Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. В. Сандраков, Осреднение вариационных неравенств для задач с препятствием,
Матем. сб., 2005, том 196, номер 4, 79–98

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1286>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 12:10:54

УДК 517.95

Г. В. Сандраков

Осреднение вариационных неравенств для задач с препятствием

Доказаны утверждения о сходимости решений вариационных неравенств для задач с препятствием. Такие вариационные неравенства определяются нелинейным строго монотонным оператором второго порядка с периодическими быстро-осциллирующими коэффициентами и последовательностью функций, характеризующей препятствия. Получены двухмасштабное и макромасштабное (осредненное) предельные вариационные неравенства. Представлены методы вывода таких предельных вариационных неравенств. Для потенциальных операторов установлена связь полученных предельных вариационных неравенств с двухмасштабными и макромасштабными задачами минимизации.

Библиография: 20 названий.

§ 1. Введение

В работе рассматриваются вопросы осреднения вариационных неравенств для задач с препятствием, определяющим одностороннее ограничение на решение. Вариационные неравенства возникают естественным образом из условий разрешимости задач минимизации с ограничениями. Так, например, решение $u \in H_0^1(\Omega)$ уравнения Пуассона $-\Delta u = f$ можно интерпретировать в линейном приближении как поперечное смещение (относительно состояния покоя) мембраны, занимающей область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, под действием внешних сил с плотностью $f \in L^2(\Omega)$. Это решение также минимизирует интеграл $\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - 2fu) dx$ на множестве $H_0^1(\Omega)$, тогда как минимизация этого интеграла по множеству п.в. (почти всюду в Ω) неотрицательных функций из $H_0^1(\Omega)$ эквивалентна нахождению решения $u \in K$ вариационного неравенства

$$\int_{\Omega} (-\Delta u - f)(v - u) dx \geq 0 \quad (1.1)$$
$$\forall v \in K = \{v \in H_0^1(\Omega) : v \geq 0 \text{ п.в. в } \Omega\}.$$

Соответственно решение $u \in K$ этого вариационного неравенства можно интерпретировать как поперечное смещение мембраны, размещенной на плоском основании, препятствующем отрицательным смещениям и определяющем таким образом “препятствие”. Фактически это препятствие определяется выбором тестовых функций v и решения u из множества K , которое является замкнутым выпуклым конусом в $H_0^1(\Omega)$ (дальнейшие подробности можно найти, например, в [1], [2]).

Пусть для $n \geq 1$ заданы ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с липшицевой границей $\partial\Omega$, функция $f \in L^2(\Omega)$ и последовательность функций $\{\psi_\varepsilon\} \subset H_0^1(\Omega)$, зависящая от малого положительного параметра ε и равномерно ограниченная относительно этого параметра ($\|\psi_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C$ с постоянной C , не зависящей от ε).

Рассмотрим следующую задачу с малым параметром ε , формулируемую в виде вариационного неравенства, (найти) $\hat{u}_\varepsilon \in K_\varepsilon$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \hat{u}_\varepsilon\right) (\nabla \hat{v} - \nabla \hat{u}_\varepsilon) dx &\geq \int_{\Omega} f(\hat{v} - \hat{u}_\varepsilon) dx \\ \forall \hat{v} \in K_\varepsilon &= \{\hat{v} \in H_0^1(\Omega) : \hat{v} \geq \psi_\varepsilon \text{ п.в. в } \Omega\}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где вектор-функция $a(y, \xi)$ является 1-периодической по $y \in \mathbb{R}^n$ (периодической с периодом 1 по каждому $y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$) для каждого $\xi \in \mathbb{R}^n$. Следовательно, $a(y, \xi)$ для каждого $\xi \in \mathbb{R}^n$ вполне определяется своим ограничением на ячейку периодичности $Y = [0, 1]^n$.

Предполагается, что $a(y, \xi)$ для каждого $\xi \in \mathbb{R}^n$ является измеримой на Y , $a(y, 0) = 0$ и

$$\begin{aligned} 0 &< (a(y, \xi) - a(y, \zeta))(\xi - \zeta), \quad \xi \neq \zeta, \\ \alpha|\xi|^2 &\leq a(y, \xi)\xi, \quad \|a(y, \xi) - a(y, \zeta)\| \leq \beta|\xi - \zeta| \\ &\forall \xi, \zeta \in \mathbb{R}^n \text{ п.в. в } Y, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где α и β – заданные положительные постоянные.

Таким образом, вектор-функция $a(y, \xi)$ определяет строго монотонный коэрцитивный оператор в (1.2). Известно [1], [2], что существует единственное (для фиксированного ε) решение вариационного неравенства (1.2) и это неравенство эквивалентно (замена $\hat{u}_\varepsilon = u_\varepsilon + \psi_\varepsilon$, $\hat{v} = v + \psi_\varepsilon$) вариационному неравенству для $u_\varepsilon \in K$:

$$\int_{\Omega} a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \psi_\varepsilon + \nabla u_\varepsilon\right) (\nabla v - \nabla u_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega} f(v - u_\varepsilon) dx \quad \forall v \in K, \quad (1.4)$$

где K определено в (1.1). Также известно [1], [2], что вариационное неравенство (1.4) эквивалентно вариационному неравенству для $u_\varepsilon \in K$:

$$\int_{\Omega} a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \psi_\varepsilon + \nabla v\right) (\nabla v - \nabla u_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega} f(v - u_\varepsilon) dx \quad \forall v \in K. \quad (1.5)$$

Эти эквивалентности означают (для фиксированного ε), что $u_\varepsilon \in K$ является решением задачи (1.4) $\Leftrightarrow u_\varepsilon \in K$ является решением задачи (1.5) $\Leftrightarrow \hat{u}_\varepsilon = u_\varepsilon + \psi_\varepsilon \in K_\varepsilon$ является решением задачи (1.2).

Основные результаты работы составляют утверждения о предельном поведении решений вариационного неравенства (1.2) (и соответственно решений эквивалентных задач (1.4) и (1.5)). Будут приведены осредненное (предельное при $\varepsilon \rightarrow 0$) вариационное неравенство и теорема о соответствующей сходимости последовательности решений к решению осредненной задачи. В формулировке этой теоремы кроме слабой сходимости в $H_0^1(\Omega)$ используется и понятие двухмасштабной сходимости (подробности о такой сходимости можно найти в [3], [4]).

Последовательность $\{v_\varepsilon(x)\} \subset L^2(\Omega)$ называется *двухмасштабно сходящейся* к $v_0(x, y) \in L^2(\Omega \times Y)$ (обозначение $v_\varepsilon \xrightarrow{2} v_0$) при $\varepsilon \rightarrow 0$, если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} v_\varepsilon(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\Omega} \int_Y v_0(x, y) \varphi(x, y) dy dx \quad (1.6)$$

для каждого $\varphi \in L^2_P(Y; C(\overline{\Omega}))$. Здесь и далее индекс P означает 1-периодичность по $y \in \mathbb{R}^n$, а включение $\varphi \in L^2_P(Y; C(\overline{\Omega}))$ означает, что ограничение $\varphi(x, y)$ на Y принадлежит $L^2(Y; C(\overline{\Omega}))$. Покомпонентно двухмасштабная сходимость определяется и для вектор-функций. Каждая равномерно ограниченная последовательность $\{v_\varepsilon\} \subset H^1_0(\Omega)$ имеет подпоследовательность, слабо сходящуюся в $H^1_0(\Omega)$ (см., например, [1]) и двухмасштабно сходящуюся в $H^1_0(\Omega)$ (см. [3], [4]).

Из (1.3) и предположений на исходные данные следует, что последовательность $\{u_\varepsilon\}$ решений задачи (1.4) равномерно ограничена в $H^1_0(\Omega)$, и поэтому справедливо следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1. Пусть $u_\varepsilon(x) \in H^1_0(\Omega)$ является решением вариационного неравенства (1.4). Тогда найдутся такие $\psi_0(x)$, $u_0(x) \in H^1_0(\Omega)$ и $\psi_1(x, y)$, $u_1(x, y) \in L^2(\Omega; H^1_P(Y)/\mathbb{R})$, что (после выделения подпоследовательностей при $\varepsilon \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon &\rightharpoonup \psi_0, \quad u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \quad \text{слабо в } H^1_0(\Omega), \\ \nabla \psi_\varepsilon &\xrightarrow{2} \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1, \quad \nabla u_\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla u_0 + \nabla_y u_1 \end{aligned}$$

и $u_0 \geq 0$ п.в. в Ω .

Доказательства сформулированных здесь утверждений будут приведены в следующем параграфе, где имеются и соответствующие ссылки.

