Общероссийский математический портал

Э. А. Стороженко, К одной задаче Малера о нулях полинома и его производной,
Матем. сб., 1996, том 187, номер 5, 111–120

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm130>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 09:19:02

УДК 517.518

Э. А. Стороженко

К одной задаче Малера о нулях полинома и его производной

К. Малер получил оценку произведения нулей алгебраического полинома и его производной, лежащих вне единичного круга. В работе устанавливается противоположное неравенство с неувлучшаемой константой.

Библиография: 13 названий.

1. Пусть P_n — произвольный алгебраический полином степени n с комплексными коэффициентами. Если все нули P_n лежат в единичном круге, то по теореме Гаусса все нули производной находятся в этом же круге. Если же у полиномов P_n и P'_n есть нули вне единичного круга, то произведение модулей этих нулей производной P' меньше соответствующего произведения модулей нулей P_n . Это нетривиальное свойство нулей P_n и P'_n доказано К. Малером [1]. Оно получено как следствие одного неравенства, представляющего и самостоятельный интерес.

$$M(P'_n) \leq nM(P_n), \quad (1)$$

где

$$M(f) = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |f(e^{it})| dt\right).$$

В настоящей статье устанавливаются утверждения, противоположные выше приведенным, с константами, улучшить которые нельзя.

ТЕОРЕМА 1. Если P_n — произвольный алгебраический полином степени $n \geq 2$, то

$$M(P_n(z) - P_n(0)) \leq A_n n^{-1} M(P'_n), \quad (2)$$

где

$$A_n = \prod_{n/6 < k < 5n/6} 2 \sin \frac{\pi k}{n}.$$

Знак равенства в (2) имеет место, когда $P_n = c(e^{i\alpha} + z)^n$.

ТЕОРЕМА 2. Если $z_1, z_2, \dots, z_n$ — нули полинома $P_n(z) - P_n(0)$, а $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n-1}$ — нули его производной, то

$$A_n^{-1} \prod_{k=1}^n \max(1; |z_k|) \leq \prod_{k=1}^{n-1} \max(1; |\zeta_k|), \quad n \geq 2.$$

Экстремальные полиномы P_n и A_n те же, что и в теореме 1.

Фигурирующий в неравенстве (2) алгебраический многочлен на единичной окружности представляет собой тригонометрический полином “степенного” вида. Справедлив ли аналог этого неравенства для произвольного тригонометрического полинома T_n с комплексными коэффициентами? Так как такой полином T_n представим в виде $T_n = e^{int} P_{2n}(e^{it})$ со значениями алгебраического полинома P_{2n} степени $2n$ на $z = e^{it}$, то методика доказательства теоремы 1 применима и для T_n . Этому вопросу посвящается следующая

ТЕОРЕМА 3. Пусть T_n – тригонометрический полином порядка $n \geq 2$ со свободным членом, равным нулю. Тогда

$$M(T_n) \leq B_n M(T'_n),$$

где

$$B_n = 2^{2n+1} \exp \int_0^{\pi/2} \ln \left| \int_0^t \left(\cos^{2n} u - 2^{-2n} \binom{2n}{n} \right) du \right| \frac{2}{\pi} dt.$$

Поведение B_n характеризуется неравенствами

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n}{2^{2n} \sqrt{\pi/n}} \leq \frac{1}{e}, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n}{2^{2n} \sqrt{\pi/n}} \geq \frac{1}{e} \left(1 - \frac{2}{\pi} \right). \quad (3)$$

