Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Р. Фаталов, Метод Лапласа для малых отклонений гауссовских процессов типа винеровского, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 4, 135–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1289>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 14:02:03

УДК 519.2

В. Р. Фаталов

Метод Лапласа для малых уклонений гауссовских процессов типа винеровского

В статье доказаны результаты о точных асимптотиках вероятностей

$$P \left\{ \int_0^1 |\xi(t)|^p dt \leq \varepsilon^p \right\}, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

при $p > 0$ для двух гауссовских процессов $\xi(t)$ – винеровского процесса и броуновского моста.

Метод исследования – метод Лапласа в банаховых пространствах, подход к вероятностям малых уклонений на основе теории больших уклонений для времен пребывания. Вычисления проведены для случаев $p = 1$ и $p = 2$ в результате решения экстремальной задачи для функционала действия и исследования соответствующих уравнений Шрёдингера.

Библиография: 39 названий.

§ 1. Введение и формулировка основных результатов

Изучение малых уклонений гауссовских мер – сравнительно новое направление в области предельных теорем теории вероятностей [1]–[5]. Задача о малых уклонениях связана с исследованием асимптотического поведения вероятности

$$\mu(\varepsilon D_0), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1.1)$$

где D_0 – некоторая область банахова пространства $(B, \|\cdot\|)$ (например, $D_0 = \{x \in B : \|x\| \leq 1\}$), μ – гауссовская мера, заданная на B .

В отличие от теории больших уклонений вероятностных мер [6], [7] теория малых уклонений в настоящее время находится в стадии становления. В значительной степени это связано с большей сложностью задачи о малых уклонениях, которая имеет ярко выраженную бесконечномерную природу. Дело в том, что асимптотика вероятности (1.1) для конечномерных пространств является степенной, а в случае бесконечномерных пространств – экспоненциальной. К настоящему времени разными, довольно изощренными способами вычислены логарифмические асимптотики вероятности (1.1) для разных норм (см. обзор [3] и работу [5]). Намного меньше известно о точных асимптотиках. Хорошо изучен случай гильбертова пространства [1], [2], [8], а также норма супремума для распределений винеровского процесса и броуновского моста.

В настоящей работе мы изучим тот случай малых уклонений, когда мера $\mu = \mu_w$ – распределение стандартного винеровского процесса $w(t)$, $t \geq 0$, $w(0) = 0$, или

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-00700).

$\mu = \mu_{w_0}$ – распределение броуновского моста $w_0(t) = \{w(t) \mid w(1) = 0\}$, а множество D_0 имеет вид

$$D = \{x : G(x) \leq 1\}, \quad (1.2)$$

где

$$G(x) = \|x\|_p^p = \int_0^1 |x(t)|^p dt, \quad p > 0, \quad (1.3)$$

при $p \geq 1$ функционал $G(x)$ представляет собой p -ю степень L^p -нормы.

В статье [4; лемма 2.3] впервые строго доказан (на основе теории гауссовских неравенств) результат о логарифмической асимптотике вероятностей

$$\mu(\varepsilon D) \equiv \mu\{x : \|x\|_p \leq \varepsilon\}, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad p \geq 1, \quad (1.4)$$

для $\mu = \mu_w$ и $\mu = \mu_{w_0}$ (см. также леммы 3 и 4 ниже), хотя сам этот результат в неявной форме содержался уже в работе [9; (4.5)]. Отметим также, что некоторые выводы, сделанные в статье [10], нуждаются в уточнении.

Мы покажем, что вычисление точной асимптотики вероятности (1.4) удобно проводить на основе теории больших уклонений для *времен пребывания* рассматриваемого процесса, привлекая метод Лапласа (см. [6; §5.1], [11]). Напомним, что в работе [11] была вычислена точная асимптотика при $T \rightarrow \infty$ интеграла $E \exp\{T\Psi(L_T(w, \cdot))\}$, где E – оператор математического ожидания, $L_t(w, \cdot)$ – функционал времени пребывания винеровского процесса (см. определение (2.1) ниже) и Ψ – гладкий нелинейный функционал, заданный на пространстве вероятностных мер на $\mathbb{R}$ (ср. с теоремой 4 ниже). Брать в качестве Ψ *индикаторную функцию* нельзя.

Известно, что в теории больших уклонений переход от точных асимптотик интегралов, взятых по всему пространству, к точным асимптотикам *распределений* (т.е. *интегралов по множествам*) является чрезвычайно сложным и требует особых методов исследования. На это обстоятельство указано в работах [12; I, с. 169], [11; с. 535]. При исследовании асимптотик интегралов по множествам основную роль начинает играть центральная предельная теорема и связанный с ней тонкий гауссовский анализ.

В случае гауссовских мер и распределений сумм независимых банаховозначных случайных элементов упомянутый переход был выполнен автором в статьях [13], [14], причем уже в гауссовском случае в ответе для точной асимптотики распределений появляется константа необычного вида.

В настоящей работе, фактически, осуществлен указанный нетривиальный переход в случае распределений времен пребывания (см. предложение 1 ниже).

Заметим, что развиваемый ниже метод носит общий характер, он применим в случае иных интегральных функционалов G , а также для иных марковских (а возможно, и гауссовских) процессов.

Перейдем к точной формулировке полученных результатов.

Пусть фиксировано число $p > 0$. Введем основное гильбертово пространство функций, заданных на $\mathbb{R}$,

$$L^2 := \{v(x), x \in \mathbb{R} : N(v) < \infty\}, \quad (1.5)$$

где

$$N(v) \equiv \|v\|^2 := \int_{-\infty}^{\infty} v^2(x) dx, \quad (1.6)$$

скалярное произведение в L^2 обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\langle u, v \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} u(x)v(x) dx, \quad u, v \in L^2.$$

Пусть $\varkappa_0 > 0$ – минимальное собственное число самосопряженного оператора Шрёдингера $\mathcal{B}: L^2 \rightarrow L^2$, имеющего вид

$$\begin{cases} \mathcal{B}y(t) = -\frac{1}{2}y''(t) + |t|^p y(t), & t \in \mathbb{R}, \\ y(-\infty) = y(\infty) = 0, \end{cases} \quad (1.7)$$

и $y_0(t) \geq 0$ – соответствующая нормированная собственная функция, $\|y_0\| = 1$ (см. [15; ч. 2, (92)], [16; гл. 4, § 7, п. 4; гл. 9, § 2, п. 2]).

Введем важные параметры

$$\lambda_0 := \left(\frac{2\varkappa_0}{2+p} \right)^{(2+p)/p}, \quad \beta_0 := \frac{2+p}{2}\lambda_0 = \left(\frac{2}{2+p} \right)^{2/p} \varkappa_0^{(2+p)/p} \quad (1.8)$$

и функции

$$v_0(x) := \lambda_0^{1/(2(2+p))} y_0(\lambda_0^{1/(2+p)} x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.9)$$

$$V(x) := \beta_0 - \lambda_0 |x|^p, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.10)$$

Ниже будет показано (см. (3.14)), что

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_0^2(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p v_0^2(x) dx = 1 \quad (1.11)$$

(здесь первое равенство легко следует из (1.9) и того, что $\|y_0\| = 1$).

Мы будем обозначать также символом V оператор умножения, который определен на множестве $\mathcal{D}_V$ функций $h \in L^2$ таких, что $Vh \in L^2$. Напомним, что производящий оператор $\mathcal{A}$ винеровского процесса определен на множестве

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mathcal{A}} := \{ & \text{множество ограниченных на } \mathbb{R} \text{ функций } h \text{ таких, что} \\ & h, h' \text{ абсолютно непрерывны, функция } h'' \text{ ограничена} \} \end{aligned} \quad (1.12)$$

и действует по правилу

$$(\mathcal{A}h)(x) = \frac{1}{2}h''(x), \quad h \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \quad (1.13)$$

(см., например, [17; теорема 2.14], [18; гл. 3, п. 22]). Введем множество $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}} := \{h \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \cap L^2 : h'' \in L^2\}$. На всюду плотном в L^2 множестве $\mathcal{D} := \mathcal{D}_V \cap \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{A}}$ определен оператор $\mathcal{A} + V: L^2 \rightarrow L^2$. Ниже будет показано (см. (3.11)), что ядро E_0 оператора $\mathcal{A} + V$ представляет собой одномерное подпространство пространства L^2 :

$$E_0 := \text{Ker}(\mathcal{A} + V) = \{c_0 v_0(x), c_0 \in \mathbb{R}\}.$$

Имеет место разложение гильбертова пространства L^2 в прямую сумму

$$L^2 = E_0 \oplus E_1,$$

где

$$E_1 := E_0^\perp = \left\{ v \in L^2 : \int_{-\infty}^{\infty} v(x)v_0(x) dx = 0 \right\}$$

— ортогональное дополнение подпространства E_0 (см. [16; гл. 4, § 1, п. 3]). Поскольку оператор $\mathcal{A} + V$ является самосопряженным, то его сужение на подпространство E_1 (которое вновь обозначается через $\mathcal{A} + V$) отображает E_1 в E_1 взаимно однозначно (ср. [19; гл. 9, п. 4.5]). Поэтому определен обратный оператор $(\mathcal{A} + V)^{-1}y$, $y \in E_1$.

