Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Сатаев, Отсутствие устойчивых траекторий у неавтономных возмущений систем типа системы Лоренца, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 4, 99–134

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1288>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 15:09:48

УДК 517.938

Е. А. Сатаев

Отсутствие устойчивых траекторий у неавтономных возмущений систем типа системы Лоренца

Рассматриваются системы в некоторой ограниченной области пространства $\mathbb{R}^3$, которые являются обобщением системы Лоренца. Доказывается, что при выполнении некоторых условий равномерной гиперболичности малые неавтономные возмущения не приводят к появлению устойчивых траекторий.

Библиография: 23 названия.

§ 1. Введение

Система уравнений Лоренца имеет вид

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = -bz + xy. \quad (1)$$

Эта система была введена в работе [1] как простейшая модель конвекции жидкости и исследована Е. Лоренцем с помощью численного счета в работе [2]. Лоренц обнаружил, что при значениях параметров $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = \frac{8}{3}$ поведение траекторий уравнения подобно поведению реализаций случайного процесса. Естественно возникает вопрос: в чем причина такого поведения — в ошибках при аппроксимации решения дифференциального уравнения разностной схемой или во внутренних свойствах системы?

Внимание специалистов по динамическим системам к системе Лоренца было привлечено благодаря работам [3], [4], после чего ей было посвящено огромное количество работ.

В большинстве математических работ изучается так называемая геометрическая модель системы Лоренца. Это модель отображения последования на плоскости $z = r - 1$. Отображение является разрывным. Разрывы возникают на линии пересечения устойчивого многообразия неподвижной точки $O(0, 0, 0)$ и плоскости $z = r - 1$. В модели постулируется, что для отображения последования выполнены условия гиперболичности (их формулировка приводится ниже).

Подобные отображения изучались во многих работах (см., например, [5]–[9] и др.). Достаточно хорошо исследована топологическая структура. Доказано, что для подобных отображений имеется естественная инвариантная мера типа Синая–Боуэна–Рюэлля (SBR-мера), относительно которой отображение имеет сильные стохастические свойства (убывание корреляций, центральная предельная теорема и др.) [10]–[13].

Работа выполнена при поддержке РФФИ–Калуга (грант № 04-01-97204) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-457.2003.01).

Полное доказательство гиперболичности для реальной системы Лоренца с помощью компьютера было приведено недавно [14]. До этого разными авторами проводились вычисления на компьютере, только подтверждающие гипотезу о равномерной гиперболичности (возможно, правильнее было бы сказать “не противоречащие гипотезе о гиперболичности”). Имеются другие системы лоренцева типа, для которых гиперболичность удалось доказать без применения компьютера (см. [15], [16]).

Изучались и возмущения системы Лоренца. Возмущение можно определить как систему

$$\dot{x} = \sigma(y - x) + h_1, \quad \dot{y} = rx - y - xz + h_2, \quad \dot{z} = -bz + xy + h_3, \quad (2)$$

где h_1, h_2, h_3 — малые функции переменных x, y, z . Подобные возмущения мы будем называть *автономными*. Из-за разрывов отображение последования не является структурно устойчивым, поэтому и поток не является структурно устойчивым. Однако многие свойства (в частности, гиперболическая структура) при возмущениях сохраняются.

Те свойства, которые при возмущениях сохраняются, называются *грубыми*. Свойства, которые не сохраняются при возмущениях, называются *негрубыми*. Краткий обзор грубых и негрубых свойств для систем типа системы Лоренца приведен в [17].

Неавтономное возмущение (или возмущение, зависящее от времени) — это система (2), в которой функции h_1, h_2, h_3 зависят от переменных x, y, z и времени t .

Для неавтономных возмущений набор грубых свойств гораздо беднее, чем для автономных. В частности, гиперболическая структура при неавтономных возмущениях разрушается (подробнее см. пример в §5). По этой причине неавтономные возмущения потоков в гиперболической теории являются весьма слабо изученными.

В настоящей работе изучаются малые неавтономные возмущения систем типа системы Лоренца (точное определение см. ниже). Решается следующая

ЗАДАЧА. *Может ли появиться устойчивая траектория у малого неавтономного возмущения системы типа системы Лоренца?*

Гипотеза о том, что ответ отрицательный (по крайней мере для периодических возмущений), высказывалась Л. П. Шильниковым. Гипотеза основывалась примерно на следующих соображениях: у потока, определяемого системой Лоренца, имеется инвариантное одномерное сильно устойчивое слоение. Кроме того, в двумерном направлении, трансверсальном сильно устойчивому слоению, имеется свойство экспоненциального увеличения площади. При периодическом возмущении рассматривается поток уже в четырехмерном пространстве. При этом одномерное сильно устойчивое слоение сохраняется, а растяжение двумерной площади трансформируется в увеличение трехмерного объема. Отсюда выводится, что периодические устойчивые траектории отсутствуют.

Ниже мы увидим, что ответ на вопрос отрицательный даже для неавтономного возмущения. Мы докажем это для более общих систем, чем система Лоренца. Соображения, из которых мы будем выводить соответствующее утверждение, отличаются от соображений Л. П. Шильникова.

В частности, результат верен и для потоков, имеющих инвариантное локально максимальное гиперболическое множество.

В основе доказательства лежит вариант определения гиперболичности системы, который в работе назван сингулярной гиперболичностью. Система, удовлетворяющая соответствующему условию, названа сингулярно гиперболической.

Оказывается, что в случае инвариантного локально максимального множества, не содержащего неподвижных точек, сингулярная гиперболичность эквивалентна классической гиперболичности (инвариантные множества, не содержащие неподвижных точек, могут существовать, если область притяжения не является односвязной; например, является полноторием). Для систем типа системы Лоренца сингулярная гиперболичность эквивалентна гиперболичности отображения последования. Определение сингулярной гиперболичности переносится на неавтономные системы. Свойство сингулярной гиперболичности является грубым относительно малых неавтономных возмущений. Наконец, сингулярно гиперболические системы не могут иметь устойчивых траекторий. Отсюда и из работы [14], в которой доказана гиперболичность отображения последования для системы Лоренца, следует отсутствие устойчивых решений у малых неавтономных возмущений системы Лоренца.

Общая схема работы следующая. В § 2 мы повторяем известные факты для уточнения, какие системы рассматриваются как обобщение системы Лоренца, что понимается под аттрактором, что понимается под гиперболичностью и т.д. Попутно доказываются некоторые простые утверждения. В § 3 приводится определение сингулярно гиперболического потока. Доказываются некоторые свойства сингулярно гиперболических систем. В § 4 доказывается, что для систем типа системы Лоренца гиперболичность отображения последования эквивалентна сингулярной гиперболичности потока. В § 5 формулируется условие сингулярной гиперболичности для неавтономных систем и доказывается его грубость. Наконец, показывается, что из сингулярной гиперболичности следует отсутствие устойчивых траекторий. В § 6 формулируются некоторые дальнейшие свойства сингулярно гиперболических систем, некоторые из них приводятся без доказательства. В частности, сформулированы варианты обобщения на случай произвольной размерности и на случай локально максимального инвариантного множества.

Для сохранения ясности мы ограничимся трехмерным случаем. В случае произвольной размерности будут приведены формулировки результатов.

§ 2. Системы типа системы Лоренца

В этом параграфе мы опишем класс рассматриваемых систем, включающий в себя систему Лоренца. Для таких систем приводятся факты, которые в основном хорошо известны.

2.1. Основные обозначения. Через x мы будем обозначать точку $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, через $X(x)$ — векторное поле с координатами $X_1(x)$, $X_2(x)$, $X_3(x)$, определенное в некоторой ограниченной области $U_0 \subset \mathbb{R}^3$. Вектор $X(x)$ мы будем называть *вектором скорости*. Через Φ_t обозначается локальный поток, порожденный системой уравнений $\dot{x} = X(x)$. Предполагается, что U_0 инвариантна относительно Φ_t , т.е. $\Phi_t(U_0) \subset U_0$, если $t > 0$. Таким образом, положительная полутраектория любой точки $x \in U_0$ целиком лежит в U_0 и Φ_t —

полупоток на U_0 .

Через $D(x)$ обозначается матрица из частных производных

$$D(x) = \left\{ \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right\}, \quad (3)$$

через $d\Phi_t$ – дифференциал отображения Φ_t . Если мы хотим подчеркнуть, что дифференциал рассматривается только в точке x , то применяем обозначение $d\Phi_t(x)$. Если $f(x)$ – непрерывная функция, дифференцируемая вдоль траекторий, определенная на U_0 и принимающая значения в каком-то множестве, то через $\dot{f}$ или $\frac{d}{dt}f(x)$ обозначается производная по направлению векторного поля $X(x)$.

Через $T_x U_0$ обозначается касательное пространство к U_0 в точке x . Пространство, сопряженное касательному, обозначаем через $T_x^* U_0$. Мы будем рассматривать элементы касательного пространства как вектор-столбцы; элементы пространства, сопряженного касательному пространству, – как вектор-строки. Для векторов $q \in T_x^* U_0$, $v \in T_x U_0$ определено скалярное произведение (q, v) . Векторы $q \in T_x^* U_0$, $v \in T_x U_0$ ортогональны, если $(q, v) = 0$.

Некоторая путаница вызвана тем, что в пространстве $\mathbb{R}^3$ имеется отождествление касательных пространств во всех точках; кроме того, имеется отождествление касательного пространства и сопряженного к нему. В настоящей работе различаются касательные пространства в разных точках, а также касательное пространство и сопряженное к нему.

В пространствах $T_x U_0$, $T_x^* U_0$ определена обычная евклидова норма и связанные с ней скалярное произведение и измерение углов. Длину вектора мы будем обозначать через $|v|$ или $|q|$.

Функцию $q(x)$ со значениями в пространстве $T_x^* U_0$ мы будем называть *векторным полем* (учитывается, что элементы пространства $T_x^* U_0$ – это вектор-строки).

Мы будем рассматривать левые и правые собственные векторы произвольной матрицы A . Правый собственный вектор является вектор-столбцом и определяется уравнением $Av = \lambda v$; левый собственный вектор является вектор-строкой и определяется уравнением $qA = \lambda q$. Хорошо известно, что если q, v – левый и правый собственные векторы, соответствующие различным собственным числам λ_1, λ_2 , то $(q, v) = 0$. Соответствующее утверждение известно как соотношение ортогональности. Левые собственные векторы рассматриваются как элементы пространства $T_x^* U_0$.

2.2. Неподвижные точки. Мы будем говорить, что неподвижная точка x_0 имеет *тип* (L) , если собственные числа дифференциала в точке x_0 (то же самое, что матрицы $D(x_0)$) вещественные и таковы, что $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_3$, $\lambda_2 + \lambda_3 > 0$. Величина $\lambda_2 + \lambda_3$ называется *седловой величиной*.

Неподвижная точка x_0 типа (L) имеет двумерное устойчивое многообразие (мы будем обозначать его через $W^s(x_0)$) и одномерное неустойчивое многообразие (мы будем обозначать его через $W^u(x_0)$). Неустойчивое многообразие разделяется на две сепаратрисы. В устойчивом многообразии выделяется одномерное подмногообразие (мы будем называть его *сильно устойчивым*) $W^{ss}(x_0)$; это подмногообразие касается собственного вектора матрицы $D(x_0)$, соответствующего собственному значению λ_1 , и характеризуется тем, что если точка x принадлежит $W^{ss}(x_0)$, то $|x_0 - \Phi_t(x)| < ce^{\lambda_1 t}$ для некоторой константы $c > 0$ и любого $t < 0$.

Мы будем говорить, что неподвижная точка x_0 имеет *тип* (F) , если матрица $D(x_0)$ (определенная в (3)) имеет одно вещественное собственное значение $\lambda_1 < 0$ и пару чисел λ_2, λ_3 , причем $\operatorname{Re} \lambda_2 > 0$, $\operatorname{Re} \lambda_3 > 0$. Числа λ_2, λ_3 могут быть вещественными или парой комплексно-сопряженных. Неподвижная точка x_0 типа (F) имеет двумерное неустойчивое многообразие (мы будем обозначать его через $W^u(x_0)$) и одномерное устойчивое многообразие (мы будем обозначать его через $W^s(x_0)$). Устойчивое многообразие разделяется на две сепаратрисы.

Рассмотрение именно этих двух типов неподвижных точек обосновывается тем, что, во-первых, в системе Лоренца при указанных значениях параметров имеются неподвижные точки именно этих двух типов; во-вторых, в определенных ниже сингулярно гиперболических системах размерности 3 имеются только такие неподвижные точки, если нет собственных чисел с нулевой вещественной частью.

Система Лоренца имеет неподвижную точку $O(0, 0, 0)$ типа (L) и две неподвижные точки $A_{\pm}(\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$ типа (F) . Матрица $D(A_{\pm})$ имеет одно вещественное собственное число $\lambda_1 < 0$ и пару комплексно-сопряженных $\lambda_2, \bar{\lambda}_2$, $\operatorname{Re} \lambda_2 > 0$.

Известно, что поток в окрестности неподвижной точки x_0 приводится гладким преобразованием к линейному, если нет резонансов низкого порядка [18], [19]. Если в окрестности неподвижной точки систему координат (y_1, y_2, y_3) выбрать в соответствии с базисом из собственных векторов, то $W^{ss}(x_0)$ совпадает с осью OY_1 .

Нам потребуется более слабое утверждение, для которого не надо требовать отсутствия резонансов [20].

ЛЕММА 2.1. *В окрестности неподвижной точки x_0 типа (L) существует такая система координат (y_1, y_2, y_3) , в которой неподвижная точка имеет координаты $(0, 0, 0)$, устойчивое многообразие $W^s(x_0)$ определяется уравнением $y_1 = 0$, неустойчивое – уравнениями $y_2 = 0, y_3 = 0$. Система уравнений в этой системе координат имеет вид*

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i + f_i(y), \quad i = 1, 2, 3, \quad (4)$$

где разложение в ряд Тейлора функций $f_i(y)$ начинается с членов второго порядка малости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x_0 – неподвижная точка типа (L) . Перенесем начало координат в точку x_0 и сделаем линейную замену координат $x = Bu$ с матрицей B так, что матрица $D(x_0)$ приводится к диагональному виду. В этой системе уравнение имеет вид $\dot{u}_i = \lambda_i u_i + g_i(u)$, где разложение в ряд Тейлора функций $g_i(u)$ начинается с членов второго порядка по переменной u . Устойчивое многообразие $W^s(x_0)$ определяется уравнением $u_3 = \psi(u_1, u_2)$, причем разложение в ряд Тейлора функции $\psi(u_1, u_2)$ начинается с членов второго порядка (это следует из того, что $W^s(x_0)$ касается плоскости $u_3 = 0$). Положим $s_1 = u_1$, $s_2 = u_2$, $s_3 = u_3 - \psi(u_1, u_2)$. В системе координат (s_1, s_2, s_3) неустойчивое многообразие имеет вид $s_1 = \varphi_1(s_3)$, $s_2 = \varphi_2(s_3)$. Положим $y_1 = s_1 - \varphi_1(s_3)$, $y_2 = s_2 - \varphi_2(s_3)$, $y_3 = s_3$. Это и есть нужная система координат. Лемма доказана.

Аналогично можно показать, что в окрестности неподвижной точки x_0 типа (F) существует такая система координат (y_1, y_2, y_3) , что система в случае вещественных собственных чисел матрицы $D(x_0)$ имеет вид

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i + f_i(y), \quad i = 1, 2, 3, \quad y = (y_1, y_2, y_3),$$

а в случае вещественного числа λ_1 и пары комплексно-сопряженных собственных чисел $\lambda_2, \bar{\lambda}_2$ имеет вид

$$\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 + f_1(y_1, z), \quad \dot{z} = \lambda_2 z + f_2(y_1, z),$$

где z – комплексная переменная $z = y_2 + iy_3$, разложение функций f_1, f_2 в ряд Тейлора начинается с членов второго порядка, неустойчивое многообразие определяется уравнением $y_1 = 0$, устойчивое многообразие определяется уравнениями $y_2 = 0, y_3 = 0$.

