t \in [t_{k+1}, t_{k+2}].$$

Тогда движение исходной системы (1.1) на $[t_{k+1}, t_{k+2}]$ определится равенством

$$\dot{x}[t] = f(t, x[t], u(t), v(t))$$

с начальным значением $x[t_{k+1}]$.

В момент t_{k+2} реализуются две точки $-z[t_{k+2}]$ и $x[t_{k+2}]$.

В случае $z[t_{k+2}] = x[t_{k+2}]$ мы поступаем аналогично тому, как это делалось на предыдущих двух этапах, т.е. выбираем управление

$$u(t) = u_{k+2}, \quad t \in [t_{k+2}, t_{k+3}),$$

где $u_{k+2} \in P$ — произвольный вектор.

Допустим, $z[t_{k+2}] \neq x[t_{k+2}]$ и, значит, $s[t_{k+2}] = z[t_{k+2}] - x[t_{k+2}] \neq 0$. В этом случае определяем вектор $l[t_{k+2}] = s[t_{k+2}] \|s[t_{k+2}]\|^{-1} \in S$. Далее из совокупности Ψ элементов ψ выберем тот элемент $\psi(t_{k+2})$, который удовлетворяет равенству

$$h_{F_{\psi(t_{k+2})}(t_{k+2}, z[t_{k+2}])}(l[t_{k+2}]) = \min_{\psi \in \Psi} h_{F_{\psi(t_{k+2})}(t_{k+2}, z[t_{k+2}])}(l[t_{k+2}]), \quad (4.4)$$

и рассмотрим любой вектор $f_{\psi(t_{k+2})} \in F_{\psi(t_{k+2})}(t_{k+2}, z[t_{k+2}])$, удовлетворяющий условию

$$z[t_{k+2}] + \Delta_{k+2} f_{\psi(t_{k+2})} \in \widetilde{W}^{(n)}(t_{k+3}). \quad (4.5)$$

Положим $z[t_{k+3}] = z[t_{k+2}] + \Delta_{k+2} f_{\psi(t_{k+2})}$. Вектор-функцию

$$z[t] = z[t_{k+2}] + (t - t_{k+2}) f_{\psi(t_{k+2})}, \quad t \in [t_{k+2}, t_{k+3}),$$

назовем *движением поводья на $[t_{k+2}, t_{k+3}]$, отвечающим разбиению Γ_n* .

Пусть при этом в системе (1.1) реализовалось некоторое управление $v(t)$, $t \in [t_{k+2}, t_{k+3})$, второго игрока. Первый игрок выбирает вектор $u_{k+2} \in P$ из условия

$$\min_{v \in Q} \langle l[t_{k+2}], f(t_{k+2}, x[t_{k+2}], u_{k+2}, v) \rangle = \max_{u \in P} \min_{v \in Q} \langle l[t_{k+2}], f(t_{k+2}, x[t_{k+2}], u, v) \rangle \quad (4.6)$$

и полагает $u(t) = u_{k+2}$, $t \in [t_{k+2}, t_{k+3})$.

Тогда движение системы (1.1) определяется равенством

$$\dot{x}[t] = f(t, x[t], u(t), v(t))$$

с начальным значением $x[t_{k+2}]$.

В результате в момент t_{k+3} реализуются две точки $-z[t_{k+3}]$ и $x[t_{k+3}]$, которые являются исходными для движений поводья и системы (1.1) на промежутке $[t_{k+3}, t_{k+4}]$. Далее мы строим движения $z[t]$ и $x[t]$ на $[t_{k+3}, t_{k+4}]$ по аналогичной схеме. В общем случае схема построения движений поводья и системы (1.1) на $[t_i, t_{i+1}]$ выглядит так.

Пусть в момент t_i в результате предыдущих построений реализовались две точки $-z[t_i]$ и $x[t_i]$, которые определяют вектор $s[t_i] = z[t_i] - x[t_i]$.