Положим

$$\psi(x) := |x|^p - 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

тогда в силу (1.11) $v_0\psi \in E_1$. Обозначим

$$\sigma^2 := -2\lambda_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{A} + V)^{-1}[v_0\psi](x)|x|^p v_0(x) dx, \quad (1.14)$$

где согласно вышеизложенному обратный элемент $(\mathcal{A} + V)^{-1}[v_0\psi](x)$ таков, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{A} + V)^{-1}[v_0\psi](x)v_0(x) dx = 0. \quad (1.15)$$

Обозначим

$$b_p := \beta_0 - \lambda_0 = p2^{2/p} \left(\frac{\kappa_0}{2+p} \right)^{(2+p)/p}. \quad (1.16)$$

ТЕОРЕМА 1 (точная асимптотика малых уклонений для L^p -функционалов). *Для $p > 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеют место соотношения*

$$\begin{aligned} \mu_w \{x : \|x\|_p \leq \varepsilon\} &\equiv \mathbb{P} \left\{ \int_0^1 |w(t)|^p dt \leq \varepsilon^p \right\} \\ &= \varepsilon \exp \left\{ -\frac{b_p}{\varepsilon^2} \right\} v_0(0) \int_{-\infty}^{\infty} v_0(x) dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \mu_{w_0} \{x : \|x\|_p \leq \varepsilon\} &\equiv \mathbb{P} \left\{ \int_0^1 |w_0(t)|^p dt \leq \varepsilon^p \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{b_p}{\varepsilon^2} \right\} v_0^2(0) \frac{1}{\sigma} (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Для некоторых значений p вычисления по формулам теоремы 1 можно провести точно. При $p = 1$ и $p = 2$ мы получаем следующие утверждения.

Пусть $\text{Ai}(y)$ обозначает функцию Эйри [20; § 10.4], [21; гл. 11], [22], $\text{Ai}'(y)$ — ее производную, $a'_1 \approx 1.0188$ — первый нуль функции $\text{Ai}'(-y)$.

СЛЕДСТВИЕ 1 (малые уклонения в L^1 -норме). При $\varepsilon \rightarrow 0$ выполнены соотношения

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^1 |w(t)| dt \leq \varepsilon\right\} = b\varepsilon \exp\left\{-\frac{b_1}{\varepsilon^2}\right\}(1 + o(1)), \quad (1.19)$$

$$\text{где } b_1 = \frac{2}{27}(a'_1)^3 \approx 0.07833,$$

$$b = \frac{9}{2\sqrt{2\pi}(a'_1)^{3/2}}M, \quad M = \frac{1}{3a'_1 \text{Ai}(-a'_1)}\left(1 + 3 \int_0^{a'_1} \text{Ai}(-y) dy\right) \approx 1.48257; \quad (1.20)$$

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^1 |w_0(t)| dt \leq \varepsilon\right\} = \frac{1}{\sqrt{6b_1}} \exp\left\{-\frac{b_1}{\varepsilon^2}\right\}(1 + o(1)). \quad (1.21)$$

Заметим, что формулы (1.19), (1.21) можно получить, применяя классический метод Лапласа, из результатов статей [23], [24], [3; теорема 3.13].

СЛЕДСТВИЕ 2 (малые уклонения в L^2 -норме). При $\varepsilon \rightarrow 0$ выполнены соотношения

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^1 w^2(t) dt \leq \varepsilon^2\right\} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\varepsilon \exp\left\{-\frac{1}{8\varepsilon^2}\right\}(1 + o(1)), \quad (1.22)$$

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^1 w_0^2(t) dt \leq \varepsilon^2\right\} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{8\varepsilon^2}\right\}(1 + o(1)). \quad (1.23)$$

Результаты следствия 2 были известны ранее (см., например, [1], [2], [3; § 3]).

В качестве побочного результата в статье получено следующее утверждение, представляющее и самостоятельный интерес.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (точная асимптотика типа Лапласа для времен пребывания). Для $p > 0$ при $T \rightarrow \infty$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} |x|^p L_T(w, dx) < 1\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \exp\{-Tb_p\} v_0(0) \int_{-\infty}^{\infty} v_0(x) dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} (1 + o(1)), \\ & \mathbf{P}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} |x|^p L_T(w, dx) < 1 \mid w(T) = 0\right\} = \exp\{-Tb_p\} v_0^2(0) \frac{1}{\sigma} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

§ 2. Связь задачи о малых уклонениях с теорией больших уклонений для времен пребывания

Функционал времени пребывания случайного процесса, введенный П. Леви [25], оказался очень эффективным и полезным средством для изучения множества задач теории случайных процессов (см. [18], [25]–[28]). В частности, этот функционал и связанный с ним функционал локального времени играют важную роль при изучении асимптотических свойств распределений марковских процессов [9], [11], [29],

[30], [31; гл. 6], ввиду того что для них построена теория больших уклонений. Дадим соответствующие определения и утверждения применительно к нашему случаю винеровского процесса, траектории которого, как известно, непрерывны почти наверное (п.н.).

Пусть $C[0, \infty)$ обозначает множество непрерывных функций, определенных на $[0, \infty)$ со значениями в $\mathbb{R}$. Для каждого $t > 0$, $z \in C[0, \infty)$ и борелевского B из $\mathbb{R}$ обозначим через

$$L_t(z, B) = \frac{1}{t} \int_0^t I_B(z(s)) ds \quad (2.1)$$

часть времени из $[0, t]$, которую фиксированная траектория $z = z(\cdot)$ проводит в множестве B , здесь $I_B(\cdot)$ — индикатор множества B . Функционал $L_t(z, B)$ кратко называют (нормированным) временем пребывания.

Локальное время $l_t(z, y)$, $y \in \mathbb{R}$, определяется как плотность времени пребывания (когда она существует):

$$L_t(z, B) = \int_B l_t(z, y) dy. \quad (2.2)$$

Имеет место следующая важная

ТЕОРЕМА 2. Пусть действительная функция g измерима по Борелю и интегрируема на любом компактном множестве из $\mathbb{R}$. Тогда для каждого $t > 0$ выполнено равенство

$$\mathbb{P} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) L_t(w, dx) = \frac{1}{t} \int_0^t g(w(s)) ds \right\} = 1. \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения имеется, например, в [26; гл. 3, § 4] и [28; § 7.2], где определение локального времени (времени пребывания) отличается от наших (2.1) и (2.2) на некоторый фиксированный множитель.

Приведем еще один нужный нам результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 (масштабная инвариантность, или автомодельность, винеровского процесса). Пусть $\{w(s), s \geq 0\}$ — винеровский процесс. Тогда для любого фиксированного $T > 0$ процесс

$$\{T^{-1/2}w(Ts), s \geq 0\} \quad (2.4)$$

также является винеровским процессом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого факта имеется, например, в [17; § 2.1].

ЛЕММА 1. Для любого фиксированного $T > 0$

- i) процессы $\{T^{1/2}w(s), s \geq 0\}$ и $\{w(Ts), s \geq 0\}$ имеют одинаковое распределение;
- ii) процессы $\{[T^{1/2}w(s) \mid w(1) = 0], s \geq 0\}$ и $\{[w(Ts) \mid w(T) = 0], s \geq 0\}$ имеют одинаковое распределение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение п. i) следует непосредственно из предложения 2. Утверждение ii) вытекает из п. i).

ЛЕММА 2. Пусть $p > 0$. Тогда для любого фиксированного $T > 0$ выполнены равенства

$$T^{p/2} \int_0^1 |w(t)|^p dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p L_T(w, dx) \quad \text{п. н.}, \quad (2.5)$$

$$T^{p/2} \int_0^1 |w_0(t)|^p dt = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p L_T(w, dx) \mid w(T) = 0 \right\} \quad \text{п. н.} \quad (2.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем (2.5). Согласно п. i) леммы 1 и предложению 2 имеем цепочку равенств

$$T^{p/2} \int_0^1 |w(t)|^p dt = \int_0^1 |w(Tt)|^p dt = \frac{1}{T} \int_0^T |w(t)|^p dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p L_T(w, dx) \quad \text{п. н.} \quad (2.7)$$

Аналогично, с учетом того, что $w_0(t) = \{w(t) \mid w(1) = 0\}$, доказывается (2.6). Лемма 2 доказана.

§ 3. Метод Лапласа для малых уклонений.

Доказательство теоремы 1

Вывод утверждений типа теоремы 1 основан на свойстве автомодельности винеровского процесса, соотношениях типа (2.5) и результатах о точной асимптотике больших уклонений для времен пребывания винеровского процесса. Мы проведем подробно доказательство формулы (1.17) теоремы 1 и укажем схему вывода формулы (1.18).

В силу равенства (2.5) для любого фиксированного $T > 0$ выполнено ключевое соотношение

$$\mathbf{P} \left\{ \int_0^1 |w(t)|^p dt < \varepsilon^p \right\} = \mathbf{P} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p L_T(w, dx) < 1 \right\}, \quad \varepsilon = T^{-1/2}. \quad (3.1)$$

Как видим, нужно найти точную асимптотику вероятности в правой части (3.1) при $T \rightarrow \infty$. Для этого мы используем теорию больших уклонений, развитую в работах [11], [13], [30].

Приведем некоторые результаты из [11], [30; III] для нашего случая винеровского процесса.