2.3. Определение системы типа системы Лоренца. Пусть P – поверхность, краем которой является объединение конечного числа замкнутых контуров (не обязательно связная), не содержащая неподвижных точек и такая, что вектор скорости $X(x)$ во всех точках поверхности P (включая край поверхности P) трансверсален P (напомним, что трансверсальность в данном случае означает, что угол между $X(x)$ и поверхностью P ненулевой).

Касательное пространство к поверхности P в точке x обозначается через $T_x P$. Отображение последования на поверхности P обозначается через F_P (или через F , если ясно, о какой поверхности P идет речь).

Отображение F_P , как правило, определено не на всей поверхности P , а только на ее части, так как на P имеются точки, положительные полутраектории которых не пересекаются с P . Это, в частности, точки, принадлежащие пересечению устойчивого многообразия неподвижной точки и поверхности P .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Динамическая система, порожденная векторным полем $X(x)$ в некоторой инвариантной области $U_0 \subset \mathbb{R}^3$, называется *системой типа системы Лоренца*, если выполнено следующее.

УСЛОВИЕ (L1). В области U_0 имеется не более конечного числа неподвижных точек $x_1, \dots, x_m$; все неподвижные точки являются точками типа (L) или (F) .

УСЛОВИЕ (L2). Существует поверхность P (не обязательно связная), край которой состоит из конечного числа простых замкнутых контуров, не содержащая неподвижных точек и такая, что вектор скорости в каждой точке $x \in P$ трансверсален P . При этом угол между вектором скорости и плоскостью, касательной к P , равномерно отделен от нуля.

УСЛОВИЕ (L3). Многообразия $W^{ss}(x_j)$ неподвижных точек типа (L) и многообразия $W^s(x_j)$ неподвижных точек типа (F) не пересекаются с поверхностью P и не лежат целиком в U_0 .

УСЛОВИЕ (L4). Всякая положительная полутраектория из области U_0 , кроме неподвижных точек и полутраекторий, лежащих на устойчивых многообразиях неподвижных точек, пересекается с P . Всякая положительная полутраектория точки $x \in P$, включая край поверхности P , возвращается обязательно во внутреннюю точку поверхности P . Неустойчивые многообразия неподвижных точек типа (L) пересекаются с внутренностью поверхности P .

Для конкретной системы Лоренца поверхность P – это часть плоскости $z = r - 1$, ограниченная кривыми $xy = b(r - 1) - \varepsilon$ с некоторым достаточно малым числом

$\varepsilon > 0$ и кривыми $|x - y| = 50$. На кривой $xy = b(r - 1)$ вектор скорости касается плоскости $z = r - 1$.

Приведем некоторые свойства отображения F_P .

1) Если $x \in P$ и положительная полутраектория точки x пересекается с P , то F_P является гладким в окрестности точки x (и даже аналитическим, если поверхность и векторное поле $X(x)$ являются аналитическими). Это следует из теорем о гладкой и аналитической зависимости решений от начальных условий и из того, что полутраектория точки x попадает во внутреннюю точку поверхности P .

2) Из условия (L3) следует, что если положительная полутраектория точки $x \in P$ не пересекается с поверхностью P , то x принадлежит устойчивому многообразию некоторой неподвижной точки x_j типа (L). При этом точка x не принадлежит многообразию $W^{ss}(x_j)$ неподвижной точки x_j типа (L) и не принадлежит устойчивому многообразию неподвижной точки типа (F). Так как $X(x)$ трансверсально P и касается многообразия $W^s(x_j)$, то многообразия P и $W^s(x_j)$ трансверсальны. Следовательно, $W^s(x_j) \cap P$ является гладким многообразием размерности 1. Поэтому пересечение поверхности P со всеми устойчивыми многообразиями всех неподвижных точек типа (L) (обозначим это множество через Γ) является объединением некоторого количества гладких кривых. Эти кривые не пересекаются, так как устойчивые многообразия неподвижных точек не могут пересекаться.

3) В точках множества Γ отображение F_P не определено и разрывно. Отображение F_P^{-1} также определено только на некотором подмножестве (именно на $F_P(P \setminus \Gamma)$). Аналогично, F_P^n , F_P^{-n} определены только на некоторых подмножествах (не будем уточнять, на каких).

Мы будем употреблять обозначения $F_P^n(A)$, $F_P^{-n}(A)$, подразумевая под этими обозначениями $F_P^n(A \cap M)$, $F_P^{-n}(A \cap N)$, где M , N – множества, на которых определены соответственно F_P^n или F_P^{-n} .

2.4. Аттрактор. В литературе имеются различные определения термина “аттрактор”. Обычно под аттрактором потока Φ_t понимают замкнутое инвариантное множество Λ , к которому притягиваются положительные полутраектории всех точек из некоторой окрестности множества Λ . Следовательно, для заданного потока в некоторой окрестности U_0 может быть несколько аттракторов. Поэтому вопрос о том, что понимается под аттрактором конкретного потока, определяемого системой Лоренца, требует уточнения. Мы будем рассматривать два аттрактора. Один из них назовем глобальным аттрактором. Другой аттрактор – это тот аттрактор, который мы понимаем под аттрактором Лоренца. Отметим, что и рассматриваемый ниже аттрактор системы тоже может быть не окончательным, он может содержать еще один или несколько более малых аттракторов.

Глобальным аттрактором мы будем называть множество $\Lambda_g = \bigcap_{t>0} \Phi_t(U_0)$. Очевидно, что Λ_g является инвариантным множеством и каждая положительная полутраектория $x(t)$, $t > 0$, притягивается к Λ , если $x(0) \in U_0$. Точки множества Λ_g характеризуются тем, что полная траектория $x(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$, принадлежит U_0 , если $x(0) \in \Lambda_g$. Отсюда следует, что вся траектория $x(t)$ принадлежит Λ_g , если $x(0) \in \Lambda_g$. В частности, неподвижные точки, принадлежащие U_0 , и их неустойчивые многообразия принадлежат Λ_g .

Аттрактором отображения F_P назовем множество

$$\Lambda_P = \text{clos} \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_P^n(P) \right)$$

(через $\text{clos } A$ обозначается замыкание множества A).

Отметим, что из-за разрывности отображения F множество $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_P^n(P)$ может быть незамкнутым. Поэтому в определении мы берем замыкание множества.

Аттрактором (или аттрактором потока, если необходимо подчеркнуть отличие от Λ_P) будем называть замыкание множества всех положительных полутраекторий точек $x \in \Lambda_P$. Обозначать аттрактор мы будем через Λ . Можно показать, что Λ состоит из траекторий точек $x \in \Lambda_P$, неподвижных точек типа (L) и их неустойчивых многообразий. Кроме того, $\Lambda_P = \Lambda \cap P$. Это будет видно из доказательства следующей леммы, которая утверждает, что Λ – аттрактор потока в смысле приведенного выше определения.

ЛЕММА 2.3. *Существует такая окрестность U множества Λ , что*

$$\Phi_t(U) \subset U, \quad t > 0, \quad \Lambda = \bigcap_{t>0} \Phi_t(U).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество U_1 , состоящее из положительных полутраекторий всех точек $x \in P$. Покажем, что граница ∂U_1 множества U_1 состоит из точек $x \in P \setminus F_P(P)$, положительных полутраекторий точек $x \in \partial P$ до их пересечений с поверхностью P , неподвижных точек типа (L) и их неустойчивых многообразий.

Действительно, пусть последовательность точек $x_n \in U_1$ сходится к точке x_{∞} . Точки x_n лежат на положительных полутраекториях некоторых точек $x'_n \in P$. Пусть соответствующие полутраектории $x_n(t)$ выбраны так, что $x_n(0) = x'_n$, $x_n(t_n) = x_n$, $x_n(t) \notin P$, если $t \in (0, t_n)$. В силу компактности P из последовательности x'_n можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Можно предположить, что сама последовательность x'_n сходится к некоторой точке x'_{∞} . Возможны следующие случаи.

1) Последовательность t_n ограничена, $x'_{\infty} \in \partial P$. В этом случае точка x_{∞} лежит на части положительной полутраектории точки $x'_{\infty} \in \partial P$ до пересечения с P и, очевидно, принадлежит границе U_1 .

2) Последовательность t_n ограничена, $x'_{\infty} \notin \partial P$. В этом случае x_{∞} – внутренняя точка множества U_1 .

3) Последовательность t_n не ограничена. В этом случае по соображениям непрерывности $t_n \rightarrow \infty$ и потому полутраектория точки x'_{∞} не пересекается с поверхностью P ; из условия (L4) следует, что x'_{∞} принадлежит устойчивому многообразию некоторой неподвижной точки x_j типа (L) , а точка x_{∞} принадлежит пролонгации положительной полутраектории точки x'_{∞} . Как известно, пролонгация состоит из неподвижной точки x_j и ее неустойчивого многообразия $W^u(x_j)$. Точка x_j и $W^u(x_j)$ не принадлежат U_1 ; следовательно, они принадлежат границе U_1 .

Таким образом, мы показали, что предельными точками множества U_1 являются точки множества U_1 , точки, лежащие на положительных полутраекториях точек $x \in \partial P$, неподвижные точки типа (L) и их неустойчивые многообразия.

Граничными могут быть неподвижные точки типа (L) , отрезки их неустойчивых многообразий до пересечения с P , отрезки положительных полутраекторий точек $x \in \partial P$ до пересечения с P и точки $x \in P$. Точки множества $F_P(P)$ являются внутренними для U_1 .

Отметим, что неподвижные точки и их неустойчивые многообразия не могут принадлежать внутренности U_1 , так как имеется траектория (например, $W^{ss}(x_j)$), не пересекающаяся с P и подходящая как угодно близко к x_j .

Построим специальную окрестность неподвижной точки x_j типа (L) . Для этого перейдем к системе координат (y_1, y_2, y_3) в окрестности точки x_j , определяемой леммой 2.1. Зададим множество $V_{j,\delta,r}$ неравенствами $y_1^2 + y_2^2 \leq r$, $|y_3| \leq \delta$. Назовем кольцом множество, определенное уравнением $y_1^2 + y_2^2 = r$, $|y_3| \leq \delta$, кругом — множество $\{y_1^2 + y_2^2 \leq r, y_3 = \delta\}$ или $\{y_1^2 + y_2^2 \leq r, y_3 = -\delta\}$. Очевидно, что граница множества $V_{j,\delta,r}$ состоит из кольца и двух кругов, и если δ, r достаточно малы, то через кольцо траектории входят в $V_{j,\delta,r}$, через круги выходят из $V_{j,\delta,r}$.

Определим множество U как объединение множества U_1 , множеств $V_{j,\delta,r}$ и отрезков положительных полутраекторий точек множества $V_{j,\delta,r}$ до пересечения с P . Очевидно, что если r и δ достаточно малы, то положительные полутраектории точек из $V_{j,\delta,r}$ пересекаются с поверхностью P и не пересекаются с краем поверхности P (последнее утверждение следует из того, что неустойчивые многообразия неподвижных точек типа (L) пересекаются с внутренностью поверхности P и не пересекаются с краем P). Нужные свойства множества U очевидны.

Лемма доказана.

2.5. Гиперболичность. Под гиперболичностью системы типа системы Лоренца обычно понимают гиперболичность отображения последования на поверхности P . Сформулируем два варианта соответствующего определения.

Как было сказано выше, отображение последования на поверхности P является разрывным (разрывы имеются на множестве Γ , которое является объединением гладких непересекающихся линий). В остальных точках отображение F_P является гладким (и даже аналитическим, если поверхность P аналитична и система уравнений задана аналитическими функциями). Поэтому мы приведем модификацию общего определения гиперболичности применительно к рассматриваемому случаю.

Именно, пусть F — отображение двумерного многообразия P с краем ∂P , имеющее разрывы на множестве Γ . Множество Γ является объединением конечного числа гладких непересекающихся кривых.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. *Конусом в евклидовом пространстве с осевым пространством Q и раствором α* называется множество таких векторов v , что $\angle(v, Q) < \alpha$ (через $\angle(v, Q)$ обозначается угол между вектором v и пространством Q).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Отображение F называется *гиперболичным*, если выполнено следующее.

УСЛОВИЕ (НУ). Для каждой точки $x \in P$ определены конусы $\mathcal{K}_x^u \subset T_x P$, $\mathcal{K}_x^s \subset T_x P$, непрерывно зависящие от точки x . Для конусов $\mathcal{K}_x^u$, $\mathcal{K}_x^s$ выполнены условия:

а) если $x \in P \setminus \Gamma$, то $\text{clos}(dF(\mathcal{K}_x^u)) \subset \text{int}(\mathcal{K}_{F(x)}^u)$ (здесь и далее через clos и

int обозначены замыкание и внутренность множества); если $x \in F(P \setminus \Gamma)$, то $\text{clos}(dF^{-1}(\mathcal{K}_x^s)) \subset \text{int}(\mathcal{K}_{F^{-1}(x)}^s)$;

b) существуют такие константы $c > 0, \mu > 1$, что

bu) для любой точки $x \in P$, для любого вектора $v \in \mathcal{K}_x^u$ и любого натурального n , для которого $F^n(x)$ определено, выполнено неравенство $|dF^n(v)| > c\mu^n|v|$;

bs) для любой точки $x \in P$, любого вектора $v \in \mathcal{K}_x^s$ и любого натурального n , для которого $F^{-n}(x)$ определено, выполнено неравенство $|dF^{-n}(v)| > c\mu^n|v|$;

c) касательная к множеству Γ в каждой точке $x \in \Gamma$ лежит в конусе $\mathcal{K}_x^s$.

Конус $\mathcal{K}_x^u$ называется *неустойчивым конусом*, конус $\mathcal{K}_x^s$ — *устойчивым конусом*.

Второй вариант определения гиперболичности.

УСЛОВИЕ (НЛ). Для каждой точки $x \in \Lambda_P$ определено разложение пространства $T_x P$ в прямую сумму $T_x P = E_x^u \oplus E_x^s$. Пространства E_x^u, E_x^s инвариантны, непрерывно зависят от x на Λ_P и удовлетворяют следующим условиям:

a) существует такая константа $\delta > 0$, что если $v_1 \in E_x^u, v_2 \in E_x^s$, то справедливо неравенство $\angle(v_1, v_2) > \delta$;

b) существуют такие константы $c > 0, \mu > 0$, что

bu) если $x \in \Lambda_P, v \in E_x^u, F^n(x)$ определено, то $|dF^n(v)| > c\mu^n|v|$;

bs) если $x \in \Lambda_P, v \in E_x^s, F^{-n}(x)$ определено, то $|dF^{-n}(v)| > c\mu^n|v|$;

c) если $x \in \Gamma$, то E_x^s касается Γ .

Здесь константы c, μ те же самые, что и в условии (НУ).

Известно, что условия (НУ), (НЛ) для гладких отображений (без разрывов) с локально максимальным множеством Λ_P эквивалентны. Именно, если для гладкого отображения (без разрывов) в окрестности инвариантного локально максимального множества Λ_P выполнено условие (НУ), то на множестве Λ_P выполнено условие (НЛ). Опишем процесс построения пространств E_x^u, E_x^s для общего отображения F (не обязательно отображения последования на поверхности P).