В дальнейшем предполагается, что ψ_0 и ψ_1 определены однозначно и выполнено равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla \psi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^n} = \|\nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1\|_{L^2(\Omega \times Y)^n}. \quad (1.7)$$

Эти предположения означают, что последовательность $\{\psi_\varepsilon\}$ имеет (однозначно определенный) сильный двухмасштабный предел в $H^1_0(\Omega)$ (см. [4; теорема 1.8]). В частности, равенство (1.7) выполнено с $\psi_1 = 0$, если $\psi_\varepsilon \rightarrow \psi_0$ сильно в $H^1_0(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Будем обозначать через $C^\infty_0(\Omega)(C^\infty_P(Y)/\mathbb{R})$ множество функций вида

$$v_1 = v_0^1(x) \cdot v_P^1(y),$$

где $v_0^1(x) \in C^\infty_0(\Omega)$, $v_P^1(y) \in C^\infty_P(Y)/\mathbb{R}$ и множество $C^\infty_P(Y)/\mathbb{R}$ состоит из гладких 1-периодических функций, имеющих нулевое среднее по Y (эквивалентно, ограничение функции $v_P^1(y)$ на Y имеет разложение в ряд Фурье с нулевым свободным членом).

Предположим сначала, что ψ_0 и ψ_1 , определенные в утверждении 1.1, удовлетворяют условиям $\psi_0 \in C^\infty_0(\Omega)$ и $\psi_1 \in C^\infty_0(\Omega)(C^\infty_P(Y)/\mathbb{R})$. Тогда (в соответствии с [4]) из равенства (1.7) следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \nabla \psi_\varepsilon(x) - \nabla \psi_0(x) - (\nabla_y \psi_1) \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\Omega)^n} = 0. \quad (1.8)$$

В силу утверждения 1.1 полезно определить множество

$$K_2 = \{(v_0, v_1) \in H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega; H^1_P(Y)/\mathbb{R}) : v_0 \geq 0 \text{ п.в. в } \Omega\},$$

содержащее двухмасштабные пределы решений задачи (1.4). Фиксируем $v_0 \in C_0^\infty(\Omega)$ и $v_1 \in C_0^\infty(\Omega)(C_P^\infty(Y)/\mathbb{R})$ с $v_0 \geq 0$ в Ω . Тогда $(v_0, v_1) \in K_2$ и найдется такая постоянная δ , что $|v_1| \leq \delta$ в $\bar{\Omega} \times Y$, поскольку гладкие функции ограничены на компактных множествах.

Выберем для каждого ε неотрицательную функцию $e_\varepsilon \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$, равную нулю при $\text{dist}(x, \partial\Omega) \leq \varepsilon$ и единице при $\text{dist}(x, \partial\Omega) \geq 2\varepsilon$, где $\text{dist}(x, \partial\Omega)$ обозначает расстояние от точки x до границы $\partial\Omega$. Для достаточно малых ε (меньших или равных ε_0 для некоторого положительного ε_0) такие функции существуют, $|\varepsilon \nabla e_\varepsilon| \leq C$ п.в. в Ω (с постоянной C , не зависящей от ε), и носитель функции ∇e_ε содержится в приграничной полосе $\Omega_{2\varepsilon} \subset \Omega$ ширины 2ε (см., например, [5]). Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varepsilon \nabla e_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^n} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varepsilon \nabla e_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_{2\varepsilon})^n} = 0$$

и можно считать, что $e_\varepsilon = 1$ на носителе функции $v_1(x, \frac{x}{\varepsilon})$, поскольку этот носитель компактен в Ω и расположен на положительном (и не зависящем от ε) расстоянии от границы $\partial\Omega$, а $e_\varepsilon = 1$ при $\text{dist}(x, \partial\Omega) \geq 2\varepsilon$.

В этом случае имеем $v_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \delta e_\varepsilon \geq 0$ в Ω и поэтому в задаче (1.5) можно выбрать тестовую функцию $v = v_0(x) + \varepsilon v_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon \delta e_\varepsilon$, которая является неотрицательной в силу определений. Учитывая этот выбор, (1.3) и (1.8), неравенство из (1.5) можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1^\varepsilon + \nabla v_0 + \nabla_y v_1^\varepsilon\right) (\nabla v_0 + \nabla_y v_1^\varepsilon - \nabla u_\varepsilon) dx \\ & \geq \int_{\Omega} f(v_0 - u_\varepsilon) dx + \sigma_\varepsilon, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_\varepsilon = 0$, $\nabla_y \psi_1^\varepsilon = (\nabla_y \psi_1)(x, \frac{x}{\varepsilon})$ и $\nabla_y v_1^\varepsilon = (\nabla_y v_1)(x, \frac{x}{\varepsilon})$.

Неравенство (1.9) примечательно тем, что в нем можно перейти непосредственно к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ (по подпоследовательности из утверждения 1.1), используя только определение (1.6), поскольку $a(y, \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla v_0 + \nabla_y v_1) \in L_P^2(Y; C(\bar{\Omega})^n)$ в силу (1.3) и известно, что $\nabla v_0 + \nabla_y v_1^\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla v_0 + \nabla_y v_1$ и $\nabla u_\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla u_0 + \nabla_y u_1$.

Таким образом, переходя к пределу, заключаем, что u_0 и u_1 , определенные в утверждении 1.1, удовлетворяют неравенству для $(u_0, u_1) \in K_2$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_Y a(y, \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla v_0 + \nabla_y v_1) (\nabla v_0 + \nabla_y v_1 - \nabla u_0 - \nabla_y u_1) dy dx \\ & \geq \int_{\Omega} f(v_0 - u_0) dx, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где $(v_0, v_1) \in K_2$. Проверяется, что это неравенство выполнено не только для гладких и финитных $v_0 \in C_0^\infty(\Omega)$ и $v_1 \in C_0^\infty(\Omega)(C_P^\infty(Y)/\mathbb{R})$, но и для всех $(v_0, v_1) \in K_2$. С помощью аппроксимации проверяется также, что неравенство (1.10) выполнено и для произвольных ψ_0 и ψ_1 , определенных в утверждении 1.1 и удовлетворяющих предположению (1.7).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.2. *Существует единственное решение $(u_0, u_1) \in K_2$ вариационного неравенства (1.10), рассматриваемого $\forall (v_0, v_1) \in K_2$, и это неравенство эквивалентно вариационному неравенству для $(u_0, u_1) \in K_2$:*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_Y a(y, \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla u_0 + \nabla_y u_1) (\nabla v_0 + \nabla_y v_1 - \nabla u_0 - \nabla_y u_1) dy dx \\ \geq \int_{\Omega} f(v_0 - u_0) dx \quad \forall (v_0, v_1) \in K_2. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Таким образом, вариационное неравенство (1.11) определяет предельную двухмасштабную задачу для вариационного неравенства (1.4). Однако цель этой работы – получить макромасштабное предельное вариационное неравенство (не зависящее от микромасштабной переменной $y \in Y$) для задачи (1.4) (и поэтому для эквивалентной задачи (1.2)).

Для этого выберем $v_0 = u_0$ в (1.11) и предположим формально, что $\xi = \nabla \psi_0 + \nabla u_0$ и $U = \psi_1 + u_1$ (здесь фактически “замораживается” макромасштабная переменная в (1.11)). Тогда (формально) получаем вариационное неравенство для $U \in H_P^1(Y)/\mathbb{R}$:

$$\int_Y a(y, \xi + \nabla_y U) (\nabla_y V - \nabla_y U) dy \geq 0 \quad \forall V \in H_P^1(Y)/\mathbb{R}. \quad (1.12)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.3. *Для фиксированного $\xi \in \mathbb{R}^n$ существует единственное решение $U \in H_P^1(Y)/\mathbb{R}$ вариационного неравенства (1.12), и это неравенство эквивалентно вариационному уравнению для $U \in H_P^1(Y)/\mathbb{R}$:*

$$\int_Y a(y, \xi + \nabla_y U) \nabla_y V dy = 0 \quad \forall V \in H_P^1(Y)/\mathbb{R}. \quad (1.13)$$

Кроме того, функция $U = U(\xi)$ является слабо непрерывной как функция на $\mathbb{R}^n$ со значениями в $H_P^1(Y)/\mathbb{R}$.

Для решений задачи (1.13) из (1.3) имеем $\|\nabla_y U(\xi)\|_{L^2(Y)^n}^2 \leq C|\xi|^2$ с постоянной C , не зависящей от $\xi \in \mathbb{R}^n$. Из слабой непрерывности функции $U(\xi)$ и сепарабельности пространства $H_P^1(Y)/\mathbb{R}$ следует сильная измеримость этой функции и поэтому $U(y, \nabla v_0(x)) \in L^2(\Omega; H_P^1(Y)/\mathbb{R})$, если $v_0 \in H_0^1(\Omega)$. Таким образом, имеет смысл следующий результат о связи решения вариационного неравенства (1.11) с решениями (формально полученного) вариационного неравенства (1.12).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.4. *Пусть $(u_0, u_1) \in K_2$ является единственным решением вариационного неравенства (1.11). Тогда*

$$u_1 = U(y, \nabla \psi_0(x) + \nabla u_0(x)) - \psi_1(x, y),$$

где $U(\xi)$ является единственным (для каждого $\xi \in \mathbb{R}^n$) решением вариационного неравенства (1.12).