Неравенство вида (1) для тригонометрических полиномов T_n принято называть неравенствами типа С. Н. Бернштейна. Доказанное С. Н. Бернштейном для равномерной метрики (см. [2, т. I, с. 26]), оно вскоре А. Зигмундом [3, т. II, гл. X] было распространено на нормы $\|T_n\|_p$ с $p \geq 1$. Здесь, как обычно, под нормой полинома T_n для всех $0 < p < \infty$ понимается функционал

$$\|T_n\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |T_n(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Дальнейшие обобщения на “нормы” $\|T_n\|_p$ при $0 < p < 1$ с некоторой модификацией метода Зигмунда привели к появлению в правой части неравенства константы, неограниченно возрастающей при $p \rightarrow 0$ (см. [4], [5]). В 1981 г. В. В. Арестов [6], развивая метод доказательства оценки (1) (метод предложен рецензентом статьи [1]), доказал справедливость неравенства типа С. Н. Бернштейна с константой, равной единице и при $0 \leq p < 1$, где норма $\|T_n\|_0 = \lim_{p \rightarrow 0} \|T_n\|_p$ (этот предел, как известно, равен $\exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |T_n(t)| dt \right) = M(T_n)$, см., например, [7]). Таким образом, соотношение

$$\|T'_n\|_p \leq n \|T_n\|_p \quad (4)$$

справедливо сразу для всех $0 \leq p \leq \infty$.

Нам представляется, что именно благодаря неравенству К. Малера (1) и его тригонометрическому аналогу появилась уверенность в справедливости оценки (4) при $0 < p < 1$. Поэтому различного рода соотношения для $\|\cdot\|_0$ – “норм” как соотношения в “крайнем” пространстве L_0 – могут быть поучительны.

Обращению неравенства типа С. Н. Бернштейна посвящено много работ, с достаточно подробной информацией можно ознакомиться по монографии [8]. Почти

все полученные результаты как для алгебраических, так и для тригонометрических полиномов доказаны при сильных предположениях: все нули алгебраических полиномов содержатся внутри единичного круга, а у тригонометрических – все $2n$ нулей вещественны. При этих условиях по формуле Пуассона–Иенсена (см. ниже) “нормы” $\|\cdot\|_0$ легко считаются, и

$$M(P_n) = \frac{1}{n}M(P'_n), \quad M(T_n) = \frac{1}{n}M(T'_n).$$

Устранение ограничений, как видно из теорем 1 и 3, для “норм” $\|\cdot\|_0$ привело к резкому увеличению констант, причем в алгебраическом и тригонометрическом случаях они различны.

2. Начнем с понятия “композиции” полиномов, введенного Г. Сеге [9, т. II, отд. V]: композицией полиномов

$$Q_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k z^k, \quad R_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k z^k$$

называется полином

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_k z^k \stackrel{\text{def}}{=} Q_n \otimes R_n.$$

Приведем некоторые примеры композиций, играющие важную роль в доказательстве теорем 1 и 3. Полином P_n удобно записать в виде

$$\frac{1}{z}(P_n(z) - P_n(0)) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} c_k z^k.$$

Тогда

$$P'_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} c_k (k+1) z^k = \frac{1}{z}(P_n(z) - P_n(0)) \otimes (1+z)^{n-2}(nz+1) \quad (5)$$

и

$$\frac{1}{z}(P_n(z) - P_n(0)) = P'_n(z) \otimes \frac{1}{nz}((1+z)^n - 1). \quad (6)$$

Далее, составим “композиции” алгебраических полиномов, которые соответствуют тригонометрическим $T_n(t)$ и $T'_n(t)$.

Так как

$$T_n(t) = e^{-int} P_{2n}(e^{it}) = e^{-int} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} d_k z^k,$$

то

$$T'_n(t) = ie^{-int} (e^{it} P'_{2n}(e^{it}) - n P_{2n}(e^{it})),$$

и тогда

$$z P'_{2n}(z) - n P_{2n}(z) = P_{2n}(z) \otimes n(1+z)^{2n-1}(z-1). \quad (7)$$

Представляя полином P_{2n} в виде “композиции” с полиномом $zP'_{2n} - nP_{2n}$, предполагаем, что свободный член тригонометрического многочлена равен нулю, т.е. $d_n = 0$:

$$P_{2n}(z) = (zP'_{2n} - nP_{2n}(z)) \otimes \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \frac{z^k}{k-n} \quad (8)$$

(звездочка у суммы означает, что пропущено слагаемое с $k = n$).