Предположим, что выполнено условие (НУ). Определим пространства E_x^s для тех точек $x \in P$, для которых $F^n(x)$ определено при всех натуральных n . Это те точки, для которых $x \notin \Gamma, F^n(x) \notin \Gamma$ при всех натуральных n . Положим

$$E_x^s = \bigcap_{n=1}^{\infty} dF^{-n}(\mathcal{K}_{F^n(x)}^s). \quad (5)$$

Семейство пространств E_x^s является инвариантным, непрерывно зависит от точки x и продолжается на весь аттрактор Λ_P по непрерывности. Для систем типа системы Лоренца в точках $x \in \Gamma$ пространство E_x^s совпадает с касательной к кривой Γ . Более того, на P существует семейство устойчивых многообразий, т.е. кривых, которые в каждой точке касаются пространства E_x^s . Доказательство этих утверждений можно найти, например, в [7] (в этой статье условия формально отличаются от приведенных в настоящей статье, но по существу близки к вышеприведенным; все доказательства без труда переносятся на рассматриваемый в настоящей работе случай).

Аналогично, для каждой точки $x \in \Lambda$, для которой $F^{-n}(x)$ определено при всех натуральных n , определено пространство E_x^u , называемое *неустойчивым пространством*:

$$E_x^u = \bigcap_{n=1}^{\infty} dF^n(\mathcal{K}_{F^{-n}(x)}^u). \quad (6)$$

Это пространство определено на множестве $\bigcap_{n=1}^{\infty} F^n(P)$ (т.е. на части аттрактора Λ) и продолжается по непрерывности на весь аттрактор Λ . В точке $x \in \Gamma$ пространство E_x^u трансверсально Γ .

Наоборот, если выполнено условие (НЛ), то существует окрестность множества Λ_P , на которой выполнено условие (НУ). В качестве конусов $\mathcal{K}_x^u, \mathcal{K}_x^s$ можно выбрать достаточно малые окрестности пространств E_x^u, E_x^s , которые продолжаются с сохранением непрерывности на окрестность множества Λ_P .

ЗАМЕЧАНИЕ. Вообще говоря, условия (НУ) и (НЛ) для общих систем, имеющих разрывы, скорее всего, неэквивалентны. Для отображения последования на поверхности P системы типа системы Лоренца условия (НУ) и (НЛ) эквивалентны, однако это не такой тривиальный факт, как для гладких отображений без особенностей.

Приведем классическое определение гиперболичности потока на инвариантном множестве. Это определение формулируется для аттрактора, но оно переносится дословно на любое инвариантное замкнутое множество.

Пусть поток задан уравнением $\dot{x} = X(x)$ на некотором открытом множестве U , содержащем аттрактор Λ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Поток Φ_t гиперболичен на инвариантном множестве $\Lambda \subset U$, не содержащем неподвижных точек, если для каждой точки $x \in \Lambda$ имеется разложение пространства $T_x U$ в прямую сумму $T_x U = E_x^u \oplus E_x^0 \oplus E_x^s$. Пространства E_x^u, E_x^s, E_x^0 инвариантны относительно $d\Phi_t$, непрерывно зависят от точки $x \in \Lambda$ и дифференцируемы вдоль траекторий. Пространство E_x^0 порождено вектором $X(x)$. Кроме того, существуют такие константы $c > 0, \gamma > 0$, что

- а) если $v \in E_x^u$, то $|d\Phi_t(v)| > ce^{\gamma t}|v|, t > 0$;
- б) если $v \in E_x^s$, то $|d\Phi_{-t}(v)| > ce^{\gamma t}|v|, t > 0$.

Если у системы типа системы Лоренца имеются неподвижные точки типа (L) , то поток не гиперболичен в смысле последнего определения.

В заключение докажем еще одно известное утверждение.

У реальной системы Лоренца $\operatorname{div} X(x) < 0$, поэтому наличие устойчивого конуса следует из наличия неустойчивого. Это видно из следующего утверждения, которое в литературе неоднократно встречалось, но ввиду простоты иногда даже не формулировалось.

ЛЕММА 2.7. Пусть для системы типа системы Лоренца выполнены следующие условия: $\operatorname{div} X < 0$ и для отображения F_P существует семейство неустойчивых конусов $\mathcal{K}_x^u$, для которых выполнены условия инвариантности и bu) из условия (НУ). Тогда существует семейство устойчивых конусов $\mathcal{K}_x^s$, для которых выполнены условия инвариантности и bs) из условия (НУ).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве семейства конусов $\mathcal{K}_x^s \subset T_x P$ рассмотрим конусы, дополнительные к конусам $\mathcal{K}_x^u$. Так как конус $\mathcal{K}_x^u$ сужается под действием F , то конусы $\mathcal{K}_x^s$ сужаются под действием F^{-1} . Из существования неустойчивых конусов следует существование семейства пространств E_x^u , $x \in \Lambda \cap P$. Пусть $x \in \Lambda \cap P$, $v_1 \in E_x^u$, $v_2 \in \mathcal{K}_x^s$. Из условия $\operatorname{div} X < 0$ следует, что функция $V_n(x, v_1, v_2)$, равная объему параллелепипеда, порожденного векторами $dF_P^n(v_1)$, $dF_P^n(v_2)$, $X(F_P^n(x))$, экспоненциально убывает с ростом n . Так как $X(x)$ ограничено на P , то площадь параллелограмма, порожденного векторами $dF_P^n(v_1)$, $dF_P^n(v_2)$, экспоненциально убывает с ростом n . Следовательно, площадь параллелограмма, порожденного векторами $dF_P^{-n}(v_1)$, $dF_P^{-n}(v_2)$ (если dF_P^{-n} определено), экспоненциально растет. Но если $v_1 \in E_x^u$, то $dF_P^{-n}(v_1)$ экспоненциально убывает. Следовательно, $dF_P^{-n}(v_2)$ экспоненциально растет. Отсюда следует оценка $|dF_P^{-n}(v_2)| > c\mu_2^n$ при некоторых константах $c > 0$, $\mu_2 > 1$. Лемма доказана.

§ 3. Сингулярно гиперболическая структура

3.1. Уравнение в вариациях и сопряженное уравнение в вариациях.

Далее рассматривается известное уравнение в вариациях. Если $x(t)$ — траектория, то уравнение в вариациях вдоль траектории $x(t)$ имеет вид $\dot{v} = D(x(t))v$. В этом уравнении вектор $v(t)$ представляется как вектор-столбец. Вместе с уравнением в вариациях мы будем рассматривать сопряженное уравнение в вариациях вдоль траектории $x(t)$, имеющее вид $\dot{q} = -qD(x(t))$. В этом уравнении вектор q представляется как вектор-строка, т.е. как элемент пространства T_x^*U .

Понимать уравнение в вариациях и сопряженное уравнение в вариациях нужно так. У нас имеется стандартное отождествление пространства $T_x U$ с пространством $\mathbb{R}^3$. В соответствии с этим отождествлением мы можем написать уравнение с решением $v(t) \in \mathbb{R}^3$. Затем для каждого t вектор $v(t)$ отождествляется с вектором из пространства $T_{x(t)} U$.

Хорошо известно, что дифференциал $d\Phi_t$ потока Φ_t связан с уравнением в вариациях. Именно, если $v(t)$ — решение уравнения в вариациях вдоль траектории $x(t)$, то $d\Phi_t v(0) = v(t)$.

С сопряженным уравнением в вариациях свяжем оператор $d\Phi_t^*$, который назовем *сопряженным дифференциалом*. Оператор $d\Phi_t^*$ определяется в пространстве T_x^*U и принимает значения в пространстве $T_{x(t)}^*U$ так, что если $q(t)$ — решение сопряженного уравнения в вариациях вдоль траектории $x(t)$, $x(0) = x$, то $q(0)d\Phi_t^* = q(t)$.

Действие оператора $d\Phi_t^*$ записывается справа по той причине, что такая запись согласуется с обычным определением произведения матриц (произведение вектор-строки на (3×3) -матрицу). Кроме того, по существу действие группы операторов $d\Phi_t^*$ является правым.

ЛЕММА 3.1. Пусть $v(t)$, $q(t)$ — решения уравнения в вариациях и сопряженного уравнения в вариациях вдоль одной и той же траектории $x(t)$. Тогда $(q(t), v(t)) = \text{const}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость леммы следует из очевидной цепочки равенств

$$\frac{d}{dt}(q, v) = (\dot{q}, v) + (q, \dot{v}) = (-qD(x(t)), v) + (q, D(x(t))v) = 0.$$

Лемма доказана.

Подобные утверждения встречались неоднократно. Имеется подобное утверждение, например, в [16]. Мы формулируем это утверждение в виде отдельной леммы в силу того, что ниже она неоднократно используется.

СЛЕДСТВИЕ. Для любых $v \in T_x U$, $q \in T_x^* U$ справедливо равенство

$$(qd\Phi_t^*, d\Phi_t v) = (q, v).$$

Из последнего соотношения видно, что оператор $d\Phi_t^*$ является обратным к оператору, сопряженному оператору $d\Phi_t$.

3.2. Определение сингулярно гиперболической структуры. Мы приведем определение сингулярно гиперболической системы для более общих систем, чем системы типа системы Лоренца. Именно, пусть в открытом ограниченном множестве $U \subset \mathbb{R}^3$ определено гладкое векторное поле $X(x)$, порождающее локальный поток Φ_t . Через Λ мы будем обозначать множество таких точек, что полная траектория, проходящая через эту точку, целиком принадлежит U . Если положительная полутраектория каждой точки $x \in U$ целиком принадлежит U , то Λ – аттрактор.

Предполагается, что $X(x)$ не определено за пределами U .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. На U определена *сингулярно гиперболическая структура*, а система называется *сингулярно гиперболической*, если выполнено

УСЛОВИЕ (Н*U). Для каждой точки $x \in U$ определен конус $\mathcal{K}_x^{u*} \subset T_x^* U$ с одномерным осевым пространством Q_x^* ; семейство конусов инвариантно в том смысле, что существует такое $t_1 > 0$, что если $t > t_1$, то $\text{clos}(\mathcal{K}_x^{u*} d\Phi_t^*) \subset \text{int}(\mathcal{K}_{\Phi_t(x)}^{u*})$. Кроме того, существуют такие константы $c_1 > 0$, $\gamma_1 > 0$, $c_2 > 0$, $\gamma_2 > 0$, что

- а) для любой точки $x \in U$, любого вектора $q \in \mathcal{K}_x^{u*}$ и любого $t > 0$, для которого Φ_t определено, справедливо неравенство $|qd\Phi_t^*| > c_1 e^{\gamma_1 t} |q|$;
- б) для любой точки $x \in U$, любых векторов v_1, v_2 , ортогональных некоторому вектору $q \in \mathcal{K}_x^{u*}$, и любого $t > 0$, для которого Φ_t определено, справедливо неравенство

$$S(d\Phi_t v_1, d\Phi_t v_2) > c_2 e^{\gamma_2 t} S(v_1, v_2),$$

где $S(v_1, v_2)$ (соответственно $S(d\Phi_t v_1, d\Phi_t v_2)$) – площадь параллелограмма, порожденного векторами v_1, v_2 (соответственно $d\Phi_t v_1, d\Phi_t v_2$).

Отметим, что если векторы v_1, v_2 ортогональны вектору q , то в силу леммы 3.1 векторы $v_1(t) = d\Phi_t v_1$, $v_2(t) = d\Phi_t v_2$ ортогональны вектору $q(t) = qd\Phi_t$ при любом t .

Попытаемся объяснить смысл условия (Н*U).

Для потока, порожденного системой Лоренца, условия гиперболичности потока не выполняются из-за того, что в аттракторе имеется неподвижная точка. Условие

гиперболичности формулируется для отображения последования. Поэтому основная идея состоит в замене пространств E_x^0, E_x^u на одно пространство $E_x = E_x^0 \oplus E_x^u$, а вместо роста вектора в одном из двух направлений рассмотреть что-то другое. Этим другим является рост площади параллелограмма, лежащего в этом пространстве. В случае существования инвариантного разложения $E_x = E_x^0 \oplus E_x^u$ из-за ограниченности вектора $X(x)$ условие роста площади эквивалентно условию роста вектора в направлении E_x^u . Но в трехмерном пространстве плоскость определяется ее нормалью. Нормаль следует представлять как вектор из сопряженного пространства. Поэтому условие существования инвариантного семейства плоскостей мы формулируем в виде условия существования инвариантного семейства нормалей к этим плоскостям, что вызвано соображениями удобства. Для того чтобы условие было грубым, мы формулируем его в виде условия сохранения конусов.

Если в области U выполнено условие (H^*U) , то выполнено следующее

УСЛОВИЕ $(H^*\Lambda)$. На множестве Λ имеется инвариантное семейство подпространств $E_x^{u*} \subset T_x^*$. Пространства E_x^{u*} одномерны, непрерывно зависят от точки $x \in \Lambda$ и дифференцируемо зависят от x вдоль траекторий. Кроме того, существуют такие константы $c_1 > 0, \gamma_1 > 0, c_2 > 0, \gamma_2 > 0$, что

- а) для любой точки $x \in \Lambda$, любого вектора $q \in E_x^{u*}$ и любого $t > 0$, для которого Φ_t определено, справедливо неравенство $|qd\Phi_t^*| > c_1 e^{\gamma_1 t} |q|$;
- б) для любой точки $x \in \Lambda$, любых векторов v_1, v_2 , ортогональных пространству E_x^{u*} , и любого $t > 0$, для которого Φ_t определено, справедливо неравенство

$$S(d\Phi_t v_1, d\Phi_t v_2) > c_2 e^{\gamma_2 t} S(v_1, v_2),$$

где $S(v_1, v_2)$ – площадь параллелограмма, порожденного векторами v_1, v_2 .

Если выполнено условие (H^*U) , то пространства E_x^{u*} строятся следующим стандартным образом.

Пусть $x(t)$ – траектория, $x(0) = x$. Если $x \in \Lambda$, то траектория $x(t)$ определена и принадлежит области U для всех $t \in \mathbb{R}^1$. Из (H^*U) следует, что

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathcal{K}_{x(t)}^{u*} d\Phi_{-t}^*(x(t))$$

существует и является одномерным пространством, которое и является пространством E_x^{u*} .

ЛЕММА 3.3. Пусть выполнено условие (H^*U) . Тогда для любой точки $x \in \Lambda$ вектор $X(x)$ ортогонален пространству E_x^{u*} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x(t)$ – траектория точки x , $x(0) = x$. Так как $x \in \Lambda$, то траектория определена при всех $t \in \mathbb{R}^1$. Пространство E_x^{u*} определено как предел $\lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \mathcal{K}_{x(t_1)}^{u*} d\Phi_{(-t_1)}^*$. Но $X(x(t))$ является решением уравнения в вариациях. Рассмотрим решение $q(t)$ сопряженного уравнения в вариациях с таким начальным условием, что $q(0) \in E_{x(0)}^{u*}$, $|q(0)| = 1$. В силу сохранения скалярного произведения получаем, что $(q(0), X(x(0))) = (q(t), X(x(t)))$, а в силу свойства а) в определении сингулярно гиперболической структуры получаем, что при $t < 0$

$$|q(0)| > c_1 \exp(\gamma_1 |t|) |q(t)|,$$

благодаря чему $\lim_{t \rightarrow -\infty} |q(t)| = 0$. В силу ограниченности вектора $X(x)$ в области U величина $(q(t), X(x(t)))$ стремится к нулю при $t \rightarrow -\infty$. Следовательно, $(q(0), X(x(0))) = 0$. Лемма доказана.

В связи с последней леммой сформулируем еще один вариант условия сингулярной гиперболичности. Обозначим через Π_x^* подпространство пространства T_x^*U , ортогональное вектору $X(x)$. Для неподвижной точки x пространство Π_x^* совпадает с T_x^*U .