Используя это утверждение и выбирая $v_1 = u_1$ в (1.11), получаем следующее макромасштабное осредненное (предельное для задачи (1.4)) вариационное неравенство для $u_0 \in K$:

$$\int_{\Omega} A(\nabla \psi_0 + \nabla u_0) (\nabla v_0 - \nabla u_0) dx \geq \int_{\Omega} f(v_0 - u_0) dx \quad \forall v_0 \in K, \quad (1.14)$$

где

$$A(\xi) = \int_Y a(y, \xi + \nabla_y U(y, \xi)) dy. \quad (1.15)$$

Осредненное вариационное неравенство (1.14) эквивалентно (замена $\widehat{u}_0 = \psi_0 + u_0$, $\widehat{v}_0 = \psi_0 + v_0$) следующему осредненному (предельному для задачи (1.2)) вариационному неравенству для $\widehat{u}_0 \in K_0$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} A(\nabla \widehat{u}_0)(\nabla \widehat{v}_0 - \nabla \widehat{u}_0) dx &\geq \int_{\Omega} f(\widehat{v}_0 - \widehat{u}_0) dx \\ \forall \widehat{v}_0 \in K_0 &= \{\widehat{v}_0 \in H_0^1(\Omega) : \widehat{v}_0 \geq \psi_0 \text{ п.в. в } \Omega\}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Отметим, что существование решения задачи (1.14) (и поэтому задачи (1.16)) следует непосредственно из утверждения 1.2, а единственность — из строгой монотонности вектор-функции $A(\xi)$, которую несложно вывести из (1.3). Непосредственным следствием приведенных утверждений является следующий результат о сходимости решений задачи (1.2).

ТЕОРЕМА 1.5. *Пусть $\widehat{u}_\varepsilon \in K_\varepsilon$ является решением вариационного неравенства (1.2) и выполнено равенство (1.7). Тогда*

$$\begin{aligned} \widehat{u}_\varepsilon &\rightharpoonup \widehat{u}_0 \quad \text{слабо в } H_0^1(\Omega), \\ \nabla \widehat{u}_\varepsilon &\xrightarrow{2} \nabla \widehat{u}_0 + \nabla_y U(\nabla \widehat{u}_0), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где $\widehat{u}_0 \in K_0$ является единственным решением осредненного вариационного неравенства (1.16) и $U(\xi)$ является единственным (для каждого $\xi \in \mathbb{R}^n$) решением вариационного неравенства (1.12).

Вариационное неравенство (1.4) можно рассмотреть и в случае, когда множество K заменено всем пространством $H_0^1(\Omega)$. В этом случае известно [1], что такое вариационное неравенство эквивалентно вариационному уравнению для $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \psi_\varepsilon + \nabla u_\varepsilon\right) \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.17)$$

Также известно [1], что существует единственное (для фиксированного ε) решение вариационного уравнения (1.17) и что вариационное неравенство (1.14), в котором K заменено на $H_0^1(\Omega)$, эквивалентно следующему вариационному уравнению для $u_0 \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} A(\nabla \psi_0 + \nabla u_0) \nabla v_0 dx = \int_{\Omega} f v_0 dx \quad \forall v_0 \in H_0^1(\Omega). \quad (1.18)$$

Как следствие этих эквивалентностей и приведенных утверждений, где просто не учитывается неотрицательность рассматриваемых функций, получаем следующий результат о сходимости решений задачи (1.17).

ТЕОРЕМА 1.6. Пусть $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ является решением вариационного уравнения (1.17) и выполнено равенство (1.7). Тогда

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \quad \text{слабо в } H_0^1(\Omega),$$

$$\nabla u_\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla u_0 + \nabla_y U(\nabla \psi_0 + \nabla u_0) - \nabla_y \psi_1, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

где $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ является единственным решением осредненной задачи (1.18), $U(\xi)$ является единственным (для каждого $\xi \in \mathbb{R}^n$) решением задачи (1.13), а ψ_0 и ψ_1 определены в утверждении 1.1.

В случае, когда соответствующий строго монотонный эллиптический оператор в вариационном неравенстве (1.2) является потенциальным, это вариационное неравенство эквивалентно задаче минимизации на множестве K_ε . Поэтому естественно установить связь приведенных результатов с соответствующими результатами для задач минимизации. Для этого выберем $a(y, \xi)$ в задаче (1.2) в следующем специальном виде

$$a(y, \xi) = \nabla_\xi b(y, \xi), \quad (1.19)$$

где функция $b(y, \xi)$ является измеримой на Y для каждого $\xi \in \mathbb{R}^n$ и непрерывной относительно $\xi \in \mathbb{R}^n$ п.в. в Y . Кроме того, предполагается, что для $a(y, \xi)$ выполнены неравенства (1.3). В этом случае известно [6], что функция $b(y, \xi)$ является строго выпуклой относительно $\xi \in \mathbb{R}^n$ п.в. в Y и вариационное неравенство (1.4) эквивалентно (для фиксированного ε) задаче минимизации для $u_\varepsilon \in K$:

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) = \min_{v \in K} F_\varepsilon(v), \quad F_\varepsilon(v) = \int_\Omega \left(b\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \psi_\varepsilon + \nabla v\right) - f v \right) dx. \quad (1.20)$$

Также известно [6], что вариационное уравнение (1.13) эквивалентно (для фиксированного $\xi \in \mathbb{R}^n$), если выполнено предположение (1.19), задаче минимизации для $U \in H_P^1(Y)/\mathbb{R}$:

$$F_\xi(U) = \min_{V \in H_P^1(Y)/\mathbb{R}} F_\xi(V), \quad F_\xi(V) = \int_Y b(y, \xi + \nabla_y V) dy. \quad (1.21)$$

Рассмотрим также осредненную задачу минимизации для $u_0 \in K$:

$$F_0(u_0) = \min_{v_0 \in K} F_0(v_0), \quad F_0(v_0) = \int_\Omega (B(\nabla \psi_0 + \nabla v_0) - f v_0) dx, \quad (1.22)$$

где $B(\xi) = \int_Y b(y, \xi + \nabla_y U(y, \xi)) dy$ и $U(y, \xi)$ является решением задачи минимизации (1.21) для каждого $\xi \in \mathbb{R}^n$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.7. Существует единственное решение $u_0 \in K$ задачи минимизации (1.22), и эта задача эквивалентна осредненному вариационному неравенству (1.14), если выполнено равенство (1.19).

Отметим, что $\nabla_\xi B(\xi) = \int_Y \nabla_\xi b(y, \xi + \nabla_y U(y, \xi)) (E + \nabla_\xi \nabla_y U(y, \xi)) dy$, по крайней мере, формально, где E обозначает единичную матрицу. Поэтому утверждение 1.7

не является прямым следствием из известных утверждений, поскольку равенство $A(\xi) = \nabla_\xi B(\xi)$ не следует непосредственно из (1.15) и (1.19).

Рассмотрим, кроме того, следующую двухмасштабную задачу минимизации для $(u_0, u_1) \in K_2$:

$$F_2(u_0, u_1) = \min_{(v_0, v_1) \in K_2} F_2(v_0, v_1), \quad (1.23)$$

$$\text{где } F_2(v_0, v_1) = \int_{\Omega} \int_Y (b(y, \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla u_0 + \nabla_y u_1) - f v_0) dy dx.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.8. *Существует единственное решение $(u_0, u_1) \in K_2$ задачи минимизации (1.23), и эта задача эквивалентна двухмасштабному вариационному неравенству (1.11), если выполнено равенство (1.19).*

Таким образом, эквивалентность (при $a(y, \xi) = \nabla_\xi b(y, \xi)$) задачи минимизации (1.20) и рассмотренного в настоящей работе вариационного неравенства (1.4) (эквивалентного (1.2)) сохраняется при осреднении и двухмасштабном осреднении, а утверждение о сходимости решений задачи минимизации (1.20) следует из теоремы 1.5. Аналогично, задачи минимизации (1.20) и (1.22), в которых K заменено на $H_0^1(\Omega)$, эквивалентны вариационным уравнениям (1.17) и (1.18) соответственно и утверждение о сходимости решений в этом случае следует из теоремы 1.6.

Проверяется, что предположение (1.7) выполнено, если

$$\psi_\varepsilon = \psi_\varepsilon^0 + \varepsilon \psi_1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right), \quad (1.24)$$

где $\psi_\varepsilon^0 \rightarrow \psi_0$ сильно в $H_0^1(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\psi_1(x, y) \in L^2(\Omega; L_P^\infty(Y))$ и компоненты $\nabla_y \psi_1(x, y)$ и $\nabla_x \psi_1(x, y)$ также принадлежат $L^2(\Omega; L_P^\infty(Y))$. В таком смысле равенство (1.7) является условием регулярности на (равномерно ограниченную) последовательность $\{\psi_\varepsilon\} \subset H_0^1(\Omega)$ в задаче (1.2).