В случае, если $s[t_i] = 0$, выбираем произвольный вектор $u_i \in P$ и полагаем

$$u(t) = u_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}).$$

В случае, если $s[t_i] \neq 0$, определяем вектор $l[t_i] = s[t_i] \|s[t_i]\|^{-1} \in S$. Затем из совокупности Ψ элементов ψ выбираем элемент $\psi(t_i)$, удовлетворяющий равенству

$$h_{F_{\psi(t_i)}(t_i, z[t_i])}(l[t_i]) = \min_{\psi \in \Psi} h_{F_{\psi}(t_i, z[t_i])}(l[t_i]), \quad (4.7)$$

и рассматриваем любой вектор $f_{\psi(t_i)} \in F_{\psi(t_i)}(t_i, z[t_i])$, который определяется условием

$$z[t_i] + \Delta_i f_{\psi(t_i)} \in \widetilde{W}^{(n)}(t_{i+1}). \quad (4.8)$$

Полагаем $z[t_{i+1}] = z[t_i] + \Delta_i f_{\psi(t_i)}$. Вектор-функцию $z[t] = z[t_i] + (t - t_i) f_{\psi(t_i)}$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, называем *движением поводыря на $[t_i, t_{i+1}]$, отвечающим разбиению Γ_n* .

Пусть при этом в системе (1.1) на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$ реализовалось управление $v(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, второго игрока. Первый игрок выбирает вектор $u_i \in P$ из условия

$$\min_{v \in Q} \langle l[t_i], f(t_i, x[t_i], u_i, v) \rangle = \max_{u \in P} \min_{v \in Q} \langle l[t_i], f(t_i, x[t_i], u, v) \rangle = H(t_i, x[t_i], l[t_i]). \quad (4.9)$$

Полагаем $u(t) = u_i$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$.

Тогда движение управляемой системы (1.1) определяется равенством

$$\dot{x}[t] = f(t, x[t], u(t), v(t)), \quad t \in [t_i, t_{i+1}],$$

с начальным значением $x[t_i]$.

В результате в момент t_{i+1} реализуются две точки — $z[t_{i+1}]$ и $x[t_{i+1}]$, которые являются начальными значениями для движений поводыря и системы (1.1) на следующем промежутке $[t_{i+1}, t_{i+2}]$ разбиения Γ_n .

Выведем оценку сверху квадрата величины отклонения движения $x[t]$ системы (1.1) от движения $z[t]$ поводыря на промежутке $[t_0, \vartheta]$.

Полагая $\varepsilon(t) = \|x[t] - z[t]\|^2$, $t \in [t_0, \vartheta]$, оценим сначала сверху величину $\varepsilon(t_i) = \|s[t_i]\|^2$, $i = k + 1, k + 2, \dots, N(n)$, через начальную величину $\varepsilon(t_k) = \|s[t_k]\|^2$.

При каждом i , $k \leq i \leq N(n) - 1$, справедливо равенство

$$s[t_{i+1}] = s[t_i] + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_{\psi(t_i)} dt - \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t) dt, \quad (4.10)$$

$f_{\psi(t_i)} \in F_{\psi(t_i)}(t_i, z[t_i])$, $f(t) = f(t, x[t], u(t), v(t))$, $u(t) = u_i$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, где $\psi(t_i)$ и u_i удовлетворяют (4.7) и (4.9) соответственно, а $f_{\psi(t_i)}$ удовлетворяет (4.8).

Выполняется равенство

$$\|s[t_{i+1}]\|^2 = \|s[t_i]\|^2 + 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle s[t_i], f_{\psi(t_i)} \rangle dt - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle s[t_i], f(t) \rangle dt + \gamma(t_i, t_{i+1}), \quad (4.11)$$

$$\gamma(t_i, t_{i+1}) = \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} (f_{\psi(t_i)} - f(t)) dt \right)^2. \quad (4.12)$$