УСЛОВИЕ (Н*П). Для каждой точки $x \in U$ определен конус $\mathcal{K}_x^{u*} \subset \Pi_x^*$ с одномерным осевым пространством Q_x^* ; семейство конусов инвариантно в том смысле, что существует такое $t_1 > 0$, что если $t > t_1$, то $\text{clos}(\mathcal{K}_x^{u*} d\Phi_t^*) \subset \text{int}(\mathcal{K}_{\Phi_t(x)}^{u*})$. Кроме того, существуют такие константы $c_1 > 0$, $\gamma_1 > 0$, $c_2 > 0$, $\gamma_2 > 0$, что

- а) для любой точки $x \in U$, любого вектора $q \in \mathcal{K}_x^{u*}$ и любого $t > 0$, для которого Φ_t определено, справедливо неравенство $|qd\Phi_t^*| > c_1 e^{\gamma_1 t} |q|$;
- б) для любой точки $x \in U$, любых векторов v_1, v_2 , ортогональных некоторому вектору $q \in \mathcal{K}_x^{u*}$, и любого $t > 0$, для которого Φ_t определено, справедливо неравенство

$$S(d\Phi_t v_1, d\Phi_t v_2) > c_2 e^{\gamma_2 t} S(v_1, v_2),$$

где $S(v_1, v_2)$ — площадь параллелограмма, порожденного векторами v_1, v_2 .

Вообще говоря, для произвольной системы приведенные условия (Н*U), (Н*П), (Н*Λ) неэквивалентны. Для систем типа системы Лоренца условия (Н*U), (Н*П) эквивалентны, а условие (Н*Λ) следует из условия (Н*U). Доказательство эквивалентности мы приводить не будем. Остается неясным, эквивалентны ли условия (Н*U), (Н*Λ) для систем типа системы Лоренца.

3.3. Неподвижные точки. Определим возможные типы неподвижных точек сингулярно гиперболических систем (не обязательно систем типа системы Лоренца).

ЛЕММА 3.4. Пусть система $\dot{x} = X(x)$ в области U удовлетворяет условию (Н*U), матрица $D(x_0)$ неподвижной точки x_0 не имеет собственных значений с нулевой вещественной частью. Тогда неподвижная точка имеет тип (L) или (F). Если неподвижная точка x_0 имеет тип (F), то существует окрестность этой точки, не содержащая точек множества Λ , кроме точки x_0 и ее неустойчивого многообразия.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если существует инвариантное пространство $E_{x_0}^*$, то оно порождено левым собственным вектором q_1 матрицы $(-D(x_0))$ с вещественным собственным значением. Обозначим это собственное значение через $(-\lambda_1)$. Матрица $D(x_0)$ имеет собственное значение λ_1 и тот же левый собственный вектор. Решение сопряженного уравнения в вариациях вдоль траектории $x(t) \equiv x_0$ имеет вид $q(t) = e^{-\lambda_1 t} q_1$. Из п. а) условия (Н*U) следует, что $-\lambda_1 > 0$; следовательно, $\lambda_1 < 0$.

Если существует конус $\mathcal{K}_{x_0}^{u*}$, содержащий пространство $E_{x_0}^*$, такой, что $\bigcap_{t>0} \mathcal{K}_{x_0}^{u*} d\Phi_t^* = E_{x_0}^*$, то собственное значение $(-\lambda_1)$ для матрицы $(-D(x_0))$ имеет максимальную вещественную часть (это следует из описания траекторий

в окрестности неподвижной точки линейной системы). Следовательно, для других собственных значений $-\lambda_2, -\lambda_3$ матрицы $(-D(x_0))$ справедливы неравенства $-\operatorname{Re} \lambda_2 < -\lambda_1, -\operatorname{Re} \lambda_3 < -\lambda_1$, откуда следует, что $\operatorname{Re} \lambda_2 > \lambda_1, \operatorname{Re} \lambda_3 > \lambda_1$.

Очевидно, что решение уравнения в вариациях вдоль траектории $x(t) \equiv x_0$ имеет вид $\dot{v} = D(x_0)v$. Из соотношений ортогональности для левых и правых собственных векторов матрицы $D(x_0)$ следует, что инвариантное пространство $E \subset T_{x_0}U$, соответствующее собственным значениям λ_2, λ_3 , ортогонально вектору q_1 . Нетрудно показать, что если $v_1(t), v_2(t)$ – решения уравнения $\dot{v} = D(x_0)v$, принадлежащие пространству E , $S(t)$ – площадь параллелограмма, порожденного векторами $v_1(t), v_2(t)$, то

$$\frac{dS(t)}{dt} = (\operatorname{Re} \lambda_2 + \operatorname{Re} \lambda_3)S(t).$$

Из условия б) в определении сингулярной гиперболичности следует, что $\operatorname{Re} \lambda_2 + \operatorname{Re} \lambda_3 > 0$.

Далее возможны следующие случаи:

- 1) λ_2, λ_3 – пара комплексно-сопряженных значений; тогда $\operatorname{Re} \lambda_2 = \operatorname{Re} \lambda_3 > 0$ и неподвижная точка имеет тип (F) ;
- 2) λ_2, λ_3 вещественные, $\lambda_2 \leq \lambda_3$; тогда либо $\lambda_2 > 0$ и неподвижная точка имеет тип (F) ; либо $\lambda_2 < 0$, тогда в силу неравенства $\lambda_2 + \lambda_3 > 0$ справедливо $\lambda_3 > 0$ и неподвижная точка имеет тип (L) .

Докажем вторую часть леммы. Предположим, что неподвижная точка имеет тип (F) . Тогда для точки x_0 существуют одномерное устойчивое и двумерное неустойчивое многообразия. Как мы видели выше, существует система координат (y_1, y_2, y_3) , в которой устойчивое многообразие определяется уравнениями $y_2 = 0, y_3 = 0$, неустойчивое многообразие определяется уравнением $y_1 = 0$. Система уравнений в этой системе координат в случае вещественных корней имеет вид $\dot{y}_j = \lambda_j y_j + g_j(y)$, $j = 1, 2, 3$, в случае пары комплексно-сопряженных корней имеет вид $\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 + g_1(y_1, z), \dot{z} = \lambda_2 z + g_2(y_1, z)$, где $z = y_2 + iy_3$. Здесь $g_j(y), g_j(y, z)$ – такие функции, что их разложение в ряд Тейлора начинается с членов второго порядка малости. Специальная окрестность $V_{\delta, r}$ определяется неравенствами $|y_1| < \delta, y_2^2 + y_3^2 < r^2$. Если r, δ достаточно малы, то в эту окрестность траектории входят через множества $|y_1| = \delta, y_2^2 + y_3^2 \leq r^2$, а выходят из этой окрестности через множества $y_2^2 + y_3^2 = r^2, |y_1| < \delta$.

Пусть e_1 – собственный вектор матрицы $D(x_0)$, соответствующий собственному значению λ_1 . Тогда $(q_1, e_1) \neq 0$. Следовательно, в достаточно малой окрестности для вектора w , касательного к устойчивому многообразию, верно $(q_1, w) \neq 0$. Поэтому и для вектора $X(x)$, где x принадлежит множествам $y_2^2 + y_3^2 \leq r^2, y_1 = \pm \delta$ (обозначим эти множества K_+, K_-), при соответствующем выборе достаточно малых r, δ получаем $(q_1, X(x)) \neq 0$. В силу непрерывной зависимости пространства E_x^{u*} от x при достаточно малом r имеем $(q, X(x)) \neq 0$ для $x \in K_{\pm}, q \in E_x^{u*}$. Таким образом, точки $x \in K_{\pm}$ не принадлежат множеству Λ , так как для точек $x \in \Lambda$ в силу леммы 3.3 $(q, X(x)) = 0$. Следовательно, траектории всех точек $x \in K_{\pm}$ не принадлежат множеству Λ . Но траектория всякой точки $x \in V_{\delta, r}$, кроме точек неустойчивого многообразия, пересекается с множествами $K_{\pm}$, и поэтому аттрактору могут принадлежать только точки, принадлежащие неустойчивому многообразию точки x_0 . Лемма доказана.

3.4. Ориентируемость и неориентируемость. Множество Λ мы будем называть *ориентируемым*, если существует инвариантное векторное поле $p(x) \in E_x^{u*}$, непрерывно зависящее от точки $x \in \Lambda$ и дифференцируемое вдоль траекторий. Если аттрактор не является ориентируемым, то он называется *неориентируемым*.

Отметим, что в любом случае вектор $p(x)$ такой, что $p(x) \in E_x^{u*}$, $|p(x)| = 1$, в некоторой достаточно малой окрестности является непрерывным и дифференцируемым вдоль траекторий. Поэтому в случае неориентируемого аттрактора существует инвариантная двузначная функция со значениями в E_x^{u*} , которая принимает значения $p(x)$, $-p(x)$.

Двузначную функцию на Λ со значениями в пространстве T_x^*U будем называть *двузначным векторным полем*.

3.5. Функции $\lambda(x)$, $\rho(x)$. Далее мы будем предполагать, что выполнено условие $(H^*\Lambda)$.

Обозначим через $\lambda(x)$ функцию, определенную на Λ равенством

$$\frac{d|q(t)|}{dt} = \lambda(x(t))|q(t)|, \quad (7)$$

где $q(t)$ – решение сопряженного уравнения в вариациях вдоль траектории $x(t)$, $x(t) \in \Lambda$, $q(t) \in E_{x(t)}^{u*}$. Отметим, что из инвариантности семейства пространств E_x^{u*} следует, что если $q(0) \in E_{x(0)}^{u*}$, то $q(t) \in E_{x(t)}^{u*}$ при любом $t \in \mathbb{R}^1$.

Пусть траектория $x(t)$ принадлежит множеству Λ , $v_1(t)$, $v_2(t)$ – два линейно независимых решения уравнения в вариациях вдоль траектории $x(t)$, ортогональных пространству $E_{x(t)}^{u*}$. Через $\rho(x)$ обозначим функцию на Λ , определяемую равенством

$$\frac{dS(t)}{dt} = \rho(x(t))S(t), \quad (8)$$

где $S(t)$ – площадь параллелограмма, порожденного векторами $v_1(t)$, $v_2(t)$. Отметим, что из леммы 3.1 следует, что если $v_1(0)$, $v_2(0)$ ортогональны пространству $E_{x(0)}^{u*}$, то $v_1(t)$, $v_2(t)$ ортогональны пространствам $E_{x(t)}^{u*}$ при любом $t \in \mathbb{R}^1$.

Несмотря на то что функции $\lambda(x)$, $\rho(x)$ строились с помощью выбора решений $q(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$, они не зависят от выбора этих решений, а зависят только от пространств, порожденных векторами $q(t)$ и соответственно $v_1(t)$, $v_2(t)$.

Смысл функции $\lambda(x)$ – скорость роста решения сопряженного уравнения в вариациях в точке x , смысл функции $\rho(x)$ – скорость роста площади параллелограмма, построенного по двум решениям уравнения в вариациях, ортогональным пространству E_x^{u*} , вдоль траектории, проходящей через данную точку.

Если x_0 – неподвижная точка типа (L) и $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_3$ – собственные числа матрицы $D(x_0)$, то, как мы видели выше, пространство $E_{x_0}^{u*}$ порождено левым собственным вектором матрицы $D(x_0)$, соответствующим собственному значению λ_1 ; нетрудно показать, что $\lambda(x_0) = -\lambda_1$, $\rho(x_0) = \lambda_2 + \lambda_3$.

ЛЕММА 3.5. Пусть $p(x) \in E_x^{u*}$ – непрерывное векторное поле на множестве Λ , дифференцируемое вдоль траекторий (однозначное для ориентируемого и двузначное для неориентируемого множества Λ). Тогда существует такая функция $\tilde{\lambda}(x)$, определенная на Λ , что пара $(p(x), \tilde{\lambda}(x))$ является

решением уравнения

$$\dot{p}(x) = -p(x)D(x) - \widehat{\lambda}(x)p(x). \quad (9)$$

Если $|p(x)|$ – постоянная величина, то $\widehat{\lambda}(x) = \lambda(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x(t)$ – траектория, $x(0) = x \in \Lambda$, $q(t)$ – решение сопряженного уравнения в вариациях вдоль траектории $x(t)$, $p(x) = q(0)$. В силу инвариантности семейства E_x^{u*} и одномерности пространств E_x^{u*} имеем $p(x(t)) = a(t)q(t)$ с некоторой функцией $a(t)$. Тогда

$$\begin{aligned} \dot{p}(x(t)) &= a(t)\dot{q}(t) + \dot{a}(t)q(t) = -a(t)q(t)D(x(t)) + \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}a(t)q(t) \\ &= -p(x(t))D(x(t)) + \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}p(x(t)), \end{aligned}$$

откуда следует равенство (9) с функцией

$$\widehat{\lambda}(x(t)) = -\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{d}{dt} \ln a(t).$$

Тем самым первое утверждение леммы доказано.

Докажем второе утверждение леммы.

Если $|p(x)| = c = \text{const}$, то $a(t) = c/|q(t)|$, и в этом случае

$$\widehat{\lambda}(x(t)) = -\frac{d}{dt} \ln a(t) = \frac{d}{dt} \ln |q(t)| = \frac{1}{|q(t)|} \frac{d|q(t)|}{dt}.$$

Сравнивая полученное равенство с (7), имеем $\widehat{\lambda} = \lambda$. Лемма доказана.

Обозначим через q^T вектор-столбец, который получается из вектор-строки q транспонированием. Очевидно, что $|q| = \sqrt{(q, q^T)}$.

Покажем, что если пара $(p(x), \widehat{\lambda}(x))$ – решение уравнения (9), то для функции $\widehat{\lambda}(x)$ справедливо равенство

$$\widehat{\lambda}(x) = -\frac{1}{|p|^2} \left(pD(x)p^T + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |p|^2 \right). \quad (10)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |p|^2 &= (\dot{p}, p^T) + (p, \dot{p}^T) = -(pD(t), p^T) - \widehat{\lambda}(p, p^T) - (p, D^T p^T) - \widehat{\lambda}(p, p^T) \\ &= -p(D(t) + D^T(t))p^T - 2\widehat{\lambda}(p, p^T), \end{aligned}$$

откуда

$$\widehat{\lambda}(x) = -\frac{1}{2|p|^2} \left(\frac{d}{dt} |p|^2 + p(D(x) + D^T(x))p^T \right).$$

Учитывая очевидное равенство $(pD(x), p^T) = (p, D^T(x)p^T)$, получаем соотношение (10).

Заметим, что из (10) следует, что для любого вектора $p \in E_x^{u*}$ имеет место равенство

$$\lambda(x) = -\frac{1}{|p|^2} p D(x(t)) p^T.$$

Напомним, что две функции $h(x)$, $\tilde{h}(x)$ называются *гомологичными*, если существует такая непрерывная функция $b(x)$, дифференцируемая вдоль траекторий, что $h(x) - \tilde{h}(x) = db(x)/dt$.

Нетрудно видеть, что если $h(x)$, $\tilde{h}(x)$ гомологичны, то для любой траектории величина $H = \int_0^T (h(x(t)) - \tilde{h}(x(t))) dt$ ограничена.

ЛЕММА 3.6. Пусть пара $(p(x), \hat{\lambda}(x))$ – решение уравнения (9), $p(x) \in E_x^{u*}$ для любой точки $x \in \Lambda$. Тогда для другой функции $\tilde{\lambda}(x)$ найдется векторное поле $\tilde{p}(x)$ такое, что пара $(\tilde{p}(x), \tilde{\lambda}(x))$ является решением уравнения (9) в том и только том случае, когда функции $\hat{\lambda}(x)$, $\tilde{\lambda}(x)$ гомологичны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что если $p(x), \tilde{p}(x) \in E_x^{u*}$, то $\tilde{p}(x) = b(x)p(x)$ с некоторой функцией $b(x)$. Следовательно, $\dot{\tilde{p}}(x) = \dot{b}(x)p(x) + b(x)\dot{p}(x)$.

