Общероссийский математический портал

А. А. Толстоногов, Непрерывные селекторы многозначных отображений с невыпуклыми, незамкнутыми, разложимыми значениями, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 5, 121–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm131>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 10:49:26

УДК 517.965

А. А. Толстоногов

Непрерывные селекторы многозначных отображений с невыпуклыми, незамкнутыми, разложимыми значениями

В работе выделяется класс многозначных отображений с невыпуклыми, незамкнутыми, разложимыми значениями и доказываются теоремы существования непрерывных селекторов у таких отображений. К этому классу относятся многозначные отображения, значениями которых являются экстремальные точки непрерывных многозначных отображений с замкнутыми, выпуклыми, разложимыми значениями в банаховом пространстве интегрируемых по Бохнеру функций. В основу доказательств положена теорема Бэра о категориях. Известно, что в общем случае множество экстремальных точек замкнутого выпуклого множества является незамкнутым. Поэтому результаты этой работы дают ответ на вопрос о существовании непрерывных селекторов у многозначных отображений с невыпуклыми незамкнутыми значениями.

Библиография: 26 названий.

Результаты работы [1] явились фундаментальными для изучения проблемы существования непрерывных селекторов у многозначных отображений с невыпуклыми, замкнутыми, разложимыми значениями. Идеи этой работы получили свое развитие в [2]–[6] и др. В основу доказательства теорем существования непрерывных селекторов у таких отображений были положены различные обобщения теоремы А. А. Ляпунова о выпуклости множества значений векторных и многозначных мер. В настоящей работе мы развиваем другой подход, отличный от того, что использовался в [1]–[6] и др. Этот подход базируется на использовании теоремы Бэра о категориях. Следует отметить, что идея использования теоремы Бэра была высказана в [7]. Эта идея развивалась в [8]–[16] и др. для доказательства существования и изучения свойств решений дифференциальных включений. По-видимому, впервые теорема Бэра для доказательства существования непрерывных селекторов у многозначных отображений с невыпуклыми, замкнутыми, разложимыми значениями была использована в [5]. В настоящей работе мы продолжаем эти исследования. Представление о содержании работы могут дать следующие теоремы.

Пусть T – метризуемый компакт с неотрицательной неатомической мерой Радона μ_0 и σ -алгеброй Σ μ_0 -измеримых подмножеств, X – сепарабельное банахово пространство, $L_1(T, X)$ – банахово пространство классов эквивалентности интегрируемых по Бохнеру функций из T в X , M – сепарабельное метрическое пространство.

Подмножество $M_0 \subset M$ называется σ -компактным, если оно представимо в виде объединения последовательности компактных множеств.

Пусть M_0 – плотное в M σ -компактное множество. В силу сепарабельности M такие множества всегда существуют.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-011-264).

ТЕОРЕМА 0.1. Пусть $\Gamma: M \mapsto L_1(T, X)$ – непрерывное в метрике Хаусдорфа, ограниченное на M многозначное отображение с выпуклыми, слабо компактными, разложимыми значениями. Тогда существует непрерывный селектор $g(\cdot)$ отображения Γ такой, что

$$\begin{aligned} g(\xi) &\in \text{ext } \Gamma(\xi), & \xi &\in M_0, \\ g(\xi) &\in \overline{\text{ext } \Gamma(\xi)}, & \xi &\in M \setminus M_0. \end{aligned} \quad (0.1)$$

Если M σ -компактно, то включение (0.1) выполняется при всех $\xi \in M$. Здесь $\text{ext } \Gamma(\xi)$ – совокупность всех экстремальных точек множества $\Gamma(\xi)$, а $\overline{\text{ext } \Gamma(\xi)}$ – замыкание в $L_1(T, X)$ множества $\text{ext } \Gamma(\xi)$.

ТЕОРЕМА 0.2. Пусть многозначное отображение $\mathcal{F}: M \mapsto L_1(T, X)$ имеет замкнутые, ограниченные, разложимые значения и такое, что отображение $\overline{\text{co}} \mathcal{F}$ обладает теми же свойствами, что и отображение Γ в теореме 0.1. Тогда существует непрерывный селектор $f(\cdot)$ отображения $\mathcal{F}$ такой, что

$$\begin{aligned} f(\xi) &\in \text{ext } \overline{\text{co}} \mathcal{F}(\xi), & \xi &\in M_0, \\ f(\xi) &\in \overline{\text{ext } \overline{\text{co}} \mathcal{F}(\xi)}, & \xi &\in M \setminus M_0. \end{aligned} \quad (0.2)$$

Если M σ -компактно, то включение (0.2) выполняется при всех $\xi \in M$. Здесь $\overline{\text{co}} \mathcal{F}(\xi)$ означает замкнутую выпуклую оболочку множества $\mathcal{F}(\xi)$.