Обозначим через $\mathcal{M}$ метрическое пространство вероятностных мер на $\mathbb{R}$, снабженное метрикой Прохорова ρ и борелевской σ -алгеброй. Везде ниже $\mathbf{E}$ означает усреднение по основной вероятности $\mathbf{P}$.

Обозначим также

$$\mathcal{H} := \{v \in \mathcal{D} : N(v) = 1\}.$$

Заметим, что если $v \in \mathcal{H}$, то функция v^2 является вероятностной плотностью на $\mathbb{R}$, кроме того, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} v(x) = 0$.

ТЕОРЕМА 3 (принцип больших уклонений) [11], [30; III].

i) Семейство вероятностных мер $\{P\{L_T(w, \cdot) \in (\cdot)\}\}_{T>0}$ удовлетворяет в пространстве $(\mathcal{M}, \rho)$ при $T \rightarrow \infty$ принципу больших уклонений с функционалом действия $I(\nu)$ и скоростью T , где

$$I(\nu) := \begin{cases} -\langle \mathcal{A}v, v \rangle, & v \in \mathcal{H}, \nu(dx) = v^2(x)dx; \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (3.2)$$

ii) Таким образом, для любого открытого в $\mathcal{M}$ множества $\mathcal{C}$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} -\inf_{\nu \in \mathcal{C}} I(\nu) &\leq \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log P\{L_T(w, \cdot) \in \mathcal{C}\} \\ &\leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log P\{L_T(w, \cdot) \in \overline{\mathcal{C}}\} \leq -\inf_{\nu \in \overline{\mathcal{C}}} I(\nu), \end{aligned}$$

где $\overline{\mathcal{C}}$ – замыкание множества $\mathcal{C}$.

iii) Для слабо непрерывного функционала F на $\mathcal{M}$ имеет место равенство

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \mathbf{E} \exp\{-TF(L_T(w, \cdot))\} = -\inf_{\nu \in \mathcal{M}} (F(\nu) + I(\nu)). \quad (3.3)$$

Напомним, что функционал действия $I(\nu)$ является неотрицательным, полунепрерывным снизу и имеет компактные множества уровня (см. [6; § 2, определение 2.1]). Используя интегрирование по частям, получаем

$$-\langle \mathcal{A}v, v \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (v'(x))^2 dx \geq 0,$$

таким образом, функционал $-\langle \mathcal{A}v, v \rangle$ является выпуклым вниз.

В работе [30; III] теорема 3 сформулирована и доказана для общего случая марковских процессов, включая и винеровский процесс. Как известно, переходная плотность винеровского процесса относительно меры Лебега имеет вид

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2t}\right\}, \quad t \in [0, \infty), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

(см., например, [17], [18], [25]–[27]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Точная асимптотика интеграла из (3.3) фактически вычислена в работе [11] (см. теоремы 2.19 и 2.20). Дело в том, что в [11] рассмотрен случай марковских процессов, для которых переходные вероятности имеют плотность относительно некоторой вероятностной референтной меры на $\mathbb{R}$. Внимательный анализ доказательства результатов из [11] показывает, что эти результаты справедливы и в случае винеровского процесса, для которого референтная мера есть мера Лебега. Строгий вывод этого факта можно провести с помощью метода, использованного в [30; III], где также был осуществлен перенос асимптотической теоремы о больших уклонениях, доказанный первоначально для вероятностной референтной меры [30; I], на случай меры Лебега.

Отметим, что в формуле (3.1) участвует *линейный* функционал

$$F_0(\nu) := \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p \nu(dx), \quad \nu \in \mathcal{M}. \quad (3.4)$$

Введем также следующий квадратичный функционал, “ассоциированный” с функционалами G из (1.3) и F_0 :

$$U(v) := \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p v^2(x) dx \equiv \langle |x|^p v, v \rangle, \quad v \in \mathcal{D}. \quad (3.5)$$

Полезна также иная запись функционала действия

$$J(v) := \begin{cases} -\langle \mathcal{A}v, v \rangle, & v \in \mathcal{H}; \\ +\infty, & v \in L^2 \setminus \mathcal{H}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Легко видеть, что

$$F_0(\nu) \equiv U(v), \quad I(\nu) \equiv J(v), \quad \nu(dx) = v^2(x)dx.$$

В зависимости от ситуации нам будет удобно работать или в пространстве функций L^2 , или в пространстве мер $\mathcal{M}$.

3.1. Логарифмическая асимптотика.

ЛЕММА 3. Для любого $p > 0$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \log \mathbf{P} \left\{ \int_0^1 |w(t)|^p dt < \varepsilon^p \right\} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \log \mathbf{P} \left\{ \int_0^1 |w_0(t)|^p dt < \varepsilon^p \right\} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \mathbf{P} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p L_T(w, dx) < 1 \right\} \\ &= -\inf \{ J(v) : v \in \mathcal{H}, v \geq 0, U(v) \leq 1 \}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $p \geq 1$ первые два равенства формулы (3.7) следуют из [4; лемма 2.3] и формулы (3.1). Покажем, как доказывается последнее равенство в (3.7). Для открытого в $\mathcal{M}$ множества $\mathcal{C} := \{\nu \in \mathcal{M} : F_0(\nu) < 1\}$ имеем

$$\mathbf{P} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p L_T(w, dx) < 1 \right\} = \mathbf{P} \{ F_0(L_T(w)) < 1 \} = \mathbf{P} \{ L_T(w, \cdot) \in \mathcal{C} \}. \quad (3.8)$$

Функционал $J(v)$ на своей эффективной области (см. [32; гл. 1, п. 2.1]) является гладким выпуклым функционалом, квадратичные функционалы $N(v)$, $U(v)$ дифференцируемы, поэтому

$$\begin{aligned} \inf_{\nu \in \mathcal{C}} I(\nu) &= \inf \{ J(v) : v \in \mathcal{H}, U(v) < 1 \} = \inf \{ J(v) : v \in \mathcal{H}, U(v) \leq 1 \} \\ &= \inf_{\nu \in \overline{\mathcal{C}}} I(\nu), \end{aligned} \quad (3.9)$$

поскольку в рассматриваемой гладкой экстремальной задаче с ограничениями для функционала $J(v)$ строгое неравенство можно заменить на нестрогое (см. [33; гл. 3, п. 3.2.1], а также лемму 4 ниже).

Из формулы (3.9) в силу п. ii) теоремы 3 следует последнее равенство в (3.7). Условие $v \geq 0$ появляется вследствие инвариантности рассматриваемых функционалов относительно замены знака у аргумента на противоположный. Лемма 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Первое равенство в (3.7) также можно доказать только на основе формулы (3.1) и принципа больших уклонений для времен пребывания броуновского моста. Можно доказать, что семейство распределений времен пребывания броуновского моста, т.е. семейство вероятностных мер (ср. п. ii) леммы 1) $[\mathbb{P}\{L_T(w, \cdot) \in (\cdot) \mid w(T) = 0\}]_{T>0}$, удовлетворяет в пространстве $(\mathcal{M}, \rho)$ при $T \rightarrow \infty$ принципу больших уклонений с тем же самым функционалом действия $I(\nu)$ и той же скоростью T .

Итак, согласно формуле (3.7) нужно решить следующую экстремальную задачу для неотрицательного квадратичного функционала:

$$-\langle \mathcal{A}v, v \rangle \rightarrow \inf, \quad v \in \mathcal{H}, \quad v \geq 0, \quad U(v) \leq 1. \quad (3.10)$$

3.2. Решение экстремальной задачи (3.10).

ЛЕММА 4. i) *Экстремальная задача (3.10) имеет единственное решение – функцию v_0 , определенную в формуле (1.9). При этом выполнены равенства*

$$(\mathcal{A}v_0)(x) = -V(x)v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.11)$$

и

$$\inf\{J(v) : v \in \mathcal{H}, \quad v \geq 0, \quad U(v) \leq 1\} = -\langle \mathcal{A}v_0, v_0 \rangle = \beta_0 - \lambda_0 = b_p > 0, \quad (3.12)$$

где постоянные λ_0 , β_0 и b_p определены в формулах (1.8), (1.16).

ii) *Функция v_0 есть единственное решение следующей граничной задачи для уравнения Шрёдингера с симметричным потенциалом $|x|^p$:*

$$\begin{cases} \frac{1}{2}v''(x) - \lambda_0|x|^pv(x) = -\beta_0v(x), & x \in \mathbb{R}; \\ v(-\infty) = v(\infty) = 0; \\ \int_{-\infty}^{\infty} v^2(x) dx = 1, \end{cases} \quad (3.13)$$

причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^pv^2(x) dx = 1. \quad (3.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя метод множителей Лагранжа [33; гл. 3, п. 3.2.1], найдем все локальные экстремумы задачи (3.10), затем выделим из них тот, который доставляет глобальный минимум в данной задаче. Функция Лагранжа задается формулой

$$\mathcal{L}(v) = -\lambda_1 \langle \mathcal{A}v, v \rangle + \lambda_2(U(v) - 1) + \lambda_3(\langle v, v \rangle - 1), \quad v \in \mathcal{D}, \quad (3.15)$$

где

$$\lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_3 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 > 0, \quad (3.16)$$