Учитывая, что пары $(p(x), \hat{\lambda}(x))$, $(\tilde{p}(x), \tilde{\lambda}(x))$ являются решениями (9), получаем

$$\dot{\tilde{p}}(x) = -\tilde{p}(x)D(x) - \tilde{\lambda}(x)\tilde{p}(x) = -b(x)p(x)D(x) - \tilde{\lambda}(x)b(x)p(x).$$

С другой стороны,

$$\dot{\tilde{p}}(x) = \frac{d}{dt} b(x)p(x) = \dot{b}(x)p(x) + b(x)\dot{p}(x) = \dot{b}(x)p(x) - b(x)p(x)D(x) - \hat{\lambda}(x)b(x)p(x).$$

Из этих равенств следует, что $-\tilde{\lambda}(x)b(x)p(x) = \dot{b}(x)p(x) - \hat{\lambda}(x)b(x)p(x)$, откуда

$$\hat{\lambda}(x)b(x) - \tilde{\lambda}(x)b(x) = \dot{b}(x), \quad \hat{\lambda}(x) - \tilde{\lambda}(x) = \frac{\dot{b}(x)}{b(x)} = \frac{d}{dt} \ln b(x),$$

т.е. $\hat{\lambda}(x)$, $\tilde{\lambda}(x)$ гомологичны.

Если $\hat{\lambda}(x)$, $\tilde{\lambda}(x)$ гомологичны, функция $\hat{\lambda}(x)$ соответствует векторному полю $p(x)$, то, как легко проверить, $\tilde{\lambda}(x)$ соответствует векторному полю $\tilde{p}(x)$, определяемому соотношением $\tilde{p}(x) = e^{b(x)}p(x)$, где $b(x)$ – такая функция, что $\hat{\lambda}(x) - \tilde{\lambda}(x) = d(\ln b(x))/dt$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 3.7. Справедливо равенство

$$\rho(x) = \lambda(x) + \operatorname{div} X(x). \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p(x)$ – векторное поле на Λ (однозначное для ориентируемого случая и двузначное для неориентируемого случая) такое, что $p(x) \in E_x^{u*}$, $|p(x)| = 1$. Тогда пара $(p(x), \lambda(x))$ является решением (9) (лемма 3.5).

Пусть $x(t)$ – траектория, $x(t) \in \Lambda$, $v_2(t), v_3(t)$ – два линейно независимых решения уравнения в вариациях вдоль траектории $x(t)$, ортогональных вектору $p(x(t))$, $S(t)$ – площадь параллелограмма, порожденного векторами $v_2(t), v_3(t)$. В ходе доказательства леммы мы будем обозначать матрицу $D(x(t))$ через $D(t)$ или D , функцию $\lambda(x(t))$ через $\lambda(t)$, вектор $p(x(t))$ через $p(t)$.

Пусть $v_1(t)$ – третье решение уравнения в вариациях, линейно не зависящее от $v_2(t), v_3(t)$.

Объем параллелепипеда, порожденного векторами v_1, v_2, v_3 , можно вычислить из соотношения $V(t) = S(t)(p, v_1)$ (следует из равенства $|p(x)| = 1$). Поэтому

$$\frac{d}{dt}V(t) = \dot{S}(t)(p, v_1) + S(t)\frac{d}{dt}(p, v_1) = \dot{S}(t)(p, v_1) + S(t)(\dot{p}, v_1) + S(t)(p, \dot{v}_1).$$

Из равенств $\dot{v}_1 = D(t)v_1$, $\dot{p} = -pD(t) - \lambda(t)p$, $(p(t), D(t)v_1) = (p(t)D(t), v_1)$ следует, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(t) &= \dot{S}(t)(p, v_1) + S(t)(-pD(t), v_1) - \lambda(t)S(t)(p, v_1) + S(t)(p, D(t)v_1) \\ &= (\dot{S}(t) - \lambda(t)S(t))(p, v_1). \end{aligned}$$

С другой стороны, $\dot{V} = \operatorname{div} X \cdot V = \operatorname{div} X \cdot S \cdot (p, v_1)$ и потому

$$(\dot{S} - \lambda(t)S)(p, v_1) = \operatorname{div} X \cdot S \cdot (p, v_1),$$

откуда получаем $\dot{S} = (\operatorname{div} X + \lambda(t))S$.

В то же время $\dot{S}(t) = \rho(t)S(t)$. Следовательно, $\rho(x) = \lambda(x) + \operatorname{div} X(x)$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Функция $\rho(x)$ не зависит от выбора векторов v_1, v_2 , принадлежащих ортогональному дополнению к пространству E_x^{u*} .*

Вычислим величину $\lambda(x)$ для гиперболического цикла. Предположим, что $x(t)$ – периодическая траектория периода T . Любая точка x_0 на этой траектории неподвижна относительно Φ_T . Хорошо известно, что оператор $d\Phi_T$ в пространстве $T_{x_0}U$ имеет собственное значение 1 (оно соответствует вектору $X(x(0))$). Если цикл гиперболический, то имеются еще два собственных значения μ_1, μ_2 , причем одно из них меньше 1 (по модулю), другое больше 1. Пусть $0 < |\mu_1| < 1 < |\mu_2|$. Из этих неравенств видно, что μ_1, μ_2 не могут быть парой комплексно-сопряженных, поэтому они вещественные. Так как $\mu_1\mu_2 > 0$, то они либо оба положительны, либо оба отрицательны. В первом случае будем называть цикл *ориентируемым*, во втором – *неориентируемым*.

Предположим, что цикл ориентируемый. Тогда $0 < \mu_1 < 1 < \mu_2$. Величины $1/\mu_1, 1/\mu_2$ – собственные числа оператора $d\Phi_T^*$. Мы можем построить векторное поле для точек траектории $x(t)$, полагая $p(t) = q(t)e^{-\lambda_1 t}$, где $q(t)$ – решение сопряженного уравнения в вариациях вдоль траектории $x(t)$, $p(0) = q(0)$ – левый собственный вектор оператора $d\Phi_T^*$, соответствующий собственному значению $1/\mu_1$,

λ_1 выбрано так, что $q(T)e^{-\lambda_1 T} = q(0)$. Отсюда видно, что $e^{-\lambda_1 T} = \mu_1$. Для функционала $p(t)$ справедливо соотношение

$$\dot{p}(t) = -\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} q_1 + e^{-\lambda_1 t} \dot{q}_1 = -\hat{\lambda} p(t) - e^{-\lambda_1 t} q_1 D(t) = -\lambda_1 p(t) - p D(t),$$

откуда видно, что λ_1 совпадает с $\hat{\lambda}$, определенным уравнением (9) для поля $p(x)$.

В случае неориентируемого цикла следует рассмотреть решение $q(t)$ и выбрать λ_1 так, что $q(T)e^{-\lambda_1 T} = -q(0)$. Тогда окажется, что вектор $p(t)$ определяет двузначное векторное поле на цикле.

Следовательно, для гиперболического цикла существует решение $(p(x), \hat{\lambda}(x))$ уравнения (9), которое при отрицательных мультипликаторах является двузначной функцией со значениями $p(x), -p(x)$. При этом $\hat{\lambda}(x) = -\frac{1}{T} \ln |\mu_1|$, а функция $\lambda(x)$ гомотогична постоянной, равной $-\frac{1}{T} \ln |\mu_1|$.

В заключение настоящего параграфа отметим некоторые простые факты.

Следующее условие эквивалентно условиям а), б) условия $(H^* \Lambda)$.

На Λ существует инвариантное семейство одномерных подпространств $E_x^{u} \subset T_x^* U$, непрерывно зависящих от x и дифференцируемых вдоль траекторий. Кроме того, существуют константы $c_1 \in \mathbb{R}^1$, $\gamma_1 > 0$, $c_2 \in \mathbb{R}^1$, $\gamma_2 > 0$ такие, что для функций $\lambda(x)$, $\rho(x)$, построенных выше для семейства E_x^{u*} , и для любой траектории $x(t) \in \Lambda$ при любом $t > 0$ справедливы неравенства*

$$a') \quad \int_0^t \lambda(x(\tau)) d\tau > c_1 + \gamma_1 t, \quad b') \quad \int_0^t \rho(x(\tau)) d\tau > c_2 + \gamma_2 t. \quad (12)$$

Последнюю часть приведенного условия можно переформулировать следующим образом: *существуют константы $T > 0$, $k > 0$ такие, что для любой траектории $x(t) \in \Lambda$ справедливы неравенства*

$$a'') \quad \int_0^T \lambda(x(\tau)) d\tau > k, \quad b'') \quad \int_0^T \rho(x(\tau)) d\tau > k. \quad (13)$$

Наконец, отметим, что величины

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{T} \int_0^T \lambda(x(t)) dt \right), \quad \limsup_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T \rho(x(t)) dt \right)$$

являются характеристическими показателями.

ЗАМЕЧАНИЕ. С точки зрения вычислений на компьютере проверка условия $(H^* U)$ гораздо проще, чем вычисление классических условий равномерной гиперболичности. Предположим, что Λ – аттрактор. Для проверки правдоподобия выполнения условия $(H^* U)$ следует вычислить достаточно длинную траекторию $x(t)$, которая заполняет аттрактор достаточно плотно, вдоль этой траектории вычислить поле $q(x) \in E_x^{u*}$ (в случае выполнения условия $(H^* U)$ вычисления устойчивы), вычислить функции $\lambda(x)$, $\rho(x)$ по формулам (10), (11) и убедиться в выполнении неравенств (12) или (13).

Вычислить вектор $q(x)$ несложно. Для этого можно взять произвольный вектор $q(0)$ и решить с ним сопряженное уравнение в вариациях. В случае сингулярно гиперболической системы пространство, порожденное вектором $q(x(t))$, сходится с экспоненциальной скоростью к E_x^{u*} .

§ 4. Эквивалентность условий гиперболичности и сингулярной гиперболичности

В настоящем параграфе мы предполагаем, что рассматриваемая система $\dot{x} = X(x)$ удовлетворяет условиям (L1)–(L4). Отображение последования на поверхности P в этом параграфе обозначается через F . Через U обозначается окрестность, построенная выше (см. лемму 2.3), через Λ – аттрактор системы.

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть выполнены условия (L1)–(L4) и $\operatorname{div} X(x) < 0$. Тогда гиперболичность отображения F эквивалентна сингулярной гиперболичности потока Φ_t .*

Доказательство теоремы разделим на две части. В первой части мы докажем гиперболичность отображения F , предполагая сингулярную гиперболичность потока Φ_t . Во второй части докажем сингулярную гиперболичность потока, предполагая гиперболичность отображения F .

4.1. Вывод гиперболичности отображения F из сингулярной гиперболичности потока. Предположим, что для потока Φ_t выполнено условие (H*U). Как мы видели выше, на Λ существует семейство пространств E_x^{u*} , удовлетворяющее условию (H* Λ). Для точек $x \in \Lambda \cap P$ обозначим через E_x^u пространство, ортогональное пространству E_x^{u*} и касательное к плоскости P . Из леммы 3.3 и из трансверсальности вектора $X(x)$ и поверхности P следует, что касательная плоскость к поверхности P не совпадает с плоскостью, ортогональной пространству E_x^{u*} . Отсюда и из соображений размерности следует, что пространство E_x^u одномерно. Из непрерывности семейства пространств E_x^{u*} следует, что семейство пространств E_x^u непрерывно зависит от x на P . Из инвариантности семейства E_x^{u*} и леммы 3.1 следует, что семейство пространств E_x^u инвариантно относительно dF .

Для точки $x \in P \cap \Lambda$ обозначим через $\mu(x)$ величину $|dF(v)|/|v|$, где $v \in E_x^u$. Так как пространство E_x^u одномерно, то $\mu(x)$ не зависит от выбора вектора $v \in E_x^u$. Величина $\mu(x)$ называется *коэффициентом растяжения в неустойчивом направлении в точке x* . Положим $\xi(x) = \ln \mu(x)$. Через $t(x)$ обозначим время возвращения на поверхность P , через $\eta(x)$ – величину $\eta(x) = \int_0^{t(x)} \rho(x(t)) dt$, через $H(x)$ – функцию $H(x) = \ln(|X(x)| \sin \beta(x))$, где $\beta(x)$ – угол между вектором $X(x)$ и пространством E_x^u .

Отметим, что функции $\mu(x)$, $\xi(x)$, $\eta(x)$ определены только для тех точек $x \in P$, положительные полутраектории которых пересекаются с P .

ЛЕММА 4.2. *Справедливо равенство*

$$\eta(x) = \xi(x) + H(F(x)) - H(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in \Lambda \cap P$, $v_0 \in E_x^u$, S_0 – площадь параллелограмма, порожденного векторами v_0 и $X(x)$, $v_1 = dF(v_0)$, $v_2 = d\Phi_{t(x)}(v_0)$, S_1 – площадь параллелограмма, порожденного векторами v_1 и $X(F(x))$. Так как $v_1 = v_2 + \alpha X(F(x))$ с некоторой константой $\alpha \in \mathbb{R}^1$, то S_1 равна площади параллелограмма, порожденного векторами v_2 и $X(F(x))$. Поэтому

$$S_1 = \exp\left(\int_0^{t(x)} \rho(x(t)) dt\right) S_0 = e^{\eta(x)} S_0.$$

С другой стороны,

$$S_0 = |v_0| |X(x)| \sin \beta(x), \quad S_1 = |v_1| |X(F(x))| \sin(\beta(F(x))).$$

Следовательно,

$$|v_1| |X(F(x))| \sin(\beta(F(x))) = |v_0| |X(x)| \sin(\beta(x)) e^{\eta(x)}.$$

Поделив сначала обе части последнего равенства на $|v_0|$, а затем прологарифмировав их, с учетом определения функции $H(x)$ получим

$$\ln \frac{|v_1|}{|v_0|} + H(F(x)) = H(x) + \eta(x).$$

Но по определению $\xi(x) = \ln(|v_1|/|v_0|)$, откуда и получаем требуемое равенство. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.3. Пусть выполнено условие $(H^*\Lambda)$. Тогда для построенного выше семейства пространств $E_x^u \subset T_x P$ существуют такие константы $c_0 > 0$, $\mu_0 > 0$, что для любой точки $x \in \Lambda \cap P$, любого вектора $v_0 \in \mathcal{K}_x^u$ и любого натурального n , для которого $F^n(x)$ определено, справедливо неравенство $|dF^n(v)| > c_0 \mu_0^n |v|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in \Lambda$, $x(t)$ — положительная полутраектория, $x(0) = x$, $v_0 \in \mathcal{K}_x^u$, $v(t)$ — решение уравнения в вариациях вдоль траектории $x(t)$ с начальным условием $v(0) = v_0$, $t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ — времена возвращения полутраектории $x(t)$ на поверхность P , $x_n = x(t_n)$, S_n — площадь параллелограмма, порожденного векторами $X(x_n)$ и $v(t_n)$, $\hat{S}_n$ — площадь параллелограмма, порожденного векторами $X(x_n)$ и $dF^n(v_0)$.

Нетрудно заметить, что $dF^n(v_0) = v(t_n) + \alpha_n X(x_n)$, где α_n — некоторый множитель. Площадь параллелограмма, порожденного векторами $X(x_n)$, $v(t_n)$, совпадает с площадью параллелограмма, порожденного векторами $X(x_n)$, $v(t_n) + \alpha_n X(x_n)$. Следовательно, $S_n = \hat{S}_n$. В силу определения функции $\rho(x)$ (равенство (8)) и в силу равенства $S_n = \hat{S}_n$ справедливо

$$\hat{S}_n = \hat{S}_0 \exp \left(\int_0^{t_n} \rho(t) dt \right).$$

Из $(H^*\Lambda)$ следует, что $\hat{S}_n > \hat{S}_0 c_2 e^{\gamma_2 t_n}$ (константы c_2 , γ_2 определены в условии $(H^*\Lambda)$). Так как время возвращения ограничено снизу, то $t_n > nT$, где T — минимальное время возвращения на поверхность P , и потому $\hat{S}_n > \hat{S}_0 c_2 e^{n\gamma_2 T}$ для констант c_2 , γ_2 . Следовательно, справедлива оценка $\hat{S}_n > c_2 \mu_0^n \hat{S}_0$, где $\mu_0 = e^{\gamma_2 T}$. Отсюда получаем

$$|dF^n(v)| H(x_n) \geq c_2 \mu_0^n |v| H(x_0).$$

Но в силу ограниченности величины $H(x_0)/H(x_n)$

$$|dF^n(v)| \geq c_0 \mu_0^n |v|$$

с некоторой константой $c_0 > 0$.