Возникновение пространства $L^2(\Omega; L_P^\infty(Y))$ связано с выполнением равенства

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right)^2 dx = \int_{\Omega} \int_Y \varphi(x, y)^2 dy dx, \quad (1.25)$$

доказанного для $\varphi \in L_P^2(Y; C(\overline{\Omega}))$ и для $\varphi \in L^2(\Omega; C_P(Y))$ в работе [4], а для $\varphi \in L^2(\Omega; L_P^\infty(Y))$ – в работе [7]. В частности, для $\varphi \in L^2(\Omega; L_P^\infty(Y))$ функция $\varphi^\varepsilon(x) = \varphi(x, \frac{x}{\varepsilon})$ корректно определена и измерима в соответствии с [7]. Известны примеры $\varphi \in C(\overline{\Omega}; L_P^2(Y))$, для которых не выполнено равенство (1.25) (см. [4; утверждение 5.8]). Более того, как отмечено в [4], выражение $\varphi(x, \frac{x}{\varepsilon})$ может не иметь корректного смысла для $\varphi \in C(\overline{\Omega}; L_P^2(Y))$.

В работе [4] было отмечено также, что равенство (1.25) в определенном смысле характеризует тестовые функции $\varphi(x, y)$, которые допустимо выбирать в определении (1.6) с сохранением компактности двухмасштабной сходимости (из этой компактности для равномерно ограниченных последовательностей из $H_0^1(\Omega)$ и следует утверждение 1.1). В оригинальном определении двухмасштабной сходимости

из [3] тестовые функции выбирались из $C_c(\Omega; C_P(Y))$, а компактность этой сходимости доказывалась на плотном множестве функций с разделенными переменными $\varphi = \rho(x)\Phi(y)$, где $\rho \in C_c(\Omega)$ и $\Phi \in C_P(Y)$. Отметим также, что равенство (1.25) для функций с разделенными переменными хорошо известно и следует фактически из леммы Римана–Лебега.

Определение (1.6) с гладкими тестовыми функциями, имеющими разделенные переменные, было введено также в [8; определения 1.4' и 1.8] в предположении, что v_0 в равенстве (1.6) также является функцией с разделенными переменными. Последнее предположение является естественным для двухмасштабных пределов решений линейных эллиптических уравнений произвольного порядка, которые и рассматривались в работе [8]. Кроме того, такое определение использовалось в [8] для получения макромасштабных осредненных задач, тогда как общее определение (1.6) приводит только к двухмасштабным предельным задачам и нужны дополнительные рассуждения для вывода макромасштабных задач из этих двухмасштабных задач. Так для доказательства утверждения 1.4, связывающего двухмасштабную задачу (1.11) с макромасштабной задачей (1.14), используется монотонность вектор-функции $a(y, \xi)$, а в [8] использовалась фредгольмовость соответствующих операторов.

Вектор-функция $A(\xi)$, определенная в (1.15), и задача (1.13) (которую принято называть задачей на ячейке) возникали ранее при осреднении уравнений (1.17) с $\psi_\varepsilon = 0$. Первые результаты по (макромасштабному) осреднению таких уравнений получил Л. Тартар с использованием энергетических методов (дальнейшие подробности и библиографию можно найти в [9]). Двухмасштабные предельные уравнения для таких уравнений получены в [4]. Однако утверждение о связи этих двухмасштабных уравнений с ранее полученными (макромасштабными) осредненными уравнениями отмечено в [4] только для линейного случая. Первые результаты по (макромасштабному) осреднению задач минимизации без ограничений получены в [10], а двухмасштабные предельные задачи минимизации в этом случае выведены в [4], где также отсутствуют какие-либо утверждения о связи таких двухмасштабных предельных задач минимизации с осредненными задачами минимизации, полученными ранее в [10]. Отметим также, что двухмасштабные предельные задачи впервые получили Ж.-Л. Лионс и Е. Санчес-Паленсия на основе равенств, аналогичных (1.25), например в [11], но без доказательства соответствующих утверждений о сходимости решений.

Осредненная задача для нестационарного вариационного неравенства с линейным оператором, рассматриваемого на множестве неположительных функций, получена в [12] с использованием асимптотических разложений и метода штрафа. Для доказательства этого результата существенно использовалась равномерность метода штрафа по параметру аппроксимации, выполняемая для таких неравенств (см. также [13]). Известны примеры задач минимизации с $b = |\xi|^2$ и нерегулярной последовательностью препятствий, для которых предельная задача содержит дополнительное слагаемое нулевого порядка (см. [14]). Обобщения этих примеров и общие вопросы сходимости решений задач минимизации с ограничениями, зависящих от параметра, рассматривались во многих работах (подробности и библиографию можно найти в [15] и [16]). Используемые в этой работе методы применимы и к вариационным неравенствам с ограничениями на градиент решения (дальнейшие подробности можно найти в [17]).

§ 2. Доказательства

В дальнейшем изложении C обозначает (возможно, различные) постоянные, не зависящие от положительного параметра ε (при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ для соответствующего ε_0). Кроме того, для заданной 1-периодической функции $w(y)$ (возможно, рассматриваемой только на Y и зависящей от других переменных) через $w^\varepsilon = w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ обозначается ε -периодическое продолжение этой функции на Ω . Более точно, $w(y)$ рассматривается как 1-периодическая функция на $\mathbb{R}^n$ и выбирается ограничение полученной функции при $y = \frac{x}{\varepsilon}$ на Ω , которое и обозначается w^ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1.1. Выбирая $v = 0$ в неравенстве из (1.4) и добавляя соответствующие интегралы, имеем

$$\begin{aligned} \alpha \|\nabla u_\varepsilon + \nabla \psi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^n}^2 &\leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^n} \\ &\quad + \beta \|\nabla u_\varepsilon + \nabla \psi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^n} \|\nabla \psi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^n}, \end{aligned}$$

где учтены (1.3) и неравенства Гёльдера и Фридрихса. В этом случае для получения оценки

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^n}^2 \leq C (\|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \psi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^n}^2) \quad (2.1)$$

достаточно воспользоваться неравенством Юнга ($ab \leq \frac{\sigma}{2}a^2 + \frac{b^2}{2\sigma}$) и неравенством треугольника ($\|\nabla u_\varepsilon\| - \|\nabla \psi_\varepsilon\| \leq \|\nabla u_\varepsilon + \nabla \psi_\varepsilon\|$). Таким образом, последовательность $\{u_\varepsilon\}$ равномерно ограничена в $H_0^1(\Omega)$, и поэтому утверждение 1.1 следует из результатов работы [4; теорема 1.2, утверждение 1.14] и из выпуклости и замкнутости множества K в $H_0^1(\Omega)$ (см., например, [1], [2]). Утверждение 1.1 доказано.

ЛЕММА 2.1. Пусть $\psi_0, u_0 \in H_0^1(\Omega)$ и $\psi_1, u_1 \in L^2(\Omega; H_P^1(Y)/\mathbb{R})$ определены в утверждении 1.1. Тогда $(u_0, u_1) \in K_2$ удовлетворяет вариационному неравенству (1.10), рассматриваемому $\forall (v_0, v_1) \in K_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.1. Пусть $w(x, y) \in C_0^\infty(\Omega)(C_P^\infty(Y)/\mathbb{R})$. Непосредственно из определения (1.6) следует, что

$$w\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{2} w(x, y) \quad (2.2)$$

(см. [3], [4]). Хорошо известна также следующая формула дифференцирования быстроосциллирующих функций

$$\nabla\left(w\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right) = (\varepsilon^{-1} \nabla_y w(x, y) + \nabla_x w(x, y)), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}. \quad (2.3)$$

Выберем в неравенстве из (1.5) тестовую функцию

$$v_\varepsilon = v_0(x) + \varepsilon v_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \delta e_\varepsilon. \quad (2.4)$$

Здесь $v_0 \in C_0^\infty(\Omega)$, $v_0 \geq 0$ в Ω , $v_1 \in C_0^\infty(\Omega)(C_P^\infty(Y)/\mathbb{R})$ и подходящее e_ε построено в [5; гл. 4, §1], где для липшицевой границы $\partial\Omega$ следует также учесть теорему

Радемахера (см., например, [2]). Тогда $v_\varepsilon \in K$ и, учитывая (1.3), неравенство из (1.5) можно представить в виде

$$\int_{\Omega} a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \psi_\varepsilon + \nabla v_0 + (\nabla_y v_1)^\varepsilon\right) (\nabla v_0 + (\nabla_y v_1)^\varepsilon - \nabla u_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega} f(v_0 - u_\varepsilon) dx + \sigma_\varepsilon, \quad (2.5)$$

где $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_\varepsilon = 0$, поскольку $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla \varepsilon \delta e_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^n} = 0$, и поэтому

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla v_\varepsilon - \nabla v_0 - (\nabla_y v_1)^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^n} = 0$$

в соответствии с (2.3), (2.4).