Теорема 0.1 дает условия, при которых многозначное отображение $\text{ext } \Gamma$ имеет непрерывный селектор на плотном σ -компактном множестве M_0 , а теорема 0.2 – условия, при которых многозначное отображение $\mathcal{F}$, не обладающее какими-либо свойствами непрерывности или полунепрерывности, имеет непрерывный селектор.

В работе доказываются более общие результаты, чем приведенные выше, и рассматриваются примеры отображений Γ и $\mathcal{F}$, широко используемых при изучении дифференциальных и эволюционных включений.

1. Пусть X – сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, T – метризуемый компакт с положительной неатомической мерой Радона μ_0 и σ -алгеброй Σ μ_0 -измеримых подмножеств, $L_1(T, X)$ – банахово пространство классов эквивалентности интегрируемых по Бохнеру функций с нормой

$$\|v\|_{L_1} = \left(\int_T \|v(t)\| d\mu_0 \right).$$

Обозначим через X' и $L'_1(T, X)$ пространства, топологически сопряженные к X и $L_1(T, X)$, с сильными (нормированными) топологиями. Норму в пространстве X' будем обозначать так же, как и в X .

Пусть $\langle x, x' \rangle$, $\langle u(\cdot), u'(\cdot) \rangle$ – канонические билинейные формы, устанавливающие двойственность между X и X' и, соответственно, между $L_1(T, X)$ и $L'_1(T, X)$. В дальнейшем, где это не вызывает недоразумений, пространства $L_1(T, X)$ и $L'_1(T, X)$ будем обозначать L_1 и L'_1 .

Пространства X и L_1 со слабыми $\sigma(X, X')$ и $\sigma(L_1, L'_1)$ топологиями [17] будем обозначать $X(\sigma)$ и $L_1(\sigma)$. Аналогично, $X'(\sigma)$ и $L'_1(\sigma)$ – пространства X' и L'_1 со слабыми $\sigma(X', X)$ и $\sigma(L'_1, L_1)$ топологиями.

Обозначим через $L_\infty(T, X')$ банахово пространство классов эквивалентности скалярно измеримых существенно ограниченных функций $v: T \rightarrow X'$ с нормой

$$\|v\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{t \in T} \|v(t)\|.$$

В дальнейшем мы не будем различать классы эквивалентности в пространствах L_1 и $L_\infty(T, X')$ с их представителями.

Известно, что в рамках сделанных предположений на T и X пространства $L_1(T, X)$ и $L_\infty(T, X')$ линейно изометричны [18]. Поэтому, как это обычно делается, мы будем считать $L_\infty(T, X')$ сопряженным к $L_1(T, X)$ и писать

$$\langle v(\cdot), v'(\cdot) \rangle = \int_T \langle v(t), v'(t) \rangle d\mu_0, \quad v(\cdot) \in L_1,$$

считая $v'(\cdot)$ элементом пространства $L_\infty(T, X')$.

Функция $v: T \rightarrow X'$ называется *слабо измеримой*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество $T_\varepsilon \subset T$, $\mu_0(T \setminus T_\varepsilon) < \varepsilon$, такое, что сужение v на T_ε является непрерывной функцией из T_ε в $X'(\sigma)$.

Многозначное отображение $F: T \rightarrow X$ называется *измеримым*, если для любого замкнутого множества $U \subset X$ множество $t \in T: F(t) \cap U \neq \emptyset$ измеримо.

Многозначное отображение $F: T \rightarrow X$ называется *интегрально ограниченным*, если существует суммируемая функция $\lambda: T \rightarrow \mathbb{R}^+$ такая, что

$$\sup \{ \|x\| : x \in F(t) \} \leq \lambda(t), \quad t \in T.$$

Пусть Z и Y — топологические пространства.

Многозначное отображение $F: Z \rightarrow Y$ называется *полунепрерывным снизу в точке* $z_0 \in Z$, если для любого открытого множества $U \subset Y$, $F(z_0) \cap U \neq \emptyset$, существует окрестность $V(z_0)$ точки z_0 такая, что $F(z) \cap U \neq \emptyset$ для любого $z \in V(z_0)$.

Многозначное отображение $F: Z \rightarrow Y$ называется *полунепрерывным сверху в точке* $z_0 \in Z$, если для любого открытого множества $U \subset Y$, $F(z_0) \subset U$, существует окрестность $V(z_0)$ точки z_0 такая, что $F(z) \subset U$ для любого $z \in V(z_0)$.