Лемма доказана.

Из только что доказанной леммы и леммы 2.7 следует справедливость следующего утверждения.

СЛЕДСТВИЕ. Если выполнено условие $(H^* \Lambda)$ и $\operatorname{div} X(x) < 0$, то для отображения F и построенного семейства пространств E_x^u выполнено условие $(H\Lambda)$.

4.2. Вывод условия (HU) из условия (H^*U) . Предположим, что для потока выполнено условие (H^*U) . Как мы видели выше, пространство E_x^{u*} ортогонально вектору $X(x)$, который предполагается трансверсальным к поверхности P (условие $(L2)$). Следовательно, если мы вместо конуса $\mathcal{K}_x^{u*}$ рассмотрим конус $\widetilde{\mathcal{K}}_x^{u*} = \mathcal{K}_{\Phi_{-t}(x)}^{u*} d\Phi_t$ для достаточно большого $t > 0$, то семейство конусов $\widetilde{\mathcal{K}}_x^{u*}$ будет инвариантным и для всякого вектора $q \in \widetilde{\mathcal{K}}_x^{u*}$ ортогональное дополнение к вектору q в пространстве $T_x U$ не будет совпадать с $T_x P$. Из соображений размерности следует, что для каждого $q \in \widetilde{\mathcal{K}}_x^{u*}$ множество векторов $v \in T_x U$, касательных к P и ортогональных вектору q , образует одномерное пространство. Обозначим это пространство E_q .

Обозначим через $\mathcal{K}_x^u$ объединение пространств E_q по всем $q \in \widetilde{\mathcal{K}}_x^{u*}$. Очевидно, что множество $\mathcal{K}_x^u$ является конусом. Инвариантность и непрерывность семейства конусов $\mathcal{K}_x^u$ следует из инвариантности и непрерывности семейства конусов $\widetilde{\mathcal{K}}_x^{u*}$.

Доказательство оценки $|dF_P^n(v)| > c\mu^n|v|$ для $v \in \mathcal{K}_x^u$ принципиально не отличается от доказательства леммы 4.3, и поэтому мы его не приводим. Существование системы конусов $\mathcal{K}_x^s$ и условие (HU) следуют из леммы 2.7.

Тем самым доказательство условия (HU) закончено.

4.3. Вывод условия $(H^* \Lambda)$ из гиперболичности отображения последования. Напомним, что собственные числа матрицы $D(x_0)$ неподвижной точки x_0 типа (L) таковы, что $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_3$, $\lambda_2 + \lambda_3 > 0$.

ЛЕММА 4.4. Пусть точка x принадлежит множеству $W^s(x_0) \setminus W^{ss}(x_0)$, где x_0 – неподвижная точка типа (L) , $x(t)$ – положительная полутраектория, $x(0) = x$. Справедливы следующие утверждения.

- i) Вектор $e_2(t) = X(x(t))/|X(x(t))|$ при $t \rightarrow +\infty$ сходится к собственному вектору, соответствующему собственному значению λ_2 .
- ii) Если вектор $v \in T_x U$ трансверсален многообразию $W^s(x_0)$, $v(t)$ – решение уравнения в вариациях, соответствующее полутраектории $x(t)$, $v(0) = v$, то $v(t)/|v(t)|$ при $t \rightarrow +\infty$ сходится к собственному вектору, соответствующему собственному значению λ_3 .
- iii) Если $q \in T_x^* U$ – функционал, ортогональный вектору $X(x)$ и одному из векторов $v \in T_x U$, трансверсальному многообразию $W^s(x_0)$, $q(t)$ – решение сопряженного уравнения в вариациях с начальным условием $q(0) = q$, то $p(t) = q(t)/|q(t)|$ при $t \rightarrow +\infty$ сходится к левому собственному вектору матрицы $D(x_0)$, соответствующему собственному значению λ_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что сужение системы на $W^s(x_0)$ имеет неподвижную точку типа узел с собственными числами $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Поэтому утверждение i) следует из описания траекторий двумерных систем в окрестности неподвижной точки типа узел.

Утверждение ii) мы докажем для случая, когда система в окрестности точки x_0 приводится гладким преобразованием к линейной. В соответствующей системе

координат (y_1, y_2, y_3) система уравнений $\dot{x} = X(x)$ имеет вид

$$\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, \quad \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2, \quad \dot{y}_3 = \lambda_3 y_3. \quad (14)$$

Точно такой же вид имеет система уравнений в вариациях. Если в этой системе координат $v = (y_1(0), y_2(0), y_3(0))$, то из трансверсальности v и $W^s(x_0)$ следует, что $y_3(0) \neq 0$. Решение системы (14) имеет вид

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t} y_1(0), \quad y_2(t) = e^{\lambda_2 t} y_2(0), \quad y_3(t) = e^{\lambda_3 t} y_3(0).$$

Учитывая, что $y_3(0) \neq 0$, и соотношения $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_3$, получаем, что $y_3 \rightarrow \infty$, $y_1 \rightarrow 0$, $y_2 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Отсюда следует ii).

Утверждение ii) справедливо и в том случае, когда система в окрестности точки x_0 не приводится гладким преобразованием к линейной. Однако мы этот случай оставим без доказательства.

Утверждение iii) доказывается из соотношения ортогональности. Так как $q(t)$ остается ортогональным вектору $X(x(t))$ и вектору $v(t)$, построенному при доказательстве ii) (см. лемму 3.1), то из i) и ii) следует, что пределом функционала $p(t)$ является функционал, ортогональный собственным векторам матрицы $D(x_0)$, соответствующим собственным значениям λ_2 и λ_3 . Но это и есть левый собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_1 . Лемма доказана.

ЛЕММА 4.5. Пусть на $P \cap \Lambda$ определено семейство неустойчивых пространств E_x^u , удовлетворяющее условию (НЛ). Тогда на Λ существует семейство пространств $E_x^{u*} \subset T_x^*$; семейство E_x^{u*} инвариантно относительно $d\Phi_t^*$, зависимость пространств E_x^{u*} от x является непрерывной и дифференцируемой вдоль траекторий.

ЗАМЕЧАНИЕ. Данная лемма не утверждает выполнения условия $(H^* \Lambda)$, так как в ней не утверждается выполнение свойств а) и б) из условия $(H^* \Lambda)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим пространства E_x^{u*} для различных точек аттрактора.

Для неподвижных точек типа (L) определим E_x^{u*} как пространство, порожденное левым собственным вектором, соответствующим минимальному (отрицательному) собственному значению.

Далее определим пространство E_x^{u*} для точек многообразия $W^u(x_j)$ неподвижной точки x_j типа (L) .

Сначала отметим, что для неподвижной точки x_j типа (L) имеется конус $\mathcal{K}_{x_j}^{u*} \subset T_{x_j}^* U$ с осевым пространством $E_{x_j}^{u*}$, который сжимается под действием $d\Phi_t^*$. Очевидно, что этим же свойством обладает тот же конус для точек, достаточно близких к x_j . Поэтому мы можем определить E_x^{u*} для $x \in W^u(x_j)$ как предел

$$E_x^{u*} = \lim_{t \rightarrow \infty} E_{x_j}^{u*} d\Phi_t^*(\Phi_{-t}(x)).$$

Для точек $x \in \Lambda \cap P$ определим E_x^{u*} как пространство, ортогональное вектору скорости и пространству E_x^u .

Для траекторий точек $x \in \Lambda \cap P$ определим пространства $E_{x(t)}^{u*}$ из условия инвариантности. Для этого построим решение $q(t)$ сопряженного уравнения в вариациях вдоль траектории $x(t)$, $x(0) \in \Lambda \cap P$, $q(0) \in E_{x(0)}^{u*}$, и определим пространство $E_{x(t)}^{u*}$ как пространство, порожденное вектором $q(t)$.

Из доказательства леммы 2.3 видно, что все точки аттрактора Λ исчерпываются траекториями точек $\Lambda \cap P$, неподвижными точками типа (L) и их неустойчивыми многообразиями. Тем самым пространства E_x^{u*} построены для всех точек аттрактора.

Инвариантность пространств E_x^{u*} следует из инвариантности пространств E_x^u относительно dF .

Действительно, единственное место, где могут возникнуть сомнения, — это пересечение неустойчивого многообразия неподвижной точки типа (L) с поверхностью P и при возвращении траектории на поверхность P .

Пусть $x(t)$ — траектория, $x(0) \in P \cap \Lambda$, $x(t_1) \in P \cap \Lambda$, $v(t)$ — решение уравнения в вариациях вдоль $x(t)$, $q(t)$ — решение сопряженного уравнения в вариациях вдоль $x(t)$, $v(0) \in E_{x(0)}^u$, $q(0) \in E_{x(0)}^{u*}$. В силу леммы 3.3 $q(t_1)$ ортогонально вектору $X(x_1)$ и вектору $v(t_1)$. Но пространство E_x^u порождено вектором $w = dF(v(0))$, равным $v(t_1) + \alpha X(x(t_1))$ с некоторым коэффициентом α . Следовательно, $q(t_1)$ ортогонально вектору $X(x_1)$ и вектору $dF(v)$, который в силу инвариантности лежит в $E_{x(t_1)}^u$ (и порождает $E_{x(t_1)}^u$), т.е. $q(t_1) \in E_{x(t_1)}^{u*}$.

Докажем непрерывность семейства E_x^{u*} . Сначала докажем непрерывность семейства в неподвижной точке x_j типа (L) .

Пусть x_j — неподвижная точка типа (L) , $x \in W^s(x_j)$. Из трансверсальности пространства E_x^u и многообразия $W^s(x_j)$ следует, что пространство E_x^{u*} не ортогонально плоскости, касательной к многообразию $W^s(x_j)$. В силу леммы 4.4 для траектории $x(t)$, лежащей в $W^s(x_j)$, пространство $E_{x(t)}^{u*}$ сходится к пространству $E_{x_j}^{u*}$. Непрерывность в остальных точках очевидна. Лемма доказана.

В силу только что доказанной леммы для точек $x \in \Lambda$ существует инвариантное семейство пространств $E_x^{u*} \subset T_x^*U$. Как и выше, по семейству E_x^{u*} определим функции $\lambda(x)$, $\rho(x)$.

ЛЕММА 4.6. Пусть на $\Lambda \cap P$ выполнено условие (НЛ). Тогда существуют такие константы $T > 0$, $k > 0$, что для семейства E_x^{u*} , построенного в предыдущей лемме, $\int_0^T \rho(x(t)) dt > k$ для всякой траектории $x(t) \in \Lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для неподвижной точки x_j типа (L) $\rho(x_j) = \lambda_2 + \lambda_3 > 0$. Следовательно, существует такая окрестность V_j точки x_j , что в этой окрестности $\rho(x) > \theta$ для некоторой константы $\theta > 0$. Пусть $\nu > 0$ — такая константа, что $\rho(x) > -\nu$ для любой точки $x \in \Lambda$.

Существует такое $T_1 > 0$, что положительная полутраектория каждой точки $x \in \Lambda$ до пересечения с поверхностью P проводит вне окрестностей V_j время, не большее чем T_1 . Отсюда следует, что если траектория $x(t)$ не имеет точек пересе-

чения с поверхностью P для $t \in (t_1, t_2)$, то

$$\int_{t_1}^{t_2} \rho(t) dt \geq -(t_2 - t_1)\nu \geq -T_1\nu, \quad t_2 - t_1 \leq T_1, \quad (15)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \rho(t) dt \geq (t_2 - t_1 - T_1)\theta - T_1\nu \geq -T_1\nu, \quad t_2 - t_1 > T_1. \quad (16)$$

Пусть $k > 0$ — произвольное число. В силу гиперболичности отображения F и леммы 4.2 существует такое n_0 , что для каждой точки $x \in \Lambda \cap P$ справедливо неравенство

$$\eta(x) + \eta(F(x)) + \dots + \eta(F^{n_0-1}(x)) > 2T_1\nu + k,$$

где $\eta(x) = \int_0^{t(x)} \rho(\tau) d\tau$ (здесь $t(x)$ — время возвращения точки x на поверхность P).

Пусть T настолько велико, что

$$\theta(T - (n_0 + 2)T_1) - \nu(n_0 + 2)T_1 > k.$$

Пусть $x(t)$ — отрезок траектории точки $x \in \Lambda$, $t \in [0, T]$, $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq T$ — времена попадания отрезка траектории $x(t)$ на поверхность P .

Рассмотрим два случая.

Первый случай ($n > n_0$). В этом случае по определению величины $\eta(x)$

$$\int_{t_0}^{t_n} \rho(x(t)) dt = \eta(x(t_0)) + \dots + \eta(x(t_{n-1})) > k + 2T_1\nu.$$

Из (15) и (16) следует, что $\int_0^{t_0} \rho(x(t)) dt \geq -T_1\nu$, $\int_{t_n}^T \rho(x(t)) dt \geq -T_1\nu$. Из приведенных оценок следует, что

$$\begin{aligned} \int_0^T \rho(x(t)) dt &= \int_0^{t_0} \rho(x(t)) dt + \int_{t_0}^{t_n} \rho(x(t)) dt + \int_{t_n}^T \rho(x(t)) dt \\ &\geq -T_1\nu + k + 2T_1\nu - T_1\nu = k. \end{aligned}$$

Второй случай ($n \leq n_0$). В этом случае время, проводимое траекторией вне окрестностей V_j , не превосходит $(n + 2)T_1 \leq (n_0 + 2)T_1$; следовательно, время, проводимое внутри окрестности V_j , больше чем $T - (n_0 + 2)T_1$ и потому

$$\int_0^T \rho(x(t)) dt \geq (T - (n_0 + 2)T_1)\theta - (n_0 + 2)T_1\nu > k.$$

Отсюда следует справедливость леммы.

Закончим вывод условия $(H^*\Lambda)$ из условия $(H\Lambda)$.

В силу равенства (11) из условия $\operatorname{div} X(x) < 0$ следует, что $\lambda(x) > \rho(x)$, и потому существуют такие $k > 0$, $T > 0$, что $\int_0^T \lambda(x(t)) dt > k$ для любого отрезка траектории длины T . Как мы видели выше, это неравенство вместе с доказанным ранее эквивалентно условию $(H^*\Lambda)$.

4.4. Вывод условия (H*U) из (HU). Пусть на P определено непрерывное и инвариантное относительно dF_P семейство конусов $\mathcal{K}_x^u$, для которого выполнены условия а) и бу) из (HU). Как мы видели выше (лемма 2.7), при $\operatorname{div} X(x) < 0$ отсюда следует выполнение условия bs) из (HU).

Мы приведем доказательство выполнения условия (H*U) с некоторыми проблемами, которые нетрудно восполнить.

Определим семейство конусов $\mathcal{K}_x^{u*}$ для точек $x \in P$ как множество таких векторов $q \in T_x^*U$, что q ортогонален вектору $X(x)$ и одному из векторов $v \in \mathcal{K}_x^u$.

Для каждой неподвижной точки x_j типа (L) построим окрестность V_j , как при доказательстве леммы 2.3. Нам потребуются следующие свойства окрестности V_j : всякая положительная полутраектория, выходящая из V_j , пересекается с поверхностью P во внутренней точке, а отрезок этой полутраектории от выхода из V_j до пересечения с P лежит вне всех окрестностей V_j .

Определим конус $\mathcal{K}_x^{u*}$ в окрестности V_j неподвижной точки x_j типа (L). Пусть λ_1 — минимальное собственное число матрицы $D(x_j)$, q_1 — соответствующий левый собственный вектор. Определим в V_j конус $\mathcal{K}_x^{u*}$ как множество таких векторов q , что $\angle(q, q_1) \leq \alpha$, где α — достаточно малое положительное число. Будем предполагать, что окрестность V_j достаточно мала.