Последний полином запишем в другом виде; учитывая, что

$$(1+z)^{2n} - \binom{2n}{n} z^n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^k \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \frac{1}{k-n} = 0,$$

получаем

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \frac{z^k}{k-n} = z^n \int_1^z \frac{(1+\zeta)^{2n} - \binom{2n}{n} \zeta^n}{\zeta^{n+1}} d\zeta. \quad (9)$$

Известная теорема Сеге (см. [9, т. 1, гл. 2, задача 151]) устанавливает связь между входящими в “композицию” нулями полиномов.

Если все нули полинома Q_n лежат в круге радиуса r , а нули R_n — в круге радиуса R , то нули “композиции” находятся в круге радиуса $r \cdot R$.

Из этой теоремы на основании композиций (5)–(7) вытекают следующие утверждения:

- а) если нули $P_n(z) - P_n(0)$ находятся в единичном круге, то нули производной P'_n также принадлежат этому кругу (теорема Гаусса);
- б) если нули P'_n лежат внутри единичного круга, то нули $P_n(z) - P_n(0)$ находятся в круге $|z| \leq 2$;
- в) если все $2n$ нулей тригонометрического полинома $T_n(t) = e^{-int} P_{2n}(e^{it})$ вещественны, то все нули полинома $P_{2n}(z)$ находятся на единичной окружности, а все нули $-(zP'_{2n} - nP_{2n})$ — в круге $|z| \leq 1$.

Аналог б) для тригонометрических полиномов нам неизвестен.

В случае а) вместо $P_n(z) - P_n(0)$ можно взять сам полином P_n (нули производной не зависят от свободного члена), а в б) важно рассматривать полином со свободным членом, равным нулю, так как за счет выбора свободного члена нули по модулю могут быть как угодно большими. Теорема 2 уточняет информацию пункта б) о нулях P_n в зависимости от нулей P'_n , действительно, на основании б) можно сделать вывод, что $\prod_{k=1}^{n-1} \max(1; |\zeta_k|) \geq 2^{-n+1}$, а из теоремы 2, как будет показано ниже, асимптотическое значение нижней границы $\approx (1.4)^{-n}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Более выразительно “композицию” (6) возможно записать при помощи интеграла; обозначим P'_n через Π_{n-1} , тогда

$$P_n(z) - P_n(0) = \int_0^z \Pi_{n-1}(\zeta) d\zeta,$$

и (6) принимает вид

$$\int_0^z \Pi_{n-1}(\zeta) d\zeta = \Pi_{n-1}(z) \otimes ((1+z)^n - 1).$$

Соответственно видоизменяются формулировки теорем 1 и 2.

3. Доказательство теорем. В дальнейшем нам неоднократно понадобится следующий частный случай формулы Пуассона–Иенсена для полиномов (см., например, [9, т. I, отдел III, теорема 175]).

Если Q_n – многочлен со старшим коэффициентом $a_n \neq 0$, то

$$M(Q_n) = |a_n| \prod_{k=1}^n \max(1; |z_k|), \quad (10)$$

где z_k – нули Q_n , т.е. на величину $M(Q_n)$ влияют лишь те нули Q_n , модули которых больше 1.

