Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. И. Наумкин, И. А. Шишмарев, Асимптотика при $t \rightarrow \infty$ решений обобщенного уравнения Кортевега–де Фриза, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 5, 71–110

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm129>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 15:09:52

УДК 517.9+535.5

П. И. Наумкин, И. А. Шишмарев

Асимптотика при $t \rightarrow \infty$ решений обобщенного уравнения Кортевега–де Фриза

Получены асимптотические формулы, представляющие при больших временах решение задачи Коши для обобщенного уравнения Кортевега–де Фриза с нелинейностью, имеющей целый показатель степени, больший трех. Найдена оценка остаточных членов. Метод основан на использовании теории возмущений по параметру, который характеризует малость начальных данных.

Библиография: 19 названий.

§ 1. Введение

Рассмотрим задачу Коши для обобщенного уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ):

$$u_t + \frac{\partial}{\partial x}(u^n) + \frac{1}{3}u_{xxx} = 0, \quad u|_{t=0} = \bar{u}(x), \quad (1.1)$$

где $u(x, t)$, $\bar{u}(x)$ – вещественные функции, $x \in \mathbb{R}_1$, $t \geq 0$, $n > 3$. Так же, как знаменитое уравнение Кортевега–де Фриза ((1.1) с $n = 2$) и модифицированное уравнение КдФ ((1.1) с $n = 3$), обобщенное уравнение КдФ (1.1) (по крайней мере, с целым показателем степени n) имеет огромное число приложений в различных разделах физики см., например, [1]). К настоящему моменту времени для задачи (1.1) известно существование единственного решения [2]–[5], сглаживание со временем разрывных начальных условий [6], [7], разрушение решений задачи Коши (1.1) со специальными начальными данными [8], [9].

В случаях квадратичной ($n = 2$) и кубической ($n = 3$) нелинейностей к задаче Коши (1.1) применим метод обратной задачи рассеяния, и асимптотика при $t \rightarrow \infty$ решений задачи (1.1) интенсивно изучалась многими авторами и имеет существенно нелинейный характер (см. [10], [11] и имеющиеся там ссылки). В случаях $n > 3$, насколько нам известно, асимптотика при $t \rightarrow \infty$ решений задачи Коши (1.1) до сих пор не найдена. При $n > 5$ в работе [12], при $n > 4,39$ в работе [13] и при $n > 3,86$ в работе [14] получены оценки в равномерной метрике при больших временах для решения $u(x, t)$ задачи Коши (1.1) с малыми начальными данными и показано, что решение $u(x, t)$ убывает со временем с той же скоростью, что и соответствующее решение линеаризованного уравнения КдФ. Эти результаты говорят о том, что при условии малости начальных данных $\bar{u}(x)$ нелинейный член в уравнении (1.1) убывает с ростом времени быстрее линейных слагаемых, и поэтому нелинейность в уравнении (1.1) играет второстепенную роль при всех положительных t и, значит,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01158) и Международного научного фонда (грант № NBX300).

можно применять теорию возмущений по параметру, характеризующему малость начальных данных.

В настоящей работе мы найдем асимптотику при $t \rightarrow \infty$ решений задачи Коши для обобщенного уравнения Кортевега–де Фриза (1.1) с целой степенью $n > 3$ нелинейности. При этом мы существенно развиваем подход, предложенный в [15] для нахождения асимптотики при $t \rightarrow \infty$ решений диссипативных нелинейных эволюционных уравнений. Отметим, что уравнение (1.1) является консервативным и затухание с течением времени его решений обусловлено не диссипативными, а дисперсионными эффектами за счет перераспределения энергии по высшим гармоникам. Целью настоящей работы является доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. Пусть фурье-образ $\widehat{u}(p)$ начального возмущения $\overline{u}(x)$ задачи Коши (1.1) аналитичен в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и удовлетворяет оценке:

$$\left| \frac{d^l \widehat{u}(p)}{dp^l} \right| \leq \varepsilon M^{-4}(p) e^{a\sigma^3}, \quad l = 0, 1, \quad p = \rho + i\sigma, \quad \rho \in \mathbb{R}_1, \quad \sigma \geq 0, \quad (1.2)$$

где $a \geq 0$ – некоторая постоянная, $M(p) = \max(1, |p|)$, $\varepsilon > 0$ – достаточно малая константа.

Тогда при $t \rightarrow \infty$ решение $u(x, t)$ задачи Коши для обобщенного уравнения Кортевега–де Фриза (1.1) с целым показателем степени $n > 3$ имеет следующую асимптотику:

1) равномерно по $\chi = x/t^{1/3} \in \mathbb{R}_1$

$$u(x, t) = \widehat{u}(0) t^{-1/3} \text{Ai}(\chi) + O((1 + |\chi|) t^{-1/2}), \quad (1.3)$$

где Ai – функция Эйри;

2) при $x > 0$ равномерно по $\varkappa = \sqrt{x/t} > 0$

$$u(x, t) = \frac{B(i\varkappa)}{2\sqrt{\pi\varkappa t}} e^{-2\varkappa^3 t/3} + O\left(\frac{e^{a\varkappa^3 - 2\varkappa^3 t/3}}{m^3(\varkappa) t^{\gamma+1/2}}\right), \quad (1.4)$$

3) при $x < 0$ равномерно по $\varkappa = \sqrt{|x|/t} > 0$

$$u(x, t) = \text{Re} \left\{ \frac{B(\varkappa)}{\sqrt{\pi\varkappa t}} e^{-2i\varkappa^3 t/3 + i\pi/4} \right\} + O\left(\frac{t^{-\gamma-1/2}}{m^3(\varkappa)}\right), \quad (1.5)$$

где $\gamma > 0$ – некоторая постоянная, $m(p) = \min(1, |p|)$, величины $B(i\varkappa)$ и $B(\varkappa)$ могут быть вычислены явно через начальное возмущение $\overline{u}(x)$ (см. формулы (3.23) и (3.27) ниже).

ЗАМЕЧАНИЕ. 1) Главный член асимптотики в формуле (1.3) не зависит от n – порядка нелинейности уравнения (1.1).

2) Условие (1.2) означает, что начальные данные $\overline{u}(x)$ должны иметь некоторую гладкость и достаточно быстро убывать на бесконечности. (Например, достаточно потребовать, чтобы $\overline{u}(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_1)$.) Требование аналитичности фурье-образа $\widehat{u}(p)$ начального возмущения (т.е., соответственно, экспоненциального убывания

оригинала $\bar{u}(x)$ при $x \rightarrow +\infty$) используется лишь при доказательстве асимптотической формулы (1.4).

3) Формула (1.3) имеет смысл (т.е. остаточный член меньше главного) при $|x| \leq ct^{1/3}$ с любым фиксированным $c > 0$ при $t \rightarrow \infty$, а формулы (1.4) и (1.5) дают асимптотическое представление решения $u(x, t)$ в области $c^{-1}t^{1/3} \leq |x| \leq ct$ при $t \rightarrow \infty$ для любого фиксированного $c > 0$. При $|x| \sim t^{1/3}$ асимптотики (1.3), (1.4) и (1.5) смыкаются.

4) в первой области $|x| \leq ct^{1/3}$ асимптотика (1.3) имеет даже линейный характер. Это объясняется тем, что в терминах преобразования Фурье асимптотика в этой области полностью задается поведением подынтегральной функции в формуле Дюамеля (см. ниже формулу (3.2)) вблизи начала координат $p = 0$. Производная в нелинейном члене в уравнении (1.1) в терминах преобразования Фурье соответствует умножению на величину ip и исчезает в пределе $p \rightarrow 0$. Так что вклад в главный член асимптотики дает только линейное приближение, а нелинейность проявляется в следующих членах асимптотического разложения.

5) Мы не стремились получить точную оценку остаточного члена. (Хотя это может быть сделано.) По-видимому, точным порядком убывания остаточного члена в формуле (1.3) является следующий: $O(t^{-2/3})$.

Отметим, наконец, что анализ формул (1.3)–(1.5) позволяет выдвинуть гипотезу о том, что асимптотическое представление (1.3)–(1.5) решения задачи Коши для обобщенного уравнения КдФ (1.1) справедливо на самом деле и при всех нецелых показателях степени $n > 3$.

Доказательству теоремы посвящен § 3, а в § 2 мы предварительно докажем три технические леммы.

§ 2. Леммы

Рассмотрим следующий интеграл

$$J_1 = p \int_{\mathbb{R}_{n-1}} ds dy dz d\xi_5 \dots d\xi_n e^{it\mathcal{L}} f(\xi, t),$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{p^3}{3} + \frac{1}{3} \sum_{l=1}^n \xi_l^3 = \frac{\tilde{p}s^2}{16} + \frac{\tilde{p}+s}{2}y^2 + \frac{\tilde{p}-s}{2}z^2 + \mathbf{P}, \\ \mathbf{P} &= -\frac{p^3}{3} + \frac{\tilde{p}^3}{48} + \frac{1}{3} \sum_{j=5}^n \xi_j^3, \quad \tilde{p} = p - \sum_{j=5}^n \xi_j, \quad p \in \mathbb{C}_+, \\ p &= \rho + i\sigma, \quad \rho \in \mathbb{R}_1, \quad \sigma \geq 0; \quad s, y, z \in \mathbb{R}_1, \quad \xi_j \in \mathbb{R}_1, \quad 5 \leq j \leq n, \\ \xi_l &\in \mathbb{C}_+, \quad 1 \leq l \leq 4, \quad \mathbb{C}_+ = \{p \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} p \geq 0\}, \\ \xi_1 &= \frac{\tilde{p}+s}{4} + y, \quad \xi_2 = \frac{\tilde{p}+s}{4} - y, \quad \xi_3 = \frac{\tilde{p}-s}{4} + z, \quad \xi_4 = \frac{\tilde{p}-s}{4} - z, \end{aligned}$$

через ξ обозначаем вектор с компонентами $\xi_1, \dots, \xi_n$, $n \geq 4$ (при $n = 4$ переменные $\xi_5, \dots, \xi_n$ отсутствуют).

ЛЕММА 1. Пусть при всех $p = \rho + i\sigma$, $\sigma \geq 0$, $\rho, s, y, z \in \mathbb{R}_1$, $\xi_j \in \mathbb{R}_1$, $5 \leq j \leq n$, функция $f(\xi, t)$ удовлетворяет оценкам, $\xi_l \neq 0$, $l = 1, \dots, 4$:

$$\left| \frac{\partial^{j+k} f(\xi, t)}{\partial y^j \partial z^k} \right| \leq F(\xi) \Lambda(\xi, \nu, t) Z^j(\xi_1, \xi_2) Z^k(\xi_3, \xi_4), \quad (2.1)$$

где $j, k = 0, 1$; $\nu \in [0, 1]$, $\Lambda(\xi, \nu, t) = \exp\left(\frac{\sigma t}{4}(1 - \nu) \sum_{l=1}^n (\operatorname{Re} \xi_l)^2\right)$,

$$F(\xi) = \prod_{l=1}^n M^{-4}(\xi_l), \quad Z(\xi_1, \xi_2) = m^{-1/8}(\xi_1) + m^{-1/8}(\xi_2),$$

$$m(p) = \min(1, |p|), \quad M(p) = \max(1, |p|).$$

Кроме того, при каждом фиксированном $t \geq 0$ носитель функции $f(\xi, t)$ лежит в области $K \equiv \{\xi_l \in \mathbb{C}_+, 2 \leq l \leq 4, \xi_j \in \mathbb{R}_1, 5 \leq j \leq n, |\operatorname{Re} \xi_2| \geq \frac{1}{2} |\operatorname{Re} \xi_3| \geq \dots \geq 2^{1-n} |\xi_n|\}$. Тогда при всех $p \in \mathbb{C}_+$, $\rho \neq 0$, $t > 0$, $\mu \in [0, 3\gamma]$ справедлива оценка

$$|J_1| \leq ct^{-2/3}(1+t)^{\gamma-1/3-\mu} m^{1-3\mu}(p) M^{-4}(p) E(p, t), \quad (2.2)$$

где $E(p, t) = \exp\left(\rho^2 \sigma t \left(1 - \frac{\nu}{4\alpha}\right)\right)$, $c > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от $\nu \in [0, 1]$, $\gamma > 0$ — некоторая достаточно малая величина, $\alpha = n(1+2^{2n-7})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем оценку в области K :

$$\begin{aligned} |e^{it\mathcal{L}} \Lambda(\xi, \nu, t)| &= \left| \exp\left(it\left(-\frac{p^3}{3} + \frac{1}{3} \sum_{l=1}^n \xi_l^3\right) + \frac{\sigma t}{4}(1 - \nu) \sum_{l=1}^4 (\operatorname{Re} \xi_l)^2\right) \right| \\ &\leq \exp\left(-\frac{5}{16} \sigma^3 t + \sigma \rho^2 t - \frac{\nu \sigma t}{4} \sum_{l=1}^4 (\operatorname{Re} \xi_l)^2\right) \\ &\leq \exp\left(\sigma \rho^2 t \left(1 - \frac{\nu}{4\alpha}\right) - \frac{5\sigma^3 t}{16}\right) \\ &= E(p, t) e^{-5\sigma^3 t/16}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

поскольку

$$\rho^2 = \left(\sum_{l=1}^n \operatorname{Re} \xi_l\right)^2 \leq n \sum_{l=1}^n (\operatorname{Re} \xi_l)^2 \leq n(1 + 2^{2n-7}) \sum_{l=1}^4 (\operatorname{Re} \xi_l)^2 = \alpha \sum_{l=1}^4 (\operatorname{Re} \xi_l)^2,$$

константа $\alpha = n(1 + 2^{2n-7}) \leq 5^n$, здесь мы воспользовались упорядоченностью переменных ξ_l из определения области K .

При всех $s, y, z \in \mathbb{R}_1$, $\xi_j \in \mathbb{R}_1$, $5 \leq j \leq n$, $p \in \mathbb{C}_+$ в области K справедливо также следующее неравенство

$$F(\xi) \leq c M^{-4}(p) F_1(\xi), \quad (2.4)$$

где $F_1(\xi) = (M^{-4}(\tilde{p}+s) + M^{-4}(\tilde{p}-s))(M^{-4}(\xi_1) + M^{-4}(\xi_2))(M^{-4}(\xi_3) + M^{-4}(\xi_4)) \times \prod_{j=5}^n M^{-4}(\xi_j)$, $\tilde{p} = p - \sum_{j=5}^n \xi_j$, здесь и всюду далее через $c > 0$ обозначаем различные постоянные.

В самом деле, имеют место очевидные оценки

$$M^{-4}(\xi_1)M^{-4}(\xi_2) \leq M^{-4}\left(\frac{\tilde{p}+s}{4}\right)(M^{-4}(\xi_1) + M^{-4}(\xi_2)), \quad (2.5)$$

$$M^{-4}(\xi_3)M^{-4}(\xi_4) \leq M^{-4}\left(\frac{\tilde{p}-s}{4}\right)(M^{-4}(\xi_3) + M^{-4}(\xi_4)). \quad (2.6)$$

Далее, в случае $|\tilde{p}| \geq \frac{1}{2}|p|$ имеем

$$\begin{aligned} M^{-4}(\tilde{p}+s)M^{-4}(\tilde{p}-s) &\leq M^{-4}(\tilde{p})(M^{-4}(\tilde{p}+s) + M^{-4}(\tilde{p}-s)) \\ &\leq 2^4 M^{-4}(p)(M^{-4}(\tilde{p}+s) + M^{-4}(\tilde{p}-s)). \end{aligned}$$

А в случае $|\tilde{p}| < |p|/2$ имеем $|\sum_{j=5}^n \xi_j| \geq |p|/2$, т.е. для некоторого номера $j \geq 5$ выполнено неравенство $|\xi_j| \geq (2n)^{-1}|p|$, и в области K справедливо неравенство $|\xi_4| \geq c|p|$. Таким образом,

$$F(\xi) \leq cM^{-4}(\tilde{p}+s)(M^{-4}(\xi_1) + M^{-4}(\xi_2))M^{-4}(p)M^{-4}(\xi_3) \prod_{j=5}^n M^{-4}(\xi_j),$$

и мы снова приходим к неравенству (2.4).

Теперь приступим к доказательству оценки (2.2). Представим интеграл J_1 по области $\mathbb{R}_{n-1}$ как повторный, сначала проинтегрируем по переменным $\xi_5, \dots, \xi_n$, а затем по переменным s, y, z , так что

$$J_1 = \int_{\mathbb{R}_{n-4}} d\xi_5 \dots d\xi_n \tilde{J}_1, \quad \tilde{J}_1 = p \int_{\mathbb{R}_3} ds dy dz e^{it\mathcal{L}} f(\xi, t).$$

(В случае $n = 4$, очевидно, имеем $J_1 = \tilde{J}_1$.)

I) Рассмотрим сначала случай $0 < t \leq 1$, $0 < |\tilde{p}| \leq M(\sigma)$ ($\tilde{p} = \tilde{p} - i\sigma$, $p, t, \xi_5, \dots, \xi_n$ считаем далее фиксированными). В силу (2.1), (2.3) и (2.4) получим

$$|\tilde{J}_1| \leq cM(\sigma)E(p, t)e^{-5\sigma^3 t/16} \int_{\mathbb{R}_3} ds dy dz m(p)F_1(\xi)M^{-4}(p) \left(1 + \sum_{j=5}^n M(\xi_j)\right),$$

откуда ввиду оценки

$$e^{-\sigma^3 t/16} \leq c\sigma^{-3\delta} t^{-\delta}, \quad \delta \in [0, 1], \quad (2.7)$$

взятой при $\delta = 1/3$, если $\sigma > 1$, или при $\delta = 0$, если $\sigma \in [0, 1]$, приходим к неравенству (2.2).