Известно, что $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $L^2(\Omega)$ и $H_0^1(\Omega)$. Кроме того, конечные линейные комбинации функций из $C_0^\infty(\Omega)(C_P^\infty(Y)/\mathbb{R})$ образуют плотное множество в $L^2(\Omega; H_P^1(Y)/\mathbb{R})$. Действительно, также известно, что $L^2(\Omega; H_P^1(Y)/\mathbb{R})$ изоморфно $L^2(\Omega) \otimes (H_P^1(Y)/\mathbb{R})$ и поэтому конечные линейные комбинации функций из $L^2(\Omega)(H_P^1(Y)/\mathbb{R})$ образуют плотное множество в $L^2(\Omega; H_P^1(Y)/\mathbb{R})$, но $C_P^\infty(Y)/\mathbb{R}$ плотно в $H_P^1(Y)/\mathbb{R}$, что доказывает требуемую плотность. Здесь $L^2(\Omega)(H_P^1(Y)/\mathbb{R})$ обозначает множество функций вида $v_1 = v_0^1(x) \cdot v_P^1(y)$, где $v_0^1(x) \in L^2(\Omega)$ и $v_P^1(y) \in H_P^1(Y)/\mathbb{R}$.

Следовательно, найдутся такие последовательности $\{\psi_0^i\}$ и $\{\psi_1^i\}$, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 - \nabla \psi_0^i - \nabla_y \psi_1^i\|_{L^2(\Omega \times Y)^n} = 0, \quad (2.6)$$

где ψ_0 и ψ_1 определены в утверждении 1.1 и для фиксированного i функция $\psi_0^i \in C_0^\infty(\Omega)$, а функция ψ_1^i является конечной линейной комбинацией функций из $C_0^\infty(\Omega)(C_P^\infty(Y)/\mathbb{R})$.

Кроме того, из предположения (1.7) выводится, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \nabla \psi_\varepsilon(x) - \nabla \psi_0^i(x) - (\nabla_y \psi_1^i) \left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2(\Omega)^n} = 0 \quad (2.7)$$

в соответствии с [4]. Действительно, используя (1.6) и (1.7), получаем для фиксированного i следующие равенства:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla \psi_\varepsilon - \nabla \psi_0^i - (\nabla_y \psi_1^i)^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^n}^2 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (\nabla \psi_\varepsilon - \nabla \psi_0^i - (\nabla_y \psi_1^i)^\varepsilon)^2 dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} ((\nabla \psi_\varepsilon)^2 - 2(\nabla \psi_\varepsilon)(\nabla \psi_0^i + (\nabla_y \psi_1^i)^\varepsilon) + (\nabla \psi_0^i + (\nabla_y \psi_1^i)^\varepsilon)^2) dx \\ &= \int_{\Omega} \int_Y ((\nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1)^2 - 2(\nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1)(\nabla \psi_0^i + \nabla_y \psi_1^i) \\ &\quad + (\nabla \psi_0^i + \nabla_y \psi_1^i)^2) dy dx \\ &= \|\nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 - \nabla \psi_0^i - \nabla_y \psi_1^i\|_{L^2(\Omega \times Y)^n}^2, \end{aligned}$$

и поэтому равенство (2.7) следует из равенства (2.6). Здесь учтено также, что компоненты вектор-функции $\nabla \psi_0^i - \nabla_y \psi_1^i$ можно выбирать в качестве тестовых функций в определении (1.6).

Таким образом, неравенство (2.5) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \psi_0^i + (\nabla_y \psi_1^i)^\varepsilon + \nabla v_0 + (\nabla_y v_1)^\varepsilon\right) (\nabla v_0 + (\nabla_y v_1)^\varepsilon - \nabla u_\varepsilon) dx + \sigma_\varepsilon^i \\ \geq \int_{\Omega} f(v_0 - u_\varepsilon) dx + \sigma_\varepsilon, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $\lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_\varepsilon^i = 0$ в силу (1.3) и (2.7).

Используя определение (1.6), (2.2) и утверждение 1.1, в неравенстве (2.8) можно перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ (по подпоследовательности из утверждения 1.1) и получить неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_Y a(y, \nabla \psi_0^i + \nabla_y \psi_1^i + \nabla v_0 + \nabla_y v_1) (\nabla v_0 + \nabla_y v_1 - \nabla u_0 - \nabla_y u_1) dy dx \\ + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_\varepsilon^i \geq \int_{\Omega} f(v_0 - u_0) dx. \end{aligned}$$

Переходя в этом неравенстве к пределу по i и учитывая (1.3) и (2.6), заключаем, что u_0 и u_1 из утверждения 1.1 удовлетворяют вариационному неравенству (1.10) для гладких и финитных $(v_0, v_1) \in K_2$ в предположении, что $v_0 \in C_0^\infty(\Omega) \cap K$ и $v_1 \in C_0^\infty(\Omega)(C_P^\infty(Y)/\mathbb{R})$.

Аналогично проверяется, что u_0 и u_1 из утверждения 1.1 удовлетворяют вариационному неравенству (1.10) для гладких и финитных $(v_0, v_1) \in K_2$ в предположении, что $v_0 \in C_0^\infty(\Omega) \cap K$ и v_1 является конечной линейной комбинацией функций из $C_0^\infty(\Omega)(C_P^\infty(Y)/\mathbb{R})$. Действительно, для такого v_1 также найдется такая постоянная δ , что $|v_1| \leq \delta$ в $\bar{\Omega} \times Y$. Кроме того, носитель функции $v_1(x, \frac{x}{\varepsilon})$ является компактным в Ω , и поэтому равенство (2.4) определяет при достаточно малом ε функцию из K , что позволяет повторить приведенное доказательство.

Следовательно, неравенство (1.10) выполнено и для произвольного $(v_0, v_1) \in K_2$. Действительно, фиксируем $(v_0, v_1) \in K_2$. В соответствии с [18; §3] множество $C_0^\infty(\Omega) \cap K$ плотно в K , и поэтому найдутся такие последовательности $\{v_0^i\}$ и $\{v_1^i\}$, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\nabla v_0 + \nabla_y v_1 - \nabla v_0^i - \nabla_y v_1^i\|_{L^2(\Omega \times Y)^n} = 0,$$

где для фиксированного i функция $v_0^i \in C_0^\infty(\Omega) \cap K$, а функция v_1^i является конечной линейной комбинацией функций из $C_0^\infty(\Omega)(C_P^\infty(Y)/\mathbb{R})$. Таким образом, доказываемое утверждение следует из этого равенства и неравенств (1.3), поскольку неравенство (1.10) выполнено для каждого $(v_0^i, v_1^i) \in K_2$, что завершает доказательство леммы 2.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1.2. В силу леммы 2.1 существует некоторое решение $(u_0, u_1) \in K_2$ вариационного неравенства (1.10), рассматриваемого $\forall (v_0, v_1) \in K_2$. Фиксируем $(w_0, w_1) \in K_2$ и выберем

$$(v_0, v_1) = (u_0 + \sigma(w_0 - u_0), u_1 + \sigma(w_1 - u_1)) \quad \text{для } 0 < \sigma \leq 1$$

в неравенстве (1.10). В этом случае имеем $(v_0, v_1) \in K_2$ и неравенство (1.10) принимает вид

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_Y a(y, \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla u_0 + \sigma \nabla(w_0 - u_0) + \nabla_y u_1 + \sigma \nabla_y(w_1 - u_1)) \\ \times (\nabla w_0 + \nabla_y w_1 - \nabla u_0 - \nabla_y u_1) dy dx \geq \int_{\Omega} f(w_0 - u_0) dx, \end{aligned}$$

где $(w_0, w_1) \in K_2$. Используя (1.3), в этом неравенстве можно перейти к пределу при $\sigma \rightarrow 0$ и заключить, что $(u_0, u_1) \in K_2$ является решением вариационного неравенства (1.11).

Пусть $(u_0, u_1) \in K_2$ — некоторое решение задачи (1.11). Из (1.3) следует, что $a(y, \xi)(\xi - \zeta) \geq a(y, \zeta)(\xi - \zeta)$ для любых $\xi, \zeta \in \mathbb{R}^n$ п.в. в Y . Выберем в этом неравенстве $\xi = \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla v_0 + \nabla_y v_1$ и $\zeta = \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla u_0 + \nabla_y u_1$ для п.в. $x \in \Omega$ и п.в. $y \in Y$ и проинтегрируем результат по $\Omega \times Y$. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_Y a(y, \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla v_0 + \nabla_y v_1) (\nabla v_0 + \nabla_y v_1 - \nabla u_0 - \nabla_y u_1) dy dx \\ \geq \int_{\Omega} \int_Y a(y, \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla u_0 + \nabla_y u_1) (\nabla v_0 + \nabla_y v_1 - \nabla u_0 - \nabla_y u_1) dy dx \\ \geq \int_{\Omega} f(v_0 - u_0) dx \end{aligned}$$

для $(v_0, v_1) \in K_2$, поскольку $(u_0, u_1) \in K_2$ является решением задачи (1.11). Таким образом, вариационное неравенство (1.10), рассматриваемое $\forall (v_0, v_1) \in K_2$, эквивалентно вариационному неравенству (1.11), что является аналогом леммы Минти (см. [2; лемма III.1.5]) для двухмасштабного вариационного неравенства (1.11).