– множители Лагранжа. Дифференцируя квадратичные функционалы, получаем, что для того чтобы точка v доставляла минимум в задаче (3.10), необходимо выполнение условия стационарности

$$\mathcal{L}'(v) \equiv -2\lambda_1 \mathcal{A}v + 2\lambda_2 |x|^pv + 2\lambda_3 v = 0, \quad v \in \mathcal{D}, \quad (3.17)$$

и условия дополняющей нежесткости

$$\lambda_2(U(v) - 1) = 0, \quad \lambda_3(\langle v, v \rangle - 1) = 0. \quad (3.18)$$

Легко проверить, что в нашей задаче множитель $\lambda_1 > 0$. Действительно, предположим, что $\lambda_1 = 0$. Тогда соотношение (3.17) запишется в виде $2v(\lambda_2|x|^p + \lambda_3) = 0$, отсюда следует, что либо $v \equiv 0$ – это противоречит (3.14), либо $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ – это противоречит последнему неравенству из (3.16). Итак, $\lambda_1 > 0$, обозначим $\lambda = \lambda_2/\lambda_1 > 0$, $\beta = -\lambda_3/\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Исследуя соотношения (3.15)–(3.18), несложно убедиться, что для функции v , доставляющей локальный экстремум задачи (3.10), найдутся числа $\lambda = \lambda(v)$, $\beta = \beta(v)$ такие, что тройка (v, λ, β) будет удовлетворять следующей граничной задаче:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}v''(x) - \lambda|x|^p v(x) = -\beta v(x), & x \in \mathbb{R}; \\ v(-\infty) = v(\infty) = 0; \\ \int_{-\infty}^{\infty} v^2(x) dx = 1; \\ \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p v^2(x) dx = 1. \end{cases} \quad (3.19)$$

Перейдем от (3.19) к более простой задаче. Сделаем замену переменных

$$t = \lambda^{1/(2+p)} x, \quad y(t) = \lambda^{-1/(2(2+p))} v(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.20)$$

Тогда произойдет “разделение параметров” и задача (3.19) запишется в виде

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}y''(t) + |t|^p y(t) = \varkappa y(t), & t \in \mathbb{R}; \\ y(-\infty) = y(\infty) = 0; \\ \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t) dt = 1, \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^p y^2(t) dt = \lambda^{p/(2+p)}, \quad (3.22)$$

где

$$\varkappa := \frac{\beta}{\lambda^{2/(2+p)}} \quad (3.23)$$

– новый параметр. Согласно спектральной теории операторов Шрёдингера с растущим потенциалом (см. [16; гл. 9, §2, п. 2]) задача (3.21) имеет счетное число решений $(y_n, \varkappa_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, где

$$0 < \varkappa_0 < \varkappa_1 < \varkappa_2 < \dots < \varkappa_n < \dots$$

– собственные значения, $\{y_n\}$ – соответствующие им нормированные собственные функции оператора Шрёдингера $\mathcal{B}$, определенного в (1.7).

Найдем число λ_n , которое определяется по формуле (3.22) с $y = y_n$. Для простоты записи индекс n писать не будем. Умножим первое равенство в (3.21) на функцию $y(t)$ и проинтегрируем почленно полученное равенство по t от $-\infty$ до ∞ , в результате, учитывая (3.22) и два других равенства из (3.21), получим

$$-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} y''(t)y(t) dt = \varkappa - \lambda^{p/(2+p)}. \quad (3.24)$$

Далее, запишем первое равенство в (3.21) в виде двух формул

$$-\frac{1}{2}y''(t) + t^p y(t) = \varkappa y(t), \quad t \in [0, \infty), \quad (3.25)$$

и

$$-\frac{1}{2}y''(t) + (-t)^p y(t) = \varkappa y(t), \quad t \in (-\infty, 0]. \quad (3.26)$$

Зафиксируем $s \geq 0$. Умножим равенство (3.25) на функцию $y'(t)$ и проинтегрируем почленно полученное равенство по t от s до ∞ , в результате получим

$$-\frac{1}{2} \int_s^{\infty} y''(t)y'(t) dt + \int_s^{\infty} t^p y(t)y'(t) dt = \varkappa \int_s^{\infty} y(t)y'(t) dt. \quad (3.27)$$

Используя интегрирование по частям, находим

$$\int_s^{\infty} t^p y(t)y'(t) dt = \frac{1}{2} \int_s^{\infty} t^p dy^2(t) = -\frac{1}{2} s^p y^2(s) - \frac{p}{2} \int_s^{\infty} t^{p-1} y^2(t) dt.$$

Подставляя это соотношение в (3.27) и выполняя несложный подсчет, убеждаемся, что из формулы (3.27) вытекает следующее равенство:

$$\frac{1}{2}(y'(s))^2 - s^p y^2(s) - p \int_s^{\infty} t^{p-1} y^2(t) dt = -\varkappa y^2(s), \quad s \geq 0. \quad (3.28)$$

Проинтегрируем почленно равенство (3.28) по s от 0 до ∞ , применяя теорему Фубини, в результате получим

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} (y'(s))^2 ds = (p+1) \int_0^{\infty} s^p y^2(s) ds - \varkappa \int_0^{\infty} y^2(s) ds. \quad (3.29)$$

Совершая аналогичные операции с равенством (3.26), приходим к формуле

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 (y'(s))^2 ds = (p+1) \int_{-\infty}^0 (-s)^p y^2(s) ds - \varkappa \int_{-\infty}^0 y^2(s) ds. \quad (3.30)$$

Складывая почленно формулы (3.29), (3.30) и используя (3.21), (3.22), получаем

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (y'(s))^2 ds = (p+1) \lambda^{p/(2+p)} - \varkappa. \quad (3.31)$$

Из формул (3.24) и (3.31) окончательно находим

$$\lambda_n = \left(\frac{2\varkappa_n}{2+p} \right)^{(2+p)/p}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.32)$$

Итак, согласно вышеизложенному с учетом формул (3.20), (3.23) заключаем, что задача (3.19) также имеет счетное число решений $(v_n, \lambda_n, \beta_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, где

$$v_n(x) = \lambda_n^{1/(2(2+p))} y_n(\lambda_n^{1/(2+p)} x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.33)$$

λ_n определено в (3.32) и

$$\beta_n = \frac{2+p}{2} \lambda_n = \left(\frac{2}{2+p} \right)^{2/p} \kappa_n^{(2+p)/p}. \quad (3.34)$$

Кроме того, используя (3.19), (3.32)–(3.34), легко находим

$$-\langle \mathcal{A}v_n, v_n \rangle = \beta_n - \lambda_n = p 2^{2/p} \left(\frac{\kappa_n}{2+p} \right)^{(2+p)/p}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.35)$$

Формула (3.35) показывает, что минимум в экстремальной задаче (3.10) достигается в единственной точке v_0 . Легко видеть, что при $n = 0$ формулы (3.32)–(3.35) совпадают с формулами (1.8), (1.9), (3.12). Соотношение (3.11) следует из (1.12) и первой формулы в (3.13). Сама задача (3.13) вместе с формулой (3.14) представляет собой задачу (3.19), записанную для основной минимизирующей тройки $(v_0, \lambda_0, \beta_0)$. Лемма 4 полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Как правило, собственные функции y_n являются *знакопеременными* при $n = 1, 2, \dots$ (ср. с осцилляционной теоремой Штурма в случае конечного отрезка [34; ч. 2, п. 9.2]).

Отметим также, что утверждения лемм 3 и 4 согласуются с результатом В. Ли (формулы (1.3) и (2.2) из [4]) о логарифмических асимптотиках.

Следующие рассуждения аналогичны использованным в [11; с. 533].

Пусть $C_b(\mathbb{R})$ – банахово пространство ограниченных непрерывных действительных функций на $\mathbb{R}$ с нормой супремума: $\|g\|_{C_b(\mathbb{R})} := \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|$.

Выберем последовательности $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty \subset C_b(\mathbb{R})$ и $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset (0, \infty)$ так, чтобы выполнялись следующие три условия:

- 1) $\phi_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$, и $\|\phi_n\|_{C_b(\mathbb{R})} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;
- 2) $\{\|\phi_n\|^{-1} \phi_n\}_{n=1}^\infty$ есть полный ортонормированный базис в $(L^2, \|\cdot\|)$;
- 3) $\sum_{n=1}^\infty a_n \|\phi_n\|^{-2} < \infty$.

Введем новую вероятностную меру на $\mathbb{R}$

$$\nu_0(dx) := v_0^2(x) dx. \quad (3.36)$$

3.3. Доказательство формулы (1.17). Дальнейшие рассуждения в данном пункте относятся только к случаю винеровского процесса.

3.3.1. Выделение малой полукрестности точки минимума.

ЛЕММА 5. Для любого $\delta > 0$ найдется такое $c = c(\delta) > 0$, что при $T \rightarrow \infty$ имеет место равенство

$$\mathbf{P}\{F_0(L_T(w)) < 1\} = K(T)(1 + O(e^{-T^c})), \quad (3.37)$$

где

$$K(T) = \mathbf{P}\left\{F_0(L_T(w)) < 1, \sup_{n=1,2,\dots} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n d(L_T(w) - \nu_0) \right| < \delta \right\}. \quad (3.38)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы основано на леммах 3, 4, полунепрерывности снизу функционала действия $I(\nu)$ и проводится стандартно. Роль окрестности

$$\left\{ \omega : \sup_{n=1,2,\dots} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n d(L_T(w) - \nu_0) \right| < \delta \right\}$$

в контексте теории больших уклонений времен пребывания марковских процессов выявлена и объяснена в статье [11; с. 556].