Существенную роль в доказательстве теорем 1 и 3 играет неравенство

$$M(Q_n \otimes R_n) \leq M(Q_n)M(R_n). \quad (11)$$

Этот результат, установленный N. D. Bruijn и T. Springer в работе [10] еще в 1947 году, не нашел должного применения в теории функций. По нашему мнению первые такие удачные приложения принадлежат В. В. Арестову (см. [11], [12]); он же получил обобщение неравенства (11) на нормы $\|\cdot\|_p$, $1 < p < \infty$:

$$\|Q_n \otimes R_n\|_p \leq M(R_n)\|Q_n\|_p. \quad (12)$$

Доказательство теоремы 1 состоит в последовательном использовании соотношений (6) и (11). Для завершения остается определить величину

$$M((1+z)^n - 1)/(nz).$$

Согласно формуле Пуассона–Иенсена следует найти нули z_k полинома $(1+z)^n - 1$. Простой подсчет показывает, что

$$z_k = e^{i\frac{2\pi k}{n}} - 1, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \\ |z_k| = 2 \sin \frac{\pi k}{n} > 1 \quad \text{при} \quad \frac{n}{6} < k < \frac{5n}{6}.$$

Следовательно,

$$M\left(\frac{1}{nx}((1-z)^n - 1)\right) = \frac{1}{n} \prod_{n/6 < k < 5n/6} 2 \sin \frac{\pi k}{n} = A_n n^{-1}$$

и тем самым оценка (2) доказана. Тот факт, что для полинома $P_n(z) = C(z + e^{i\alpha})^n$ в (2) достигается знак равенства, проверяется непосредственной подстановкой без особых усилий, так как модули нулей полинома $(z + e^{i\alpha})^n - e^{in\alpha}$ не зависят от α .

Коэффициент A_n для начальных значений n легко подсчитать: $A_n = n$, $n = 2, 3, 4, 5, 6$.

Определяя асимптотическое значение A_n при $n \rightarrow \infty$ от произведения перейдем к сумме, а затем к интегралу

$$\begin{aligned} \ln A_n &= \sum_{n/6 < k < 5n/6} \left(\ln 2 + \ln \sin \frac{\pi k}{n} \right) \\ &\sim n \left(\frac{2}{3} \ln 2 + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \ln \sin x \, dx \right) = \gamma \cdot n, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Приближенную величину γ можно найти, если воспользоваться таблицей значений функции Лобачевского (см. [13]):

$$\begin{aligned} L(u) &= - \int_0^u \ln \cos x \, dx, \\ \gamma &= \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{2}{\pi} L(\pi/3) \approx 0.33. \end{aligned}$$

Тогда

$$A_n \approx e^{0.33n} \approx (1.4)^n.$$

Отметим, что в неравенстве (1) множество экстремальных полиномов достаточно широко, оно содержит, например, все полиномы, нули которых находятся внутри единичного круга. В оценке (2) аналогичное множество, по-видимому, значительно уже. Нам известен только один вид экстремальных полиномов $-C(z + e^{i\alpha})$.

Убедиться в справедливости теоремы 2 достаточно просто: применяем теорему 1 и формулу (10).

Доказательство теоремы 3 следует той же схеме рассуждений, что и доказательство теоремы 1. Поэтому необходимо найти значение

$$M \left(\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \frac{z^k}{k-n} \right).$$

В теореме 1 для решения подобной задачи использовалась формула Пуассона–Иенсена; она всегда удобна, когда удастся найти нули полинома, для которого эта формула применяется. В данной ситуации, по нашему мнению, проще воспользоваться значением M как “нормы” $\| \cdot \|_0$. На основании равенства (9) запишем значение

$$S_{2n}(z) = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \frac{z^k}{k-n}$$

на единичной окружности:

$$S_{2n}(e^{it}) = ie^{int} \int_0^t \left[(1 + e^{i\theta})^{2n} e^{-in\theta} - \binom{2n}{n} \right] d\theta$$

и

$$|S_{2n}(e^{it})| = \left| \int_0^t \left(2^{2n} \cos^{2n} \frac{\theta}{2} - \binom{2n}{n} \right) d\theta \right|.$$

Так как (см. [9, т. I, гл. 5])

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} 2^{2n} \sim 2^{2n} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}, \quad n \rightarrow \infty,$$