II) Рассмотрим теперь случай $0 < t \leq 1$, $|\tilde{\rho}| > M(\sigma)$. Обозначим $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_1)$: $\varphi(x) = 1$ при $|x| \leq \frac{1}{16}$ и $\varphi(x) = 0$ при $|x| \geq \frac{1}{8}$, и представим $\tilde{J}_1$ в виде

$$\begin{aligned} \tilde{J}_1 &= p \int_{\mathbb{R}_3} ds dy dz e^{it\mathcal{L}} f(\xi, t) \\ &\quad \times \left\{ \varphi\left(\frac{y}{\tilde{\rho}}\right) \varphi\left(\frac{z}{\tilde{\rho}}\right) + \left(1 - \varphi\left(\frac{y}{\tilde{\rho}}\right)\right) + \left(1 - \varphi\left(\frac{z}{\tilde{\rho}}\right)\right) \varphi\left(\frac{y}{\tilde{\rho}}\right) \right\} \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

В первом интеграле I_1 выполнены оценки $|y| \leq |\tilde{\rho}|/8$, $|z| \leq |\tilde{\rho}|/8$, и так как носитель функции f лежит в области K , то справедливо неравенство

$$F(\xi) \leq cM^{-5}(p)F_2(\xi), \quad (2.8)$$

где $F_2(\xi) = (M^{-3}(\tilde{p}-s) + M^{-3}(\tilde{p}+s))(M^{-3}(\xi_1) + M^{-3}(\xi_2))(M^{-3}(\xi_3) + M^{-3}(\xi_4)) \times \prod_{j=5}^n M^{-4}(\xi_j)$. В самом деле, пусть s того же знака, что и $\tilde{p} = \operatorname{Re} \tilde{p}$, тогда, так как $|y| \leq |\tilde{\rho}|/8$, имеем неравенство $|\xi_j| \geq \frac{1}{8}|\tilde{p} + s| \geq c|\tilde{p}|$, $j = 1, 2$, так что из (2.5) получаем оценку

$$M^{-4}(\xi_1)M^{-4}(\xi_2) \leq cM^{-5}(\tilde{p})(M^{-3}(\xi_1) + M^{-3}(\xi_2)), \quad (2.9)$$

и в случае $|\tilde{p}| \geq \frac{1}{2}|p|$ приходим к (2.8). (Если s и $\operatorname{Re} \tilde{p}$ имеют противоположный знак, то оценку, аналогичную (2.9), получим из (2.6).) В случае $|\tilde{p}| \leq \frac{1}{2}|p|$, как и выше при доказательстве неравенства (2.4), имеем $|\xi_4| \geq c|p|$, $|\xi_3| \geq c|p|$, так что

$$F(\xi) \leq cM^{-4}(\tilde{p} + s)(M^{-4}(\xi_1) + M^{-4}(\xi_2))M^{-5}(p)M^{-3}(\xi_3) \prod_{j=5}^n M^{-4}(\xi_j),$$

откуда опять приходим к неравенству (2.8). Благодаря оценке (2.8) находим

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq c|p|M^{-5}(p)E(p, t) \int_{\mathbb{R}_3} ds dy dz F_2(\xi) \\ &\leq cm(p)M^{-4}(p)E(p, t) \prod_{j=5}^n M^{-4}(\xi_j). \end{aligned} \quad (2.10)$$

В интеграле I_2 с помощью тождества

$$e^{it\mathcal{L}} = \frac{y^2}{H_1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y} e^{it\mathcal{L}} \right), \quad y \neq 0, \quad (2.11)$$

где $H_1 = -1 - \sigma y^2 t + it y^2 (s + \tilde{\rho})$, проинтегрируем по частям по y , получим

$$I_2 = p \int_{\mathbb{R}_3} ds dy dz \frac{e^{it\mathcal{L}}}{H_1} \left(\frac{2(1-\varphi)f}{H_1} - y((1-\varphi)f)'_y \right),$$

и в силу (2.1), (2.3) найдем

$$|I_2| \leq c|p|E(p, t)e^{-5\sigma^3 t/16} \int_{\mathbb{R}_3: |y| \geq |\tilde{\rho}|/16} ds dy dz \frac{F(\xi)}{|H_1|} \left(\frac{1}{|H_1|} + |y|Z(\xi_1, \xi_2) + 1 \right). \quad (2.12)$$

Из определения функции H_1 имеем $|\operatorname{Re} H_1| \geq 1$, поэтому

$$|H_1| \geq M^\delta(y^2(\tilde{\rho} + s)t), \quad \delta \in [0, 1] - \text{любое}. \quad (2.13)$$

Из (2.13) при $\delta = \frac{2}{3}$ в области $|y| \geq |\tilde{\rho}|/16 \geq 1/16$ получим $|H_1| \geq cM(y)M(\tilde{\rho})t^{2/3}$, если $|\tilde{\rho} + s| > |y|$ и поэтому подынтегральная функция в (2.12) оценивается сверху величиной

$$cM^{-5}(p)t^{-2/3}F_1(\xi)Z(\xi_1, \xi_2) \left(1 + \sum_{j=5}^n M(\xi_j) \right),$$

так что из (2.12) приходим к (2.2). А если $|\tilde{\rho} + s| \leq |y|$, то

$$F(\xi) \leq cM^{-4}(\xi_3)M^{-4}(\xi_4)M^{-8}(y) \prod_{j=5}^n M^{-4}(\xi_j),$$

а также из (2.13) с $\delta = \frac{2}{3}$ в области $K \cap \{|y| \geq |\tilde{\rho}|/16\}$ имеем

$$|H_1| \geq ct^{2/3}|\tilde{\rho} + s|^{2/3}M^{4/3}(y),$$

и, значит, подынтегральное выражение в (2.12) оценим следующим образом

$$ct^{-2/3}|\tilde{\rho} + s|^{-2/3}M^{-5}(p)M^{-4}(\xi_3)M^{-4}(\xi_4)M^{-3}(y) \prod_{j=5}^n M^{-4}(\xi_j)$$

и опять приходим к оценке (2.2).

В интеграле I_3 проинтегрируем по частям по z , пользуясь тождеством

$$e^{it\mathcal{L}} = \frac{z^2}{H_2} \frac{\partial}{\partial z} (z^{-1}e^{it\mathcal{L}}), \quad (2.14)$$

где $H_2 = -1 - \sigma z^2 t - itz^2(1 - \tilde{\rho})$. Далее, пользуясь оценкой, аналогичной (2.13),

$$|H_2| \geq M^\delta(z^2(\tilde{\rho} - s)t), \quad \delta \in [0, 1], \quad (2.15)$$

и оценивая так же, как и в интеграле I_2 , приходим к неравенству (2.2).

III) Рассмотрим теперь случай $t \geq 1$, $\sigma \geq |\tilde{\rho}| > 0$. С помощью тождеств (2.11) и (2.14) проинтегрируем по частям по y и z , найдем

$$\tilde{J}_1 = 2p \int_{\mathbb{R}_3} ds dy dz \frac{e^{it\mathcal{L}}}{H_1 H_2} \left(\frac{2f}{H_1 H_2} - \frac{y f'_y}{H_2} - \frac{z f'_z}{H_1} + \frac{yz}{2} f''_{yz} \right). \quad (2.16)$$

В силу (2.1) и (2.3) из (2.16) получим

$$|\tilde{J}_1| \leq c|p|E(p, t)e^{-5\sigma^3 t/16} \int_{\mathbb{R}_3} ds dy dz \frac{F(\xi)}{|H_1 H_2|} (1 + |y|Z(\xi_1, \xi_2))(1 + |z|Z(\xi_3, \xi_4)),$$

откуда, благодаря оценке (2.7) с $\delta = \mu$ при $|\tilde{\rho}| \leq 1$ или $\delta = 1/3$ при $|\tilde{\rho}| \geq 1$ и ввиду (2.4), а также (2.13) и (2.15) с $\delta = (1 - \gamma)/2$, найдем

$$\begin{aligned} |\tilde{J}_1| &\leq ct^{\gamma-1-\mu} m(p)E(p, t)e^{-\sigma^3 t/4} M^{-4}(p) \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}_3} ds dy dz \left(1 + \sum_{j=1}^5 M(\xi_j)\right) F_1(\xi) |y|^{\gamma-1} |z|^{\gamma-1} m^{-3\mu}(\tilde{p}) \\ &\quad \times |\tilde{\rho}^2 - s^2|^{\frac{\gamma-1}{2}} (1 + |y|Z(\xi_1, \xi_2))(1 + |z|Z(\xi_3, \xi_4)) \\ &\leq ct^{\gamma-1-\mu} m(p)m^{-3\mu}(\tilde{p})M^{-4}(p)E(p, t) \prod_{j=5}^n M^{-3}(\xi_j), \end{aligned}$$

и мы вновь приходим к оценке (2.2).

IV) Рассмотрим, наконец, оставшийся случай $t \geq 1$, $0 \leq \sigma \leq |\tilde{\rho}|$. Представим $\tilde{J}_1$ в виде (2.15) и разобьем результат на три части

$$\tilde{J}_1 = \int_{\Omega_1} + \int_{\Omega_2} + \int_{\Omega_3} = I_4 + I_5 + I_6,$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{s, y, z \in \mathbb{R}_1 : |y| \geq |\tilde{\rho}|/8\}, \\ \Omega_2 &= \{s, y, z \in \mathbb{R}_1 : |y| < |\tilde{\rho}|/8, |z| \geq |\tilde{\rho}|/8\}, \\ \Omega_3 &= \{s, y, z \in \mathbb{R}_1 : |y| < |\tilde{\rho}|/8, |z| < |\tilde{\rho}|/8\}. \end{aligned}$$

Интеграл I_4 в силу (2.1) и (2.3) оценим следующим образом

$$|I_4| \leq c|p|E(p, t)e^{-5\sigma^3 t/16} \int_{\Omega_1} ds dy dz \frac{F(\xi)}{|H_1 H_2|} (1 + |y|Z(\xi_1, \xi_2))(1 + |z|Z(\xi_3, \xi_4)). \quad (2.17)$$

Если $|\tilde{\rho} + s| > |y|$, то в области $\Omega_1 \cap K$ имеем

$$|H_1| \geq ct^{\frac{1-\gamma}{2}+\mu} m^{\frac{1-\gamma}{2}}(s + \tilde{\rho})m^{1-\gamma}(y)m^{3\mu}(\tilde{\rho})M(y)M(\tilde{\rho}). \quad (2.18)$$

В самом деле, полагая $\delta = \frac{1}{2}(1 - \gamma) + \mu$ в (2.13) при $|y| \leq 1$, получаем

$$\begin{aligned} |H_1| &\geq (ty^2|\tilde{\rho} + s|)^{\frac{1-\gamma}{2}+\mu} \\ &\geq t^{\frac{1-\gamma}{2}+\mu} m^{1-\gamma}(y)m^{\frac{1-\gamma}{2}}(\tilde{\rho} + s)m^{2\mu}(y)m^\mu(\tilde{\rho} + s)(m^2(y)M(\tilde{\rho} + s))^{\frac{1-\gamma}{2}+\mu} \\ &\geq ct^{\frac{1-\gamma}{2}+\mu} m^{1-\gamma}(y)m^{\frac{1-\gamma}{2}}(\tilde{\rho} + s)m^{3\mu}(\tilde{\rho}) \\ &\geq ct^{\frac{1-\gamma}{2}+\mu} m^{\frac{1-\gamma}{2}}(\tilde{\rho} + s)m^{1-\gamma}(y)m^{3\mu}(\tilde{\rho})M(y)M(\tilde{\rho}). \end{aligned}$$

А при $|y| \geq 1$ из (2.13) с $\delta = \frac{2}{3}$ находим

$$\begin{aligned} |H_1| &\geq t^{2/3} |y|^{4/3} |\tilde{\rho} + s|^{2/3} \geq t^{2/3} M^2(y) \geq ct^{2/3} M(y) M(\tilde{\rho}) \\ &\geq ct^{\frac{1-\gamma}{2} + \mu} m^{\frac{1-\gamma}{2}} (\tilde{\rho} + s) m^{1-\gamma}(y) m^{3\mu}(\tilde{\rho}) M(y) M(\tilde{\rho}), \end{aligned}$$

так как $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}(1-\gamma) + \mu$ при $\mu \in [0, 3\gamma]$, $\gamma > 0$ достаточно мало. В силу (2.4), (2.18) и (2.15) с $\delta = \frac{1}{2}(1-\gamma)$ оценим подынтегральное выражение в (2.17) величиной

$$\begin{aligned} &ct^{\gamma-1-\mu} M^{-5}(p) M^{-1}(y) m^{-3\mu}(\tilde{\rho}) m^{\frac{\gamma-1}{2}}(\tilde{\rho} + s) m^{\gamma-1}(y) \\ &\times (1 + |y| Z(\xi_1, \xi_2)) (|z|^{\gamma-1} |s - \tilde{\rho}|^{\frac{\gamma-1}{2}} + |s - \tilde{\rho}|^{-1/2} Z(\xi_3, \xi_4)) \left(1 + \sum_{j=5}^n M(\xi_j)\right) F_1(\xi), \end{aligned}$$

и из (2.17) приходим к (2.2). Если же $|\tilde{\rho} + s| \leq |y|$, то

$$F(\xi) \leq c M^{-4}(\xi_3) M^{-4}(\xi_4) M^{-8}(y) \prod_{j=5}^n M^{-4}(\xi_j),$$

и, следовательно, в области $\Omega_1 \cap K$ подынтегральная функция в (2.17) может быть оценена следующим образом

$$\begin{aligned} &ct^{\gamma-1-\mu} M^{-5}(p) M^{-4}(\xi_3) M^{-4}(\xi_4) M^{-4}(y) m^{-2\mu}(\tilde{\rho}) M(p) M^{-1}(\tilde{\rho}) \\ &\times \prod_{j=5}^n M^{-4}(\xi_j) m^{\frac{\gamma-1}{2}-\mu}(s + \tilde{\rho}) m^{\gamma-1}(y) (1 + |y| Z(\xi_1, \xi_2)) \\ &\times (|z|^{\gamma-1} |s - \tilde{\rho}|^{\frac{\gamma-1}{2}} + |s - \tilde{\rho}|^{-1/2} Z(\xi_3, \xi_4)), \end{aligned}$$

откуда вновь найдем (2.2). Интеграл I_5 рассматривается аналогично. В интеграле I_6 выделим слагаемое, не содержащее производных функции f , т.е. представим $I_6 = I_7 + I_8$, где

$$\begin{aligned} I_7 &= 4p \int_{\Omega_3} ds dy dz e^{it\mathcal{L}} f H_1^{-2} H_2^{-2}, \\ I_8 &= 2p \int_{\Omega_3} ds dy dz e^{it\mathcal{L}} H_1^{-1} H_2^{-1} \left(2yz f''_{yz} - \frac{y f'_y}{H_2} - \frac{z f'_z}{H_1} \right). \end{aligned}$$

В интеграле I_7 проинтегрируем теперь еще один раз по s по частям, пользуясь следующим тождеством, при $s \neq b_j$, $1 \leq j \leq 9$,

$$e^{it\mathcal{L}} = \frac{S^{1-\theta}}{H_3} \frac{\partial}{\partial s} (S^\theta e^{it\mathcal{L}}), \quad (2.19)$$

где $S = \min(|s - b|, |s - \tilde{\rho}|, |s + \tilde{\rho}|, |s|)$,

$$\begin{aligned} b &= -\frac{4}{\tilde{\rho}}(y^2 - z^2), \quad \theta = -\operatorname{sgn} s \frac{\partial S}{\partial s}, \\ H_3 &= \theta \frac{\partial S}{\partial s} + itS \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = -\operatorname{sgn} s \left(1 + \frac{\sigma}{8} t |s| S\right) + \frac{i\tilde{\rho}t}{8} (s - b) S, \end{aligned}$$

точки $b_1 = \tilde{\rho}$, $b_2 = -\tilde{\rho}$, $b_3 = b$, $b_4 = (b + \tilde{\rho})/2$, $b_5 = (b - \tilde{\rho})/2$, $b_6 = 0$, $b_7 = \tilde{\rho}/2$, $b_8 = -\tilde{\rho}/2$, $b_9 = b/2$ являются точками возможной недифференцируемости функций S , θ или H_3 . (Интеграл в действительности вычисляем между точками b_j , а внеинтегральные выбросы в точках b_j сокращаются ввиду непрерывности подынтегральной функции $Se^{it\mathcal{L}} f H_3^{-1} H_1^{-2} H_2^{-2}$.) Получаем

$$I_7 = 8p \int_{\Omega_3} ds dy dz e^{it\mathcal{L}} H_1^{-2} H_2^{-2} H_3^{-1} \times \left\{ -(1 - \theta) S'_s f + S f \left(\frac{2H'_{1s}}{H_1} + \frac{2H'_{2s}}{H_2} + \frac{H'_{3s}}{H_3} \right) - S f'_s \right\}. \quad (2.20)$$

Из определения функции S следуют оценки ($s, y, z \in \Omega_3$, $s \neq b_j$, $1 \leq j \leq 9$):

$$\left| \frac{S H'_{1s}}{H_1} \right| = \frac{S t y^2}{|1 + \sigma y^2 t - i t y^2 (s + \tilde{\rho})|} \leq \frac{S}{|s + \tilde{\rho}|} \leq 1$$

и, аналогично,

$$\left| \frac{S H'_{2s}}{H_2} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{S H'_{3s}}{H_3} \right| = \frac{|S| - \sigma t S - \sigma t s S'_s + i \tilde{\rho} S t + i \tilde{\rho} t (s - b) S'_s}{|\delta + \sigma t |s| S + i \tilde{\rho} t (s - b) S|} \leq 4.$$

Поэтому из (2.20) в силу (2.3), (2.8), (2.13) и (2.15) с $\delta = (1 - \gamma)/2$ и оценки $|H_3| \geq ct^\mu |\tilde{\rho}(s - b) S|^\mu$ найдем

$$\begin{aligned} |I_7| &\leq cm(p) M^{-4}(p) E(p, t) t^{\gamma-1-\mu} \int_{\Omega_3} ds dy dz F_2(\xi) |yz|^{\gamma-1} \\ &\quad \times (1 + S(Z(\xi_1, \xi_2) + Z(\xi_3, \xi_4))) |s^2 - \tilde{\rho}^2|^{\frac{\gamma-1}{2}} |\tilde{\rho}(s - b) S|^{-\mu} \\ &\leq cm(p) m^{-3\mu}(\tilde{\rho}) t^{\gamma-1-\mu} M^{-4}(p) \prod_{j=5}^n M^{-4}(\xi_j) E(p, t). \end{aligned}$$

Используя (2.3), (2.8), (2.13) и (2.15) с $\delta = (1 - \gamma)/2$ или $\delta = \frac{1}{2} + \mu$, либо $\delta = 1/2$, оценим интеграл I_8 :

$$\begin{aligned} |I_8| &\leq cm(p) M^{-4}(p) E(p, t) e^{-5\sigma^3 t/16} \int_{\Omega_3} ds dy dz \frac{F_2(\xi)}{|H_1 H_2|} \\ &\quad \times (|y| Z(\xi_1, \xi_2) + |z| Z(\xi_3, \xi_4) + |y||z| Z(\xi_1, \xi_2) Z(\xi_3, \xi_4)) \\ &\leq ct^{\gamma-1-\mu} m(p) M^{-4}(p) E(p, t) \int_{\Omega_3} ds dy dz F_2(\xi) |s^2 - \tilde{\rho}^2|^{(\gamma-1)/2} \\ &\quad \times (|z|^{\gamma-1} |y|^{-2\mu} |s + \tilde{\rho}|^{-\mu-\gamma/2} Z(\xi_1, \xi_2) + |y|^{\gamma-1} |z|^{-2\mu} |s - \tilde{\rho}|^{-\mu-\gamma/2} Z(\xi_3, \xi_4) \\ &\quad + |z|^{\gamma-2\mu} |s - \tilde{\rho}|^{-\mu} |s + \tilde{\rho}|^{-\gamma/2} Z(\xi_3, \xi_4) Z(\xi_1, \xi_2)) \\ &\leq ct^{\gamma-1-\mu} m(p) m^{-\mu}(\tilde{\rho}) M^{-4}(p) E(p, t) \prod_{j=5}^n M^{-4}(\xi_j). \end{aligned}$$

Отсюда приходим к оценке (2.2). Лемма 1 доказана.