Предположим, что $(u_0^1, u_1^1) \in K_2$ и $(u_0^2, u_1^2) \in K_2$ являются решениями вариационного неравенства (1.11). Рассмотрим это неравенство для (u_0^1, u_1^1) и выберем $(v_0, v_1) = (u_0^2, u_1^2)$. Аналогично, рассмотрим это неравенство для (u_0^2, u_1^2) и выберем $(v_0, v_1) = (u_0^1, u_1^1)$. Суммируя эти неравенства, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_Y (a(y, \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla u_0^1 + \nabla_y u_1^1) - a(y, \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla u_0^2 + \nabla_y u_1^2)) \\ \times (\nabla u_0^1 + \nabla_y u_1^1 - \nabla u_0^2 - \nabla_y u_1^2) dy dx \leq 0. \end{aligned}$$

В соответствии с (1.3) это неравенство подразумевает, что

$$\nabla u_0^1 + \nabla_y u_1^1 = \nabla u_0^2 + \nabla_y u_1^2 \quad \text{п.в. в } \Omega \times Y.$$

Интегрируя это равенство по Y и учитывая, что

$$\int_Y \nabla_y u_1^1 dy = \int_Y \nabla_y u_1^2 dy = 0,$$

имеем $\nabla u_0^1 = \nabla u_0^2$ п.в. в Ω , что доказывает единственность решения задачи (1.11). Утверждение 1.2 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1.3. Известно [1; гл. 2, § 8.1], что для фиксированного $\xi \in \mathbb{R}^n$ существует единственное решение вариационного неравенства (1.12) и это неравенство эквивалентно задаче (1.13).

Фиксируем $\xi \in \mathbb{R}^n$. Тогда для завершения доказательства утверждения 1.3 достаточно проверить, что

$$\begin{aligned} \nabla_y U(\xi_i) &\rightharpoonup \nabla_y U(\xi) \quad \text{слабо в } L_P^2(Y)^n \quad \text{при } i \rightarrow \infty, \\ \text{если } |\xi_i - \xi| &\rightarrow 0 \quad \text{при } i \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где $U(\xi_i) \in H_P^1(Y)/\mathbb{R}$ является единственным решением задачи (1.12) для $\xi_i \in \mathbb{R}^n$ и $U(\xi)$ — единственное решение задачи (1.12) для $\xi \in \mathbb{R}^n$. Из (1.3) и (1.13) для $V = U(\xi)$ следует, что

$$\begin{aligned} \alpha \|\nabla_y U(\xi)\|_{L_P^2(Y)^n}^2 &\leq \int_Y (a(y, \nabla_y U) - a(y, \xi + \nabla_y U)) \nabla_y U \, dy \\ &\leq \|a(y, \nabla_y U) - a(y, \xi + \nabla_y U)\|_{L_P^2(Y)^n} \|\nabla_y U(\xi)\|_{L_P^2(Y)^n}, \end{aligned}$$

и поэтому $\|\nabla_y U(\xi)\|_{L_P^2(Y)^n} \leq \frac{\beta}{\alpha} |\xi|$. Таким образом, можно считать, что последовательность $\{\nabla_y U(\xi_i)\} \subset L_P^2(Y)^n$ является равномерно ограниченной и найдется такое $W \in H_P^1(Y)/\mathbb{R}$, что (после выделения подпоследовательности) при $i \rightarrow \infty$

$$\nabla_y U(\xi_i) \rightharpoonup \nabla_y W \quad \text{слабо в } L_P^2(Y)^n. \quad (2.9)$$

Рассмотрим задачу (1.12) для $\xi_i \in \mathbb{R}^n$. Известно [1], [2], что эта задача эквивалентна вариационному неравенству для $U(\xi_i) \in H_P^1(Y)/\mathbb{R}$:

$$\int_Y a(y, \xi_i + \nabla_y V) (\nabla_y V - \nabla_y U(\xi_i)) \, dy \geq 0 \quad \forall V \in H_P^1(Y)/\mathbb{R}.$$

Для фиксированного $V \in H_P^1(Y)/\mathbb{R}$ в этом неравенстве можно перейти к пределу по i (используя только (2.9)), поскольку $a(y, \xi_i + \nabla_y V) \rightarrow a(y, \xi + \nabla_y V)$ сильно в $L_P^2(Y)^n$ и заключить, что $W = U(\xi)$ в силу единственности решения задачи (1.12). Утверждение 1.3 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1.4. Из слабой непрерывности функции $U(\xi)$ и сепарабельности пространства $H_P^1(Y)/\mathbb{R}$ следует сильная измеримость этой функции в силу теоремы Петтиса (см., например, [19]).

Из (1.3) следует, что $0 \leq a(y, \xi)(\xi - \zeta) - a(y, \zeta)(\xi - \zeta)$ для любых $\xi, \zeta \in \mathbb{R}^n$ п.в. в Y . Выберем в этом неравенстве $\xi = \nabla \psi_0 + \nabla u_0 + \nabla_y U(\nabla \psi_0 + \nabla u_0)$ и $\zeta = \nabla \psi_0 + \nabla u_0 + \nabla_y \psi_1 + \nabla_y u_1$ для п.в. $x \in \Omega$ и п.в. $y \in Y$ и проинтегрируем результат по $\Omega \times Y$. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega} \int_Y a(y, \eta + \nabla_y U(\eta)) (\nabla_y U(\eta) - \nabla_y \psi_1 - \nabla_y u_1) \, dy \, dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \int_Y a(y, \eta + \nabla_y \psi_1 + \nabla_y u_1) (\nabla_y U(\eta) - \nabla_y \psi_1 - \nabla_y u_1) \, dy \, dx, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где введено обозначение $\eta = \nabla\psi_0 + \nabla u_0$. Выбирая $v_0 = u_0$ и $v_1 = U(\nabla\psi_0 + \nabla u_0) - \psi_1$ в неравенстве (1.11), получаем соотношение

$$\int_{\Omega} \int_Y a(y, \eta + \nabla_y \psi_1 + \nabla_y u_1) (\nabla_y U(\eta) - \nabla_y \psi_1 - \nabla_y u_1) dy dx \geq 0. \quad (2.11)$$

Выбирая $\xi = \nabla\psi_0 + \nabla u_0$ и $V = U(\nabla\psi_0 + \nabla u_0) - \psi_1 - u_1$ (для п.в. $x \in \Omega$) в (1.13) и интегрируя результат по Ω , имеем равенство

$$\int_{\Omega} \int_Y a(y, \eta + \nabla_y U(\eta)) (\nabla_y U(\eta) - \nabla_y \psi_1 - \nabla_y u_1) dy dx = 0.$$

Учитывая это равенство и соотношение (2.11), заключаем, что в (2.10) выполнено равенство и поэтому

$$\nabla_y U(\nabla\psi_0 + \nabla u_0) = \nabla_y \psi_1 + \nabla_y u_1 \quad \text{п.в. в } \Omega \times Y$$

в соответствии с (1.3), что завершает доказательство утверждения 1.4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.5. Используя утверждение 1.4 и выбирая $v_1 = u_1$ в (1.11), заключаем, что u_0 (определенное в утверждении 1.1) является решением осредненной задачи (1.14). Единственность этого решения (и поэтому решения задачи (1.16)) следует из строгой монотонности вектор-функции $A(\xi)$, которую несложно вывести из (1.3).

Действительно, для любых $\xi, \zeta \in \mathbb{R}^n$ из (1.3) следует, что

$$0 \leq (a(y, \xi + \nabla_y U(\xi)) - a(y, \zeta + \nabla_y U(\zeta))) (\xi - \zeta + \nabla_y U(\xi) - \nabla_y U(\zeta))$$

п.в. в Y . Интегрируя это неравенство по Y и учитывая (1.13), имеем

$$0 \leq (A(\xi) - A(\zeta))(\xi - \zeta).$$

Предположим, что $0 = (A(\xi) - A(\zeta))(\xi - \zeta)$. Тогда

$$0 = (a(y, \xi + \nabla_y U(\xi)) - a(y, \zeta + \nabla_y U(\zeta))) (\xi - \zeta + \nabla_y U(\xi) - \nabla_y U(\zeta))$$

п.в. в Y и поэтому $\xi + \nabla_y U(\xi) = \zeta + \nabla_y U(\zeta)$ п.в. в Y в соответствии с (1.3). Интегрируя последнее равенство по Y , получаем $\xi = \zeta$ и, следовательно,

$$0 < (A(\xi) - A(\zeta))(\xi - \zeta), \quad \xi \neq \zeta,$$

что доказывает строгую монотонность вектор-функции $A(\xi)$ и единственность решения задачи (1.14) (см. доказательство утверждения 1.2).

Отметим, что вектор-функция $A(\xi)$ удовлетворяет также неравенствам коэрцитивности и липшицевости из (1.3) (см., например, [9]).