то обозначая

$$a_n = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}},$$

имеем

$$|S_{2n}(e^{it})| = 2^{2n+1} \left| \int_0^t (\cos^{2n} u - a_n) du \right|.$$

Следовательно,

$$\ln M(S_{2n}) = \ln 2^{2n+1} + \int_0^{\pi/2} \ln \left| \int_0^t (\cos^{2n} u - a_n) du \right| \frac{2}{\pi} dt.$$

Оценим сначала внутренний интеграл

$$I = \left| \int_0^t (\cos^{2n} u - a_n) du \right|.$$

Известно (см. [9, т. I, гл. 5]), что

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} u du = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} a_n \pi.$$

Следовательно,

$$\int_0^t (\cos^{2n} u - a_n) du = \int_t^{\pi/2} (a_n - \cos^{2n} u) du.$$

Пусть α_n — угол, для которого $\cos^{2n} \alpha_n = a_n$, легко видно, что $\alpha_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Оценим I сверху и снизу при $t \geq \alpha_n$; так как

$$I_n(t) = \left| \int_0^t (\cos^{2n} u - a_n) du \right| = \int_t^{\pi/2} (a_n - \cos^{2n} u) du,$$

то

$$I_n(t) \leq a_n(\pi/2 - t) \quad (13)$$

и

$$\begin{aligned} I_n(t) &= \int_t^{\pi/2} (\cos^{2n} \alpha_n - \cos^{2n} u) du \\ &= \int_t^{\pi/2} (\cos \alpha_n - \cos u) \sum_{k=0}^{2n-1} \cos^k \alpha_n \cos^{2n-k} u du \\ &\geq \cos^{2n-1} \alpha_n \int_t^{\pi/2} (\cos \alpha_n - \cos u) du \\ &\geq a_n [\cos \alpha_n (\pi/2 - t) + \sin t - 1] \\ &\geq a_n (\pi/2 - t) \left(\cos \alpha_n - \frac{2}{\pi} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Далее,

$$\begin{aligned}\ln M(S_{2n}) &= \ln 2^{2n+1} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \ln I_n(t) dt \\ &= \ln 2^{2n+1} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha_n} \ln I_n(t) dt + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_n}^{\pi/2} \ln I_n(t) dt.\end{aligned}$$

Первый интеграл в последней строчке при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю, а второй, на основании (13) и (14), оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi} \int_{\alpha_n}^{\pi/2} \ln I_n(t) dt &\leq \ln \left(a_n \frac{\pi}{2e} \right), \\ \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_n}^{\pi/2} \ln I_n(t) dt &\geq \ln \left(a_n \frac{\pi}{2e} \left(\cos \alpha_n - \frac{2}{\pi} \right) \right), \quad \alpha_n \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Поэтому окончательно получаем

$$\begin{aligned}\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{M(S_{2n})}{2^{2n} \sqrt{\pi/n}} &\leq \frac{1}{e}, \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{M(S_{2n})}{2^{2n} \sqrt{\pi/n}} &\geq \frac{1}{e} \left(1 - \frac{2}{\pi} \right).\end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

Вполне естественно возникает вопрос о том, является ли оценка (3) окончательной хотя бы по порядку роста величины B_n ? То есть существует ли тригонометрический полином $U_n(t)$ такой, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{M(U_n)}{M(U'_n)} \cdot \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}} \geq C, \quad C > 0.$$

Пока мы можем привести пример полинома $U_n(t)$, у которого

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{M(U_n)}{M(U'_n)} \cdot \frac{n\sqrt{n}}{2^{2n}} \geq C, \quad C > 0.$$

В самом деле, пусть

$$\begin{aligned}U_n(t) &= e^{-int} \left[(1 + e^{it})^{2n} - \binom{2n}{n} e^{int} \right] = e^{-int} P_{2n}(e^{it}), \\ P_{2n}(z) &= (1 + z)^{2n} - \binom{2n}{n} z^n.\end{aligned}$$