Оценим теперь интегралы

$$J_2 = \int_{\mathbb{R}_{n-1}} dq dr dy d\xi_5 \dots d\xi_n e^{itL} g(\xi, t),$$

$$J_3 = \int_{\mathbb{R}_{n-1}} dq dr dy d\xi_5 \dots d\xi_n e^{itL} g(\xi, t) (1 - \varphi_1 \varphi_2),$$

где

$$L = q\tilde{\rho}(q + \tilde{\rho}) + 2r(r - q)^2 + \frac{i\sigma}{2}(q^2 + q\tilde{\rho} + r(3r - 2q)) + Y + \mathbf{P},$$

$$Y = -2y^2 r + \frac{i\sigma}{2} y^2,$$

$$\mathbf{P} = -\frac{p^3}{3} + \frac{1}{3} \left(\tilde{\rho} + \frac{i\sigma}{4} \right)^3 + \frac{1}{3} \sum_{j=5}^n \xi_j^3 - \frac{i\sigma^3}{64},$$

$$\tilde{\rho} = \rho - \sum_{j=5}^n \xi_j, \quad p = \rho + i\sigma, \quad \tilde{p} = \tilde{\rho} + i\sigma, \quad \sigma \geq 0,$$

$$\rho, \tilde{\rho}, q, r, y, \xi_5, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}_1,$$

$$\xi_1 = q + \tilde{\rho} + \frac{i\sigma}{4}, \quad \xi_2 = 2r - q + \frac{i\sigma}{4}, \quad \xi_3 = -r + y + \frac{i\sigma}{4}, \quad \xi_4 = -r - y + \frac{i\sigma}{4},$$

$$\varphi_1 = \varphi\left(\frac{q}{|\tilde{p}|}\right) \varphi\left(\frac{r}{|\tilde{p}|}\right) \varphi\left(\frac{y}{|\tilde{p}|}\right), \quad \varphi_2 = \varphi\left(\frac{\operatorname{Re} Y}{\operatorname{Re} L}\right) \varphi\left(\frac{\operatorname{Im} Y}{\operatorname{Re} L}\right),$$

$\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_1)$, $\varphi(x) = 1$ при $|x| \leq 1/16$ и $\varphi(x) = 0$ при $|x| \geq 1/8$, n – целое, больше трех. (При $n = 4$ переменные $\xi_5, \dots, \xi_n$ отсутствуют.)

ЛЕММА 2. Пусть при всех $p \in \mathbb{C}_+$, $q, r, y, \xi_5, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}_1$ функция $g(\xi, t)$ удовлетворяет оценкам $(\xi_2, \xi_3, \xi_4 \neq 0, t \geq 0)$:

$$\left| \frac{\partial^{j+k+l} g(\xi, t)}{\partial (\operatorname{Re} \xi_2)^j \partial (\operatorname{Re} \xi_3)^k \partial (\operatorname{Re} \xi_4)^l} \right| \leq M(\xi_1) F(\xi) \Lambda(\xi, \nu, t) m^{-j/8}(\xi_2) m^{-k/8}(\xi_3) m^{-l/8}(\xi_4), \quad (2.21)$$

где $j, k, l = 0, 1$, $\nu \in [0, 1]$, $(\Lambda(\xi, \nu, t), F(\xi), E(p, t))$ те же, что и в лемме 1). Кроме того, носитель функции $g(\xi, t)$ при каждом $t \geq 0$ лежит в области K (см. лемму 1).

Тогда при всех $p \in \mathbb{C}_+$, $t \geq 0$ справедливы оценки

$$|J_2| \leq c(1+t)^{\gamma-1} E(p, t) M^{-3}(p) e^{-\sigma^3 t/4}, \quad (2.22)$$

и при $|p| \geq 1$, $t > 0$

$$|J_3| \leq c t^{-1/2} (1+t)^{\gamma-1/2} E(p, t) M^{-4}(p) e^{-\sigma^3 t/4}, \quad (2.23)$$

где $c > 0$ – некоторая постоянная, $\gamma > 0$ – достаточно малая величина.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего так же, как и в лемме 1, имеем неравенство (2.3). В области K имеем неравенство

$$\begin{aligned} F(\xi)M(\xi_1) &= M^{-3}(\xi_1)M^{-4}(\xi_2)M^{-4}(\xi_3)M^{-4}(\xi_4)\prod_{j=5}^n M^{-4}(\xi_j) \\ &\leq M^{-1}(\xi_3)M^{-1}(\xi_4)\prod_{j=1}^n M^{-3}(\xi_j) \leq cM^{-3}(p)F_3(\xi), \end{aligned} \quad (2.24)$$

где $F_3(\xi) = (M^{-3}(r) + M^{-3}(\tilde{p} + 2r))(M^{-3}(\xi_1) + M^{-3}(\xi_2))(M^{-3}(\xi_3) + M^{-3}(\xi_4)) \times M^{-1}(\xi_3)M^{-1}(\xi_4)\prod_{j=5}^n M^{-3}(\xi_j)$. В случае $0 \leq t < 1$ из (2.24) и (2.3) легко следует требуемая оценка (2.22). Пусть теперь $t \geq 1$. Проинтегрируем по частям по y , пользуясь тождеством, $y \neq 0$:

$$e^{itL} = \frac{y^2}{H_4} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^{itL}}{y} \right), \quad (2.25)$$

где $H_4 = -1 - \sigma ty^2 - 4ity^2$. Найдем

$$J_2 = \int_{\mathbb{R}_{n-1}} dq dr dy d\xi_5 \dots d\xi_n \frac{e^{itL}}{H_4} \left\{ 2y + y \frac{\partial q}{\partial \xi_4} - y \frac{\partial q}{\partial \xi_3} \right\} = I_1 + I_2 + I_3.$$

В первом интеграле I_1 проинтегрируем по частям по r , пользуясь следующей формулой (при $r \in \mathbb{R}_1$, за исключением тех точек $r = b_k$, $1 \leq k \leq 10$, в которых функции R , H_5 или θ могут быть недифференцируемы)

$$e^{itL} = \frac{R^{1-\theta}}{H_5} \frac{\partial}{\partial r} (R^\theta e^{itL}), \quad (2.26)$$

где $R = \min(|r|, |r - q/3|, |r - r_1|, |r - r_2|)$, $r_{1,2} = \frac{2}{3}q \pm \frac{1}{3}\sqrt{q^2 + 3y^2}$ — корни уравнения $3r^2 - 4rq + q^2 - y^2 = 0$, $\theta = -\operatorname{sgn}(3r - q)R'_r$,

$$\begin{aligned} H_5 &= -\operatorname{sgn}(3r - q)(1 + \sigma + |3r - q|R) + 6it(r - r_1)(r - r_2)R, \\ b_1 &= r_1, \quad b_2 = r_2, \quad b_3 = 0, \quad b_4 = \frac{q}{3}, \quad b_5 = \frac{b_1 + b_2}{2}, \quad b_6 = \frac{b_2 + b_3}{2}, \\ b_7 &= \frac{b_3 + b_4}{2}, \quad b_8 = \frac{b_1 + b_3}{2}, \quad b_9 = \frac{b_1 + b_4}{2}, \quad b_{10} = \frac{b_2 + b_4}{2} \end{aligned}$$

— точки возможной недифференцируемости функций H_5 , R или θ . В итоге получим (все выбросы в точках $r = b_k$, $1 \leq k \leq 10$, благополучно сокращаются):

$$I_1 = I_4 + I_5, \quad (2.27)$$

где

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_{\mathbb{R}_{n-1}} dq dr dy d\xi_5 \dots d\xi_n e^{itL} \mathcal{G}_1(\xi, t) g(\xi, t), \\ I_5 &= -2 \int_{\mathbb{R}_{n-1}} dq dr dy d\xi_5 \dots d\xi_n e^{itL} \frac{R}{H_4 H_5} \left(2 \frac{\partial g}{\partial \xi_2} - \frac{\partial g}{\partial \xi_3} - \frac{\partial g}{\partial \xi_4} \right), \\ \mathcal{G}_1 &= -\frac{2}{H_4 H_5} \left\{ (1 - \theta) R'_r - R \left(\frac{H'_{4r}}{H_4} + \frac{H'_{5r}}{H_5} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Из определения функции R имеем оценки

$$\begin{aligned} R \left| \frac{H'_{4r}}{H_4} \right| &= \frac{R4ty^2}{|1 + \sigma ty^2 + 4itry^2|} \leq 1, \\ R \left| \frac{H'_{5r}}{H_5} \right| &= \frac{R|3\sigma \cdot tR + \sigma t|3r - q|R'_r + 6itR(r - r_2) + 6it(r - r_1)(r - r_2)R'_r|}{|1 + \sigma t|3r - q|R + i6t(r - r_1)(r - r_2)R|} \leq 5. \end{aligned}$$

Поэтому с помощью (2.3) и (2.24) получим

$$\begin{aligned} |I_4| &\leq c(1+t)^{\gamma-1} M^{-3}(p) E(p, t) e^{-5\sigma^3 t/16} \\ &\quad \int_{\mathbb{R}_{n-1}} dq dr dy d\xi_5 \dots d\xi_n F_3(\xi) (|r|y^2 R|r - r_1||r - r_2|)^{(\gamma-1)/2} \\ &\leq c(1+t)^{\gamma-1} M^{-3}(p) E(p, t) e^{-5\sigma^3 t/16}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Для интеграла I_5 оценка получается даже более точная по времени:

$$\begin{aligned} |I_5| &\leq c(1+t)^{-\gamma-1} M^{-3}(p) E(p, t) e^{-5\sigma^3 t/16} \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}_{n-1}} dq dr dy d\xi_5 \dots d\xi_n F_3(\xi) R(m^{-1/8}(\xi_2) + m^{-1/8}(\xi_3) + m^{-1/8}(\xi_4)) \\ &\quad \times (|r|y^2)^{(\gamma-1)/2} (R|r - r_1||r - r_2|)^{(-1-3\gamma)/2} \\ &\leq c(1+t)^{-1-\gamma} M^{-3}(p) E(p, t) e^{-5\sigma^3 t/16} \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}_{n-1}} dq dr dy d\xi_5 \dots d\xi_n F_3(\xi) \\ &\quad \times |y|^{\gamma-1} |r|^{(\gamma-1)/2} \left(m^{-1/8} \left(r - \frac{q}{2} \right) + m^{-1/8}(r - y) + m^{-1/8}(r + y) \right) \times \\ &\quad \times (|q - q_1|^{(-1-9\gamma)/2} + |q - q_2|^{(-1-9\gamma)/2}) \\ &\leq c(1+t)^{-1-\gamma} M^{-3}(p) E(p, t) e^{-5\sigma^3 t/16}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

где $q_{1,2} = 2r \pm \sqrt{r^2 + y^2}$ – корни квадратного уравнения $q^2 - 4rq + 3r^2 - y^2 = 0$ (так что $3(r - r_1)(r - r_2) = (q - q_1)(q - q_2)$). В интеграле I_2 сделаем замену переменной $y = \eta - r$, чтобы можно было проинтегрировать еще раз по частям по переменной r . Функции в новых переменных q, r, η будем обозначать волной сверху, так что

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= L(p, q, r, \eta - r) = q\tilde{\rho}(q + \tilde{\rho}) + 2r(r - q)^2 \\ &\quad + \frac{i\sigma}{2}(q^2 + q\tilde{\rho} + r(3r - 2q)) + \frac{i\sigma}{2}(\eta - r)^2 - 2r(\eta - r)^2 + \mathbf{P}, \\ \tilde{H}_4 &= -1 - \sigma + (\eta - r)^2 - 4itr(\eta - r)^2, \\ \tilde{\xi}_1 &= \xi_1 = q + \tilde{\rho} + \frac{i\sigma}{4}, \quad \tilde{\xi}_2 = \xi_2 = 2r - q + \frac{i\sigma}{4}, \\ \tilde{\xi}_3 &= \eta - 2r + \frac{i\sigma}{4}, \quad \tilde{\xi}_4 = -\eta + \frac{i\sigma}{4}, \quad \tilde{g} = g(\tilde{\xi}, t). \end{aligned}$$

Заметим, что теперь переменная $\tilde{\xi}_4$ не зависит от r и, значит, дифференцирование функции $\tilde{g}$ по r не затрагивает четвертой переменной $\tilde{\xi}_4$. Воспользуемся следующим тождеством ($r \in \mathbb{R}_1$ за исключением точек $r = d_k$, $1 \leq k \leq 6$, в которых могут быть недифференцируемыми функции $\tilde{H}_6$, $\tilde{\theta}$ и $\tilde{Q}$):

$$e^{it\tilde{L}} = \frac{\tilde{Q}^{1-\tilde{\theta}}}{\tilde{H}_6} \frac{\partial}{\partial r} (\tilde{Q}^{\tilde{\theta}} e^{it\tilde{L}}), \quad (2.30)$$

где $\tilde{Q} = \min(|r|, |r - \eta|, |r - \omega|)$, $\omega = (q + \eta)/4$,

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} &= -\operatorname{sgn}(r - \omega) \tilde{Q}'_r, \\ \tilde{H}_6 &= \tilde{\theta} \tilde{Q}'_r + it \tilde{Q} \tilde{L}'_r = -(1 + 4\sigma t \tilde{Q} |r - \omega|) \operatorname{sgn}(r - \omega) + 8it \tilde{Q} (\eta - q)(r - \omega) \end{aligned}$$

(так как $\tilde{L}'_r = 8r(\eta - q) + 2q^2 - 2\eta^2 + i\sigma(2r - q + \eta)$),

$$d_1 = 0, \quad d_2 = \eta, \quad d_3 = \omega, \quad d_4 = \frac{\eta}{2}, \quad d_5 = \frac{\omega}{2}, \quad d_6 = \frac{\eta + \omega}{2}.$$

В результате, возвращаясь после дифференцирования под знаком интеграла к старым переменным q, r, y , получим (выбросы в точках $r = d_k$ сокращаются):

$$I_2 = - \int_{\mathbb{R}_{n-1}} dq dr d\eta d\xi_5 \dots d\xi_n e^{it\tilde{L}} \tilde{Q}^{\tilde{\theta}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\tilde{Q}^{1-\tilde{\theta}}(\eta - r)}{\tilde{H}_4 \tilde{H}_6} \cdot \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \tilde{\xi}_4} \right) = I_6 + I_7, \quad (2.31)$$

где

$$\begin{aligned} I_6 &= \int_{\mathbb{R}_{n-1}} dq dr dy d\xi_5 \dots d\xi_n e^{itL} \mathcal{G}_2(\xi, t) y \frac{\partial g}{\partial \xi_4}, \\ \mathcal{G}_2(\tilde{\xi}, t) &= -\tilde{Q}^{\tilde{\theta}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\tilde{Q}^{1-\tilde{\theta}}}{\tilde{H}_4 \tilde{H}_6} \right) = -\frac{1}{\tilde{H}_4 \tilde{H}_6} \left\{ (1 - \tilde{\theta}) \tilde{Q}'_r - \tilde{Q} \left(\frac{\tilde{H}'_{4r}}{\tilde{H}_4} + \frac{\tilde{H}'_{6r}}{\tilde{H}_6} \right) \right\}, \\ I_7 &= - \int_{\mathbb{R}_{n-1}} dq dr dy d\xi_5 \dots d\xi_n \frac{e^{itL}}{H_4 H_6} Q \left\{ 2y \frac{\partial^2 g}{\partial \xi_2 \partial \xi_4} - 2y \frac{\partial^2 g}{\partial \xi_3 \partial \xi_4} - \frac{\partial g}{\partial \xi_4} \right\}. \end{aligned}$$

По определению функции $\tilde{Q}$ имеем при $r \neq d_k$, $1 \leq k \leq 6$,

$$\begin{aligned} \left| \tilde{Q} \frac{\tilde{H}'_{4r}}{\tilde{H}_4} \right| &= \tilde{Q} \frac{|2\sigma t(\eta - r) - 4it(\eta - r)^2 - 8itr(\eta - r)|}{|1 + \sigma t(\eta - r)^2 - 4itr(\eta - r)^2|} \leq 5, \\ \left| \tilde{Q} \frac{\tilde{H}'_{6r}}{\tilde{H}_6} \right| &= \tilde{Q} \frac{|4\sigma t \tilde{Q}'_r |r - \omega| + 4\sigma t \tilde{Q} + 8it \tilde{Q}'_r (\eta - q)(r - \omega) + 8it \tilde{Q} (\eta - q)|}{|1 + 4\sigma t \tilde{Q} |r - \omega| + 8it \tilde{Q} (\eta - q)(r - \omega)|} \leq 4, \end{aligned}$$

так что в силу (2.3) и (2.24) получаем

$$\begin{aligned}
|I_6| &\leq cM^{-3}(p)E(p, t)e^{-5\sigma^3 t/16}(1+t)^{\gamma/2-1} \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}_{n-1}} dq dr dy d\xi_5 \dots d\xi_n F_3(\xi) \\
&\quad \times |y|m^{-1/8}(y+r)(|r|y^2)^{-1/2}(Q|q-3r+y||q-r-y|)^{(\gamma-1)/2} \\
&\leq cM^{-3}(p)E(p, t)e^{-5\sigma^3 t/16}(1+t)^{\gamma/2-1} \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}_{n-1}} dq dr dy d\xi_5 \dots d\xi_n F_3(\xi) \\
&\quad \times \left\{ |r|^{\gamma/2-1}m^{-1/8}(y+r)(|q-r-y||q-3r+y|)^{(\gamma-1)/2} \right. \\
&\quad + |r|^{(\gamma-1)/2}|y|^{(\gamma-1)/2}m^{-1/8}(y+r)(|q-r-y||q-3r+y|)^{(\gamma-1)/2} \\
&\quad \left. + |r|^{-1/2}m^{-1/8}(y+r)|q-y-r|^{(\gamma-1)/2}|q-3r+y|^{\gamma-1} \right\} \\
&\leq cM^{-3}(p)(1+t)^{\gamma-1}E(p, t)e^{-5\sigma^3 t/16}. \tag{2.32}
\end{aligned}$$

А для интеграла I_7 оценка несколько лучше

$$\begin{aligned}
|I_7| &\leq cM^{-3}(p)E(p, t)e^{-5\sigma^3 t/16}(1+t)^{-1-\gamma} \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}_{n-1}} dq dr dy d\xi_5 \dots d\xi_n F_3(\xi) \\
&\quad \times m^{-1/8}(y+r)Q\left((|r|y^2)^{\gamma-1/2}(Q|q-3r+y||q-r-y|)^{-2\gamma-1/2} \right. \\
&\quad \left. + |y|Z(\xi_2, \xi_3)(|r|y^2)^{-1/2}(Q|q-3r+y||q-r-y|)^{-\gamma-1/2}\right) \\
&\leq cM^{-3}(p)E(p, t)e^{-5\sigma^3 t/16}(1+t)^{-1-\gamma} \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}_{n-1}} dq dr dy d\xi_5 \dots d\xi_n F_3(\xi) \\
&\quad \times \left\{ |y|^{2\gamma-1}|r|^{\gamma-1/2}m^{-1/8}(r+y)|q-3r+y|^{-4\gamma}|q-r-y|^{-2\gamma-1/2} \right. \\
&\quad + |r|^{-1/2}m^{-1/8}(y+r)(m^{-1/8}(q-2r) + m^{-1/8}(r-y))|q-3r+y|^{-2\gamma} \\
&\quad \left. \times |q-r-y|^{-\gamma-1/2} \right\} \\
&\leq cM^{-3}(p)E(p, t)e^{-5\sigma^3 t/16}(1+t)^{-1-\gamma}. \tag{2.33}
\end{aligned}$$

Интеграл I_3 оценивается аналогично I_2 . Таким образом, из (2.27)–(2.29), (2.31)–(2.33) следует неравенство (2.22).