Пусть $x(t)$ — траектория, $x(0) \in P$, t_1 — такое число, что либо $x(t_1) \in P$, либо $x(t_1) \in \operatorname{clos}(V_j)$ для некоторого j , причем $x(t)$ при $t \in (0, t_1)$ не принадлежит P и не принадлежит никакой окрестности V_j . Для точек $x(t_0)$, $t_0 \in (0, t_1)$, определим конус $\mathcal{K}_{x(t_0)}^{u*}$ как множество таких векторов $q(t_0)$, что $q(t)$ — решение сопряженного уравнения в вариациях вдоль $x(t)$, $q(0) \in \mathcal{K}_{x(0)}^{u*}$. В силу леммы 4.4 если окрестность V_j достаточно мала, $t_0 > t_1$, $x(t_0) \in V_j$, то $\mathcal{K}_{x(t_0)}^{u*} \subset \widetilde{\mathcal{K}}_{x(t_0)}^{u*}$.

Для полутраекторий $x(t)$, $x(0) \in V_j$, определим конус $\mathcal{K}_{x(t_0)}^{u*}$ следующим образом. Пусть t_1 — момент выхода полутраектории из V_j , t_2 — точка пересечения полутраектории с поверхностью P . Построим конусы $\mathcal{K}_{x(t_0)}^{u*}$ для точек полутраектории $x(t)$ как множество таких векторов $q(t_0)$, что $q(t)$ — решение сопряженного уравнения в вариациях вдоль $x(t)$, $q(t_1) \in \mathcal{K}_{x(t_1)}^{u*}$.

Таким образом, система конусов $\mathcal{K}_{x(t_0)}^{u*}$ построена для некоторой окрестности множества Λ .

Докажем инвариантность построенной системы конусов. Вопросы могут возникнуть только для точек $x \in P$. Пусть $x(t)$ — полутраектория, $x(0) \in P$, $x(t_1) \in P$, и пусть $x(t) \notin P$, $x(t) \notin V_j$ для $t \in (0, t_1)$. Пусть $v(t)$, $q(t)$ — решения уравнения в вариациях и сопряженного уравнения в вариациях вдоль $x(t)$, $v(0) \in \mathcal{K}_{x(0)}^u$, $q(0) \in \mathcal{K}_{x(0)}^{u*}$, причем $v(0)$, $q(0)$ ортогональны. Тогда в силу леммы 3.1 векторы $v(t_1)$, $q(t_1)$ тоже ортогональны. Вектор $\tilde{v}_1 = dFv(0)$ принадлежит $\mathcal{K}_{x(t_1)}^u$ в силу инвариантности семейства $\mathcal{K}_x^u$ относительно dF , $v(t_1)$ принадлежит двумерному пространству, порожденному векторами $X(x(t_1))$ и $\tilde{v}_1$. Следовательно, $q(t_1)$ ортогонален векторам $X(x(t_1))$ и $\tilde{v}_1$ и поэтому принадлежит конусу $\mathcal{K}_{x(t_1)}^{u*}$.

Таким образом, инвариантное семейство конусов построено. Для этого семейства не имеют места непрерывность и инвариантность в том смысле, что

$$\operatorname{clos}(\mathcal{K}_{x(0)}^{u*} d\Phi_t^*) \subset \operatorname{int}(\mathcal{K}_{x(t)}^{u*}),$$

однако его можно модифицировать так, что соответствующее свойство будет иметь место, как и непрерывность семейства.

Приведем схему доказательства свойства b) из условия (H*U). Сначала определим функции $\tilde{\lambda}(x, q)$, $\tilde{\rho}(x, q)$, $q \in \mathcal{K}_x^{u*}$, следующим образом.

Пусть $x(t)$ – траектория, $q(t)$ – решение сопряженного уравнения в вариациях вдоль траектории $x(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$ – два линейно независимых решения уравнения в вариациях вдоль траектории $x(t)$, причем $v_1(0)$, $v_2(0)$ ортогональны некоторому вектору $q(t)$. Определим $\tilde{\lambda}(x, q)$, $\tilde{\rho}(x, q)$ так, что

$$\frac{d|q(t)|}{dt} = \tilde{\lambda}(x(t), q(t))|q(t)|, \quad \frac{dS(v_1(t), v_2(t))}{dt} = \tilde{\rho}(x(t), q(t))S(v_1(t), v_2(t)),$$

где $S(v_1, v_2)$ – площадь параллелограмма, порожденного векторами v_1, v_2 .

Для функций $\tilde{\lambda}(x, q)$, $\tilde{\rho}(x, q)$ выполнены свойства, аналогичные свойствам функций $\lambda(x)$, $\rho(x)$, определенных ранее. В частности, справедливо равенство

$$\tilde{\lambda}(x, q) + \operatorname{div} X(x) = \tilde{\rho}(x, q). \quad (17)$$

Далее мы докажем неравенство $\int_0^T \tilde{\rho}(x(t), q(t)) dt > k$ для некоторых $k > 0$, $T > 0$ так же, как доказывали аналогичное неравенство для функции $\rho(x)$. Из последнего неравенства и из (17) следует, что $\int_0^T \tilde{\lambda}(x(t), q(t)) dt > k$ для тех же констант k, T .

Свойство (H*U) доказано.

§ 5. Неавтономные возмущения

Как было сказано в начале статьи, неавтономным возмущением системы вида $\dot{x} = X(x)$ является система

$$\dot{x} = Y(x, t) = X(x) + h(x, t), \quad (18)$$

где $h(x, t)$ – малая функция. Систему $\dot{x} = X(x)$ мы будем называть *невозмущенной*, систему $\dot{x} = Y(x, t)$ – *возмущенной*. Мы будем рассматривать малость возмущения относительно нормы

$$\|h\| = \sup_{x \in U, t \in \mathbb{R}^1, i, j \in \{1, 2, 3\}} \left(|h(x, t)| + \left| \frac{\partial(h_i(x, t))}{\partial x_j} \right| + \left| \frac{\partial(h_i(x, t))}{\partial t} \right| \right). \quad (19)$$

При этом частные производные второго порядка считаются ограниченными.

Ранее для систем типа системы Лоренца была построена инвариантная окрестность U множества Λ . Примем без доказательства тот факт, что можно построить новую окрестность с кусочно гладкой границей, в которую все траектории входят под ненулевым углом. Далее мы будем считать, что U – именно такая окрестность и что система вне окрестности U не определена.

В этом случае если $h(x, t)$ достаточно мала, то вектор $Y(x, t)$ направлен тоже внутрь области U , и если $x(t)$ – решение системы $\dot{x} = Y(x, t)$, $x(t_0) \in U$ при некотором t_0 , то $x(t) \in U$ при любом $t > t_0$.

Мы будем рассматривать систему в расширенном фазовом пространстве. В нашем случае расширенное фазовое пространство – это прямое произведение $U \times \mathbb{R}^1$.

Множество $U \times \{t\}$, $t \in \mathbb{R}^1$, обозначается через U_t . Касательное пространство к U_t обозначается через $T_{x,t}U_t$. Пространство, сопряженное к пространству $T_{x,t}U_t$, обозначается через $T_{x,t}^*U_t$.

Мы будем допускать некоторую вольность, обозначая одним и тем же символом координаты точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ в U и в множествах U_t . Эта вольность оправдывается тем, что все множества U_t можно отождествить, поскольку система рассматривается в прямом произведении. Аналогично, решение $x(t)$ системы (19) может рассматриваться как лежащее в U при каждом t , так и лежащее в U_t .

Вместо потока для возмущенной системы рассматривается семейство отображений $\hat{\Phi}_{t_1, t_2}: U_{t_1} \rightarrow U_{t_2}$, которое определяется следующим образом. Пусть $x(t)$ – решение системы, $x(t_1) = x$. Тогда $\hat{\Phi}_{t_1, t_2}(x) = x(t_2)$. Очевидно, что для невозмущенной системы $\hat{\Phi}_{t_1, t_2} = \Phi_{t_2 - t_1}$.

Расслоение $U \times \mathbb{R}^1$ на множества U_t инвариантно относительно $\hat{\Phi}_{t_1, t_2}$. Поэтому $d\hat{\Phi}_{t_1, t_2}$ переводит вектор, касательный к множеству U_{t_1} , в вектор, касательный к множеству U_{t_2} .

Аттрактором мы будем называть множество $\Lambda \subset U \times \mathbb{R}^1$, состоящее из таких точек (x_0, t_0) , что решение $x(t)$ принадлежит U_t при всех $t \in \mathbb{R}^1$, если $x(t_0) = x_0$. Через Λ_t обозначается множество $\Lambda \cap U_t$.

5.1. Уравнение в вариациях и сопряженное уравнение в вариациях для неавтономного возмущения. Пусть $D(x, t) - (3 \times 3)$ -матрица из частных производных $\partial Y_i(x, t)/\partial x_j$. Уравнение в вариациях, соответствующее решению $x(t)$ возмущенной системы, имеет вид $\dot{v} = D(x(t), t)v$, сопряженное уравнение в вариациях имеет вид $\dot{q} = -qD(x(t), t)$. При этом считается, что при каждом $t \in \mathbb{R}^1$ вектор $v(t)$ – элемент пространства $T_{(x(t), t)}U_t$, а вектор $q(t)$ – элемент пространства $T_{(x(t), t)}^*U_t$.

Отметим, что для неавтономного возмущения системы имеет место сохранение скалярного произведения (остается справедливой лемма 3.1). Доказательство этой леммы в точности повторяет доказательство для автономного случая.

Сформулируем определение сингулярно гиперболической структуры для неавтономного возмущения.

УСЛОВИЕ (Н*UN). Для каждой точки $x \in U_t$ определен конус $\mathcal{K}_{x,t}^{u*} \subset T_{x,t}^*U_t$. Семейство конусов $\mathcal{K}_{x,t}^{u*}$ инвариантно в том смысле, что существует $t_1 > 0$ такое, что если решение $x(t) \in U_t$ при $t \geq t_0$, $q(t)$ – решение сопряженного уравнения в вариациях вдоль $x(t)$, $q(t_0) \in \text{clos } \mathcal{K}_{x(t_0), t_0}^{u*}$, то $q(t) \in \text{int } \mathcal{K}_{x,t}^{u*}$ при всех $t > t_0 + t_1$. Кроме того, существуют константы $c_1 > 0$, $\gamma_1 > 0$, $c_2 > 0$, $\gamma_2 > 0$ такие, что

- а) если $q(t)$ – решение сопряженного уравнения в вариациях вдоль решения $x(t)$, $q(t_0) \in \mathcal{K}_{x(t_0), t_0}^{u*}$, $t > t_0$, то $|q(t)| > c_1 e^{\gamma_1(t-t_0)} |q(t_0)|$;
- б) если $v_1(t)$, $v_2(t)$ – решения уравнения в вариациях, ортогональные некоторому решению $q(t)$ сопряженного уравнения в вариациях, такому, что $q(t_0) \in \mathcal{K}_{x(t_0), t_0}^{u*}$, то при всех $t > t_0$ имеет место

$$S(v_1(t), v_2(t)) > c_2 e^{\gamma_2(t-t_0)} S(v_1(t_0), v_2(t_0)),$$

где $S(v_1(t), v_2(t))$ – площадь параллелограмма, порожденного векторами $v_1(t)$, $v_2(t)$.

Как и в автономном случае, для каждой точки $x \in \Lambda_t$ определим одномерное подпространство $E_{x,t}^{u*} \subset T_{x(t)}^* U_t$. Семейство пространств $E_{x,t}^{u*}$ инвариантно. Это означает, что если $x(t)$ — траектория, $x(t_1) \in \Lambda_{t_1}$ при каком-то t_1 , $q(t)$ — решение сопряженного уравнения в вариациях, $q(t_1) \in E_{x(t_1),t_1}^{u*}$, то $q(t) \in E_{x(t),t}^{u*}$ при всех t . Семейство пространств $E_{x,t}^{u*}$ зависит от x и t непрерывно на множестве $\Lambda = \bigcup_t \Lambda_t$ и дифференцируемо вдоль решений.

Справедлива лемма 3.3, согласно которой пространство $E_{x,t}^{u*}$ ортогонально вектору скорости $Y(x, t)$. Доказательство точно такое же, как и для автономного случая.

Аттрактор Λ мы будем называть *ориентируемым*, если существует векторное поле $p(x, t) \in E_{x,t}^{u*}$, непрерывно зависящее от x, t и дифференцируемое вдоль траекторий.

5.2. Грубые и негрубые свойства. Мы будем называть свойство невозмущенной системы *грубым*, если оно сохраняется для малых неавтономных возмущений. Свойство называется *негрубым*, если найдется сколь угодно малое неавтономное возмущение, для которого соответствующее свойство не имеет места.

Приведем без доказательства несколько простых утверждений о грубых и негрубых свойствах.

Наличие гиперболической неподвижной точки является грубым свойством. Пусть x_0 — неподвижная точка невозмущенной системы. Тогда у возмущенной системы в окрестности точки x_0 имеется единственное решение $x_0(t)$, определенное при любом $t \in \mathbb{R}^1$ и такое, что в каждой точке $x_0(t)$ имеется разложение пространства $\mathbb{R}^3$ в прямую сумму подпространств $\mathbb{R}^3 = E_{x,t}^u \oplus E_{x,t}^s$; если $v(t)$ — решение уравнения в вариациях, $v(t_1) \in E_{x(t_1),t_1}^u$, то $|v(t)|$ экспоненциально растет при $t \rightarrow +\infty$; если же $v(t_1) \in E_{x(t_1),t_1}^s$, то $|v(t)|$ экспоненциально растет при $t \rightarrow -\infty$. Если возмущение периодически, то и траектория $x(t)$, и разложение $\mathbb{R}^3 = E_{x,t}^u \oplus E_{x,t}^s$ периодичны с тем же периодом.

Гиперболическая структура в окрестности гиперболической периодической траектории не является грубым свойством. Рассмотрим периодическое возмущение периода T . Его можно привести стандартным образом к системе порядка 4 с правой частью, не зависящей от t . Пусть φ — угловая переменная на окружности, $\beta = 2\pi/T$. Заменяем невозмущенную систему на систему

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x) + h(x, \varphi); \\ \dot{\varphi} = \beta \end{cases} \quad (20)$$

в пространстве $U \times S^1$. Отображение последования $\tilde{\Phi}$ на трехмерной поверхности $U \times \{0\}$ является возмущением отображения Φ_T .

Рассмотрим периодическую траекторию невозмущенной системы с двумерными устойчивым и неустойчивым многообразиями. Она является окружностью, инвариантной относительно Φ_T и гиперболической. Отображение $\tilde{\Phi}$ является малым возмущением отображения Φ_T . При малых возмущениях инвариантная окружность сохраняется и на ней появляется последовательность чередующихся устойчивых и неустойчивых траекторий (относительно сужения отображения $\tilde{\Phi}$ на эту

окружность). Устойчивая периодическая точка на самом деле является гиперболической (если ее рассматривать в окрестности U) с одномерным неустойчивым многообразием. Неустойчивая является гиперболической с двумерным неустойчивым многообразием. Таким образом, в окрестности цикла невозмущенной системы появляются гиперболические циклы как с одномерным, так и с двумерным неустойчивым многообразием. Это говорит о разрушении гиперболической структуры при малом неавтономном возмущении.

Наличие сингулярно гиперболической структуры является грубым свойством. Для невозмущенной системы конусы $\mathcal{K}_{x,t}^{u*}$ не зависят от t .