Таким образом, непосредственно из утверждений 1.1–1.4 следует, что

$$\hat{u}_\varepsilon \rightharpoonup \hat{u}_0 \quad \text{слабо в } H_0^1(\Omega), \quad \nabla \hat{u}_\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla \hat{u}_0 + \nabla_y U(\nabla \hat{u}_0)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ без выделения подпоследовательностей, поскольку предельные функции определены однозначно. Теорема 1.5 доказана.

Отметим, что доказано также и следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2. Пусть $(u_0, u_1) \in K_2$ является решением вариационного неравенства (1.11). Тогда $(u_0, u_1) = (u_0, U(\nabla\psi_0 + \nabla u_0) - \psi_1)$, где $u_0 \in K$ является единственным решением вариационного неравенства (1.14), $U(\xi)$ является единственным (для каждого $\xi \in \mathbb{R}^n$) решением задачи (1.13), а ψ_0 и ψ_1 определены в утверждении 1.1.

На самом деле верно и обратное утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.3. Пусть $u_0 \in K$ является единственным решением вариационного неравенства (1.14), $U(\xi)$ является единственным (для каждого $\xi \in \mathbb{R}^n$) решением задачи (1.13), а ψ_0 и ψ_1 определены в утверждении 1.1. Тогда $(u_0, u_1) = (u_0, U(\nabla\psi_0 + \nabla u_0) - \psi_1)$ является единственным решением вариационного неравенства (1.11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 2.3. Напомним, что ψ_0 и ψ_1 определены однозначно в соответствии с предположениями. Пусть $(v_0, v_1) \in K_2$ и $u_1 = U(\nabla\psi_0 + \nabla u_0) - \psi_1$. Выберем $\xi = \nabla\psi_0 + \nabla u_0$ и $V = v_1 - u_1$ (для п.в. $x \in \Omega$) в задаче (1.13) и проинтегрируем результат по Ω . Тогда, добавляя полученное соотношение к неравенству (1.14), получаем в точности вариационное неравенство (1.11), которое имеет единственное решение в соответствии с доказательством утверждения 1.2, что завершает доказательство утверждения 2.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.6. Доказательство этой теоремы повторяет доказательство теоремы 1.5, в котором просто не учитывается неотрицательность рассматриваемых функций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1.7. Из (1.3) и (1.19) следует, что

$$b(y, \xi) - b(y, \zeta) \geq a(y, \zeta)(\xi - \zeta) \quad (2.12)$$

для любых $\xi, \zeta \in \mathbb{R}^n$ п.в. в Y (см. [6; утверждения I.5.4 и I.5.5]). Более того, из предположений (1.3) также следует, что

$$0 \leq b(y, \xi) - b(y, \zeta) - a(y, \zeta)(\xi - \zeta) \leq \frac{\beta}{2} |\xi - \zeta|^2 \quad (2.13)$$

для любых $\xi, \zeta \in \mathbb{R}^n$ п.в. в Y . Действительно, используя непрерывность $b(y, \xi)$ и $a(y, \xi)$ по ξ , имеем соотношения

$$\begin{aligned} b(y, \xi) - b(y, \zeta) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} b(y, \zeta + t(\xi - \zeta)) dt = \int_0^1 \nabla_\xi b(y, \zeta + t(\xi - \zeta)) dt (\xi - \zeta) \\ &= a(y, \zeta)(\xi - \zeta) + \int_0^1 (a(y, \zeta + t(\xi - \zeta)) - a(y, \zeta)) dt (\xi - \zeta), \end{aligned}$$

которые доказывают второе неравенство из (2.13), а первое неравенство из (2.13) эквивалентно неравенству (2.12).

Пусть $u_0 \in K$ является решением осредненной задачи (1.14) и $v_0 \in K$. Выберем в неравенстве (2.12) $\xi = \nabla\psi_0 + \nabla v_0 + \nabla_y U(\nabla\psi_0 + \nabla v_0)$ и $\zeta = \nabla\psi_0 + \nabla u_0 +$

$\nabla_y U(\nabla\psi_0 + \nabla u_0)$ для п.в. $x \in \Omega$ и п.в. $y \in Y$ и проинтегрируем результат по $\Omega \times Y$. В этом случае получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_Y b(y, \nabla\psi_0 + \nabla v_0 + \nabla_y U(\nabla\psi_0 + \nabla v_0)) dy dx \\ & - \int_{\Omega} \int_Y b(y, \nabla\psi_0 + \nabla u_0 + \nabla_y U(\nabla\psi_0 + \nabla u_0)) dy dx \\ & \geq \int_{\Omega} \int_Y a(y, \eta + \nabla_y U(\eta)) (\nabla\psi_0 + \nabla v_0 + \nabla_y U(\nabla\psi_0 + \nabla v_0) \\ & - \eta - \nabla_y U(\eta)) dy dx \geq \int_{\Omega} f(v_0 - u_0) dx, \end{aligned}$$

поскольку u_0 удовлетворяет неравенству (1.11), в котором учтено утверждение 1.4 и выбрано $v_1 = U(y, \nabla\psi_0(x) + \nabla v_0(x)) - \psi_1(x, y)$. Здесь $\eta = \nabla\psi_0 + \nabla u_0$. Из этих неравенств следует, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_Y (b(y, \nabla\psi_0 + \nabla v_0 + \nabla_y U(\nabla\psi_0 + \nabla v_0)) - f v_0) dy dx \\ & \geq \int_{\Omega} \int_Y (b(y, \nabla\psi_0 + \nabla u_0 + \nabla_y U(\nabla\psi_0 + \nabla u_0)) - f u_0) dy dx \quad (2.14) \end{aligned}$$

для всех $v_0 \in K$. По определению это означает, что $u_0 \in K$ является решением осредненной задачи минимизации (1.22).

Предположим, что $u_0 \in K$ является решением осредненной задачи минимизации (1.22) и поэтому выполнено (2.14). Для фиксированного $\xi \in \mathbb{R}^n$ рассмотрим задачу минимизации (1.21). В соответствии с определением решения $U(\xi) \in H_P^1(Y)/\mathbb{R}$ этой задачи выполнено неравенство

$$\int_Y b(y, \xi + \nabla_y V) dy \geq \int_Y b(y, \xi + \nabla_y U(\xi)) dy \quad \forall V \in H_P^1(Y)/\mathbb{R}. \quad (2.15)$$

Пусть $(v_0, v_1) \in K_2$. Выбирая $\xi = \nabla\psi_0 + \nabla v_0$ и $V = v_1$ (для п.в. $x \in \Omega$) в (2.15) и интегрируя результат по Ω , имеем неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_Y b(y, \nabla\psi_0 + \nabla v_0 + \nabla_y v_1) dy dx \\ & \geq \int_{\Omega} \int_Y b(y, \nabla\psi_0 + \nabla v_0 + \nabla_y U(\nabla\psi_0 + \nabla v_0)) dy dx. \quad (2.16) \end{aligned}$$

Учитывая это неравенство в (2.14), получаем соотношение

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_Y b(y, \nabla\psi_0 + \nabla v_0 + \nabla_y v_1) dy dx \\ & - \int_{\Omega} \int_Y b(y, \nabla\psi_0 + \nabla u_0 + \nabla_y U(\nabla\psi_0 + \nabla u_0)) dy dx \geq \int_{\Omega} f(v_0 - u_0) dx. \end{aligned}$$

Выберем в этом соотношении $v_0 = u_0 + \sigma(w_0 - u_0)$ и $v_1 = U(\nabla\psi_0 + \nabla u_0)$, где $w_0 \in K$ и $0 < \sigma \leq 1$. Тогда, учитывая неравенство (2.13), в котором выбрано

$$\begin{aligned}\xi &= \nabla\psi_0 + \nabla u_0 + \sigma\nabla(w_0 - u_0) + \nabla_y U(\nabla\psi_0 + \nabla u_0), \\ \zeta &= \nabla\psi_0 + \nabla u_0 + \nabla_y U(\nabla\psi_0 + \nabla u_0),\end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned}\sigma \int_{\Omega} \int_Y a(y, \nabla\psi_0 + \nabla u_0 + \nabla_y U(\nabla\psi_0 + \nabla u_0))(\nabla w_0 - \nabla u_0) dy dx \\ + \sigma^2 \int_{\Omega} |\nabla(w_0 - u_0)|^2 dx \geq \sigma \int_{\Omega} f(w_0 - u_0) dx\end{aligned}\quad (2.17)$$

для $w_0 \in K$, поскольку $\xi - \zeta = \sigma\nabla(w_0 - u_0)$ для выбранных ξ и ζ . Сокращая на σ и переходя к пределу при $\sigma \rightarrow 0$ в неравенстве (2.17), заключаем, что $u_0 \in K$ является решением осредненной задачи (1.14). Утверждение 1.7 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1.8. Доказательство этого утверждения фактически повторяет доказательство утверждения 1.7. Действительно, решение $(u_0, u_1) \in K_2$ вариационного неравенства (1.11) является решением двухмасштабной задачи минимизации (1.23) в силу неравенства (2.12) с соответствующими ξ и ζ . Обратное утверждение следует из (2.16), утверждения 1.4 и неравенства (2.13), что завершает доказательство утверждений, сформулированных во введении.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Несложно проверить, что доказанные утверждения остаются справедливыми, если вместо задачи (1.2) рассмотреть более общее вариационное неравенство для $\hat{u}_\varepsilon \in K_\varepsilon$:

$$\int_{\Omega} a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla\hat{u}_\varepsilon\right)(\nabla\hat{v} - \nabla\hat{u}_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega} f_\varepsilon(\hat{v} - \hat{u}_\varepsilon) dx \quad \forall \hat{v} \in K_\varepsilon, \quad (2.18)$$