Обратимся к доказательству оценки (2.23). При $|p| \leq 1$ интеграл J_3 оценивается дословно так же, как и интеграл J_2 . Чтобы доказать неравенство (2.23) при $|p| > 1$, представим J_3 в виде

$$J_3 = \int_{\mathbb{R}_{n-1}} dq dr dy d\xi_5 \dots d\xi_n e^{itL} g(\xi, t) \{ (1 - \varphi_1) + \varphi_1(1 - \varphi_2) \} = I_8 + I_9. \tag{2.34}$$

Для интеграла I_8 оценка получается вполне аналогично оценке интеграла J_2 , только теперь функция $1 - \varphi_1$ отлична от нуля лишь в области $\mathbb{R}_{n-1} \setminus \Omega_4$, где $\Omega_4 = \{q, r, y, \xi_5, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}_1 : |q| \leq |\tilde{p}|/16, |r| \leq |\tilde{p}|/16, |y| \leq |\tilde{p}|/16\}$, так что вместо неравенства (2.24) можно использовать оценку для $\xi \in K \cap (\mathbb{R}_{n-1} \setminus \Omega_4)$

$$\begin{aligned} F(\xi)M(\xi_1) &= M^{-3}(\xi_1)M^{-4}(\xi_2)M^{-4}(\xi_3)M^{-4}(\xi_4) \prod_{j=5}^n M^{-4}(\xi_j) \\ &\leq M^{-4}(p) \left(M(\tilde{p}) + \sum_{j=5}^n M(\xi_j) \right)^4 \\ &\quad \times M^{-3}(\xi_1)M^{-4}(\xi_2)M^{-4}(\xi_3)M^{-4}(\xi_4) \prod_{j=5}^n M^{-4}(\xi_j) \\ &\leq cM^{-4}(p)F_4(\xi), \end{aligned} \quad (2.35)$$

где $F_4(\xi) = M^{-3}(\xi_1)(M^{-4}(\xi_3)M^{-4}(\xi_4) + M^{-4}(\xi_2)M^{-4}(\xi_3) + M^{-4}(\xi_2)M^{-4}(\xi_4)) \times \prod_{j=5}^n M^{-4}(\xi_j)$. В самом деле, достаточно проверить оценку (2.35) в следующих трех случаях: 1) $|y| \geq |\tilde{p}|/16$, 2) $|r| \geq |\tilde{p}|/64$ и 3) $|q| \geq |\tilde{p}|/16$ и $|r| \leq |\tilde{p}|/64$. В первых двух случаях имеем либо $M(\tilde{p}) \leq cM(\xi_3)$, либо $M(\tilde{p}) \leq cM(\xi_4)$, а в третьем случае $M(\tilde{p}) \leq cM(\xi_2)$, так что в области $K \cap (\mathbb{R}_{n-1} \setminus \Omega_4)$ справедлива оценка

$$M(\tilde{p}) + \sum_{j=5}^n M(\xi_j) \leq c(M(\xi_2) + M(\xi_3) + M(\xi_4)).$$

Отсюда вытекает (2.35). Далее, производные от функции φ_1 оцениваются следующим образом

$$|y\varphi'_{1y}| \leq c, \quad |yR\varphi''_{1ry}| \leq c, \quad |Q\varphi'_{1r}| \leq c,$$

так что для I_8 получим оценку

$$|I_8| \leq cM^{-4}(p)E(p, t)e^{-\sigma^3 t/4}(1+t)^{\gamma-1}. \quad (2.36)$$

Чтобы оценить интеграл I_9 при $|p| \geq 1$, $t > 0$, представим его в виде

$$I_9 = \int_{\mathbb{R}_{n-4}} d\xi_5 \dots d\xi_n I_{10}$$

и рассмотрим два случая: 1) $\sigma > |\tilde{p}|/8$ и 2) $\sigma \in [0, |\tilde{p}|/8]$. В первом случае с помощью (2.3), (2.24) и (2.7) с $\delta = 1/3$ легко получается оценка

$$|I_{10}| \leq cM^{-4}(p)E(p, t)e^{-\sigma^3 t/4}t^{-1/2}(1+t)^{-\gamma-1/2} \prod_{j=5}^n M^{-4}(\xi_j),$$

из которой следует, что

$$|I_9| \leq cM^{-4}(p)E(p, t)e^{-\sigma^3 t/4}t^{-1/2}(1+t)^{-\gamma-1/2}. \quad (2.37)$$

Далее, пусть $\sigma \in [0, |\tilde{\rho}|/8]$. Используя тождество (2.25), проинтегрируем по частям по y , получим

$$I_{10} = \int_{\mathbb{R}_3} dq dr dy \frac{e^{itL}}{H_4} \left(\mathcal{G}_3 g - y \varphi_1 (1 - \varphi_2) \frac{\partial g}{\partial \xi_3} + y \varphi_1 (1 - \varphi_2) \frac{\partial g}{\partial \xi_4} \right),$$

где

$$\mathcal{G}_3 = 2\varphi_1(1 - \varphi_2) - y \frac{\partial}{\partial y} ((1 - \varphi_2)\varphi_1).$$

Из-за функции φ_2 подинтегралом в I_{10} имеем неравенство $|Y| \geq \frac{1}{16} |\operatorname{Re} L|$, поэтому можем оценить

$$|H_4| \geq cM(t^{1/2} |\operatorname{Re} L|^{1/2}).$$

Обозначим через $q_{3,4} = r - \frac{\tilde{\rho}}{2} \pm \sqrt{\frac{\tilde{\rho}^3 - 4 \operatorname{Re} \mathbf{P} - 4\tilde{\rho}r^2 - 2r(\tilde{\rho}^2 - 4y^2)}{\tilde{\rho} + 2r}}$ корни уравнения $\operatorname{Re} L = 0$ (отметим, что $\operatorname{Re} L$ представляет собой квадратный трехчлен относительно q : $\operatorname{Re} L = q^2(\tilde{\rho} + 2r) + q(\tilde{\rho}^2 - 4r^2) + 2r^3 - 2y^2r + \operatorname{Re} \mathbf{P}$). Кроме того, из-за функции φ_1 интегрирование в I_{10} производится по области $\{q, r, y \in \mathbb{R}_1 : |y| \leq |\tilde{\rho}|/8, |q| \leq |\tilde{\rho}|/8, |r| \leq |\tilde{\rho}|/8\}$, так что если один корень q_3 и может быть близок к нулю, но заведомо тогда второй корень $|q_4| \geq |\tilde{\rho}|/4$, поэтому можем записать оценку $|\operatorname{Re} L| \geq c|\tilde{\rho}|^2|q - q_3|$. Таким образом, в силу (2.3), (2.24) найдем при $0 < t \leq 1$:

$$\begin{aligned} |I_{10}| &\leq cM^{-3}(p)E(p, t)e^{-5\sigma^3 t/16} \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}_3} dq dr dy F_3(\xi) M^{-1}(\tilde{p}) t^{-1/2} |q - q_3|^{-1/2} (1 + |y|m^{-1/8}(y + r)) \\ &\leq cM^{-4}(p)E(p, t)e^{-\sigma^3 t/4} t^{-1/2} \prod_{j=5}^n M^{-4}(\xi_j), \end{aligned}$$

откуда вытекает (2.37). Далее, если $t \geq 1$, то благодаря (2.26) и (2.30) получим

$$I_{10} = I_{11} + I_{12},$$

где

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_{\mathbb{R}_3} dq dr dy e^{itL} \left(\frac{1}{2} g \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_3 - \frac{R}{H_4 H_5} \frac{\partial}{\partial r} (g \mathcal{G}_3) \right), \\ I_{12} &= \int_{\mathbb{R}_3} dq dr dy e^{itL} \left(\mathcal{G}_2 (1 - \varphi_2) \varphi_1 \frac{\partial g}{\partial \xi_4} \right. \\ &\quad \left. - \frac{Q}{H_4 H_6} \frac{\partial}{\partial r} \left((\eta - r)(1 - \tilde{\varphi}_2) \varphi_1 \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \tilde{\xi}_4} \right) + \frac{2Q}{H_4 H_6} (1 - \varphi_2) \varphi_1 \frac{\partial g}{\partial \xi_4} \right). \end{aligned}$$

Учитывая оценки

$$|R\varphi'_{lr}| \leq c, \quad |y\varphi'_{ly}| \leq c, \quad |\tilde{Q}\tilde{\varphi}'_{lr}| \leq c, \quad l = 1, 2,$$

и используя неравенство при $|\tilde{\rho}| \geq 1$

$$\begin{aligned} |H_4| &\geq |Yt|^{1-\gamma} \geq |Y|^{1/2-\gamma} \left| \frac{1}{16} \operatorname{Re} L \right|^{1/2} t^{1-\gamma} \\ &\geq c|r|^{1/2-\gamma}|y|^{1-2\gamma} M(\tilde{\rho})|q - q_3|^{1/2} t^{1-\gamma} \end{aligned}$$

или при $|\tilde{\rho}| \leq 1$

$$\begin{aligned} |H_4| &\geq |Yt|^{1-\gamma} \geq |Y|^{(1-\gamma)/2} \left| \frac{1}{16} \operatorname{Re} L \right|^{(1-\gamma)/2} t^{1-\gamma} \\ &\geq c|r|^{(1-\gamma)/2}|y|^{1-\gamma} m^{1-\gamma}(\tilde{\rho})|q - q_3|^{(1-\gamma)/2} t^{1-\gamma}, \end{aligned}$$

получим ввиду (2.3) и (2.24)

$$\begin{aligned} |I_{11}| &\leq cM^{-3}(p)E(p, t)e^{-5\sigma^3 t/16}t^{-1-\gamma} \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}_3} dq dr dy F_3(\xi) \left(|r|^{\gamma-1/2}|y|^{2\gamma-1} M^{-1}(\tilde{\rho})|q - q_3|^{-1/2} \right. \\ &\quad \left. + |r|^{(\gamma-1)/2}|y|^{\gamma-1} m^{\gamma-1}(\tilde{\rho})|q - q_3|^{(\gamma-1)/2} M^{-1}(p) \left(1 + \sum_{j=5}^n M(\xi_j) \right) \right) \\ &\quad \times (1 + RZ(2r - q, r - y))(R|q - q_1||q - q_2|)^{-2\gamma} \\ &\leq cM^{-4}(p)E(p, t)e^{-\sigma^3 t/4}t^{-1-\gamma} \prod_{j=5}^n M^{-3}(\xi_j). \end{aligned}$$

А также

$$\begin{aligned} |I_{12}| &\leq cM^{-3}(p)E(p, t)e^{-5\sigma^3 t/16}t^{-1-\gamma} \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}_3} dq dr dy F_3(\xi) \left(|r|^{\gamma-1/2}|y|^{2\gamma-1} M^{-1}(\tilde{\rho})|q - q_3|^{-1/2} \right. \\ &\quad \left. + |r|^{(\gamma-1)/2}|y|^{\gamma-1} m^{\gamma-1}(\tilde{\rho})|q - q_3|^{(\gamma-1)/2} M^{-1}(p) \left(1 + \sum_{j=5}^n M(\xi_j) \right) \right) \\ &\quad \times m^{-1/8}(y + r)(|y| + Q + Q|y|Z(2r - y, r - y)) \\ &\quad \times (Q|q - 3r + y||q - r - y|)^{-2\gamma} \\ &\leq cM^{-4}(p)E(p, t)e^{-\sigma^3 t/4}t^{-1/2}(1 + t)^{-\gamma-1/2} \prod_{j=5}^n M^{-3}(\xi_j). \end{aligned}$$

Итак, мы получаем (2.37). Из оценок (2.36), (2.37) приходим к неравенству (2.23). Лемма 2 доказана.

Оценим следующий интеграл $J_4(p, t) = \int_0^t J_2(p, \tau) d\tau$, где функция $J_2(p, \tau)$ та же, что и в лемме 2.

ЛЕММА 3. Пусть для функции $g(\xi, t)$ выполнено условие (2.21) леммы 2 и, кроме того,

$$\left| \frac{\partial g(\xi, t)}{\partial t} \right| \leq c(1+t)^{\gamma-1/3} t^{-2/3} F(\xi) M^2(\xi_1) \Lambda(\xi, \nu, t), \quad (2.38)$$

где ν , Λ и F те же, что и выше, и далее

$$\frac{\partial g(\xi, t)}{\partial(\operatorname{Re} \xi_4)} = \psi_1(\xi, t) + \psi_2(\xi, t), \quad (2.39)$$

причем имеют место оценки

$$\begin{aligned} |\psi_1(\xi, t)| &\leq c(1+t)^{-2\gamma} m^{-1/8}(\xi_4) F(\xi) M(\xi_1) \Lambda(\xi, \nu, t), \\ \left| \frac{\partial^k \psi_2(\xi, t)}{\partial t^k} \right| &\leq c(1+t)^{k(\gamma-1/3)} t^{-2k/3} F(\xi) M^2(\xi_1) \\ &\quad \times M(\xi_4) m^{-1/8}(\xi_4) \Lambda(\xi, \nu, t), \quad k = 0, 1. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Кроме того, пусть справедливо представление

$$\frac{\partial g(\xi, t)}{\partial t} = \psi_3(\xi, t) + \psi_4(\xi, t) + \int_{\mathbb{R}_{n-1}} d\bar{q} d\bar{r} d\bar{y} d\bar{\xi}_5 \dots d\bar{\xi}_n e^{it\bar{L}} \psi_5(\xi, \bar{\xi}, t) \bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2, \quad (2.42)$$

где $\bar{\xi}_1 = \bar{q} + \bar{r} + i\bar{\sigma}/4$, $\bar{\xi}_2 = 2\bar{r} - \bar{q} + i\bar{\sigma}/4$, $\bar{\xi}_3 = -\bar{r} + \bar{y} + i\bar{\sigma}/4$, $\bar{\xi}_4 = -\bar{r} - \bar{y} + i\bar{\sigma}/4$, $\bar{\sigma} = \sigma/4$, $\bar{p} = \rho + q$, $\bar{p} = \bar{p} + i\bar{\sigma}$, $\bar{p} = \bar{p} + i\bar{\sigma}$, $\bar{p} = \bar{p} - \sum_{j=5}^n \bar{\xi}_j$, функция $\bar{L}$ определена так же, как и L , только зависит от переменных с чертой сверху. При этом предположим, что выполнены оценки

$$|\psi_3(\xi, t)| \leq c(1+t)^{-2\gamma-1/3} t^{-2/3} F(\xi) M(\xi_1) \Lambda(\xi, \nu, t), \quad (2.43)$$

$$\left| \frac{\partial^l \psi_4(\xi, t)}{\partial y^l} \right| \leq cF(\xi) M(\xi_1) \Lambda(\xi, \nu, t) Z^l(\xi_3, \xi_4) (1+t)^{\gamma-1/3} t^{-2/3}, \quad (2.44)$$

$$\left| \frac{\partial^l \psi_5(\xi, \bar{\xi}, t)}{\partial \bar{y}^l} \right| \leq cF(\xi) F(\bar{\xi}) M^5(\xi_1) M(\bar{\xi}_1) \Lambda_1(\xi, \bar{\xi}, \nu, t) Z^l(\bar{\xi}_3, \bar{\xi}_4), \quad (2.45)$$

где $\Lambda_1(\xi, \bar{\xi}, \nu, t) = \exp\left\{\frac{\sigma t}{4}(1-\nu) \sum_{l=2}^n (\operatorname{Re} \xi_l)^2 + \frac{\bar{\sigma} t}{4}(1-\nu) \sum_{l=1}^n (\operatorname{Re} \bar{\xi}_l)^2\right\}$. Справедливо также представление

$$\frac{\partial \psi_5}{\partial t} = \psi_6 + \psi_7, \quad (2.46)$$

где функции ψ_6 и ψ_7 удовлетворяют неравенствам

$$\left| \frac{\partial^l \psi_6(\xi, \bar{\xi}, t)}{\partial \bar{y}^l} \right| \leq c(1+t)^{\gamma-1/3} t^{-2/3} F(\xi) F(\bar{\xi}) M^5(\xi_1) M^2(\bar{\xi}_1) Z^l(\bar{\xi}_3, \bar{\xi}_4) \Lambda_1(\xi, \bar{\xi}, \nu, t); \quad (2.47)$$

$$|\psi_7(\xi, \bar{\xi}, t)| \leq c(1+t)^{-2\gamma-1/3} t^{-2/3} F(\xi) F(\bar{\xi}) M^5(\xi_1) M^2(\bar{\xi}_1) \Lambda_1(\xi, \bar{\xi}, \nu, t). \quad (2.48)$$

Тогда при всех $p \in \mathbb{C}_+$, $\rho \neq 0$, $t > 0$ справедливо неравенство

$$|J_4| \leq c m^{-1/8}(p) M^{-4}(p) E(p, t). \quad (2.49)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Если $|p| \leq 1$ и $t \in [0, 1]$, то оценка (2.49) является простым следствием неравенства (2.22). Далее, представим J_2 в виде

$$J_2(p, t) = \int_{\mathbb{R}_{n-4}} d\xi_5 \dots d\xi_n \tilde{J}_2(p, \xi_5, \dots, \xi_n, t).$$

2) При $\sigma \geq |\tilde{\rho}|/8 > 0$ оценка (2.49) легко вытекает из оценки (2.22) и неравенства (2.7) с $\delta = \frac{1}{3}$ при $|\tilde{\rho}| \geq 1$ и $\delta = 2\gamma$ при $|\tilde{\rho}| \leq 1$ ($\gamma > 0$ достаточно мало, так что $\sigma\gamma < \frac{1}{8}$). Далее оценим $\tilde{J}_2$, считая, что $\sigma \in [0, |\tilde{\rho}|/8]$.