Пусть $\mathcal{K}_{x,t}^{u*}$ – конусы, $c_1, \gamma_1, c_2, \gamma_2$ – константы для невозмущенной системы, фигурирующие в условии (H^*U) . В качестве конусов можно взять те же самые конусы для возмущенной системы. Нетрудно видеть, что если возмущение достаточно мало, то инвариантность конусов сохраняется. Константы $c_1, \gamma_1, c_2, \gamma_2$ для возмущенной системы несколько изменятся, но останутся положительными. Поэтому наличие сингулярно гиперболической структуры является грубым свойством.

5.3. Отсутствие устойчивых решений. Докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть система, определяемая уравнением $\dot{x} = Y(x, t)$, сингулярно гиперболична. Тогда устойчивые траектории отсутствуют.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для заданного решения $x(t)$, $t \geq t_0$, определим решение сопряженного уравнения в вариациях $q(t)$, $q(t_0) \in \mathcal{K}_{x(t_0), t_0}^{u*}$. Тогда в силу инвариантности системы конусов $q(t) \in \mathcal{K}_{x(t), t}^{u*}$ при любом $t > t_0$. Определим площадку $P_{x(t), t} \in T_{x(t), t}U$ как множество векторов $v \in T_{x(t), t}U$, ортогональных вектору $q(t)$. Из условия (H^*UN) следует, что $S(v_1(t), v_2(t))$ экспоненциально растет. В качестве вектора v_1 рассмотрим вектор $Y(x, t)$. Вектор $Y(x, t)$ ограничен. Следовательно, $|v_2(t)|$ экспоненциально растет. Таким образом, уравнение в вариациях вдоль любой траектории $x(t)$ имеет экспоненциально растущее решение. Из равномерной ограниченности производных второго порядка следует, что решение $x(t)$ неустойчиво. Теорема доказана.

§ 6. Обобщение на случай произвольной размерности

6.1. Определение сингулярно гиперболических систем. Мы сформулируем определение сингулярно гиперболической системы в пространстве $\mathbb{R}^n$. Приведенное ниже определение без труда переносится на случай системы, заданной на произвольном римановом многообразии.

Определение будет формулироваться для неавтономной системы. Сохраняются все обозначения и определения предыдущего параграфа.

Для пространства $\mathbb{R}^n$ очевидны обобщения определения матрицы $D(x, t)$, уравнения в вариациях, сопряженного уравнения в вариациях и т.д. Остается верным сохранение скалярного произведения (лемма 3.1).

Предполагается, что в ограниченной области $U \subset \mathbb{R}^n$ определено C^1 -гладкое векторное поле $Y(x, t)$. Вне U поле $Y(x, t)$ не определено. Обозначим через $\Lambda \subset U \times \mathbb{R}^1$ множество таких точек $(x_0, t_0) \in U \times \mathbb{R}^1$, что решение $x(t)$ уравнения $\dot{x} = Y(x, t)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ определено (и, следовательно, принадлежит U) при всех $t \in \mathbb{R}^1$.

Множество Λ называется *локально максимальным множеством*.

Если положительная полутраектория $x(t)$ всякой точки $(x_0, t_0) \in U \times \mathbb{R}^1$ лежит в U , то Λ – аттрактор. Зафиксируем два натуральных числа m, k , $m \leq n - 2$, $2 \leq k \leq n - m$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Система, определяемая в $U \subset \mathbb{R}^n$ уравнением $\dot{x} = Y(x, t)$, называется *сингулярно гиперболической*, если выполнено следующее.

УСЛОВИЕ $(H_n^* U)$. Для каждой точки $(x, t) \in U \times \mathbb{R}^1$ определен конус $\mathcal{K}_{x,t}^{u*} \subset T_{x,t}^* U$ с m -мерным осевым пространством. Семейство конусов $\mathcal{K}_{x,t}^{u*}$ непрерывно зависит от точки $(x, t) \in U \times \mathbb{R}^1$, инвариантно, т.е. существует такое $t_1 > 0$, что если $x(t)$ – решение, $x(t) \in U$ при $t \in [t_0, t_0 + t_1]$, $q(t)$ – решение сопряженного уравнения в вариациях вдоль $x(t)$, $q(t_0) \in \text{clos } \mathcal{K}_{(x(t_0), t_0)}^{u*}$, то $q(t) \in \text{int } \mathcal{K}_{(x(t), t)}^{u*}$ при всех $t > t_0 + t_1$. Кроме того, существуют такие константы $c_1 > 0$, $\gamma_1 > 0$, $c_2 > 0$, $\gamma_2 > 0$, что

- а) если $x(t)$ – решение, определенное при $t \in (\alpha, \beta)$, $q(t)$ – решение сопряженного уравнения в вариациях вдоль $x(t)$, $q(t) \in \mathcal{K}_{(x(t), t)}^{u*}$, $\alpha < t_0 < t < \beta$, то $|q(t)| > c_1 e^{\gamma_1(t-t_0)} |q(t_0)|$;
- б) если $x(t)$ – решение, определенное при $t \in (\alpha, \beta)$, $q(t)$ – решение сопряженного уравнения в вариациях вдоль $x(t)$, $q(t) \in \mathcal{K}_{(x(t), t)}^{u*}$, $v_1(t), \dots, v_k(t)$ – решения уравнения в вариациях вдоль $x(t)$, ортогональные $q(t)$, $\alpha < t_0 < t < \beta$, то

$$V_k(v_1(t), \dots, v_k(t)) > c_2 e^{\gamma_2(t-t_0)} V_k(v_1(t_0), \dots, v_k(t_0)),$$

где $V_k(v_1(t), \dots, v_k(t))$ – k -мерный объем параллелепипеда, порожденного векторами $v_1(t), \dots, v_k(t)$.

6.2. Неподвижные точки. Имеет смысл рассматривать неподвижные точки только для автономных систем.

Пусть в области $U \in \mathbb{R}^n$ определена автономная система $\dot{x} = X(x)$, удовлетворяющая условию $(H_n^* U)$, $x_0 \in U$ – неподвижная точка. Опишем возможный спектр матрицы $D(x_0)$ (аналог леммы 3.4).

Оказывается, что существует такое $\theta > 0$, что спектр матрицы $D(x_0)$ делится на три части. Первая часть состоит из таких собственных значений λ , что $\text{Re } \lambda < -\theta$. Этим собственным значениям соответствует подпространство $E_{x_0}^s$ пространства $T_{x_0} U$, $\dim E_{x_0}^s = m$. Вторая часть состоит из таких собственных значений λ , что $-\theta < \text{Re } \lambda \leq 0$. Этим собственным значениям соответствует подпространство $E_{x_0}^0$ пространства $T_{x_0} U$, $\dim E_{x_0}^0 \leq k - 1$. Третья часть состоит из таких собственных значений λ , что $\text{Re } \lambda > 0$. Этим собственным значениям соответствует подпространство $E_{x_0}^u$ пространства $T_{x_0} U$, $\dim E_{x_0}^u \leq n - m$. Следовательно, пространство $T_{x_0} U$ разлагается в прямую сумму $T_{x_0} U = E_{x_0}^s \oplus E_{x_0}^0 \oplus E_{x_0}^u$.

Для любых k собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, соответствующих собственным векторам из пространства $E^0 \oplus E^u$, имеет место неравенство

$$\text{Re}(\lambda_1 + \dots + \lambda_k) > 0.$$

Кратные числа в этой сумме должны встречаться в количестве, не превышающем кратности соответствующего собственного числа.

Если $\dim E^0 = 0$, то в некоторой окрестности U_{x_0} точки x_0 нет неблуждающих точек, кроме самой точки x_0 , а множество $\Lambda \cap U_{x_0}$ состоит из точки x_0 и ее неустойчивого многообразия.

Пространство $E_{x_0}^{u*}$ является ортогональным дополнением к $E^0 \oplus E^u$.

Доказательство этих утверждений принципиально не отличается от доказательства леммы 3.4.

6.3. Соотношение с классическим определением гиперболического множества. Классическое определение гиперболического множества Λ приведено в определении 2.6.

Если система автономная, неподвижные точки отсутствуют, выполнено условие $(H_n^* U)$ и $k = 2$, то поток, порожденный уравнением, гиперболичесок на Λ в смысле классического определения.

Обратно, если система гиперболическа на инвариантном множестве Λ в смысле классического определения, то существует такая окрестность U_1 множества Λ , на которой выполнено условие $(H_n^* U)$ с $k = 2$.

Пусть автономная система $\dot{x} = X(x)$ удовлетворяет условию $(H_n^* U)$. Обозначим через U^+ множество таких точек $x \in U$, что положительная полутраектория точки x целиком лежит в U . Если Λ – аттрактор, то $U^+ = U$.

Оказывается, что на U^+ существует семейство инвариантных устойчивых подпространств $E_x^s \subset T_x U$. Пространства E_x^s зависят от точки x непрерывно, семейство E_x^s дифференцируемо вдоль траекторий. Размерность пространств E_x^s равна m . Кроме того, если $x(t)$ – решение, $x(t) \in U^+$, $v(t)$ – решение уравнения в вариациях, $v(t) \in E_{x(t)}^s$, то $|v(t)| < c_3 e^{-\gamma_1 t} |v(0)|$, где константа γ_1 определена в условии $(H_n^* U)$, $c_3 > 0$.

Кроме того, для точек $x \in U^+$ существует семейство локальных устойчивых многообразий, инвариантное относительно потока.

Таким образом, в пространстве $\mathbb{R}^3$ для системы типа системы Лоренца в построенной окрестности существует инвариантное семейство локальных устойчивых многообразий.

6.4. Комментарии. В основе идеи введения сингулярной гиперболичности, как мы видели, лежат две идеи: переход к сопряженному уравнению в вариациях и свойство роста площадей в некоторых двумерных направлениях касательного пространства. Эти идеи не новы. Можно отметить работу [21], в которой использовались даже более общие преобразования дифференциальных форм (можно заметить, что элемент пространства, сопряженного касательному, – это дифференциальная 1-форма). В работе [16] одно из условий формулировалось в виде роста площади вдоль неустойчивой сепаратрисы неподвижной точки. Доказательство существования инвариантного семейства двумерных подпространств вдоль сепаратрисы по существу использовало тот факт, что семейство конусов $\mathcal{K}_x^{u*}$ в окрестности неподвижной точки является инвариантным. Поэтому существует инвариантное семейство подпространств, которые в настоящей работе обозначены E_x^{u*} , определенные для точек x , принадлежащих неустойчивому многообразию неподвижной точки.

Как говорилось выше, в работе [22] формулировалось условие, наиболее близкое к нашему условию сингулярной гиперболичности, так называемая псевдо-гиперболичность. Это означает, что имеется строго устойчивое одномерное слоение, а в двумерном направлении, трансверсальном этому слоению, имеет место экспоненциальный рост площадей.

В работах [22], [23] условие роста площадей в двумерных направлениях использовался для доказательства ряда утверждений, простейший вариант которых можно сформулировать следующим образом.

Предположим, что диффеоморфизм на трехмерном многообразии имеет неподвижную точку, собственные числа дифференциала диффеоморфизма в неподвижной точке таковы, что $|\lambda_1| < |\lambda_2| < 1 < |\lambda_3|$, $|\lambda_2 \lambda_3| > 1$, и имеется общая точка устойчивого и неустойчивого многообразий (т.е. имеется гомоклиническая траектория). Тогда имеется окрестность гомоклинической траектории, в которой достаточно малое (в C^1 -топологии) возмущение исходного диффеоморфизма не имеет устойчивых периодических траекторий.

Прямое использование этого утверждения позволило бы доказать следующее утверждение, которое является частным случаем приведенного в настоящей работе.

Предположим, что значения параметров таковы, что у потока системы Лоренца неустойчивая сепаратриса неподвижной точки $O(0, 0, 0)$ лежит в устойчивом многообразии этой точки. Тогда имеется окрестность сепаратрисы, в которой малое периодическое возмущение не имеет устойчивых периодических траекторий.

Однако, насколько мне известно, в литературе не встречалась формулировка условия гиперболичности, повторяющая условие сингулярной гиперболичности в приведенном в настоящей работе виде.

В заключение автор с удовольствием выражает благодарность Р. В. Плыкину, Л. П. Шильникову и С. В. Гонченко за полезные обсуждения.

Список литературы

1. *Saltzman B.* Finite amplitude free convections as an initial value problem. I // *J. Atmospheric Sci.* 1962. V. 19. №2. P. 329–341.
2. *Lorenz E. N.* Deterministic nonperiodic flow // *J. Atmospheric Sci.* 1963. V. 20. №2. P. 130–141.
3. *McLaughlin B., Martin P. C.* Transition to turbulence of statically stressed fluids // *Phys. Rev. Lett.* 1974. V. 33. №1. P. 1189–1192.
4. *Yorke J. A., Yorke E. D.* Metastable chaos: The transition to sustained chaotic oscillations in a model of Lorenz // *J. Statist. Phys.* 1979. V. 21. P. 263–277.
5. *Guckenheimer J., Williams R. F.* Structural stability of Lorenz attractors // *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 1979. V. 50. P. 59–72.
6. *Rand D.* The topological classification of Lorenz attractors // *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1978. V. 83. №3. P. 451–460.
7. *Афраимович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П.* О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца // *Труды ММО.* 1982. Т. 44. С. 150–212.
8. *Šlažkov S. V.* Pseudo-orbit tracing property and structural stability of expanding maps of the interval // *Ergodic Theory Dynam. Systems.* 1992. V. 12. P. 573–587.
9. *Sparrow C.* The Lorenz attractor: Bifurcations, chaos and strange attractors. New York: Springer-Verlag, 1982.
10. *Бунимович Л. А., Синай Я. Г.* Стохастичность аттрактора в модели Лоренца // *Нелинейные волны* / ред. А. В. Гапонов-Грехов. М.: Наука, 1979. С. 212–226.

11. *Сатаев Е. А.* Инвариантные меры для гиперболических отображений с особенностями // УМН. 1992. Т. 47. № 1. С. 147–202.
12. *Сатаев Е. А.* Гиббсовские меры для одномерных аттракторов гиперболических отображений с особенностями // Изв. РАН. Сер. матем. 1992. Т. 56. № 6. С. 1328–1344.
13. *Pesin Ya. B.* Dynamical systems with generalised hyperbolic attractors: hyperbolic, ergodic and topological properties // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1992. V. 12. P. 123–151.
14. *Tucker W.* A rigorous ODE solver and Smale's 14th problem // Found. Comput. Math. 2002. V. 2. P. 53–117.
15. *Rychlik M.* Lorenz attractor through Sil'nicov-type bifurcation. I // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1990. V. 10. № 4. P. 793–821.
16. *Robinson C.* Homoclinic bifurcation to a transitive attractor of Lorenz type // Nonlinearity. 1989. V. 2. № 4. P. 495–518.
17. *Плыкин Р. В., Сатаев Е. А., Шлячков С. В.* Странные аттракторы // Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем. Фундамент. направления. Динамические системы. Т. 9. М.: ВИНТИ, 1991. С. 72–144.
18. *Sternberg Sh.* On the structure of local homeomorphisms of Euclidean n -space. II // Amer. J. Math. 1958. V. 80. P. 623–631.
19. *Chen K. T.* Equivalence and decomposition of vector fields about an elementary critical point // Amer. J. Math. 1963. V. 85. P. 693–722.
20. *Kelly A.* The stable, center-stable, center, center-unstable, unstable manifolds // J. Differential Equations. 1967. V. 3. № 4. P. 546–570.
21. *Аносов Д. В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Труды МИАН. 1967. Т. 90. С. 1–210.
22. *Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П.* О существовании областей Ньюхауса вблизи систем с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре (многомерный случай) // Докл. РАН. 1993. Т. 329. № 4. С. 404–407.
23. *Тураев Д. В., Шильников Л. П.* Пример дикого странного аттрактора // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 4. С. 137–160.

Обнинский государственный технический университет
атомной энергетики
E-mail: sataev@iate.obninsk.ru

Поступила в редакцию
12.05.2004 и 01.12.2004