где последовательность $\{f_\varepsilon\} \subset L^2(\Omega)$ является равномерно ограниченной, $f_\varepsilon \rightharpoonup f$ слабо в $L^2(\Omega)$ (или $\{f_\varepsilon\} \subset H^{-1}(\Omega)$ является равномерно ограниченной, $f_\varepsilon \rightarrow f$ сильно в $H^{-1}(\Omega)$) и f определено однозначно (разумеется, что при неоднозначном определении f в соответствующих утверждениях следует рассматривать подходящие подпоследовательности решений). Это замечание позволяет обобщить доказанные утверждения на случай, когда в задаче (2.18) выбрано

$$f_\varepsilon = F\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, \hat{u}_\varepsilon, \nabla\hat{u}_\varepsilon\right)$$

при подходящих предположениях на функцию F .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Доказанные утверждения остаются справедливыми без существенных изменений и в случае, когда в задаче (1.2) множество K_ε заменяется множеством $K_\varepsilon^0 = \{\hat{v} \in H_0^1(\Omega) : \hat{v} \leq \psi_\varepsilon \text{ п.в. в } \Omega\}$. Это замечание позволяет обобщить доказанные утверждения на вариационные неравенства с двухсторонними ограничениями на решение.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Можно рассмотреть и несколько более общую, чем в (1.2), (1.4) и (1.17), ситуацию. Пусть задана равномерно ограниченная последовательность функций $\{\psi_\varepsilon\} \subset H^1(\Omega)$. Тогда в соответствии с [4] найдутся такие $\psi_0(x) \in H^1(\Omega)$ и $\psi_1(x, y) \in L^2(\Omega; H_P^1(Y)/\mathbb{R})$, что (после выделения подпоследовательности при $\varepsilon \rightarrow 0$)

$$\psi_\varepsilon \rightharpoonup \psi_0 \text{ слабо в } H^1(\Omega), \quad \nabla \psi_\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla \psi_0 + \nabla_y \psi_1. \quad (2.19)$$

Пусть ψ_0 и ψ_1 определены однозначно и выполнено равенство (1.7).

В этом случае известно [1], что задача (1.17) эквивалентна (замена $\widehat{u}_\varepsilon = \psi_\varepsilon + u_\varepsilon$) неоднородной задаче Дирихле для $\widehat{u}_\varepsilon \in H^1(\Omega)$:

$$\operatorname{div} \left(a \left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \widehat{u}_\varepsilon \right) \right) = f \text{ в } \Omega, \quad \widehat{u}_\varepsilon = \psi_\varepsilon \text{ на } \partial\Omega. \quad (2.20)$$

Также известно [1], что существует единственное (для фиксированного ε) решение задачи (2.20) и последовательность решений $\{\widehat{u}_\varepsilon\} \subset H^1(\Omega)$ является равномерно ограниченной. Аналогичные замечания верны для задачи (1.18). Таким образом, повторяя доказательство теоремы 1.5, получаем следующее утверждение о сходимости решений задачи (2.20).

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть $\widehat{u}_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ является решением задачи (2.20) и выполнены соотношения (2.19) и равенство (1.7). Тогда

$$\widehat{u}_\varepsilon \rightharpoonup \widehat{u}_0 \text{ слабо в } H^1(\Omega), \quad \nabla \widehat{u}_\varepsilon \xrightarrow{2} \nabla \widehat{u}_0 + \nabla_y U(\nabla \widehat{u}_0)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, где $U(\xi)$ является единственным (для каждого $\xi \in \mathbb{R}^n$) решением задачи (1.13) и $\widehat{u}_0 \in H^1(\Omega)$ является единственным решением следующей задачи Дирихле для осредненного уравнения:

$$\operatorname{div}(A(\nabla \widehat{u}_0)) = f \text{ в } \Omega, \quad \widehat{u}_0 = \psi_0 \text{ на } \partial\Omega.$$

Аналогичное утверждение о сходимости решений выполнено и для задачи (1.4) (эквивалентной задаче (1.5)), которую можно интерпретировать как вариационное неравенство с неоднородными условиями Дирихле. Однако в таком случае (при $\{\psi_\varepsilon\} \subset H^1(\Omega)$) задача (1.4) может не быть эквивалентной вариационному неравенству (1.2).

Впрочем, можно рассмотреть и задачу (1.2) при $\{\psi_\varepsilon\} \subset H^1(\Omega)$ (равномерно ограниченной и удовлетворяющей (2.19) и (1.7)), поскольку такая задача эквивалентна вариационному неравенству для $\widehat{u}_\varepsilon \in K_\varepsilon$:

$$\int_{\Omega} a \left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla \widehat{v} \right) (\nabla \widehat{v} - \nabla \widehat{u}_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega} f(\widehat{v} - \widehat{u}_\varepsilon) dx \quad \forall \widehat{v} \in K_\varepsilon,$$

в котором можно перейти к двухмасштабному (и макромасштабному) пределу, учитывая, что $C^1(\overline{\Omega})$ плотно в $H^1(\Omega)$ и $\widehat{v} = v + \psi_\varepsilon$, где $v \in H^1(\Omega)$ и $v \geq 0$ п.в. в Ω . Разумеется, в этом случае предполагается, что множество K_ε непусто и поэтому $\psi_\varepsilon \leq 0$ на $\partial\Omega$ в $H^1(\Omega)$ (см. [2; гл. II]).

Проверим наконец, что равенство (1.7) выполнено, если ψ_ε определено равенством (1.24), в котором $\psi_\varepsilon^0 \rightarrow \psi_0$ сильно в $H^1(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\psi_1(x, y) \in L^2(\Omega; L_P^\infty(Y))$ и $\nabla_y \psi_1(x, y), \nabla_x \psi_1(x, y) \in L^2(\Omega; L_P^\infty(Y))^n$. Действительно, из (2.3) и неравенства треугольника имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla \psi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^n} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla \psi_0 + (\nabla_y \psi_1)^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)^n}$$

и (1.7) следует из равенства (1.25), доказанного в [7]. Отметим в заключение, что равенство (1.25) для функций с разделенными переменными следует из леммы Римана–Лебега, часто применяемой в асимптотических методах (см., например, [20]) и теории рядов Фурье.

Список литературы

1. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
2. Киндерлерер Д., Стампажкя Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. М.: Мир, 1983.
3. Nguetseng G. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // SIAM J. Math. Anal. 1989. V. 20. P. 608–623.
4. Allaire G. Homogenization and two-scale convergence // SIAM J. Math. Anal. 1992. V. 23. P. 1482–1518.
5. Батталов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
6. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
7. Амосов А. А. О слабой сходимости одного класса быстроосциллирующих функций // Матем. заметки. 1997. Т. 62. № 1. С. 145–150.
8. Сандраков Г. В. Принципы осреднения уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами // Матем. сб. 1989. Т. 180. № 12. С. 1643–1690.
9. Chiadò Piat V., De Franceschi A. Homogenization of monotone operators // Nonlinear Anal. 1990. V. 14. P. 717–732.
10. Marcellini P. Periodic solutions and homogenization of nonlinear variational problems // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 1978. V. 117. P. 139–152.
11. Lions J.-L., Sanchez-Palencia E. Écoulement d'un fluide viscoplastique de Bingham dans un milieu poreux // J. Math. Pures Appl. (9). 1981. V. 60. P. 341–360.
12. Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. Asymptotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North-Holland, 1978.
13. Lions J.-L. Asymptotic behavior of variational inequalities with highly oscillating coefficients // Lectures Notes in Math. 1979. V. 503. P. 30–55.
14. Carbone L., Colombini F. On convergence of functionals with unilateral constraints // J. Math. Pures Appl. (9). 1980. V. 59. P. 465–500.
15. Attouch H., Picard C. Variational inequalities with varying obstacles: the general form of the limit problem // J. Funct. Anal. 1983. V. 50. P. 329–386.
16. Dal Maso G., Trebeschi P. Γ -limit of periodic obstacles // Acta Appl. Math. 2001. V. 65. P. 207–215.
17. Кядо Пиат В., Сандраков Г. В. Осреднение вариационных неравенств, возникающих в теории упругости-пластичности // Докл. РАН. 2004. Т. 394. № 5. С. 594–597.
18. Hedberg L. I. Spectral synthesis in Sobolev spaces, and uniqueness of solutions of the Dirichlet problem // Acta Math. 1981. V. 147. P. 237–264.
19. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
20. Федорук М. В. Асимптотика: интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.