3) Рассмотрим случай $t \geq 1$ и $|p| \leq 1$. Как в лемме 2 представим интеграл $\tilde{J}_2$ с помощью тождества (2.25) в виде

$$\tilde{J}_2 = \int_{\mathbb{R}_3} dq dr dy \frac{e^{itL}}{H_4} \left\{ 2g + y \frac{\partial g}{\partial \xi_4} - y \frac{\partial g}{\partial \xi_3} \right\} = I_1 + I_2 + I_3,$$

и интеграл I_1 , благодаря тождеству (2.26), запишем аналогично (2.27):

$$I_1 = I_4 + I_5,$$

где

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_{\mathbb{R}_3} dq dr dy e^{itL} \mathcal{G}_1(\xi, t) g(\xi, t), \\ I_5 &= -2 \int_{\mathbb{R}_3} dq dr dy e^{itL} \frac{R}{H_4 H_5} \left(2 \frac{\partial g}{\partial \xi_2} - \frac{\partial g}{\partial \xi_3} - \frac{\partial g}{\partial \xi_4} \right), \end{aligned}$$

функция $\mathcal{G}_1$ — та же, что и в лемме 2. С помощью оценки (2.29) получаем требуемый результат

$$\begin{aligned} \left| \int_1^t I_4 d\tau \right| &\leq c \int_1^t d\tau (1 + \tau)^{-1-\gamma} M^{-3}(p) \prod_{j=5}^n M^{-4}(\xi_j) E(p, \tau) \\ &\leq c E(p, t) \prod_{j=5}^n M^{-4}(\xi_j), \end{aligned} \quad (2.50)$$

так как $E(p, t)$ растет по t . (Как отмечалось выше, для оценки интеграла

$$\int_0^1 J_2(\tau) d\tau$$

оказывается достаточной оценка (2.22) леммы 2, так что нам остается лишь рассмотреть интеграл по τ от 1 до t .) В интеграле $\int_1^t I_3 d\tau$ проинтегрируем по τ по частям, пользуясь следующим представлением,

$$e^{i\tau L} = \frac{\tau^{1-\delta}}{H_7} \frac{\partial}{\partial \tau} (\tau^\delta e^{i\tau L}), \quad (2.51)$$

где $H_7 = \delta + i\tau L$, $\delta = 1$ при $\text{Im } L \leq 0$ и $\delta = -1$ при $\text{Im } L > 0$. Тогда получим

$$\begin{aligned} \int_1^t I_3 d\tau &= \int_{\mathbb{R}_3} dq dr dy \frac{e^{i\tau L}}{H_7} \mathcal{G}_1 g \tau \Big|_1^t \\ &\quad - \int_1^t d\tau \int_{\mathbb{R}_3} dq dr dy \frac{e^{i\tau L}}{H_7} \left\{ \delta \mathcal{G}_1 g \left(\frac{1}{H_7} - 1 \right) + \tau (g \mathcal{G}_1)'_\tau \right\}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Поскольку $|\text{Re } H_7| \geq 1$, то при любом $\beta \in [0, 1]$ имеем

$$\begin{aligned} |H_7| &\geq |\text{Im } H_7|^{9\gamma} = |\tau \text{Re } L|^{9\gamma} = |\tau(\tilde{\rho} + 2r)(q - q_3)(q - q_4)|^{9\gamma} \\ &\geq |\tau(\tilde{\rho} + 2r)(q - q_3)(q - q_4)|^{3\gamma} \\ &\quad \times \left\{ \frac{\tau}{2}(\tilde{\rho} + 2r)(q_4 - q_3) \min(|q - q_3|, |q - q_4|) \right\}^{6\gamma} \\ &= c\tau^{9\gamma} |\tilde{\rho}|^{3\gamma} |\tilde{\rho} + 2r|^{6\gamma} (|r - r_3||r - r_4|)^{3\gamma} (|q - q_3||q - q_4|)^{3\gamma} \\ &\quad \times \min(|q - q_3|^{6\gamma}, |q - q_4|^{6\gamma}), \end{aligned} \quad (2.53)$$

где $q_{3,4} = r - \frac{\tilde{\rho}}{2} \pm \sqrt{\frac{-4\tilde{\rho}r^2 - 2r(\tilde{\rho}^2 - 4y^2) + \tilde{\rho}^3 - 4\text{Re } \mathbf{P}}{\tilde{\rho} + 2r}}$ суть корни квадратного уравнения

$$\text{Re } L = (\tilde{\rho} + 2r)q^2 + (\tilde{\rho}^2 - 4r^2)q + 2r^3 - 2y^2r + \text{Re } \mathbf{P} = 0,$$

а $r_{3,4} = \frac{1}{4\tilde{\rho}}(4y^2 - \tilde{\rho}^2 \pm ((4y^2 - \tilde{\rho}^2)^2 + 4\tilde{\rho}(\tilde{\rho}^3 - 4\text{Re } \mathbf{P}))^{1/2})$ — это корни уравнения

$$4\tilde{\rho}r^2 + 2(\tilde{\rho}^2 - 4y^2)r - \tilde{\rho}^3 + 4\text{Re } \mathbf{P} = 0,$$

так что выполнено равенство $(\tilde{\rho} + 2r)(q_3 - q_4)^2 = -4\tilde{\rho}(r - r_3)(r - r_4)$, под корнем понимаем его главное значение, так что $\sqrt{1} = 1$. Применив оценки (2.3), (2.38), (2.53) и учитывая неравенства

$$|H_4| \geq (|r|y^2t)^{(1-\gamma)/2}, \quad |H_5| \geq (R|r - r_1||r - r_2|t)^{(1-13\gamma)/2},$$

$R = \min(|r|, |r - q/3|, |r - r_1|, |r - r_2|)$ получим из (2.52):

$$\begin{aligned} \left| \int_1^t I_3 d\tau \right| &\leq cE(p, t) \int_{\mathbb{R}_3} dq dr dy M^2(\xi_1) F(\xi) |y|^{\gamma-1} |r|^{(\gamma-1)/2} \\ &\quad \times (R|r - r_1||r - r_2|)^{(13\gamma-1)/2} \\ &\quad \times (|\tilde{\rho} + 2r|^2 |\tilde{\rho}| |r - r_3||r - r_4||q - q_3||q - q_4|)^{-3\gamma} \max(|q - q_3|^{-6\gamma}, |q - q_4|^{-6\gamma}) \\ &\quad \times \left\{ t^{1-(1-\gamma)/2-(1-13\gamma)/2-9\gamma} + \int_1^t d\tau \tau^{\gamma+(\gamma-1)/2+(13\gamma-1)/2-9\gamma} \right\} \\ &\leq cE(p, t) \int_{\mathbb{R}_3} dq dr dy M^2(\xi_1) F(\xi) |y|^{\gamma-1} |r|^{(\gamma-1)/2} \\ &\quad \times (|\tilde{\rho} + 2r|^2 |\tilde{\rho}| |r - r_3||r - r_4||q - q_3||q - q_4|)^{-3\gamma} \\ &\quad \times \left\{ (|r||r - r_1||r - r_2|)^{(13\gamma-1)/2} + (|q - 3r||r - r_1||r - r_2|)^{(13\gamma-1)/2} \right. \\ &\quad \left. + (|r - r_1|^2 |r - r_2|)^{(13\gamma-1)/2} + (|r - r_2|^2 |r - r_1|)^{(13\gamma-1)/2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Заметим теперь, что корень $r_1(q) = \frac{2}{3}q + \frac{1}{3}\sqrt{q^2 + 3y}$ является обратной функцией к функции $q_1(r) = 2r - \sqrt{r^2 + y^2}$ ($y \in \mathbb{R}_1$ фиксировано). Поэтому по теореме Лагранжа найдется точка r^* между r_1 и r такая, что $q_1(r) - q = (r - r_1(q)) \frac{dq_1(r^*)}{dr}$, причем производная $\frac{dq_1(r)}{dr} = 2 - \frac{r}{\sqrt{r^2 + y^2}}$ может принимать значения только из интервала (1.3), так что имеем неравенство $|r - r_1(q)| \leq |q - q_1(r)| \leq 3|r - r_1(q)|$. Аналогичное неравенство справедливо для $r_2(q)$ и $q_2(r)$. Таким образом, из (2.54) получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_1^t I_3 d\tau \right| &\leq cE(p, t) \int_{\mathbb{R}_3} dq dr dy M^2(\xi_1) F(\xi) |y|^{\gamma-1} |r|^{(\gamma-1)/2} \\ &\quad \times (|\tilde{\rho} + 2r|^2 |\tilde{\rho}| |r - r_3| |r - r_4| |q - q_3| |q - q_4|)^{-3\gamma} \\ &\quad \times \left\{ (|r| |q - q_1| |q - q_2|)^{(13\gamma-1)/2} + (|q - 3r| |q - q_1| |q - q_2|)^{(13\gamma-1)/2} \right. \\ &\quad \left. + (|q - q_1|^2 |q - q_2|)^{(13\gamma-1)/2} + (|q - q_2|^2 |q - q_1|)^{(13\gamma-1)/2} \right\}. \end{aligned}$$

Так как $q_2 - q_1 = 2\sqrt{r^2 + y^2} \geq |r|$, то при $\beta = \frac{1}{2}(1 - 13\gamma) \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$(|q - q_1| |q - q_2|)^{-\beta} \leq c|r|^{-\beta} (|q - q_1|^{-\beta} + |q - q_2|^{-\beta}),$$

а также

$$(|q - 3r| |q - q_1| |q - q_2|)^{-\beta} \leq c|r|^{-\beta} (|q - 3r|^{-2\beta} + |q - q_1|^{-2\beta} + |q - q_2|^{-2\beta}),$$

поскольку при $r > 0$ имеем $|3r - q_1| = |r + \sqrt{r^2 + y^2}| \geq |r|$, а при $r < 0$: $|3r - q_2| = |r - \sqrt{r^2 + y^2}| \geq |r|$. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_1^t I_3 d\tau \right| &\leq cE(p, t) \int_{\mathbb{R}_3} dq dr dy M^2(\xi_1) F(\xi) |y|^{\gamma-1} |r|^{7\gamma-1} |\tilde{\rho}|^{-3\gamma} \\ &\quad \times (|\tilde{\rho} + 2r|^2 |r - r_3| |r - r_4|)^{-3\gamma} \\ &\quad \times (|q - q_3|^{-9\gamma} + |q - q_4|^{-9\gamma}) \\ &\quad \times (|q - 3r|^{13\gamma-1} + |q - q_1|^{13\gamma-1} + |q - q_2|^{13\gamma-1}) \\ &\leq c|\tilde{\rho}|^{-9\gamma} E(p, t) \int_{\mathbb{R}_1} dy \int_{\mathbb{R}_1} dr \int_{\mathbb{R}_1} dq M^2(\xi_1) F(\xi) |y|^{\gamma-1} \\ &\quad \times (|r|^{\gamma-1} + |\tilde{\rho} + 2r|^{\gamma-1} + |r - r_3|^{\gamma-1} + |r - r_4|^{\gamma-1}) \\ &\quad \times (|q - q_1|^{\gamma-1} + |q - q_2|^{\gamma-1} + |q - q_3|^{\gamma-1} + |q - 3r|^{\gamma-1}) \\ &\leq cE(p, t) m^{-9\gamma}(\tilde{\rho}) \prod_{j=5}^n M^{-4}(\xi_j). \end{aligned} \tag{2.55}$$

Интеграл I_2 запишем в виде (как в (2.31))

$$I_2 = I_6 + I_7,$$

где

$$I_6 = \int_{\mathbb{R}_3} dq dr dy e^{itL} \mathcal{G}_2 y \frac{\partial g}{\partial \xi_4},$$

$$I_7 = - \int_{\mathbb{R}_3} dq dr dy \frac{e^{itL}}{H_4 H_6} Q \left\{ 2y \frac{\partial^2 g}{\partial \xi_2 \partial \xi_4} - 2y \frac{\partial^2 g}{\partial \xi_3 \partial \xi_4} - \frac{\partial g}{\partial \xi_4} \right\}.$$

Функция $\mathcal{G}_2$ та же, что и в лемме 2. В интеграле I_6 воспользуемся представлением (2.39)

$$I_6 = \int_{\mathbb{R}_3} dq dr dy e^{itL} \mathcal{G}_2 y (\psi_1 + \psi_2) = I_8 + I_9.$$

Для интеграла I_8 как в (2.32) в силу оценки (2.40) получим

$$\left| \int_1^t I_8 d\tau \right| \leq cE(p, t) \prod_{j=5}^n M^{-4}(\xi_j). \quad (2.56)$$

А в интеграле $\int_1^t I_9 d\tau$ вновь проинтегрируем по τ по частям с помощью тождества (2.51):

$$\begin{aligned} \int_1^t d\tau I_9 &= \int_{\mathbb{R}_3} dq dr dy \frac{e^{itL}}{H_7} \tau y \mathcal{G}_2 \psi_2 \Big|_1^t \\ &\quad - \int_1^t d\tau \int_{\mathbb{R}_3} dq dr dy \frac{e^{i\tau L}}{H_7} \left\{ \delta \left(\frac{1}{H_7} - 1 \right) y \mathcal{G}_2 \psi_2 + \tau y (\mathcal{G}_2 \psi_2)'_r \right\}. \end{aligned}$$

Откуда ввиду (2.3), (2.24), (2.41) и (2.53) найдем

$$\begin{aligned} \left| \int_1^t I_9 d\tau \right| &\leq cE(p, t) \int_{\mathbb{R}_3} dq dr dy F(\xi) M^2(\xi_1) M(\xi_4) \\ &\quad \times m^{-1/8} (r+y) |y|^{-7/8} |r|^{-15/16} (|\tilde{\rho} + 2r||q - q_3||q - q_4|)^{-1/8} \\ &\leq cm^{-1/8}(p) E(p, t). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Для оставшегося интеграла I_7 достаточной является оценка (2.33), с помощью которой находим

$$\left| \int_0^t I_7 d\tau \right| \leq cE(p, t) \prod_{j=5}^n M^{-4}(\xi_j).$$

Теперь из оценок (2.50), (2.55)–(2.57) следует неравенство (2.49) в случае $t \geq 1$, $|p| \leq 1$.

4) Остается рассмотреть случай $t > 0$, $|p| \geq 1$. Разобьем интеграл $\tilde{J}_2$ на две части

$$\tilde{J}_2 = \int_{\mathbb{R}_3} dq dr dy e^{itL} g \{ (1 - \varphi_1 \varphi_2) + \varphi_1 \varphi_2 \} = I_{10} + I_{11}.$$

Для интеграла $\int_0^t I_{10} d\tau$ оценки те же, что и выше в случае 3). Только вместо неравенства (2.24) теперь можно использовать оценку (2.35), а также следующее неравенство

$$F(\xi)M^2(\xi_1) \leq cM^{-4}(p)(M^{-2}(q) + M^{-2}(\xi_1))(M^{-2}(r) + M^{-2}(\xi_2)) \\ \times (M^{-2}(\xi_3) + M^{-2}(\xi_4)) \prod_{l=5}^n M^{-4}(\xi_l),$$

и, кроме того, в области $\mathbb{R}_{n-1} \setminus \Omega_4$ имеем

$$F(\xi)M^2(\xi_1)M(\xi_4)M^{-7/8}(y)M^{-15/16}(r) \leq cM^{-4}(p)F_5(\xi),$$

где $F_5(\xi) = M^{-2}(\xi_1)(M^{-4}(\xi_2)M^{-3}(\xi_4) + M^{-4}(\xi_3)M^{-3}(\xi_4) + M^{-4}(\xi_2)M^{-4}(\xi_3)) \times \prod_{l=5}^n M^{-4}(\xi_l)$. Действительно, надо рассмотреть три случая: 1) $|\xi_2| \geq |\tilde{p}|/32$, 2) $|\xi_3| \geq |\tilde{p}|/32$ и 3) $|\xi_2| < |\tilde{p}|/32$, $|\xi_3| < |\tilde{p}|/32$. В последнем случае в области $K \cap (R_{n-1} \setminus \Omega_4)$ получим $|q| > c|\tilde{p}|$, $|r| > c|\tilde{p}|$, $|y| > c|\tilde{p}|$, так что

$$M^{-3}(\xi_4)M^{-7/8}(y)M^{-15/16}(r) \leq cM^{-4}(\tilde{p}) \\ \leq cM^{-4}(p)\left(|\tilde{p}| + \sum_{l=5}^n M(\xi_l)\right)^4 M^{-4}(\tilde{p}) \leq cM^{-4}(p).$$

Итак, используя оценки леммы 2 (см. (2.37)), приходим к неравенству (2.49). Остается рассмотреть интеграл $\int_0^t I_{11} d\tau$. Прежде всего, проинтегрируем по частям по τ ввиду формулы (2.51)

$$\int_0^t I_{11} d\tau = \int_{\mathbb{R}_3} dq dr dy \frac{e^{itL}}{H_7} g\varphi_1\varphi_2 t \\ - \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}_3} dq dr dy \frac{e^{i\tau L}}{H_7} \varphi_1\varphi_2 \left\{ \delta\left(\frac{1}{H_7} - 1\right) g + \tau g'_\tau \right\}.$$

Далее, ввиду представления (2.42) находим

$$\int_0^t I_{11} d\tau = I_{12} + I_{13} + I_{14}, \quad (2.58)$$

где

$$I_{12} = \int_{\mathbb{R}_3} dq dr dy \frac{e^{itL}}{H_7} g\varphi_1\varphi_2 t - \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}_3} dq dr dy \frac{e^{i\tau L}}{H_7} \psi_3\varphi_1\varphi_2 \tau, \\ I_{13} = - \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}_3} dq dr dy \frac{e^{i\tau L}}{H_7} \left\{ \delta\left(\frac{1}{H_7} - 1\right) g + \tau \psi_4 \right\} \varphi_1\varphi_2, \\ I_{14} = - \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}_3} dq dr dy \int_{\mathbb{R}_{n-1}} d\bar{q} d\bar{r} d\bar{y} d\bar{\xi}_5 \dots d\bar{\xi}_n \frac{e^{i\tau(L+\bar{L})}}{H_7} \tau \varphi_1\varphi_2 \bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2 \psi_5.$$

Интеграл I_{12} оценим с помощью неравенства

$$\begin{aligned} |H_7| &\geq |t \operatorname{Re} L| \geq ct |\operatorname{Re} L|^{3/4} |\operatorname{Re} Y|^{1/4} \\ &\geq ct |\tilde{\rho}|^{3/2} \min(|q - q_3|^{3/4}, |q - q_4|^{3/4}) |r|^{1/4} |y|^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.59)$$

если $|\tilde{\rho}| \geq 1$, и

$$\begin{aligned} |H_7| &\geq ct |\operatorname{Re} L|^{\frac{1+4\gamma}{2}} |\operatorname{Re} L|^{\frac{1-4\gamma}{2}} \\ &\geq ct |\tilde{\rho}|^{\frac{3(1+4\gamma)}{4}} \min(|q - q_3|^{\frac{3(1+4\gamma)}{4}}, |q - q_4|^{\frac{3(1+4\gamma)}{4}}) (|r|y^2)^{\frac{1-4\gamma}{2}}, \end{aligned} \quad (2.60)$$

если $|\tilde{\rho}| \leq 1$. Тогда в силу (2.3), (2.24) и (2.43) найдем

$$\begin{aligned} |I_{12}| &\leq cE(p, t) M^{-3/2} (\tilde{\rho}) m^{-\frac{3}{4}-3\gamma} (\tilde{\rho}) \int_{\mathbb{R}_3} dq dr dy F(\xi) M(\xi_1) \\ &\quad \times m^{\frac{4\gamma-1}{2}}(r) m^{4\gamma-1}(y) (m^{-\frac{3}{4}-3\gamma}(q - q_3) + m^{-\frac{3}{4}-3\gamma}(q - q_4)) \\ &\leq cM^{-4}(p) E(p, t) m^{-\frac{3}{4}-3\gamma} (\tilde{\rho}) \prod_{j=5}^n M^{-4}(\xi_j). \end{aligned} \quad (2.61)$$

В интеграле I_{13} проинтегрируем по частям по y с помощью тождества (2.25)

$$\begin{aligned} I_{13} &= \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}_3} dq dr dy \frac{e^{i\tau L}}{H_4 H_7} \left\{ \delta \left(\left(\frac{1}{H_7} - 1 \right) g + \tau \psi_4 \right) \times \right. \\ &\quad \times \left(\varphi_1 \varphi_2 \left(2 - \frac{y H'_{4y}}{H_4} - \frac{y H'_{7y}}{H_7} \right) + y (\varphi_1 \varphi_2)'_y \right) \\ &\quad \left. + y \varphi_1 \varphi_2 \left(-\frac{H'_{7y}}{H_7} g + \left(\frac{1}{H_7} - 1 \right) g'_y + \tau \psi'_{4y} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Из-за функции φ_2 имеем $|y H'_{7y} H_7^{-1}| \leq c$, кроме того, $|y \varphi'_{ly}| \leq c$, $l = 1, 2$, поэтому

$$\begin{aligned} |I_{13}| &\leq cE(p, t) \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}_3} dq dr dy F(\xi) M(\xi_1) (1 + Z(r + y, r - y) |y|) \\ &\quad \times |r|^{-3/4} (1 + \tau)^{-\frac{1}{4}-\frac{\gamma}{2}} M^{-3/2} (\tilde{\rho}) m^{-\frac{3}{4}-3\gamma} (\tilde{\rho}) m^{\frac{\gamma}{4}-\frac{1}{2}}(r) m^{\frac{\gamma}{2}-1}(y) \\ &\quad \times (m^{-\frac{3}{4}-3\gamma}(q - q_3) + m^{-\frac{3}{4}-3\gamma}(q - q_4)) \\ &\leq cM^{-4}(p) E(p, t) m^{-\frac{3}{4}-3\gamma} (\tilde{\rho}) \prod_{j=5}^n M^{-4}(\xi_j). \end{aligned} \quad (2.62)$$