Отметим здесь далеко идущую аналогию между теорией больших уклонений времен пребывания марковских процессов [11], [30], [35] и теорией больших уклонений сумм независимых одинаково распределенных случайных банаховозначных элементов [12], [13], [30].

3.3.2. Использование экспоненциального преобразования типа Крамера. Следуя работе [11; с. 545, 556] и учитывая (3.11), введем следующее экспоненциальное преобразование типа Крамера. Для фиксированного $T > 0$ определим вероятностную меру на основном вероятностном пространстве (ср. с [13; с. 527]):

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_T(d\omega) &:= \exp\left\{T \int_{-\infty}^{\infty} V(x) L_T(w, dx)\right\} \mathbf{P}(d\omega) \\ &\times \left(\mathbf{E} \exp\left\{T \int_{-\infty}^{\infty} V(x) L_T(w, dx)\right\} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

В результате замены меры (3.39) получаем для вероятности (3.38) равенство

$$K(T) = K_1(T) K_2(T), \quad (3.40)$$

где

$$K_1(T) = \mathbf{E} \exp\left\{T \int_{-\infty}^{\infty} V(x) L_T(w, dx)\right\}, \quad (3.41)$$

$$K_2(T) = \int_{\mathcal{O}(T)} \exp\left\{-T \int_{-\infty}^{\infty} V(x) L_T(w, dx)\right\} \mathbf{Q}_T(d\omega), \quad (3.42)$$

$$\mathcal{O}(T) \equiv \mathcal{O}(T, \delta) := \left\{ \omega : F_0(L_T(w)) < 1, \sup_{n=1,2,\dots} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n d(L_T(w) - \nu_0) \right| < \delta \right\}. \quad (3.43)$$

Найдем точные асимптотики интегралов $K_1(T)$ и $K_2(T)$.

3.3.3. Точная асимптотика интеграла $K_1(T)$. Заметим, что

$$K_1(T) = \mathbb{E} \exp\{TF_1(L_T(w, \cdot))\}, \quad (3.44)$$

где

$$F_1(\nu) := \int_{-\infty}^{\infty} V(x) \nu(dx), \quad \nu \in \mathcal{M},$$

— линейный функционал.

Приведем формулировку теоремы 2.20 [11; п. (1)] с учетом замечания 1 и того, что вторая производная по Фреше линейного функционала равна нулю.

ТЕОРЕМА 4 (точная асимптотика типа Лапласа для линейного функционала) [11]. Пусть для линейного функционала $\Psi: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ экстремальная задача

$$-\Psi(u^2 dx) - \langle \mathcal{A}u, u \rangle \rightarrow \inf, \quad u \in \mathcal{H},$$

имеет единственное решение u_0 . Тогда при $T \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$\mathbb{E} \exp\{T\Psi(L_T(w, \cdot))\} = \exp\{T(\Psi(u_0^2 dx) + \langle \mathcal{A}u_0, u_0 \rangle)\} u_0(0) \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) dx (1 + o(1)).$$

ЛЕММА 6. При $T \rightarrow \infty$ выполнено соотношение

$$K_1(T) = v_0(0) \int_{-\infty}^{\infty} v_0(x) dx (1 + o(1)). \quad (3.45)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим теорему 4 к интегралу (3.44), положив $\Psi = F_1$. Для этого решим экстремальную задачу

$$-\int_{-\infty}^{\infty} V(x) u^2(x) dx - \langle \mathcal{A}u, u \rangle \rightarrow \inf, \quad u \in \mathcal{H}.$$

Используя метод множителей Лагранжа, убеждаемся, что эта задача имеет единственное решение v_0 — то же самое, что и основная экстремальная задача (3.10). При этом в силу (3.11) находим

$$\inf_{u \in \mathcal{H}} \left(-\int_{-\infty}^{\infty} V(x) u^2(x) dx - \langle \mathcal{A}u, u \rangle \right) = -\int_{-\infty}^{\infty} V(x) v_0^2(x) dx - \langle \mathcal{A}v_0, v_0 \rangle = 0. \quad (3.46)$$

Применение теоремы 4 доказывает формулу (3.45). Лемма 6 доказана.

3.3.4. Точная асимптотика интеграла $K_2(T)$. Используя (3.15), (3.21), последнее равенство в (3.25) и (3.26), получаем

$$K_2(T) = \exp\{T\langle \mathcal{A}v_0, v_0 \rangle\} K_3(T), \quad (3.47)$$

где

$$K_3(T) := \int_{\mathcal{O}(T)} \exp\left\{-T \int_{-\infty}^{\infty} V(x) d(L_T(w) - \nu_0)\right\} dQ_T. \quad (3.48)$$

В работе [11; с. 551] имеется формула Тейлора для разложения общего нелинейного функционала $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ в окрестности некоторой точки $m_0 \in \mathcal{M}$. Применяя эту формулу для нашего линейного функционала F_0 , получаем

$$F_0(L_T(w)) = F_0(\nu_0) + \int_{-\infty}^{\infty} V(x) d(L_T(w) - \nu_0), \quad \omega \in \mathcal{O}_T. \quad (3.49)$$

Используя (3.49) с учетом того, что $F_0(\nu_0) = 1$, запишем интеграл (3.48) в виде

$$K_3(T) := \int_{\mathcal{O}_1(T)} \exp \left\{ -T \int_{-\infty}^{\infty} V(x) d(L_T(w) - \nu_0) \right\} dQ_T, \quad (3.50)$$

где

$$\mathcal{O}_1(T) := \left\{ \omega : \int_{-\infty}^{\infty} V(x) d(L_T(w) - \nu_0) < 0, \right. \\ \left. \sup_{n=1,2,\dots} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n d(L_T(w) - \nu_0) \right| < \delta \right\} \equiv \mathcal{O}(T) \quad (3.51)$$

— иная форма записи множества $\mathcal{O}(T)$.

Для нахождения асимптотики интеграла $K_3(T)$ применим следующую лемму.

ЛЕММА 7 (центральная предельная теорема). i) *Случайная мера*

$$\sqrt{T} (L_T(w) - \nu_0)$$

при $T \rightarrow \infty$ слабо сходится относительно меры Q_T к гауссовской случайной мере γ на $\mathbb{R}$ со средним нуль.

ii) Для любого $s \in \mathbb{R}$ выполнено соотношение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} Q_T \left\{ \omega : \sqrt{T} \int_{-\infty}^{\infty} V(x) d(L_T(w) - \nu_0) < s \right\} = \Phi \left(\frac{s}{\sigma} \right), \quad (3.52)$$

где Φ — стандартная нормальная функция распределения и σ определено в (1.14).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение i) леммы выводится с помощью леммы 2.12 из [11] и замечания 1. Мы здесь докажем п. ii), т.е. покажем, как получается формула (1.14) для σ^2 , отсутствующая в [11]. Обозначим через $L^2(d\nu_0)$ гильбертово пространство функций, заданных на $\mathbb{R}$, со скалярным произведением

$$\langle y, z \rangle_{L^2(d\nu_0)} := \int_{-\infty}^{\infty} y(x) z(x) v_0^2(x) dx.$$

Согласно п. i) леммы, определению меры Q_T в (3.39), виду характеристической функции меры γ (см. [11; с. 557]) имеем

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [\mathcal{G}V](x) V(x) v_0^2(x) dx, \quad (3.53)$$

где, как следует из [11; с. 545], линейный оператор $\mathcal{G}$ отображает гильбертово пространство $L^2(d\nu_0)$ в себя по правилу

$$[\mathcal{G}y](x) = 2 \int_0^\infty \left(\frac{1}{v_0(x)} \exp\{t(\mathcal{A} + V)\} [v_0 y](x) - \int_{-\infty}^\infty v_0(s) \exp\{t(\mathcal{A} + V)\} [v_0 y](s) ds \right) dt. \quad (3.54)$$

Несложно видеть, что в силу (3.11)

$$[\mathcal{G}y](x) = [\mathcal{G}(y + c_0)](x), \quad y \in L^2(d\nu_0), \quad c_0 \in \mathbb{R}. \quad (3.55)$$

Используя (3.54), (3.55) и (1.10), получаем

$$\begin{aligned} [\mathcal{G}V](x) &= -\lambda_0 [\mathcal{G}\psi](x) = -2\lambda_0 \int_0^\infty \left(\frac{1}{v_0(x)} \exp\{t(\mathcal{A} + V)\} [v_0 \psi](x) - \int_{-\infty}^\infty v_0(s) \exp\{t(\mathcal{A} + V)\} [v_0 \psi](s) ds \right) dt. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Поскольку $-V(x) \rightarrow \infty$ при $|x| \rightarrow \infty$, то самосопряженный оператор Шрёдингера $-(\mathcal{A} + V)|_{E_1} : E_1 \rightarrow E_1$ имеет дискретный однократный действительный спектр (см. [16; гл. 9, §2, п. 2])

$$\rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_n < \dots,$$

кроме того, из доказательства леммы 6 следует, что $\rho_1 > 0$. Таким образом, с учетом того, что полугруппа винеровского процесса является феллеровской [36; приложение 6, §3], [37; гл. 10] с C_0 -условием, приходим к выводу, что в наших условиях применима известная формула теории полугрупп (см. [16; гл. 3, §3, п. 5]), согласно которой из (3.56) и (1.15) получаем

$$[\mathcal{G}V](x) = \frac{2\lambda_0}{v_0(x)} (\mathcal{A} + V)^{-1} [v_0 \psi](x). \quad (3.57)$$

Из формул (3.53), (3.57), (1.10) и (1.15) следует соотношение (1.14). Пункт ii) леммы 7 доказан.