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \langle s[t_i], f_{\psi(t_i)} \rangle - \langle s[t_i], f(t) \rangle &= \langle s[t_i], f_{\psi(t_i)} \rangle - \langle s[t_i], f(t, x[t], u(t), v(t)) \rangle \\ &= \langle s[t_i], f_{\psi(t_i)} \rangle - \langle s[t_i], f(t_i, x[t_i], u(t), v(t)) \rangle \\ &\quad + \langle s[t_i], f(t_i, x[t_i], u(t), v(t)) \rangle - \langle s[t_i], f(t, x[t], u(t), v(t)) \rangle. \end{aligned}$$

Так как $(t_i, x[t_i])$ и $(t, x[t])$ из D , то

$$\|f(t_i, x[t_i], u(t), v(t)) - f(t, x[t], u(t), v(t))\| \leq \rho^*((1+K)\Delta_i), \quad (4.13)$$

где $\rho^*(\delta) = \max\{\|f(t_*, x_*, u, v) - f(t^*, x^*, u, v)\| : (t_*, x_*), (t^*, x^*) \in D, (u, v) \in P \times Q, |t_* - t^*| + \|x_* - x^*\| \leq \delta\}$,

$$\max_{(t, x, u, v) \in D \times P \times Q} \|f(t, x, u, v)\| \leq K \in [0, \infty),$$

K определено в (3.1).

Учитывая (4.13), получаем

$$\begin{aligned} \langle s[t_i], f(t, x[t], u(t), v(t)) - f(t_i, x[t_i], u(t), v(t)) \rangle \\ \leq \|s[t_i]\| \|f(t, x[t], u(t), v(t)) - f(t_i, x[t_i], u(t), v(t))\| \\ \leq 2K^* \rho^*((1+K)\Delta_i). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Здесь $K^* = \sup_{(t, x), (t, y) \in D} \|x - y\| < \infty$.

Из включения $f_{\psi(t_i)} \in F_{\psi(t_i)}(t_i, z[t_i])$ и равенства

$$h_{F_{\psi(t_i)}(t_i, z[t_i])}(l[t_i]) = H(t_i, z[t_i], l[t_i])$$

вытекает

$$\langle s[t_i], f_{\psi(t_i)} \rangle = \|s[t_i]\| \langle l[t_i], f_{\psi(t_i)} \rangle \leq \|s[t_i]\| H(t_i, z[t_i], l[t_i]). \quad (4.15)$$

Из определения $u(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1})$, следует

$$\langle s[t_i], f(t_i, x[t_i], u(t), v(t)) \rangle \geq \min_{v \in Q} \langle s[t_i], f(t_i, x[t_i], u_i, v) \rangle = \|s[t_i]\| H(t_i, x[t_i], l[t_i]). \quad (4.16)$$

Из (4.14)–(4.16) и условия липшицевости функции $H(t, x, l)$ по x следует

$$\begin{aligned} \langle s[t_i], f_{\psi(t_i)} \rangle - \langle s[t_i], f(t) \rangle \\ \leq \|s[t_i]\| (H(t_i, z[t_i], l[t_i]) - H(t_i, x[t_i], l[t_i])) + 2K^* \rho^*((1+K)\Delta_i) \\ \leq L \|s[t_i]\|^2 + 2K^* \rho^*((1+K)\Delta_i). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Для величины $\gamma(t_i, t_{i+1})$ справедлива оценка

$$\gamma(t_i, t_{i+1}) \leq 4K^2 \Delta_i^2. \quad (4.18)$$

Принимая во внимание (4.17), (4.18), получаем

$$\|s[t_{i+1}]\|^2 \leq (1 + 2L\Delta_i)\|s[t_i]\|^2 + 4K^*\rho^*((1 + K)\Delta_i)\Delta_i + 4K^2\Delta_i^2,$$

откуда следует

$$\|s[t_{i+1}]\|^2 \leq e^{2L\Delta_i}\|s[t_i]\|^2 + \Delta_i\varphi(\Delta_i), \quad (4.19)$$

где $\varphi(\Delta) = 4K\rho^*((1 + K)\Delta) + 4K^2\Delta$ — величина, стремящаяся к нулю при $\Delta \rightarrow 0$ и не зависящая от выбора точек $(t_i, x[t_i])$ и $(t_i, z[t_i])$.