В интеграле I_{14} проинтегрируем еще раз по частям по τ , в силу представления (2.46) получим (функции $\bar{\varphi}_1$ и $\bar{\varphi}_2$ определены так же, как и φ_1 и φ_2 , но зависят от переменных с чертой сверху) $I_{14} = I_{15} + I_{16}$, где

$$\begin{aligned} I_{15} &= - \int_{\mathbb{R}_3} dq dr dy \int_{\mathbb{R}_{n-1}} d\bar{q} d\bar{y} d\bar{r} d\bar{\xi}_5 \dots d\bar{\xi}_n H_7^{-1} H_8^{-1} \varphi_1 \varphi_2 \bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2 t^2 \psi_5 e^{it(L+\bar{L})} \\ &\quad + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}_3} dq dr dy \int_{\mathbb{R}_{n-1}} d\bar{q} d\bar{r} d\bar{y} d\bar{\xi}_5 \dots d\bar{\xi}_n H_7^{-1} H_8^{-1} \varphi_1 \varphi_2 \bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2 \tau^2 \psi_7 e^{i\tau(L+\bar{L})}; \\ I_{16} &= \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}_3} dq dr dy \int_{\mathbb{R}_{n-1}} d\bar{q} d\bar{r} d\bar{y} d\bar{\xi}_5 \dots d\bar{\xi}_n H_7^{-1} H_8^{-1} \varphi_1 \varphi_2 \bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2 e^{i\tau(L+\bar{L})} \\ &\quad \times ((-1 + H_7^{-1} + H_8^{-1}) \tau \psi_5 + \tau^2 \psi_6). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тождеством

$$e^{i\tau(L+\overline{L})} = H_8^{-1} \frac{\partial}{\partial \tau} (\tau e^{i\tau(L+\overline{L})}), \quad H_8 = 1 + i\tau(L + \overline{L}).$$

Так как

$$|e^{it(L+\overline{L})} \Lambda_1(\xi, \bar{\xi}, \nu, t)| \leq cE(p, t),$$

то ввиду (2.45) и (2.48) оценим I_{15} следующим образом

$$\begin{aligned} |I_{15}| &\leq c \int_{\mathbb{R}_3} dq dr dy \int_{\mathbb{R}_{n-1}} d\bar{q} d\bar{r} d\bar{y} d\bar{\xi}_5 \dots d\bar{\xi}_n |e^{it(L+\overline{L})} \Lambda_1(\xi, \bar{\xi}, \nu, t)| \\ &\quad \times F(\xi) F(\bar{\xi}) M^5(\xi_1) M^2(\bar{\xi}_1) M^{-3/2}(\tilde{\rho}) M^{-3/2}(\tilde{\bar{\rho}}) m^{-\frac{3}{4}-3\gamma}(\tilde{\rho}) \\ &\quad \times m^{-\frac{3}{4}-3\gamma}(\tilde{\bar{\rho}}) m^{2\gamma-1/2}(r) m^{2\gamma-1/2}(\bar{r}) m^{4\gamma-1}(y) m^{4\gamma-1}(\bar{y}) \\ &\quad \times (m^{-\frac{3}{4}-3\gamma}(q - q_3) + m^{-\frac{3}{4}-3\gamma}(q - q_4)) \\ &\quad \times (m^{-\frac{3}{4}-3\gamma}(\bar{q} - \bar{q}_3) + m^{-\frac{3}{4}-3\gamma}(\bar{q} - \bar{q}_4)) \\ &\leq cM^{-4}(p) m^{-\frac{3}{4}-3\gamma}(\tilde{\rho}) E(p, t) \prod_{j=5}^n M^{-4}(\xi_j). \end{aligned} \quad (2.63)$$

В интеграле I_{16} убывание по t недостаточно, поэтому проинтегрируем по частям по y :

$$\begin{aligned} I_{16} &= \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}_3} dq dr dy \int_{\mathbb{R}_{n-1}} d\bar{q} d\bar{r} d\bar{y} d\bar{\xi}_5 \dots d\bar{\xi}_n \varphi_1 \varphi_2 \tau e^{i\tau(L+\overline{L})} H_7^{-1} H_8^{-1} \overline{H}_4^{-1} \\ &\quad \times \left\{ (2\overline{\varphi}_1 \overline{\varphi}_2 - \overline{y} \overline{\varphi}_1 \overline{\varphi}_2 (\overline{H}_{4y}' \overline{H}_4^{-1} + H_{8y}' H_8^{-1}) + \overline{y} (\overline{\varphi}_1 \overline{\varphi}_2)'_y) \right. \\ &\quad \times ((-1 + H_7^{-1} + H_8^{-1}) \psi_5 + \tau \psi_6) \\ &\quad \left. + \overline{y} \overline{\varphi}_1 \overline{\varphi}_2 (-\overline{H}_{8y}' \overline{H}_8^{-1} \psi_5 + (-1 + H_7^{-1} + H_8^{-1}) \psi_{5y}' + \tau \psi_{6y}') \right\}. \end{aligned}$$

Появление H_4 в знаменателе добавляет убывание по времени как $t^{-3\gamma/2}$, так что ввиду неравенств

$$|\overline{y} \overline{H}_{4y}' \overline{H}_4^{-1}| \leq c, \quad |\overline{y} \overline{H}_{8y}' \overline{H}_8^{-1}| \leq c, \quad |\overline{y} \overline{\varphi}_{ly}'| \leq c, \quad l = 1, 2,$$

а также в силу (2.24), (2.45) и (2.47) получаем для I_{16} оценку

$$\begin{aligned} |I_{16}| &\leq cE(p, t) \int_{\mathbb{R}_3} dq dr dy \int_{\mathbb{R}_{n-1}} d\bar{q} d\bar{r} d\bar{y} d\bar{\xi}_5 \dots d\bar{\xi}_n F(\xi) F(\bar{\xi}) M^5(\xi_1) \\ &\quad \times M^2(\bar{\xi}_1) (1 + |\overline{y}| (m^{-1/8}(\bar{r} + \bar{y}) + m^{-1/8}(\bar{r} - \bar{y}))) M^{-3/2}(\tilde{\rho}) \\ &\quad \times M^{-3/2}(\tilde{\bar{\rho}}) m^{-\frac{3}{4}-3\gamma}(\tilde{\rho}) m^{-\frac{3}{4}-3\gamma}(\tilde{\bar{\rho}}) m^{\frac{\gamma}{4}-\frac{1}{2}}(r) \times \\ &\quad \times m^{\frac{\gamma}{4}-\frac{1}{2}}(\bar{r}) m^{\frac{\gamma}{2}-1}(y) m^{\frac{\gamma}{2}-1}(\bar{y}) (m^{-\frac{3}{4}-3\gamma}(q - q_3) + m^{-\frac{3}{4}-3\gamma}(q - q_4)) \\ &\quad \times (m^{-\frac{3}{4}-3\gamma}(\bar{q} - \bar{q}_3) + m^{-\frac{3}{4}-3\gamma}(\bar{q} - \bar{q}_4)) \\ &\leq cM^{-4}(p) E(p, t) m^{-\frac{3}{4}-3\gamma}(\tilde{\rho}) \prod_{j=5}^n M^{-4}(\xi_j). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Из оценок (2.60), (2.61)–(2.64) приходим к требуемой оценке (2.49). Лемма 3 доказана.

§ 3. Доказательство теоремы

3.1. Теория возмущений. Применим к уравнению (1.1) преобразование Фурье $\widehat{u}(p, t) = \int_{\mathbb{R}_1} e^{-ipx} u(x, t) dx$, $p \in \mathbb{R}_1$, $t \geq 0$, получим ($n \geq 4$):

$$\widehat{u}_t(p, t) + ip \int_{\mathbb{R}_{n-1}} d\xi_2 \dots d\xi_n \prod_{l=1}^n \widehat{u}(\xi_l, t) - \frac{ip^3}{3} \widehat{u}(p, t) = 0, \quad (3.1)$$

где $\xi_1 = p - \sum_{l=2}^n \xi_l$. Проинтегрировав (3.1) по t , найдем:

$$\widehat{u}(p, t) = \widehat{u}(p) e^{ip^3 t/3} - ip \int_0^t d\tau e^{ip^3(t-\tau)/3} \int_{\mathbb{R}_{n-1}} d\xi_2 \dots d\xi_n \prod_{l=1}^n \widehat{u}(\xi_l, \tau).$$

Отсюда, заменив $\widehat{u}(p, t)$ на новую функцию $v(p, t)$, $v(p, t) = \widehat{u}(p, t) e^{-ip^3 t/3}$, получим при $p \in \mathbb{R}_1$, $t \geq 0$

$$v(p, t) = \widehat{u}(p) - ip \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}_{n-1}} d\xi_2 \dots d\xi_n e^{i\tau L} \prod_{l=1}^n v(\xi_l, \tau), \quad (3.2)$$

где $L = L(\xi_1, \dots, \xi_n) = -\frac{p^3}{3} + \frac{1}{3} \sum_{l=1}^n \xi_l^3$, $p = \sum_{l=1}^n \xi_l$. Далее нам потребуются формулы для производных по p от функции $v(p, t)$. Чтобы при дифференцировании по p не затрагивать экспоненту под интегралом в формуле (3.2), воспользуемся однородностью функции L и сделаем замену переменных $\tau p^3 = \bar{\tau}$, $\xi_l = p \bar{\xi}_l$, $1 \leq l \leq n$, $\bar{L} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \sum_{l=1}^n \bar{\xi}_l^3$. Тогда из (3.2) найдем

$$v(p, t) = \widehat{u}(p) - ip^{n-3} \int_0^{tp^3} d\bar{\tau} \int_{\mathbb{R}_{n-1}} d\bar{\xi}_2 \dots d\bar{\xi}_n e^{i\bar{\tau} \bar{L}} \prod_{l=1}^n v\left(p \bar{\xi}_l, \frac{\bar{\tau}}{p^3}\right).$$

Отсюда, продифференцировав по p и воспользовавшись симметрией интеграла по переменным $\xi_1, \dots, \xi_n$, получим

$$\begin{aligned} v'_p(p, t) &= \widehat{u}'(p) - i(n-3)p^{n-4} \int_0^{tp^3} d\bar{\tau} \int_{\mathbb{R}_{n-1}} d\bar{\xi}_2 \dots d\bar{\xi}_n e^{i\bar{\tau} \bar{L}} \prod_{l=1}^n v\left(p \bar{\xi}_l, \frac{\bar{\tau}}{p^3}\right) \\ &\quad - 3itp^{n-1} \int_{\mathbb{R}_{n-1}} d\bar{\xi}_2 \dots d\bar{\xi}_n e^{itp^3 \bar{L}} \prod_{l=1}^n v(p \bar{\xi}_l, t) \\ &\quad - inp^{n-3} \int_0^{tp^3} d\bar{\tau} \int_{\mathbb{R}_{n-1}} d\bar{\xi}_2 \dots d\bar{\xi}_n e^{i\bar{\tau} \bar{L}} \bar{\xi}_1 w\left(\bar{\xi}_1 p, \frac{\bar{\tau}}{p^3}\right) \prod_{l=2}^n v\left(p \bar{\xi}_l, \frac{\bar{\tau}}{p^3}\right), \end{aligned}$$

где $w(p, t) = v'_p(p, t) - \frac{3t}{p} v'_t(p, t)$. Возвращаясь к старым переменным, находим

$$\begin{aligned} w(p, t) &= \widehat{u}'(p) + \frac{n-3}{p} (v(p, t) - \widehat{u}(p)) \\ &\quad - in \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}_{n-1}} d\xi_2 \dots d\xi_n e^{i\tau L} \xi_1 w(\xi_1, \tau) \prod_{l=2}^n v(\xi_l, \tau). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Применим теорию возмущений. Обозначим $\bar{v} = \widehat{u}/\varepsilon$ и представим $v(p, t)$ и $w(p, t)$ в виде

$$v(p, t) = \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^{(n-1)N+1} v^{(N)}(p, t); \quad w(p, t) = \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^{(n-1)N+1} w^{(N)}(p, t). \quad (3.4)$$

Подставив (3.4) в (3.2) и (3.3) и сравнив коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим при $N \geq 1$, $p \in \mathbb{R}_1$, $t \geq 0$ следующие рекуррентные соотношения

$$v^{(0)}(p, t) = \bar{v}(p), \quad w^{(0)}(p, t) = \bar{v}'(p); \quad (3.5)$$

$$v^{(N)}(p, t) = -ip \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}_{n-1}} d\xi_2 \dots d\xi_n e^{i\tau \mathbf{L}} V^{(N)}(\xi, \tau); \quad (3.6)$$

$$w^{(N)}(p, t) = \frac{n-3}{p} v^{(N)}(p, t) - i \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}_{n-1}} d\xi_2 \dots d\xi_n e^{i\tau \mathbf{L}} W^{(N)}(\xi, \tau), \quad (3.7)$$

где

$$V^{(N)}(\xi, \tau) = \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n=0, \\ j_1+\dots+j_n=N-1}}^{N-1} \prod_{l=1}^n v^{(j_l)}(\xi_l, \tau),$$

$$W^{(N)}(\xi, \tau) = n \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n=0, \\ j_1+\dots+j_n=N-1}} \xi_1 w^{(j_1)}(\xi_1, \tau) \prod_{l=2}^n v^{(j_l)}(\xi_l, \tau).$$

Из формул (3.5)–(3.7) по индукции легко установить, что если функция $\widehat{u}(p)$ аналитична по p в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{p \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} p \geq 0\}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, то и все функции $v^{(N)}(p, t)$ и $w^{(N)}(p, t)$ также аналитичны по p в области $\mathbb{C}_+$.

Докажем при всех $p \in \mathbb{C}_+$, $t > 0$, $p \neq 0$, $N \geq 0$ следующие оценки

$$\left| \frac{\partial v^{(N)}(p, t)}{\partial t} \right| \leq h^{(N)}(p, t) t^{-2/3} (1+t)^{\gamma-1/3-\mu} m^{1-3\mu}(p), \quad (3.8)$$

$$\left| \frac{\partial w^{(N)}(p, t)}{\partial t} \right| \leq h^{(N)}(p, t) t^{-2/3} (1+t)^{\gamma-1/3} M(p), \quad (3.9)$$

$$|w^{(N)}(p, t)| \leq h^{(N)}(p, t) m^{-1/8}(p), \quad (3.10)$$

где

$$m(p) = \min(1, |p|), \quad M(p) = \max(1, |p|),$$

$$h^{(N)}(p, t) = c^N (N+1)^{-4} e^{a\sigma^3} M^{-4}(p) E(p, t),$$

$$E(p, t) = \exp(\sigma \rho^2 t (1 - \nu_N)),$$

$$\nu_N = (4\alpha)^{-N}, \quad \alpha = n(1 + 2^{2n-7}), \quad \mu \in [0, 3\gamma], \quad \sigma = \operatorname{Im} p,$$

$a \geq 0$ взято из условия (1.2) теоремы, $\gamma > 0$ – некоторая малая постоянная, $c > 0$ – здесь и всюду далее обозначает различные не зависящие от номера N постоянные.

Из оценок (3.8)–(3.10) в силу равенства $v^{(N)}(p, 0) = 0$ при всех $N \geq 1$ следуют еще две оценки

$$|v^{(N)}(p, t)| \leq h^{(N)}(p, t)m^{1-9\gamma}(p), \quad (3.11)$$

$$\left| \frac{\partial v^{(N)}(p, t)}{\partial p} \right| \leq h^{(N)}(p, t)m^{-1/8}(p). \quad (3.12)$$

При $N = 0$ оценки (3.8)–(3.12) вытекают из условия (1.2) теоремы. Проведем индукцию по $N \geq 1$. Для доказательства (3.8) продифференцируем равенство (3.6) по t , найдем при $p \in \mathbb{C}_+$, $N \geq 1$, $t \geq 0$

$$v_t^{(N)}(p, t) = -ip \int_{\mathbb{R}_{n-1}} d\xi_2 \dots d\xi_n e^{it\mathbf{L}} V^{(N)}(\xi_1, \dots, \xi_n, t). \quad (3.13)$$

Разобьем $\mathbb{R}_{n-1}$ на $(n-1)!$ областей вида

$$\{\operatorname{Re} \xi_2, \dots, \operatorname{Re} \xi_n \in \mathbb{R}_1 : |\operatorname{Re} \xi_2| > |\operatorname{Re} \xi_3| > \dots > |\operatorname{Re} \xi_n|\},$$

а также всех получающихся отсюда перестановками переменных ξ_j . Введем разбиение единицы, подчиненное этим областям:

$$\sum_{j=1}^{(n-1)!} \Psi_j(\operatorname{Re} \xi_1, \dots, \operatorname{Re} \xi_n) = 1, \quad \Psi_j \in C_{0,B}^\infty(\mathbb{R}_{n-1}).$$

Для определенности будем считать, что носитель функции Ψ_1 лежит в области

$$K_1 = \{\xi_2, \xi_3, \xi_4 \in \mathbb{C}_+, \xi_j \in \mathbb{R}_1, 5 \leq j \leq n : \\ |\operatorname{Re} \xi_2| \geq \frac{1}{2} |\operatorname{Re} \xi_3| \geq \dots \geq 2^{1-n} |\operatorname{Re} \xi_n|\},$$

а остальные функции Ψ_j имеют носитель в областях K_j , которые получаются из K_1 перестановками независимых переменных $\xi_2, \dots, \xi_n$. Таким образом, получаем из (3.13)

$$v_t^{(N)}(p, t) = -ip \sum_{j=1}^{(n-1)!} \int_{\mathbb{R}_{n-1}} d\xi_2 \dots d\xi_n e^{it\mathbf{L}} V_j^{(N)}(\xi_1, \dots, \xi_n, t), \quad (3.14)$$

где $V_j^{(N)}(\xi, t) = V^{(N)}(\xi, t) \Psi_j(\operatorname{Re} \xi_2, \dots, \operatorname{Re} \xi_n)$. Все интегралы в сумме по j в формуле (3.14) абсолютно идентичны. Поэтому мы будем все время рассматривать интеграл с $j = 1$ и единицу у функции V_1 будем опускать. Покажем, что выполнены условия леммы 1. Перейдем в (3.14) от интегрирования по переменным ξ_2, ξ_3 и ξ_4 к интегрированию по новым переменным s, y, z по формулам

$$\xi_1 = \frac{\tilde{p} + s}{4} + y, \quad \xi_2 = \frac{\tilde{p} + s}{4} - y, \quad \xi_3 = \frac{\tilde{p} - s}{4} + z, \quad \xi_4 = \frac{\tilde{p} - s}{4} - z,$$

получим (якобиан перехода равен $1/2$)

$$v_t^{(N)}(p, t) = \sum_{j=1}^{(n-1)!} J_j,$$

где

$$J_j = -\frac{i}{2}p \int_{\mathbb{R}_{n-1}} ds dy dz d\xi_5 \dots d\xi_n e^{it\mathcal{L}} V_j^{(N)}(\xi_1, \dots, \xi_n, t),$$

$$\tilde{p} = p - \sum_{l=5}^n \xi_l, \quad \mathcal{L} = \frac{\tilde{p}s^2}{16} + \frac{\tilde{p}+s}{2}y^2 + \frac{\tilde{p}-s}{2}z^2 + \mathbf{P}, \quad \mathbf{P} = -\frac{p^3}{3} + \frac{\tilde{p}^3}{48} + \frac{1}{3} \sum_{l=5}^n \xi_l^3.$$

Обозначив $p = \rho + i\sigma$, $\tilde{p} = \tilde{\rho} + i\sigma$, перепишем $\mathcal{L}$ и $\mathbf{P}$ в виде

$$\mathcal{L}(p, s, y, z) = \frac{\tilde{\rho}s^2}{16} + \frac{\tilde{\rho}+s}{2}y^2 + \frac{\tilde{\rho}-s}{2}z^2 + \frac{i\sigma}{2} \left(y^2 + z^2 + \frac{s^2}{8} \right) + \mathbf{P},$$

$$\mathbf{P} = -\frac{\rho^3}{3} + \rho\sigma^2 + \frac{\tilde{\rho}^3}{48} - \frac{\tilde{\rho}\sigma^3}{16} + \frac{1}{3} \sum_{l=5}^n \xi_l^3 + \frac{i\sigma}{48}(3\tilde{\rho}^2 - \sigma^2) + \frac{i\sigma}{3}(\sigma^2 - 3\rho^2).$$