Применение леммы 7 к интегралу (3.50) дает

$$K_3(T) := K_4(T)(1 + o(1)), \quad T \rightarrow \infty, \quad (3.58)$$

где

$$K_4(T) := \int_{-\infty}^0 e^{\sqrt{T}s} d\Phi\left(\frac{s}{\sigma}\right).$$

Используя асимптотику

$$1 - \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-x^2/2} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty,$$

находим

$$K_4(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T} \sigma} (1 + o(1)), \quad T \rightarrow \infty. \quad (3.59)$$

ЛЕММА 8. При $T \rightarrow \infty$ выполнено соотношение

$$K_2(T) = \exp\{T\langle \mathcal{A}v_0, v_0 \rangle\} \frac{1}{\sqrt{2\pi T} \sigma} (1 + o(1)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы следует из (3.47), (3.58), (3.59).

3.3.5. *Вывод формулы (1.17).* Соотношение (1.17) теперь получаем из формул (3.1), (3.8), (3.37), (3.40), лемм 6 и 8.

Из формул (3.1) и (1.17) получаем первое утверждение предложения 1.

3.4. Доказательство формулы (1.18). Формула (1.18) доказывается по той же схеме, что и формула (1.17). Здесь мы укажем лишь на основные моменты, в частности, объясним разницу в поведении степенных членов в асимптотиках (1.17) и (1.18). Напомним, что точные асимптотики *больших уклонений* в L^p -норме для винеровского процесса и броуновского моста имеют одинаковые степенные члены (см. [38]).

ЛЕММА 9. Пусть $p > 0$. Тогда для любого фиксированного $T > 0$ выполнено равенство

$$\mathbb{P}\left\{\int_0^1 |w_0(t)|^p dt < \varepsilon^p\right\} = \mathbb{P}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} |x|^p L_T(w, dx) < 1 \mid w(T) = 0\right\}, \quad \varepsilon = T^{-1/2}. \quad (3.60)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы следует из формулы (2.6).

Аналог теоремы 4 для броуновского моста имеет следующий вид.

ТЕОРЕМА 5 (точная асимптотика для линейного функционала в случае броуновского моста) [11]. Пусть для линейного функционала $\Psi: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ экстремальная задача

$$-\Psi(u^2 dx) - \langle \mathcal{A}u, u \rangle \rightarrow \inf, \quad u \in \mathcal{H},$$

имеет единственное решение u_0 . Тогда при $T \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[\exp\{T\Psi(L_T(w, \cdot))\} \mid w(T) = 0] \\ &= \exp\{T(\Psi(u_0^2 dx) + \langle \mathcal{A}u_0, u_0 \rangle)\} u_0^2(0) \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Утверждение теоремы 5 можно получить из теоремы 2.19 [11], учитывая замечание 1 и то, что переходная плотность винеровского процесса удовлетворяет соотношению $p(T, 0, 0) = (2\pi T)^{-1/2}$, $T > 0$.

Дальнейшее доказательство формулы (1.18) почти дословно повторяет пп. 3.3.1–3.3.5 вывода формулы (1.17). Разница в асимптотиках из теорем 4 и 5 влечет за собой упомянутую разницу в поведении степенных членов в асимптотиках (1.17) и (1.18).

Формула (1.18), а вместе с ней и теорема 1 доказаны.

Из формул (3.60) и (1.18) получаем второе утверждение предложения 1.

§ 4. Доказательство следствий 1 и 2

Формулы (1.17) и (1.18) даны в терминах функции v_0 , поэтому нам удобнее работать с этой функцией. Отметим, что задача (3.13), (3.14) определяет искомую тройку $(v_0, \lambda_0, \beta_0)$ единственным образом. Имея целью дальнейшее вычисление постоянной σ^2 по формуле (1.14), мы будем решать именно задачу (3.13), (3.14), предполагая, что параметры λ_0, β_0 неизвестны. Вообще, заметим, что утверждения и формулы, связанные с функцией v_0 , имеют более общую природу, чем утверждения, в которых присутствует функция y_0 .

Насколько известно автору, граничная задача (3.13), (3.14) имеет простое решение при $p = 1$ и $p = 2$.

4.1. Случай $p = 1$. Доказательство следствия 1. На протяжении данного пункта $p = 1$.

Пусть $\text{Bi}(x)$ обозначает вторую функцию Эйри (см. [20; п. 10.4.1], [21; гл. 11, § 1]).

ЛЕММА 10. Для функций Эйри выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \text{Ai}''(x) = x \text{Ai}(x), \quad \text{Bi}''(x) = x \text{Bi}(x), \quad x \in \mathbb{R}; \\ \text{ii)} \quad & \text{Ai}(x) = \exp\left\{-\frac{2}{3}x^{3/2}\right\} \frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}}(1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty, \\ & \text{Bi}(x) = \exp\left\{\frac{2}{3}x^{3/2}\right\} \frac{1}{\sqrt{\pi}x^{1/4}}(1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty; \\ \text{iii)} \quad & \int \text{Ai}^2(x) dx = x \text{Ai}^2(x) - (\text{Ai}'(x))^2, \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\int_y^\infty x \text{Ai}^2(x) dx = \frac{1}{3}(-y^2 \text{Ai}^2(y) + y(\text{Ai}'(y))^2 - \text{Ai}(y) \text{Ai}'(y)), \quad y \in \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

Формулы пп. i) и ii) имеются в [20; пп. 10.4.1, 10.4.59, 10.4.63]. Соотношения (4.1), (4.2) получаем из [39; гл. 1, п. 1.8.2, (11), (14)].

ЛЕММА 11. Экстремаль v_0 является симметричной функцией и задается формулой

$$\begin{aligned} v_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{3} \text{Ai}(-a'_1)} \text{Ai}\left(\frac{2}{3}a'_1 x - a'_1\right), \quad x \geq 0, \\ v_0(-x) &= v_0(x), \quad x \leq 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

При этом

$$\lambda_0 = \frac{4}{27}(a'_1)^3, \quad \beta_0 = \frac{3}{2}\lambda_0 = \frac{2}{9}(a'_1)^3, \quad \varkappa_0 = \frac{3}{2}\lambda_0^{1/3} = 2^{1/3}a'_1. \quad (4.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $p = 1$ дифференциальное уравнение из формулы (3.13) принимает вид (индексы 0 опущены)

$$v''(x) + (2\beta - 2\lambda|x|)v(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.5)$$

условия связи из формул (3.13), (3.14) записываются следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} v^2(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x|v^2(x) dx = 1. \quad (4.6)$$

Легко видеть, что если функция $v_0(x)$ есть решение уравнения (4.5) для значений $x \geq 0$, то функция $v_0(-x)$ удовлетворяет уравнению (4.5) для значений $x \leq 0$. Поэтому решим вначале следующее дифференциальное уравнение:

$$v''(x) + (2\beta - 2\lambda x)v(x) = 0, \quad x \in [0, \infty). \quad (4.7)$$

Обозначим

$$C := (2\lambda)^{1/3} > 0, \quad a := \frac{2\beta}{C^2} = \frac{2\beta}{(2\lambda)^{2/3}} > 0. \quad (4.8)$$

Сделаем в (4.7) замену переменных $t = Cx \in [0, \infty)$, $z(t) = v(x)$. Тогда уравнение (4.7) примет вид

$$z''(t) - (t - a)z(t) = 0, \quad t \in [0, \infty). \quad (4.9)$$

Положив $s = t - a$, $u(s) = z(t)$, запишем уравнение (4.9) в виде

$$u''(s) - su(s) = 0, \quad s \in [-a, \infty). \quad (4.10)$$

Это – хорошо изученное дифференциальное уравнение, решениями которого являются функции Эйри $\text{Ai}(s)$ и $\text{Bi}(s)$ (см. [20; п. 10.4.1], [21; гл. 11, § 1]). Нужно нам положительное решение, удовлетворяющее в силу (4.6) условию $u(\infty) = 0$, представляет собой функцию Эйри $u(s) = \text{Ai}(s)$, $s \geq -a$, при этом должно выполняться неравенство $a \leq a_1$, где $a_1 \approx 2.3381$ – первый нуль функции Эйри $\text{Ai}(-y)$. Итак, согласно вышеизложенному дифференциальное уравнение (4.7) имеет единственное положительное решение

$$v_0(x) = d \text{Ai}(Cx - a), \quad x \geq 0, \quad (4.11)$$

где числа $d > 0$, $C > 0$, $a > 0$ (см. (4.9)) нужно определить, используя равенства (4.6) и условие дважды дифференцируемости экстремали v_0 в нуле. Положим

$$v_0(x) = v_0(-x) = d \text{Ai}(-Cx - a), \quad x \leq 0. \quad (4.12)$$

Тогда, очевидно, $v'_0(x) = -v'_0(-x)$, $x \in \mathbb{R}$, и, следовательно, $v'_0(0+) = v'_0(0-) = 0$. Отсюда в силу (4.11), (4.12) находим $\text{Ai}'(-a) = 0$ и $a = a'_1$, поскольку $a \leq a_1$.