Оценка (4.19) справедлива при всех $i = k, k+1, \dots, N(n)-1$. Из (4.19) путем последовательной подстановки вместо величины $\|s[t_i]\|^2$ ее оценки сверху получаем

$$\|s[t_i]\|^2 \leq e^{2L(\vartheta-t_0)}(\|s[t_k]\|^2 + (\vartheta - t_0)\varphi(\Delta^{(n)})), \quad i = k+1, k+2, \dots, N(n). \quad (4.20)$$

Так как $\|s[t_k]\| = 0$, то

$$\|s[t_i]\|^2 \leq e^{2L(\vartheta-t_0)}(\vartheta - t_0)\varphi(\Delta^{(n)}). \quad (4.21)$$

Выполняется также неравенство

$$\|z[t] - z[t_i]\| \leq (t - t_i)\|f_{\psi(t_i)}\| \leq K\Delta^{(n)}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}],$$

из которого следует

$$\|(t, z[t]) - (t_i, z[t_i])\| \leq (1 + K)\Delta^{(n)}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}]. \quad (4.22)$$

Так как $(t_i, z[t_i]) \in \widetilde{W}^{(n)}(t_i) \subset \Phi_{\varepsilon_i}$, то

$$(t, z[t]) \in \Phi_{\widehat{\varepsilon}_i}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad (4.23)$$

где $\widehat{\varepsilon}_i = \varepsilon_i + (1 + K)\Delta^{(n)}$.

Учитывая $\|x[t] - x[t_i]\| \leq K\Delta^{(n)}$, $\|z[t] - z[t_i]\| \leq K\Delta^{(n)}$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = k+1, k+2, \dots, N(n)-1$, а также оценку (4.21), получаем

$$\begin{aligned} \|x[t] - z[t]\| &\leq \|x[t] - x[t_i]\| + \|x[t_i] - z[t_i]\| + \|z[t_i] - z[t]\| \\ &\leq 2K\Delta^{(n)} + e^{L(\vartheta-t_0)}(\vartheta - t_0)^{1/2}\varphi(\Delta^{(n)})^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} d((t, x[t]), \Phi) &\leq \|(t, x[t]) - (t, z[t])\| + d((t, z[t]), \Phi) \\ &\leq 2K\Delta^{(n)} + e^{L(\vartheta-t_0)}(\vartheta - t_0)^{1/2}\varphi(\Delta^{(n)})^{1/2} + \widehat{\varepsilon}_i \\ &\leq 2K\Delta^{(n)} + e^{L(\vartheta-t_0)}(\vartheta - t_0)^{1/2}\varphi(\Delta^{(n)})^{1/2} + \varepsilon_{N(n)} + (1 + K)\Delta^{(n)}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Здесь $d((t, x), \Phi) = \min_{w \in \Phi} \|(t, x) - w\|$ — расстояние от точки (t, x) до множества Φ .

Таким образом, движение системы (1.1) $x[t]$, $t \in [t_0, \vartheta]$, построенное с помощью поводыря $z[t]$, $t \in [t_0, \vartheta]$, для разбиения Γ_n , удовлетворяет включению

$$(t, x[t]) \in \Phi_{\xi(n)}, \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad (4.26)$$

где $\xi(n) = 2K\Delta^{(n)} + e^{L(\vartheta-t_0)}(\vartheta-t_0)^{1/2}\varphi(\Delta^{(n)})^{1/2} + \varepsilon_{N(n)} + (1+K)\Delta^{(n)}$.

Величина $\xi(n)$ удовлетворяет соотношению $\lim_{n \rightarrow \infty, \Delta^{(n)} \rightarrow 0} \xi(n) = 0$.