В силу предположения индукции, пользуясь неравенствами (3.11) и (3.12), оценим функцию $V^{(n)}$ следующим образом при $j, k = 0, 1$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial^{j+k} V^{(N)}(\xi, t)}{\partial y^j \partial z^k} \right| \\ &= \left| \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n=0, \\ j_1 + \dots + j_n = N-1}} \prod_{l=5}^n v^{(j_l)}(\xi_l, t) \frac{\partial^{j+k}}{\partial y^j \partial z^k} \left(\Psi(\operatorname{Re} \xi_2, \dots, \xi_n) \prod_{l=1}^4 v^{(j_l)}(\xi_l, t) \right) \right| \\ &\leq c^{N-1} (m^{1-9\gamma}(\xi_1) m^{-j/8}(\xi_2) + m^{-j/8}(\xi_1) m^{1-9\gamma}(\xi_2)) \\ &\quad \times (m^{1-9\gamma}(\xi_3) m^{-k/8}(\xi_4) + m^{-k/8}(\xi_3) m^{1-9\gamma}(\xi_4)) \prod_{l=5}^n m^{1-9\gamma}(\xi_l) e^{a\sigma^3/16} \\ &\quad \times \prod_{l=1}^4 E(\xi_l, t) \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n=0, \\ j_1 + \dots + j_n = N-1}}^{N-1} \prod_{l=1}^n (j_l + 1)^{-4} M^{-4}(\xi_l) \\ &\leq c^N (N+1)^{-4} Z^j(\xi_1, \xi_2) Z^k(\xi_3, \xi_4) F(\xi) e^{a\sigma^3} \Lambda(\xi, \nu_{N-1}, t), \end{aligned}$$

где

$$\Lambda(\xi, \nu_{N-1}, t) = \exp \left(\frac{\sigma t}{4} (1 - \nu_{N-1}) \sum_{l=1}^4 (\operatorname{Re} \xi_l)^2 \right),$$

$$F(\xi) = \prod_{l=1}^n M^{-4}(\xi_l), \quad Z(\xi_1, \xi_2) = m^{-1/8}(\xi_1) + m^{-1/8}(\xi_2).$$

Здесь мы использовали неравенство

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n=0, \\ j_1 + \dots + j_n = N-1}}^{N-1} \prod_{l=1}^n (j_l + 1)^{-4} \\
& \leq c \sum_{j_2=0}^{N-1} \sum_{j_3=0}^{N-1} \dots \sum_{j_n=0}^{N-1} (|N - j_2 - j_3 - \dots - j_n| + 1)^{-4} \prod_{l=2}^n (j_l + 1)^{-4} \\
& \leq c(N+1)^{-4},
\end{aligned} \tag{3.15}$$

(если $0 \leq j_l \leq N/(2n)$, $2 \leq l \leq n$, то вынесем первый множитель, а остальные суммируем, в противном случае, если $j_l \geq N/(2n)$, то соответствующий множитель $(j_l + 1)^{-4}$ выносим, а остальные суммируем). Кроме того, справедлива оценка

$$\begin{aligned}
\prod_{l=1}^4 E(\xi_l, t) &= \exp \left\{ \frac{\sigma}{4} t \left(\left(\frac{\tilde{\rho} + s}{4} + y \right)^2 (1 - \nu_{j_1}) + \left(\frac{\tilde{\rho} + s}{4} - y \right)^2 (1 - \nu_{j_2}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{\tilde{\rho} - s}{4} + z \right)^2 (1 - \nu_{j_3}) + \left(\frac{\tilde{\rho} - s}{4} - z \right)^2 (1 - \nu_{j_4}) \right) \right\} \\
&\leq \exp \left\{ \frac{\sigma t}{4} (1 - \nu_{N-1}) \sum_{l=1}^4 (\operatorname{Re} \xi_l)^2 \right\} = \Lambda.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Таким образом, функция $f(\xi, t) = (N+1)^4 c^{-N} e^{-a\sigma^3} V^{(N)}(\xi, t)$ удовлетворяет всем условиям леммы 1. Применив лемму 1, получим оценку (3.8). Докажем теперь (3.9). Подобно тому, как из (3.13) мы пришли к (3.14), получим из (3.7)

$$w_t^{(N)}(p, t) = \frac{n-3}{p} v_t^{(N)}(p, t) - i \sum_{j=1}^{(n-1)!} I_j, \tag{3.17}$$

где

$$\begin{aligned}
I_j &= \int_{\mathbb{R}_{n-1}} d\xi_2 \dots d\xi_n e^{itL} W_j^{(N)}(\xi, t), \\
W_j^{(N)}(\xi, t) &= \Psi_j(\operatorname{Re} \xi_2, \dots, \operatorname{Re} \xi_n) W^{(N)}(\xi, t).
\end{aligned}$$

Ограничимся рассмотрением типичного слагаемого I_1 в сумме (3.17). В интеграле I_1 сделаем замену переменных интегрирования: от ξ_2, ξ_3 и ξ_4 перейдем к q, r, y по формулам

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= q + \tilde{\rho} + \frac{i\sigma}{4}, \quad \xi_2 = 2r - q + \frac{i\sigma}{4}, \quad \xi_3 = -r + y + \frac{i\sigma}{4}, \quad \xi_4 = -r - y + \frac{i\sigma}{4}; \\
p &= \rho + i\sigma, \quad \tilde{p} = \tilde{\rho} + i\sigma.
\end{aligned}$$

Тогда получим при $N \geq 1, p \in \mathbb{C}_+, \rho \neq 0, \sigma \geq 0, t \geq 0$

$$I_1 = 2 \int_{\mathbb{R}_{n-1}} dq dr dy d\xi_5 \dots d\xi_n e^{i\tau L} W_1^{(N)}(\xi, \tau), \tag{3.18}$$

где

$$L = L(p, q, r, y) = q\tilde{\rho}(q + \tilde{\rho}) + 2r(r - q)^2 + \frac{i\sigma}{2}(q^2 + q\tilde{\rho} + (3r - 2q)r) + Y + \mathbf{P},$$

$$Y = -2y^2r + \frac{i\sigma}{2}y^2, \quad \mathbf{P} = -\frac{p^3}{3} + \frac{1}{3}\left(\tilde{\rho} + \frac{i\sigma}{4}\right)^3 + \frac{1}{3}\sum_{l=5}^n \xi_l^3 - \frac{i\sigma^3}{64}.$$

Функция $g(\xi, t) = c^{-N}e^{-a\sigma^3}(N+1)^4W_1^{(N)}(\xi, t)$ удовлетворяет оценкам (2.21) леммы 2. Действительно, в силу (3.15) и (3.16) найдем

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial^{j+k+l}W_1(\xi, t)}{\partial(\operatorname{Re}\xi_2)^j\partial(\operatorname{Re}\xi_3)^k\partial(\operatorname{Re}\xi_4)^l} \right| \\ &= \left| \frac{\partial^{j+k+l}}{\partial(\operatorname{Re}\xi_2)^j\partial(\operatorname{Re}\xi_3)^k\partial(\operatorname{Re}\xi_4)^l} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n=0, \\ j_1+\dots+j_n=N-1}}^{N-1} \xi_1 w^{(j_1)}(\xi_1, t) \right. \\ & \quad \left. \times \prod_{l=2}^n v^{(j_l)}(\xi_l, t) \Psi_1(\operatorname{Re}\xi_2, \dots, \xi_n) \right| \\ &\leq c^{N-1} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n=0, \\ j_1+\dots+j_n=N-1}}^{N-1} \left(\prod_{s=1}^n (j_s + 1)^{-4} M^{-4}(\xi_s) \right) \\ & \quad \times \left(\prod_{s=1}^4 E(\xi_s, t) e^{a\sigma^3/16} \right) \left(\prod_{s=5}^n m^{1-9\gamma}(\xi_s) \right) \\ & \quad \times |\xi_1| m^{-1/8}(\xi_1) m^{-j/8}(\xi_2) m^{-k/8}(\xi_3) m^{-l/8}(\xi_4) \\ &\leq (N+1)^{-4} c^N e^{a\sigma^3} m^{-j/8}(\xi_2) m^{-k/8}(\xi_3) m^{-l/8}(\xi_4) M(\xi_1) F(\xi) \Lambda(\xi, \nu_{N-1}, t). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Применяя оценку (2.22) леммы 2 и (3.8) с $\mu = 0$, получаем

$$\begin{aligned} |w_t^{(N)}(p, t)| &\leq \frac{n-3}{|p|} c^N t^{-2/3} (1+t)^{\gamma-1/3} m(p) E(p, t) M^{-4}(p) (N+1)^{-4} e^{a\sigma^3} \\ & \quad + c^N (1+t)^{\gamma-1} E(p, t) e^{-\sigma^3 t/4} M^{-3}(p) \\ &\leq h^{(N)}(p, t) M(p) t^{-2/3} (1+t)^{\gamma-1/3}. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к (3.9). Чтобы доказать (3.10), проверим выполнение условий леммы 3. Оценка (2.38) с $\nu = \nu_{N-1}$ следует из (3.8) с $\mu = 0$ и (3.9), (3.15), (3.16):

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial g(\xi, t)}{\partial t} \right| = c^{-N} (N+1)^4 e^{-a\sigma^3} \left| \Psi_1(\operatorname{Re}\xi_2, \dots, \xi_N) \right. \\ & \quad \times \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n=0, \\ j_1+\dots+j_n=N-1}}^{N-1} \left(\xi_1 w_t^{(j_1)}(\xi_1, t) \prod_{l=2}^n v^{(j_l)}(\xi_l, t) + \xi_1 w^{(j_1)}(\xi_1, t) \frac{\partial}{\partial t} \prod_{l=2}^n v^{(j_l)}(\xi_l, t) \right) \left. \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (N+1)^4 e^{-a\sigma^3} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n=0, \\ j_1+\dots+j_n=N-1}}^{N-1} \left\{ |\xi_1| (1+t)^{\gamma-1/3} t^{-2/3} M^{-3}(\xi_1) (j_1+1)^{-4} \right. \\
&\times E(\xi_1, t)^{a\sigma^3/16} \prod_{l=2}^n m^{1-9\gamma}(\xi_l) (j_l+1)^{-4} M^{-4}(\xi_l) E(\xi_l, t) \\
&+ |\xi_1| m^{-1/8}(\xi_1) M^{-4}(\xi_1) (j_1+1)^{-4} E(\xi_1, t) \\
&\times \left. e^{a\sigma^3/16} \prod_{l=2}^n m(\xi_l) (j_l+1)^{-4} M^{-4}(\xi_l) E(\xi_l, t) t^{-2/3} (1+t)^{\gamma-1/3} \right\} \\
&\leq c(1+t)^{\gamma-1/3} t^{-2/3} F(\xi) M^2(\xi_1) \Lambda(\xi, \nu_{N-1}, t).
\end{aligned}$$

В представлении (2.39) функции ψ_1 и ψ_2 равны ввиду определения функции $w(p, t)$:

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= nc^{-N} (N+1)^4 e^{-a\sigma^3} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n=0, \\ j_1+\dots+j_n=N-1}}^{N-1} \xi_1 w^{(j_1)}(\xi_1, t) 3t \xi_4^{-1} v_t^{(j_4)}(\xi_4, t) \\
&\times \prod_{l=2, l \neq 4}^n v^{(j_l)}(\xi_l, t) \Psi_1(\operatorname{Re} \xi_2, \operatorname{Re} \xi_3, \operatorname{Re} \xi_4, \xi_5, \dots, \xi_n); \\
\psi_2 &= nc^{-N} (N+1)^4 e^{-a\sigma^3} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n=0, \\ j_1+\dots+j_n=N-1}}^{N-1} \xi_1 w^{(j_1)}(\xi_1, t) \prod_{l=2, l \neq 4}^n v^{(j_l)}(\xi_l, t) \\
&\times \left(w^{(j_4)}(\xi_4, t) \Psi_1(\operatorname{Re} \xi_2, \dots, \xi_n) + v^{(j_4)}(\xi_4, t) \frac{\partial}{\partial(\operatorname{Re} \xi_4)} \Psi_1(\operatorname{Re} \xi_2, \dots, \xi_n) \right)
\end{aligned}$$

и далее, с помощью оценок (3.8) с $\mu = 3\gamma$, (3.9)–(3.11), как и выше, получим оценки (2.40) и (2.41). Действительно,

$$\begin{aligned}
|\psi_1| &\leq (N+1)^4 e^{-a\sigma^3} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n=0, \\ j_1+\dots+j_n=N-1}}^{N-1} |\xi_1| m^{-1/8}(\xi_1) M^{-4}(\xi_1) (1+j_1)^{-4} \\
&\times e^{a\sigma^3/64} E(\xi_1, t) \frac{t}{|\xi_4|} (1+j_4)^{-4} e^{a\sigma^3/64} t^{-2/3} (1+t)^{\gamma-1/3-3\gamma} \\
&\times m^{1-9\gamma}(\xi_4) E(\xi_4, t) M^{-4}(\xi_4) e^{a\sigma^3/32} \\
&\times \prod_{l=2, l \neq 4}^n m^{1-9\gamma}(\xi_l) M^{-4}(\xi_l) (1+j_l)^{-4} E(\xi_l, t) \\
&\leq cM(\xi_1) (1+t)^{-2\gamma} m^{-9\gamma}(\xi_4) F(\xi) \Lambda(\xi, \nu_{N-1}, t);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial^k \psi_2}{\partial t^k} \right| &\leq (N+1)^4 e^{-a\sigma^3} (1+t)^{k(\gamma-1/3)} t^{-2k/3} \\
&\times \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n=0, \\ j_1+\dots+j_n=N-1}}^{N-1} \left\{ |\xi_1| M^{-3}(\xi_1) (1+j_1)^{-4} m^{\frac{1-k}{8}}(\xi_1) M^{1-k}(\xi_1) \right. \\
&\times E(\xi_1, t) e^{a\sigma^3/16} \prod_{l=2, l \neq 4}^n m^{1-9\gamma}(\xi_l) (1+j_l)^{-4} M^{-4}(\xi_l) \times \\
&\times E(\xi_l, t) (m^{-1/8}(\xi_4) M^{-4}(\xi_4) (1+j_4)^{-4} E(\xi_4, t) \\
&\left. + m^{1-9\gamma}(\xi_4) (1+j_4)^{-4} M^{-4}(\xi_4) E(\xi_4, t) + M^{-3}(\xi_4)) \right\} \\
&\leq c(1+t)^{k(\gamma-1/3)} t^{-2k/3} F(\xi) M^2(\xi_1) M(\xi_4) m^{-1/8}(\xi_4) \Lambda(\xi, \nu_{N-1}, t),
\end{aligned}$$

где $k = 0, 1$. В представлении (2.42) функции ψ_3 , ψ_4 и ψ_5 равны

$$\begin{aligned}
\psi_3(\xi, t) &= nc^{-N} (N+1)^4 e^{-a\sigma^3} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n=0, \\ j_1+\dots+j_n=N-1}}^{N-1} \Psi_1(\operatorname{Re} \xi_2, \dots, \xi_n) \xi_1 w^{(j_1)}(\xi_1, t) \\
&\times \frac{\partial}{\partial t} \left(\prod_{l=2}^n v^{(j_l)}(\xi_l, t) \right); \\
\psi_4(\xi, t) &= nc^{-N} (N+1)^4 e^{-a\sigma^3} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n=0, \\ j_1+\dots+j_n=N-1}}^{N-1} \left\{ v_t^{(j_1)}(\xi_1, t) (n-3) \right. \\
&\left. - 2i\xi_1 \left(\sum_{l=1}^{(n-1)!} \int_{\mathbb{R}_{n-1}} d\bar{q} d\bar{r} d\bar{y} d\bar{\xi}_5 \dots d\bar{\xi}_n e^{it\bar{L}} \bar{W}_l^{(j_1)}(\bar{\xi}, t) (1 - \bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2) \right) \right\} \\
&\times \prod_{l=2}^n v^{(j_l)}(\xi_l, t) \Psi_1(\operatorname{Re} \xi_2, \dots, \xi_n); \\
\psi_5(\xi, \bar{\xi}, t) &= -2inc^{-N} (N+1)^4 e^{-a\sigma^3} \xi_1 \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n=0, \\ j_1+\dots+j_n=N-1}}^{N-1} \Psi_1(\operatorname{Re} \xi_2, \dots, \xi_n) \\
&\times \prod_{l=2}^n v^{(j_l)}(\xi_l, t) W^{(j_1)}(\bar{\xi}, t).
\end{aligned}$$

Величины $\bar{\xi}$, $\bar{L}$, $\bar{\varphi}_1$ и $\bar{\varphi}_2$ определены в лемме 3, оценка (2.43) получается из (3.8)

с $\mu = 3\gamma$, (3.9)–(3.11),

$$\begin{aligned} |\psi_3(\xi, t)| &\leq (N+1)^4 e^{-a\sigma^3} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n=0, \\ j_1 + \dots + j_n = N-1}}^{N-1} |\xi_1| m^{-1/8}(\xi_1) M^{-4}(\xi_1) (1+j_1)^{-4} \\ &\times E(\xi_1, t) e^{a\sigma^3/16} \prod_{l=2}^n (1+j_l)^{-4} M^{-4}(\xi_l) E(\xi_l, t) m^{1-9\gamma}(\xi_l) t^{-2/3} (1+t)^{\gamma-1/3-3\gamma} \\ &\leq (1+t)^{-2\gamma-1/3} t^{-2/3} F(\xi) M(\xi_1) \Lambda(\xi, \nu_{N-1}, t). \end{aligned}$$

Из (2.23) получим оценку (2.44)

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^k \psi_4(\xi, t)}{\partial y^k} \right| &= n c^{-N} (N+1)^4 e^{-a\sigma^3} \left| \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n=0, \\ j_1 + \dots + j_n = N-1}}^{N-1} \left(v_t^{(j_1)}(\xi_1, t) (n-3) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2i\xi_1 \sum_{l=1}^{(n-1)!} \int_{\mathbb{R}_{n-1}} d\bar{q} d\bar{r} d\bar{y} d\bar{\xi}_5 \dots d\bar{\xi}_n e^{it\bar{L}} W_l^{(j_1)}(\bar{\xi}, t) (1 - \bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \prod_{l=5}^n v^{(j_l)}(\xi_l, t) v^{(j_2)}(\xi_2, t) \frac{\partial^k}{\partial y^k} (v^{(j_3)}(\xi_3, t) v^{(j_4)}(\xi_4, t) \Psi_1(\operatorname{Re} \xi_2, \dots, \xi_n)) \right) \right| \\ &\leq (N+1)^4 e^{-a\sigma^3} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n=0, \\ j_1 + \dots + j_n = N-1}}^{N-1} (t^{-2/3} (1+t)^{\gamma-1/3} (1+j_1)^{-4} M^{-4}(\xi_1) \\ &\quad \times E(\xi_1, t) m(\xi_1) + |\xi_1| t^{-1/2} (1+t)^{\gamma-1/2} M^{-4}(\xi_1) E(\xi_1, t) e^{-t\sigma^3/4} e^{a\sigma^3/16} \\ &\quad \times \prod_{l=2}^n (1+j_l)^{-4} M^{-4}(\xi_l) E(\xi_l, t) m^{1-9\gamma}(\xi_l) Z^k(\xi_3, \xi_4) \\ &\leq c F(\xi) M(\xi_1) Z^k(\xi_3, \xi_4) (1+t)^{\gamma-1/3} t^{-2/3} \Lambda(\xi, \nu_{N-1}, t). \end{aligned}$$