Условия связи (4.6) для функции (4.11), (4.12) принимают вид

$$\int_{-a'_1}^{\infty} \text{Ai}^2(t) dt = \frac{C}{2d^2}, \quad \int_{-a'_1}^{\infty} (t + a'_1) \text{Ai}^2(t) dt = \frac{C^2}{2d^2}. \quad (4.13)$$

Используя лемму 10, iii) и формулы (4.13), находим

$$d = \frac{1}{\sqrt{3} \text{Ai}(-a'_1)}, \quad C = \frac{2}{3} a'_1, \quad (4.14)$$

отсюда с учетом (4.8), (4.11) и (1.8) получаем формулы (4.3) и (4.4). Лемма 11 доказана.

Нам понадобятся дальнейшие свойства функции Эйри.

ЛЕММА 12. Для функций Эйри выполнены следующие соотношения:

$$\left(\frac{\text{Bi}(x)}{\text{Ai}(x)}\right)' = \frac{1}{\pi \text{Ai}^2(x)}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.15)$$

$$\left(\frac{\text{Ai}'(x)}{\text{Ai}(x)}\right)' = x - \frac{(\text{Ai}'(x))^2}{\text{Ai}^2(x)}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.16)$$

$$\int \frac{(\text{Ai}'(x))^2}{\text{Ai}^2(x)} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{\text{Ai}'(x)}{\text{Ai}(x)}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.17)$$

$$\int x \frac{(\text{Ai}'(x))^2}{\text{Ai}^2(x)} dx = \frac{x^3}{3} - x \frac{\text{Ai}'(x)}{\text{Ai}(x)} + \log \text{Ai}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.18)$$

$$\int_{-a'_1}^{\infty} x \text{Ai}(x) \text{Ai}'(x) dx = 0. \quad (4.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (4.15) доказана с помощью вронскиана, равного $\mathcal{W}(\text{Ai}(x), \text{Bi}(x)) = 1/\pi$, в [21; гл. 11, § 2, п. 2.2]. Равенство (4.16) доказывается непосредственным вычислением с учетом тождества $\text{Ai}''(x) = x \text{Ai}(x)$. Соотношения (4.17) и (4.18) получаются при помощи тождества (4.16) и интегрирования по частям. Формула (4.19) доказывается с использованием интегрирования по частям с учетом того, что функция $\text{Ai}'(x)$ монотонно убывает при $x \in [-a, 0]$ и монотонно возрастает при $x \in [0, \infty)$. Лемма 12 доказана.

Пусть $\psi(x) = |x| - 1$, $x \in \mathbb{R}$, найдем

$$g_0(x) := (\mathcal{A} + V)^{-1}[v_0 \psi](x) \quad (4.20)$$

— такую функцию, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_0(x) v_0(x) dx = 0. \quad (4.21)$$

ЛЕММА 13. Функция $g_0(x)$ задается формулой

$$g_0(x) = \frac{9}{8(a'_1)^3} v_0(x) + \frac{3d}{2(a'_1)^2} x \text{Ai}'\left(\frac{2}{3}a'_1 x - a'_1\right), \quad x \geq 0, \quad (4.22)$$

$$g_0(-x) = g_0(x), \quad x \leq 0,$$

где d определено в (4.14).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу определения (4.20) функция g_0 удовлетворяет уравнению $(\mathcal{A} + V)g = v_0 \psi$, или

$$g''(x) + (2\beta_0 - 2\lambda_0|x|)g(x) = 2v_0(x)(|x| - 1), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.23)$$

С учетом (4.3) легко видеть, что дифференциальное уравнение (4.23) имеет четное решение $g(x) = g(-x)$, $x \in \mathbb{R}$. Поэтому решим вначале следующее дифференциальное уравнение

$$g''(x) + (2\beta_0 - 2\lambda_0 x)g(x) = 2v_0(x)(x - 1), \quad x \in [0, \infty). \quad (4.24)$$

Дифференциальное уравнение (4.24) является неоднородным по отношению к однородному уравнению (4.7). Зная два линейно независимых решения однородного уравнения (4.7), найдем, применяя известный метод [34; ч. 1, § 24.2, п. (б)], нужное нам решение уравнения (4.24), удовлетворяющее условию (4.21).

В процессе доказательства леммы 11 мы установили, что однородное уравнение (4.7) имеет два линейно независимых решения $v_0(x) = d \operatorname{Ai}(Cx - a)$ и $v_1(x) = \operatorname{Bi}(Cx - a)$, $x \in [0, \infty)$. Здесь и ниже для краткости вновь обозначили $a = a'_1$, $C = 2a'_1/3$. Следовательно, используя тождество (4.15) и [34; ч. 1, § 24.2], убеждаемся, что общее решение уравнения (4.24) имеет вид

$$g(x) = C_1 v_0(x) + C_2 v_1(x) + 2v_0(x) \int \frac{1}{v_0^2(x)} \left(\int v_0^2(x)(x-1) dx \right) dx, \quad x \geq 0, \quad (4.25)$$

где C_1 и C_2 — действительные константы. Из условия (4.21) и леммы 10, ii) следует, что в (4.25) $C_2 = 0$.

Используя формулы (4.1) и (4.2), находим

$$\begin{aligned} \int v_0^2(x)(x-1) dx &= \frac{d^2}{3C^2} (Cx(Cx-a) \operatorname{Ai}^2(Cx-a) - Cx(\operatorname{Ai}'(Cx-a))^2 \\ &\quad + \operatorname{Ai}(Cx-a) \operatorname{Ai}'(Cx-a)), \quad x \geq 0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Отсюда при помощи соотношений (4.17), (4.18) получаем

$$\int \frac{1}{v_0^2(x)} \left(\int v_0^2(x)(x-1) dx \right) dx = \frac{1}{3C^2} x \frac{\operatorname{Ai}'(Cx-a)}{\operatorname{Ai}(Cx-a)}, \quad x \geq 0. \quad (4.27)$$

Из формул (4.25), (4.27) следует, что нужное нам решение уравнения (4.24) имеет вид

$$g_0(x) = C_1 v_0(x) + \frac{2d}{3C^2} x \operatorname{Ai}'(Cx-a), \quad x \geq 0. \quad (4.28)$$

Положим

$$g_0(x) = g_0(-x), \quad x \leq 0. \quad (4.29)$$

Поскольку $v'_0(0+) = v'_0(0-) = 0$, то несложно проверить, что $g'_0(0+) = g'_0(0-) = 0$. Таким образом, учитывая условие (4.21), убеждаемся, что функция (4.28), (4.29) и есть единственно возможное в наших условиях решение уравнения (4.23).

Найдем постоянную C_1 . Имеем согласно (4.6), (4.19), (4.23), (4.28), (4.29)

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} g_0(x) v_0(x) dx = 2 \int_0^{\infty} g_0(x) v_0(x) dx = C_1 - \frac{2a}{9C^4}.$$

Отсюда с учетом (4.14) получаем

$$C_1 = \frac{9(a'_1)^{-3}}{8}. \quad (4.30)$$

Из соотношений (4.28)–(4.30) следует формула (4.22). Лемма 13 доказана.

ЛЕММА 14. Для функций Эйри справедливы следующие соотношения:

$$\int_0^\infty \text{Ai}(x) dx = \frac{1}{3}, \quad (4.31)$$

$$\int_{-a'_1}^\infty x^2 \text{Ai}(x) \text{Ai}'(x) dx = -\frac{(a'_1)^2}{6} \text{Ai}^2(-a'_1). \quad (4.32)$$

Равенство (4.31) следует из [39; гл. 2, п. 2.11.2, (1)]. Соотношение (4.32) вытекает из [39; гл. 1, п. 1.8.2, (18)].

Значения констант из формул (1.17), (1.18) приведены в следующей лемме.

ЛЕММА 15. Имеют место соотношения

$$b_1 = \beta_0 - \lambda_0 = \frac{2}{27} (a'_1)^3, \quad (4.33)$$

$$v_0(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \int_{-\infty}^\infty v_0(x) dx = \frac{1}{\sqrt{3} a'_1 \text{Ai}(-a'_1)} \left(1 + 3 \int_0^{a'_1} \text{Ai}(-x) dx \right), \quad (4.34)$$

$$\sigma^2 = -4\lambda_0^2 \int_0^\infty x g_0(x) v_0(x) dx = \frac{4}{81} (a'_1)^3. \quad (4.35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношения (4.33) получаем из формул (1.16) и (4.4). Равенства (4.34) выводятся с помощью формул (4.3) и (4.31). Формула (4.35) доказывается с использованием соотношений (1.14), (4.6), (4.20)–(4.22), (4.32). Лемма 15 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Формулы (1.19)–(1.21) получаем из соотношений (1.17), (1.18) теоремы 1 с учетом леммы 15. Приближенные значения констант из следствия 1 найдены на основе таблиц 10.11–10.13 справочника [20; гл. 10]. Следствие 1 доказано.