Из включений $z[t_i] \in \widetilde{W}^{(n)}(t_i)$, $i = k, k+1, \dots, N(n)$, следует неравенство

$$d(x[t_i], \widetilde{W}^{(n)}(t_i)) \leq \|x[t_i] - z[t_i]\| \leq e^{L(\vartheta-t_0)}(\vartheta-t_0)^{1/2}\varphi(\Delta^{(n)})^{1/2}$$

и, значит,

$$d(x[\vartheta], \widetilde{W}^{(n)}(\vartheta)) \leq e^{L(\vartheta-t_0)}(\vartheta-t_0)^{1/2}\varphi(\Delta^{(n)})^{1/2}. \quad (4.27)$$

Из (4.27) вытекает включение $x[\vartheta] \in M_{\varepsilon^*(n)}$, где

$$\varepsilon^*(n) = e^{L(\vartheta-t_0)}(\vartheta-t_0)^{1/2}\varphi(\Delta^{(n)})^{1/2} + \varepsilon_{N(n)} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, $\Delta^{(n)} \rightarrow 0$.

Тем самым показано, что указанная процедура управления с поводырем обеспечивает для любого $\varepsilon \in (0, \infty)$ при помощи выбора достаточно мелкого разбиения Γ_n включения

$$(t, x[t]) \in \Phi_\varepsilon, \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad x[\vartheta] \in M_\varepsilon, \quad (4.28)$$

каковы бы ни были при этом управления второго игрока. Для выполнения включений (4.28) достаточно выбрать n и Γ_n такими, что $\xi(n) \leq \varepsilon$, $\varepsilon^*(n) \leq \varepsilon$.

Пусть теперь $(t_*, x_*) \in W^0$. Тогда согласно теореме 3.1 найдется такая последовательность

$$\{(\tau_n, x_n) : \tau_n = t_n(t_*), x_n \in \widetilde{W}^{(n)}(\tau_n)\},$$

что $(t_*, x_*) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\tau_n, x_n)$.

Полагая для каждого n $t_k = \tau_n$, $x[t_k] = x_n$, осуществим при этих начальных условиях $(t_k, x[t_k]) \in \widetilde{W}^{(n)}(t_k)$ процедуру управления с поводырем первого игрока. В результате применения такой процедуры реализуется некоторое движение $x[t]$ системы (1.1). Для того чтобы отразить тот факт, что движения $x[t]$, $t \in [\tau_n, \vartheta]$, конструировались по начальным условиям $(t_k, x[t_k]) = (\tau_n, x_n)$ и разбиению Γ_n , введем обозначение $x[t] = x[t; \tau_n, x_n; \Gamma_n]$, $t \in [\tau_n, \vartheta]$. Продолжим каждое движение с отрезка $[\tau_n, \vartheta]$ на больший отрезок $[t_*, \vartheta]$:

$$\overline{x}[t] = \begin{cases} x_n, & t_* \leq t < \tau_n; \\ x[t], & \tau_n \leq t < \vartheta, \end{cases}$$

и обозначим $\overline{x}[t] = x[t; t_*, x_n; \Gamma_n]$, $t \in [t_*, \vartheta]$.

Из последовательности $\{\bar{x}[t] = x[t; t_*, x_n; \Gamma_n]\}$ можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность на $[t_*, \vartheta]$. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что это — сама последовательность $\{\bar{x}[t]\}$. Обозначим $x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}[t]$, $t \in [t_*, \vartheta]$. Эту предельную вектор-функцию $x(t)$, $t \in [t_*, \vartheta]$, мы называем в соответствии с [1] *движением системы (1.1), порожденным процедурой управления с поводом первого игрока*. Движение $x(t)$, $t \in [t_*, \vartheta]$, отвечает не одному какому-либо разбиению Γ_n отрезка $[t_0, \vartheta]$, а последовательности разбиений $\{\Gamma_n\}$ с $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta^{(n)} = 0$. Легко доказать, учитывая оценки (4.27), (4.28), что предельное движение $x(t)$, $t \in [t_*, \vartheta]$, удовлетворяет включениям

$$(t, x(t)) \in \Phi, \quad t \in [t_*, \vartheta], \quad x(\vartheta) \in M. \quad (4.29)$$

Следовательно, предложенная здесь процедура управления с поводом первого игрока решает задачу сближения для всех исходных позиций $(t_*, x_*) \in W^0$.