Оценка (2.45) с $\nu = \nu_{N-1}$ следует из (3.11), (3.19)

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^k \psi_5}{\partial \bar{y}^k} \right| &= (N+1)^4 |\xi_1| \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n=0, \\ j_1 + \dots + j_n = N-1}}^{N-1} (1+j_1)^{-4} (m^{-k/8}(\bar{\xi}_3) + m^{-k/8}(\bar{\xi}_4)) \\ &\quad \times M(\bar{\xi}_1) F(\bar{\xi}) \Lambda(\bar{\xi}, \nu_{j_1-1}, t) \prod_{l=2}^n (1+j_l)^{-4} M^{-4}(\xi_l) E(\xi_l, t) \\ &\leq F(\xi) F(\bar{\xi}) M(\bar{\xi}_1) M^5(\xi_1) \Lambda_1(\xi, \bar{\xi}, \nu_{N-1}, t) Z^k(\bar{\xi}_3, \bar{\xi}_4), \end{aligned}$$

поскольку

$$\begin{aligned}
& \Lambda(\bar{\xi}, \nu_{j_1-1}, t) \prod_{l=2}^4 E(\xi_l, t) \\
& \equiv \exp \left\{ \frac{\bar{\sigma}}{4} + (1 - \nu_{j_1-1}) \sum_{k=1}^4 (\operatorname{Re} \bar{\xi}_k)^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{\sigma t}{4} ((1 - \nu_{j_2})(\operatorname{Re} \xi_2)^2 + (1 - \nu_{j_3})(\operatorname{Re} \xi_3)^2 + (1 - \nu_{j_4})(\operatorname{Re} \xi_4)^2) \right\} \\
& \leq \exp \left\{ \frac{\sigma t}{4} (1 - \nu_{N-1}) \sum_{l=2}^n (\operatorname{Re} \xi_l)^2 + \frac{\bar{\sigma} t}{4} (1 - \nu_{N-1}) \sum_{l=1}^n (\operatorname{Re} \bar{\xi}_l)^2 \right\} \\
& \equiv \Lambda_1(\xi, \bar{\xi}, \nu_{N-1}, t).
\end{aligned}$$

В представлении (2.46) функции ψ_6 и ψ_7 имеют вид

$$\begin{aligned}
\psi_6 &= -2inc^{-N}(N+1)^4 e^{-a\sigma^3} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n=0, \\ j_1+\dots+j_n=N-1}}^{N-1} \xi_1 \prod_{l=2}^n v^{(j_l)} \\
&\quad \times \sum_{\substack{\bar{j}_1, \dots, \bar{j}_n=0 \\ \bar{j}_1+\dots+\bar{j}_n=j_1-1}}^{j_1-1} \bar{\xi}_1 w_t^{(\bar{j}_1)}(\bar{\xi}_1, t) \prod_{l=2}^n v^{(\bar{j}_l)}(\bar{\xi}_l, t); \\
\psi_7 &= -2inc^{-N}(N+1)^4 e^{-a\sigma^3} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n=0, \\ j_1+\dots+j_n=N-1}}^{N-1} \sum_{\substack{\bar{j}_1, \dots, \bar{j}_n=0 \\ \bar{j}_1+\dots+\bar{j}_n=j_1-1}}^{j_1-1} \xi_1 \bar{\xi}_1 w^{(\bar{j}_1)}(\bar{\xi}_1, t) \\
&\quad \times \left(\prod_{l=2}^n v^{(\bar{j}_l)}(\bar{\xi}_l, t) v^{(j_l)}(\xi_l, t) \right)_t.
\end{aligned}$$

Отсюда с помощью (3.8)–(3.12) получаем оценки (2.47) и (2.48). Действительно,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\partial^k \psi_6(\xi, \bar{\xi}, t)}{\partial \bar{y}^k} \right| \leq c^{-N}(N+1)^4 e^{-a\sigma^3} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n=0, \\ j_1+\dots+j_n=N-1}}^{N-1} \sum_{\substack{\bar{j}_1, \dots, \bar{j}_n=0 \\ \bar{j}_1+\dots+\bar{j}_n=j_1-1}}^{j_1-1} |\xi_1| |\bar{\xi}_1| e^{a\sigma^3/16} \\
& \quad \times \prod_{l=2}^n (1+j_l)^{-4} M^{-4}(\xi_l) E(\xi_l, t) (1+t)^{\gamma-1/3} t^{-2/3} M^{-3}(\bar{\xi}_1) (1+\bar{j}_1)^{-4} E(\bar{\xi}_1, t) \\
& \quad \times \left(\prod_{l=2}^n (1+\bar{j}_l)^{-4} M^{-4}(\bar{\xi}_l) E(\bar{\xi}_l, t) \right) Z^k(\bar{\xi}_3, \bar{\xi}_4) \\
& \leq (1+t)^{\gamma-1/3} t^{-2/3} F(\xi) F(\bar{\xi}) M^5(\xi_1) M^2(\bar{\xi}_1) Z^k(\bar{\xi}_3, \bar{\xi}_4) \Lambda_1(\xi, \bar{\xi}, \nu_{N-1}, t),
\end{aligned}$$

здесь мы учли, что

$$\sum_{\substack{\bar{j}_1, \dots, \bar{j}_n=0 \\ \bar{j}_1+\dots+\bar{j}_n=j_1-1}}^{j_1-1} \prod_{l=1}^n (1+\bar{j}_l)^{-4} \leq c(1+j_1)^{-4},$$

а также

$$\begin{aligned}
 |\psi_7(\xi, \bar{\xi}, t)| &\leq c^{-N}(1+N)^4 e^{-a\sigma^3} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n=0, \\ j_1+\dots+j_n=N-1}}^{N-1} \sum_{\substack{\bar{j}_1, \dots, \bar{j}_n=0, \\ \bar{j}_1+\dots+\bar{j}_n=j_1-1}}^{j_1-1} |\xi| |\xi_1| m^{-1/8}(\bar{\xi}_1) \\
 &\quad \times M^{-4}(\bar{\xi}_1)(1+j_1)^{-4} E(\bar{\xi}_1, t) e^{a\sigma^3/16} \prod_{l=2}^n (1+j_l)^{-4} (1+\bar{j}_l)^{-4} \\
 &\quad \times M^{-4}(\xi_l) M^{-4}(\bar{\xi}_l) E(\xi_l, t) E(\bar{\xi}_l, t) t^{-2/3} (1+t)^{-2\gamma-1/3} \\
 &\leq (1+t)^{-2\gamma-1/3} t^{-2/3} F(\xi) F(\bar{\xi}) M^5(\xi_1) M(\bar{\xi}_1) \Lambda_1(\xi, \bar{\xi}, \nu_{N-1}, t).
 \end{aligned}$$

Применив лемму 3, получим требуемую оценку (3.10). И так, по индукции все оценки (3.8)–(3.12) установлены для всех $N \geq 0$. Из полученных оценок (3.10) и (3.11), в частности, следует, что ряды теории возмущений (3.4) сходятся как сумма геометрической прогрессии, если величина $\varepsilon > 0$ выбрана достаточно малой.

3.2. Вывод формулы (1.3). С помощью обратного преобразования Фурье и равенства (3.4) представим решение $u(x, t)$ задачи Коши (1.1) в виде

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}_1} dp e^{ipx+ip^3t/3} \left\{ \widehat{u}(0) + \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^{(n-1)N+1} (v^{(N)}(p, t) - v^{(N)}(0, t)) \right\} \\
 &= I_1 + I_2,
 \end{aligned}$$

поскольку $v^{(N)}(0, t) = 0$ при $N \geq 1$, а $v^{(0)}(0, t) = \widehat{u}(0)/\varepsilon$. Главный член асимптотики I_1 после замены $p = qt^{-1/3}$ и $x = \chi t^{1/3}$ сводится к интегралу Эйри $\text{Ai}(\chi)$ (см. [18]):

$$I_1 = \frac{\widehat{u}(0)}{2\pi t^{1/3}} \int_{\mathbb{R}_1} dq \exp(iq\chi + iq^3/3) = \frac{\widehat{u}(0)}{t^{1/3}} \text{Ai}(\chi). \quad (3.20)$$

В интеграле I_2 проинтегрируем по частям по p , пользуясь тождеством

$$e^{ip^3t/3} = (1+ip^3t)^{-1} \frac{\partial}{\partial p} (p e^{ip^3t/3}),$$

найдем

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^{(n-1)N+1} \int_{\mathbb{R}_1} dp \frac{\exp(ip^3t/3 + ipx)}{1+ip^3t} \\
 &\quad \times \left\{ \frac{3ip^3t}{1+ip^3t} (v^{(N)}(p, t) - v^{(N)}(0, t)) - ipx (v^{(N)}(p, t) - v^{(N)}(0, t)) - p \frac{\partial}{\partial p} v^{(N)}(p, t) \right\}.
 \end{aligned}$$

Откуда ввиду теоремы Лагранжа и (3.10) найдем

$$|I_2| \leq c \int_{\mathbb{R}_1} dp \frac{(1+|p||\chi|t^{1/3})}{|1+ip^3t|} m^{7/8}(p) M^{-3}(p) = O((1+|\chi|)t^{-1/2}) \quad (3.21)$$

(здесь мы использовали очевидное неравенство $|1+ip^3t| \geq |p^3t|^\alpha$, $\alpha \in [0, 1]$, которое справедливо для всех $p \in \mathbb{R}_1$, $t \geq 0$, это неравенство применяется при $\alpha = 1/2$ и $\alpha = 5/6$). Из (3.20) и (3.21) приходим к асимптотике (1.3).

3.3. Вывод формулы (1.4). При $x \rightarrow +\infty$ интеграл Эйри

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}_1} e^{ipx+ip^3t/3} dp$$

имеет точку перевала $p = i\kappa$, где $\kappa = \sqrt{x/t}$. Пользуясь аналитичностью всех функций $v^{(N)}(p, t)$ по p при $\text{Im } p \geq 0$ и ввиду оценок (3.11) сдвинем контур интегрирования в формуле

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^{(n-1)N+1} \int_{\mathbb{R}_1} dp e^{ipx+ip^3t/3} v^{(N)}(p, t)$$

на величину $i\kappa$, тогда получим представление решения $u(x, t)$ в виде

$$\begin{aligned} u(x, t) &= e^{-2\kappa^3t/3} \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^{(n-1)N+1} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}_1} d\rho e^{-\rho^2\kappa t + it\rho^3/3} \\ &\quad \times \left\{ \Phi^{(N)}(i\kappa) + (v^{(N)}(i\kappa, t) - \Phi^{(N)}(i\kappa)) \right. \\ &\quad \left. + (v^{(N)}(\rho + i\kappa, t) - v^{(N)}(i\kappa, t)) \right\} = I_3 + I_4 + I_5, \end{aligned} \quad (3.22)$$

здесь $\Phi^{(N)}(i\kappa) = \lim_{t \rightarrow \infty} v^{(N)}(i\kappa, t)$. Этот предел существует в силу (3.8). Главный член асимптотики дает интеграл I_3 . Согласно [19, с. 287] имеем

$$\begin{aligned} I_3 &= B(i\kappa) \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}_1} d\rho \exp(-2\kappa^3t/3 - \rho^2\kappa t + it\rho^3/3) \\ &= B(i\kappa) \text{Ai}(\kappa^2t^{2/3}) t^{-1/3} \\ &= \frac{e^{-2\kappa^3t/3}}{2\sqrt{\pi\kappa t}} B(i\kappa) (1 + O(\kappa^{-3}t^{-1})), \end{aligned} \quad (3.23)$$

где $B(i\kappa) = \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^{(n-1)N+1} \Phi^{(N)}(i\kappa)$. Далее, в силу (3.8) с $\mu = 3\gamma$ найдем

$$|v^{(N)}(i\kappa, t) - \Phi^{(N)}(i\kappa)| \leq \int_t^\infty \left| \frac{\partial}{\partial \tau} v^{(N)}(i\kappa, \tau) \right| d\tau \leq c^N e^{a\kappa^3} t^{-2\gamma}.$$

Таким образом, для I_4 в (3.22) имеем

$$I_4 = O(e^{-2\kappa^3t/3} t^{-1/2-2\gamma}). \quad (3.24)$$

Интеграл I_5 оценим благодаря неравенству (3.12)

$$\begin{aligned} |I_5| &\leq c e^{-2\kappa^3t/3} \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^{(n-1)N+1} \int_{\mathbb{R}_1} d\rho e^{-\rho^2\kappa t} c^N |\rho|^{7/8} (N+1)^{-4} e^{a\kappa^3 + \kappa\rho^2t(1-\nu_N)} \\ &\leq c(\kappa t)^{-15/16} e^{a\kappa^3 - 2\kappa^3t/3}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Из (3.24) и (3.25) следует асимптотика (1.4).

3.4. Вывод формулы (1.5). При $x \rightarrow -\infty$ в интеграле Эйри имеются две точки стационарной фазы $p = \pm \varkappa$, где $\varkappa = \sqrt{|x|/t}$. В силу вещественности решения $u(x, t)$ имеем $v^{(N)*}(p, t) = v^{(N)}(-p, t)$, и поэтому

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^{(n-1)N+1} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} dp e^{ipx+ip^3t/3} \left\{ [\Phi^{(N)}(\varkappa) + (v^{(N)}(\varkappa, t) - \Phi^{(N)}(\varkappa))] + [(v^{(N)}(p, t) - v^{(N)}(\varkappa, t))] \right\} = I_6 + I_7,$$

где $\Phi^{(N)}(\varkappa) = \lim_{t \rightarrow \infty} v^{(N)}(\varkappa, t)$. Асимптотика интеграла Эйри

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dp e^{ipx+ip^3t/3} = \frac{1}{t^{1/3}} \operatorname{Ai}(-\varkappa^2 t^{2/3})$$

ввиду [19, с. 287] при $t \rightarrow \infty$ в этом случае равна

$$\frac{1}{\sqrt{\pi \varkappa t}} e^{-2i\varkappa^3 t/3 + i\pi/4} + O(\varkappa^{-3} t^{-1}).$$

Поэтому в силу (3.8), как в (3.23), (3.24), найдем

$$I_6 = \frac{1}{\sqrt{\pi \varkappa t}} \operatorname{Re}(B(\varkappa) e^{-2i\varkappa^3 t/3 + i\pi/4}) + O(m^{-3}(\varkappa) t^{-1/2-\gamma}), \quad (3.26)$$

где

$$B(\varkappa) = \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^{(n-1)N+1} \Phi^{(N)}(\varkappa). \quad (3.27)$$

Интеграл I_7 после замены $p = \rho + \varkappa$ принимает вид

$$I_7 = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^{(n-1)N+1} e^{-2i\varkappa^3 t/3} \int_{-\varkappa}^{\infty} d\rho e^{i\varkappa \rho^2 t + i\rho^3 t/3} (v^{(N)}(\varkappa + \rho, t) - v^{(N)}(\varkappa, t)).$$

С помощью тождества

$$e^{i\varkappa \rho^2 t + i\rho^3 t/3} = (1 + i\rho^2 t(2\varkappa + \rho))^{-1} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho e^{i\varkappa \rho^2 t + i\rho^3 t/3})$$

проинтегрируем в I_7 по частям по ρ , найдем

$$\begin{aligned} I_7 = & \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^{(n-1)N+1} \left\{ (1 + i\varkappa^3 t)^{-1} \varkappa e^{2i\varkappa^3 t/3} (v^{(N)}(\varkappa, t) - v^{(N)}(0, t)) \right. \\ & + \int_{-\varkappa}^{\infty} d\rho \frac{e^{i\varkappa \rho^2 t + i\rho^3 t/3}}{1 + i\rho^2 t(2\varkappa + \rho)} \\ & \times \left(\frac{i\rho^2 t(4\varkappa + 3\rho)(v^{(N)}(\varkappa + \rho, t) - v^{(N)}(\varkappa, t))}{1 + i\rho^2 t(2\varkappa + \rho)} - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} v^{(N)}(\varkappa + \rho, t) \right) \Big\}. \end{aligned}$$

Откуда в силу (3.42) получим при $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} |I_7| & \leq c \varkappa^{-1/8} t^{-2/3} + c \int_{-\varkappa}^{\infty} d\rho m^{7/8}(\rho) |1 + i\rho^2 t(2\varkappa + \rho)|^{-1} \\ & = O(t^{-2/3} m^{-1}(\varkappa)). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Из (3.26) и (3.28) вытекает формула (1.5). Теорема доказана.

Величины $\Phi^{(N)}(i\varkappa)$ и $\Phi^{(N)}(\varkappa)$ в формулах (3.23) и (3.27) могут быть явно выражены через начальные данные с помощью диаграммной техники, как в работах [15]–[17].

Список литературы

1. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Морис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988.
2. Glimbre J., Tsutsumi Y. Uniqueness for the generalized Korteweg–de Vries equation // SIAM J. Math. Anal. 1989. V. 20. P. 1388–1425.
3. Kato T. On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg–de Vries equation // Stud. Appl. Math., Advances Math. Suppl. Stud. V. 8: Acad. Press. Fl, 1983.
4. Кружков С. Н., Фаминский А. В. Обобщенные решения для уравнения КдФ // Матем. сб. 1983. Т. 120 (162). № 3. С. 396–425.
5. Sidi A., Sulem C., Sulem P. On the long-time behavior of a generalized KdV equation // Acta Math. Appl. 1986. V. 7. P. 35–48.
6. Craig W., Kappeler T., Strauss W. A. Gain of regularity for equations of KdV type // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. 1992. V. 9. P. 147–186.
7. Kappeler T. Solutions to the Korteweg–de Vries equation with irregular initial data // Comm. Partial Differential Equations. 1986. V. 11. P. 927–945.
8. Bona J. L., Saut J. C. Dispersive blow-up of solutions of generalized Korteweg–de Vries equation // J. Differential Equations. 1993. V. 103. № 1. P. 3–57.
9. Albert J. P., Bona J. L., Felland M. A criterion for the formation of singularities for the generalized Korteweg–de Vries equation // Mat. Apl. Comput. 1988. V. 7. P. 3–11.
10. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.
11. Захаров В. Е., Манакон С. В., Новиков С. П., Потаевский Л. П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
12. Strauss W. A. Nonlinear scattering theory at low energy // J. Funct. Anal. 1981. V. 41. P. 110–133.
13. Ponce G., Vega L. Nonlinear small data scattering for the generalized Korteweg–de Vries equation // J. Funct. Anal. 1990. V. 90. № 2. P. 445–457.
14. Christ F. M., Weinstein M. I. Dispersion of small amplitude solutions of the generalized Korteweg–de Vries equation // J. Funct. Anal. 1991. V. 100. № 1. P. 87–109.
15. Наумкин П. И., Шишмарев И. А. Асимптотика при $t \rightarrow \infty$ решений обобщенного уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова // Матем. моделирование. 1989. Т. 1. № 6. С. 109–125.
16. Наумкин П. И., Шишмарев И. А. Асимптотика решений уравнения Уизема при больших временах // Матем. моделирование. 1990. Т. 2. № 3. С. 75–88.
17. Naumkin P. I., Shishmarev I. A. Nonlinear nonlocal equations in the theory of waves. Translation of Monographs AMS, 1994, Providence.
18. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990.
19. Федоряк М. В. Асимптотика: Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
12.07.1994