4.2. Случай $p = 2$. Доказательство следствия 2. На протяжении данного пункта $p = 2$.

При $p = 2$ дифференциальное уравнение из формулы (3.13) превращается в хорошо изученное уравнение Вебера (см. (4.44) ниже и [34; ч. 3, гл. 2, п. 2.87], [20; гл. 19]). Решениями этого уравнения являются функции параболического цилиндра. Далее можно продолжать исследование по той же схеме, что и выше. Отметим, однако, что экстремаль v_0 в данном случае вычисляется значительно проще, как показывает следующая ниже лемма.

Обозначим через

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.36)$$

стандартную гауссовскую плотность. Легко подсчитать, что

$$\varphi'(x) = -x\varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.37)$$

ЛЕММА 16. Экстремаль v_0 является симметричной функцией и задается формулой

$$v_0(x) = \sqrt{\varphi(x)} = \frac{1}{(2\pi)^{1/4}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4}\right\}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.38)$$

При этом

$$b_2 = \beta_0 - \lambda_0 = \frac{1}{8}, \quad (4.39)$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{8}, \quad \beta_0 = \frac{1}{4}, \quad \kappa_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (4.40)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решим экстремальную задачу (3.10) с помощью неравенства Коши–Буняковского. Интегрируя по частям и применяя указанное неравенство, имеем для любой функции $v \in \mathcal{H}$, $U(v) \leq 1$ (см. (1.6), (3.5)),

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} v^2(x) dx = 2 \int_{-\infty}^{\infty} (-xv(x))v'(x) dx \\ &\leq 2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 v^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (v'(x))^2 dx \right)^{1/2} \leq 2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} (v'(x))^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Отсюда согласно (1.13) получаем неравенство

$$-\langle \mathcal{A}v, v \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (v'(x))^2 dx \geq \frac{1}{8}, \quad v \in \mathcal{H}, \quad U(v) \leq 1. \quad (4.42)$$

Знаки равенства в (4.41) и (4.42) достигаются только в случае, когда

$$-xv(x) = c_0 v'(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad U(v) = 1, \quad (4.43)$$

где c_0 — действительная константа. Решая дифференциальное уравнение (4.43) и учитывая условия $N(v) = 1$, $U(v) = 1$, получаем формулу (4.38), при этом $c_0 = 2$.

Таким образом, $-\langle \mathcal{A}v_0, v_0 \rangle = \frac{1}{8}$. Значения параметров λ_0 и β_0 находим, подставляя функцию (4.38) в формулы (3.13), (3.14) и производя несложные вычисления; в частности, при $p = 2$ дифференциальное уравнение из формулы (3.13) принимает вид

$$v''(x) + (2\beta_0 - 2\lambda_0 x^2)v(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.44)$$

Так мы получаем формулы (4.39) и (4.40). Лемма 16 доказана.

Пусть теперь $\psi(x) = x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$, найдем

$$g_0(x) := (\mathcal{A} + V)^{-1}[v_0 \psi](x)$$

— такую функцию, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_0(x) v_0(x) dx = 0,$$

а также вычислим остальные константы из теоремы 1.

ЛЕММА 17. i) Функция $g_0(x)$ задается формулой

$$g_0(x) = -(x^2 - 1)v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.45)$$

ii) Справедливы следующие соотношения:

$$v_0(0) = \frac{1}{(2\pi)^{1/4}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} v_0(x) dx = \sqrt{2} (2\pi)^{1/4}, \quad \sigma^2 = \frac{1}{16}. \quad (4.46)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение i) леммы доказывается по той же схеме, что и лемма 13, только вычисления здесь намного проще. Вид функции (4.45) можно найти, используя (4.40) и [34; ч. 3, гл. 2, п. 2.87], где нужно положить $n = 2$. Формулы (4.46) легко следуют из соотношений (1.14), (4.38), (4.40) и (4.45). Лемма 17 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Формулы (1.22), (1.23) получаем из соотношений (1.17), (1.18) теоремы 1 с учетом лемм 16 и 17. Следствие 2 доказано.

Вычисления по формулам теоремы 1 вполне возможны и для других значений p . Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания.

Список литературы

1. Сятая Г. Н. О некоторых асимптотических представлениях для гауссовской меры в гильбертовом пространстве // Теория случ. процессов. 1974. Т. 2. С. 93–104.
2. Лифшиц М. А. Гауссовские случайные функции. Киев: ТВиМС, 1995.
3. Фаталов В. Р. Константы в асимптотиках вероятностей малых уклонений для гауссовских процессов и полей // УМН. 2003. Т. 58. № 4. С. 89–134.
4. Li W. V. Small ball probabilities for Gaussian Markov processes under the L^p -norm // Stochastic Process. Appl. 2001. V. 92. № 1. P. 87–102.
5. Lifshits M. A., Simon T. Small deviations for fractional stable processes // Preprint. № 177. Évry: Univ. d'Évry Prépubl., 2003.
6. Питербарг В. И., Фаталов В. Р. Метод Лапласа для вероятностных мер в банаховых пространствах // УМН. 1995. Т. 50. № 6. С. 57–150.
7. Dembo A., Zeitouni O. Large deviations techniques and applications. New York: Springer-Verlag, 1998.
8. Фаталов В. Р. Асимптотики вероятностей малых уклонений в L^2 -норме для двух классов гауссовских стационарных процессов // Теория вероятностей и ее прим. (в печати).
9. Donsker M. D., Varadhan S. R. S. On laws of the iterated logarithm for local times // Comm. Pure Appl. Math. 1977. V. 30. P. 707–753.
10. Боровков А. А., Мозульский А. А. О вероятностях малых уклонений для случайных процессов // Труды Института математики СО АН СССР. Т. 13. Новосибирск: Наука, 1989. С. 147–168.
11. Kusuoka S., Tamura Y. Precise estimate for large deviation of Donsker–Varadhan type // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math. 1991. V. 38. P. 533–565.
12. Bolthausen E. Laplace approximations for sums of independent random vectors. I, II // Probab. Theory Related Fields. 1986. V. 72. № 2. P. 305–318; 1987. V. 76. № 2. P. 167–206.
13. Fatalov V. R. The Laplace method for computing exact asymptotics of distributions of integral statistics // Math. Methods Statist. 1999. V. 8. № 4. P. 510–535.
14. Фаталов В. Р. Большие уклонения гауссовских мер в пространствах l^p и L^p , $p \geq 2$ // Теория вероятностей и ее прим. 1996. Т. 41. № 3. С. 682–689.
15. Кац М. Несколько вероятностных задач физики и математики. М.: Наука, 1967.
16. Крейн С. Г. (ред.) Функциональный анализ. М.: Наука, 1972.
17. Хиде Т. Броуновское движение. М.: Наука, 1987.

18. Бородин А. Н., Салминен П. Справочник по броуновскому движению. С.-Пб.: Лань, 2000.
19. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
20. Абрамовиц М., Стиган И. (ред.) Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
21. Олвер Ф. Асимптотики и специальные функции. М.: Наука, 1990.
22. Яковлева Г. Д. Таблицы функций Эйри и их производных. М.: Наука, 1969.
23. Rice S. O. The integral of the absolute value of the pinned Wiener process – calculation of its probability density by numerical integration // Ann. Probab. 1982. V. 10. № 1. P. 240–243.
24. Takács L. On the distribution of the integral of the absolute value of the Brownian motion // Ann. Appl. Probab. 1993. V. 3. P. 186–197.
25. Леви П. Стохастические процессы и броуновское движение. М.: Наука, 1972.
26. Икэда Н., Ватанабэ С. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986.
27. Revuz D., Yor M. Continuous martingales and Brownian motion. Berlin: Springer-Verlag, 1999.
28. Чжун К., Уильямс Р. Введение в стохастическое интегрирование. М.: Мир, 1987.
29. Donsker M. D., Varadhan S. R. S. Asymptotic evaluation of certain Wiener integrals for large time // Functional integration and its applications / ed. A. M. Arthur. Oxford: Oxford Univ. Press, 1975. P. 15–33.
30. Donsker M. D., Varadhan S. R. S. Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time. I, II, III, IV // Comm. Pure Appl. Math. 1975. V. 28. P. 1–47; 1975. V. 28. P. 279–301; 1976. V. 29. P. 389–461; 1983. V. 36. P. 525–565.
31. Simon B. Functional integration and quantum physics. New York: Academic Press, 1979.
32. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
33. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
34. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1961.
35. Bolthausen E., Deuschel J.-D., Tadmor Y. Laplace approximations for large deviations of nonreversible Markov processes. The nondegenerate case // Ann. Probab. 1995. V. 23. № 1. P. 236–267.
36. Булинский А. В., Ширяев А. Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2003.
37. Вентцель А. Д. Курс теории случайных процессов. М.: Наука–Физматлит, 1996.
38. Фаталов В. Р. Асимптотики больших уклонений гауссовских процессов типа винеровского для L^p -функционалов, $p > 0$, и гипергеометрическая функция // Матем. сб. 2003. Т. 194. № 3. С. 61–82.
39. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986.