Тогда

$$U'_n(t) = ie^{-int} (e^{it} P'_{2n}(e^{it}) - n P_{2n}(e^{it})) = ie^{-int} n [(1 + z)^{2n-1} (z - 1)]_{z=e^{it}}.$$

И сразу понятно, что $M(U'_n) = n$. Используя обозначения доказательства теоремы 3, произведем оценку $\ln M(u)$ по аналогии с (14):

$$\begin{aligned}\ln M(U_n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln 2^{2n} \left| \cos^{2n} \frac{t}{2} - a_n \right| dt \\ &= \ln 2^{2n} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \ln |\cos^{2n} t - a_n| dt, \\ \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_n}^{\pi/2} \ln(\cos^{2n} \alpha_n - \cos^{2n} t) dt \\ &\geq \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_n \right) \frac{2}{\pi} \ln 2 + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_n/2}^{\alpha_n/2 + \pi/4} \ln \sin t dt \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/4 - \alpha_n/2} \ln \sin t dt + \ln a_n = c_n + \ln a_n.\end{aligned}$$

Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \ln 2 + \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/4} \ln \sin t dt = -\frac{2}{\pi} \cdot G,$$

G_n — константа Каталана, равная

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \approx 0.915,$$

то

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{M(U_n)}{2^{2n} a_n} \geq e^{-\frac{2}{\pi} \cdot G}$$

и все доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Неравенства (2) и (3) остаются верными и для норм $\|\cdot\|_p$ при всех $0 \leq p \leq \infty$, благодаря оценке (12):

$$\begin{aligned}\|P_n(z) - P_n(0)\|_p &\leq A_n n^{-1} \|P'_n\|_p, \quad n \geq 2, \quad 0 \leq p \leq \infty, \\ \|T_n\|_p &\leq B_n \|T'_n\|_p, \quad n \geq 2, \quad 0 \leq p \leq \infty\end{aligned}$$

(у тригонометрического полинома $T_n(t)$ свободный член равен нулю). Любопытно, что роль коэффициента играет величина $M(R_n)$ и она одна и та же для всех p .

В заключение отметим работы В. В. Арестова [6], [11], [12], где успешно развивается тематика цитируемой выше статьи К. Малера и предлагаются интересные, на наш взгляд, задачи.

Список литературы

1. *Mahler K.* On the zeros of the derivative of a polynomial // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. 1961. V. 264. №1317. P. 145–154.
2. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений. Т. I, II. М.: Изд-во АН СССР, 1952–1959.
3. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. I, II. М.: Мир, 1965.
4. *Стороженко Э. А., Кротов В. Г., Освальд П.* Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p , $0 < p < 1$ // Матем. сб. 1975. Т. 98 (140). №3 (11). С. 395–415.
5. *Иванов В. И.* Некоторые неравенства для тригонометрических полиномов и их производных в разных метриках // Матем. заметки. 1975. Т. 18. №4. С. 489–498.
6. *Арестов В. В.* Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45. №1. С. 3–22.
7. *Харди Г., Литтлвуд Д., Полиа Г.* Неравенства. М.: ИЛ, 1948.
8. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. Киев: Наукова думка, 1992.
9. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. Т. I, II. М.: Наука, 1978.
10. *De Bruijn N. J., Springer T. A.* On the zeros of composition-polynomials // Jndag. Math. 1947. V. 9. P. 406–414.
11. *Арестов В. В.* Интегральные неравенства для алгебраических многочленов на единичной окружности // Матем. заметки. 1990. Т. 48. №4. С. 7–18.
12. *Арестов В. В.* Неравенство Сеге для производных сопряженного тригонометрического полинома в L_0 // Матем. заметки. 1994. Т. 56. №6. С. 10–26.
13. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ГИТТЛ, 1964.

Одесский государственный
университет им. И. И. Мечникова;
Институт математики, экономики и механики

Поступила в редакцию
12.10.1995