Список литературы

1. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
2. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
3. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Смешанные управления в дифференциальной игре // Докл. АН СССР. 1969. Т. 188. № 4. С. 745–747.
4. Красовский Н. Н. К задаче унификации дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226. № 5. С. 1260–1263.
5. Красовский Н. Н. Унификация дифференциальных игр // Игровые задачи управления. Труды Института математики и механики. Т. 24. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1977. С. 32–45.
6. Алексейчик М. И. Дальнейшая формализация основных элементов антагонистической дифференциальной игры // Математический анализ и его приложения. Т. 7. Ростов-на-Дону: Рост. гос. ун-т, 1975. С. 191–199.
7. Тарасев А. М., Ушаков В. Н. О построении стабильных мостов в минимаксной игре сближения-уклонения // Деп. в ВИНТИ. 1983. № 2454-83.
8. Тарасев А. М., Ушаков В. Н., Хрипунов А. П. Об одном вычислительном алгоритме решения игровых задач управления // Прикл. матем. и мех. 1987. Т. 51. № 2. С. 216–222.
9. Куржанский А. Б., Филиппова Т. Ф. Дифференциальные включения с фазовыми ограничениями. Метод возмущений // Труды МИАН. 1995. Т. 211. С. 304–315.
10. Филиппова Т. Ф. Задачи о выживаемости для дифференциальных включений // Дис. ... докт. физ.-матем. наук. Екатеринбург: Ин-т математики и механики УрО РАН, 1992.
11. Ушаков В. Н. К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения // Изв. АН СССР. Сер. техн. кибернетика. 1980. № 4. С. 29–36.
12. Ушаков В. Н., Григорьева С. В. Конструирование оператора стабильного поглощения в дифференциальных играх // Изв. РАН. Сер. теория и сист. управл. 1996. № 4. С. 69–76.
13. Grigorieva S. V., Ushakov V. N. Use finite family of multivalued maps for constructing stable absorption operator // Topol. Methods Nonlinear Anal. 2000. V. 15. P. 75–89.
14. Пацко В. С. Квазилинейная дифференциальная игра качества второго порядка. I // Задачи динамического программирования. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1981. С. 53–65.
15. Исакова Е. А., Логунова Г. В., Пацко В. С. Построение стабильных мостов в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания // Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр (материалы по математическому обеспечению ЭВМ). Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984. С. 127–158.

16. *Ушаков В. Н.* Процедуры построения стабильных мостов в дифференциальных играх // Дис. . . . докт. физ.-матем. наук. Екатеринбург: Ин-т математики и механики УрО РАН, 1991.
17. *Тарасьев А. М., Успенский А. А., Ушаков В. Н.* Аппроксимационные операторы и конечно-разностные схемы для построения обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби // Изв. РАН. Сер. техн. кибернетика. 1994. № 3. С. 173–185.
18. *Grigorjeva S. V., Tarasjev A. M., Ushakov V. N., Uspenskii A. A.* Constructions of nonsmooth analysis in numerical methods for solving Hamilton–Jacobi equations // Nova J. Math. Game Theory Algebra. 1996. V. 6. № 1. P. 27–43.
19. *Ушаков В. Н., Хрипунов А. П.* О приближенном построении решений в игровых задачах управления // Прикл. матем. и мех. 1997. Т. 61. № 3. С. 413–421.
20. *Заварин А. Б., Ушаков В. Н.* О выделении ядра выживаемости для дифференциального включения // Прикл. матем. и мех. 2001. Т. 65. № 5. С. 831–842.
21. *Незнакин А. А., Ушаков В. Н.* Сеточный метод приближенного построения ядра выживаемости для дифференциального включения // ЖВМ и МФ. 2001. Т. 41. № 6. С. 895–908.

Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург;
Уральский государственный технический университет,
г. Екатеринбург;

Поступила в редакцию
05.05.2004

Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург;
Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург.
E-mail: svt1@imm.uran.ru
bigvasiliy@mail.ru
uspen@imm.uran.ru
ushak@imm.uran.ru