Пусть Y — нормированное пространство и $B = \{y \in Y; \|y\| < 1\}$.

Многозначное отображение $F: Z \rightarrow Y$ называется *полунепрерывным снизу по Хаусдорфу в точке* $z_0 \in Z$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $V(z_0)$ точки z_0 такая, что $F(z_0) \subset F(z) + \varepsilon B$.

Многозначное отображение $F: Z \rightarrow Y$ называется *полунепрерывным сверху по Хаусдорфу в точке* $z_0 \in Z$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $V(z_0)$ точки z_0 такая, что $F(z) \subset F(z_0) + \varepsilon B$ для любого $z \in V(z_0)$.

Множество $A \subset L_1$ называется *разложимым*, если для любых $u(\cdot), v(\cdot) \in L_1$, $E \in \Sigma$ элемент $u(\cdot)\chi_E + v(\cdot)\chi_{T \setminus E}$ принадлежит множеству A , где $\chi_E, \chi_{T \setminus E}$ — характеристические функции множеств E и $T \setminus E$. *Разложимая оболочка множества* A — это наименьшее по включению разложимое множество, содержащее A .

Обозначим через bX совокупность всех непустых, ограниченных, замкнутых подмножеств из X с метрикой Хаусдорфа $\operatorname{dist}(\cdot, \cdot)$. Под cbX ($\operatorname{conv} X(\sigma)$) мы понимаем подпространство пространства bX , состоящее из выпуклых (выпуклых,

компактных) подмножеств из X ($X(\sigma)$). Аналогичный смысл имеют пространства bL_1 , cbL_1 , $\text{conv } L_1(\sigma)$ с метрикой Хаусдорфа $\text{dist}_{L_1}(\cdot, \cdot)$. Пространства dbL_1 , $dcbL_1$, $d \text{ conv } L_1(\sigma)$ представляют собой подпространства пространств bL_1 , cbL_1 , $\text{conv } L_1(\sigma)$, состоящие из разложимых множеств.

Обозначим через $\mathcal{M}$ пространство всех числовых мер $\mu: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ ограниченной вариации, абсолютно непрерывных относительно меры μ_0 с нормой $\|\mu\|_{\mathcal{M}} = |\mu|(T)$, где $|\mu|(T)$ – полная вариация меры μ на T .

Пусть M – сепарабельное метрическое пространство и $\mu_0(A \triangle B)$ – псевдометрика на Σ , где $A \triangle B$ означает симметрическую разность множеств A и B .

В дальнейшем нам понадобятся утверждения [6].

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1. Пусть $\mathcal{P}_n: M \rightarrow \mathcal{M}$, $n \geq 1$, – последовательность полунепрерывных сверху по Хаусдорфу многозначных отображений с непустыми относительно компактными значениями, $\{V_n\}_1^\infty$ – локально конечное открытое покрытие пространства M и $\{e_n\}_1^\infty$ – подчиненное ему непрерывное разбиение единицы с носителями $\text{supp } e_n \subset V_n$, $n \geq 1$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность непрерывных относительно псевдометрики $\mu_0(A \triangle B)$ на Σ отображений $\mathcal{B}_n: M \rightarrow \Sigma$, $n \geq 1$, такая, что:

- 1) для каждого $\xi \in M$ множества $\{\mathcal{B}_n(\xi)\}_1^\infty$ попарно не пересекаются и $\mu_0(\bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{B}_n(\xi)) = \mu_0(T)$;
- 2) для любых $\xi \in M$, $n \geq 1$, множество $\mathcal{B}_n(\xi) = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $e_n(\xi) = 0$;
- 3) для любых $\xi \in M$, $n \geq 1$, $\mu(\cdot) \in P_n(\xi)$

$$|\mu(\mathcal{B}_n(\xi)) - e_n(\xi)\mu(T)| < \varepsilon.$$

Обозначим через $\partial(\|x\|)$ субдифференциал в нуле функции $\|x\|$, который равен $\{x' \in X' : \|x\| \leq 1\}$ [19].

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.2. Для любой непрерывной функции $\gamma: M \rightarrow (0, +\infty)$ существует функция $v: T \times X \times M \rightarrow X'$ со следующими свойствами:

- 1) для каждой $(x, \xi) \in X \times M$ функция $v(t, x, \xi)$ слабо измерима по t ;
- 2) для почти всех t функция $v(t, x, \xi)$ непрерывна по совокупности (x, ξ) в топологии пространства $X'(\sigma)$;
- 3) при почти всех $t \in T$ для каждого (x, ξ)

$$\|x\| \leq \langle x, v(t, x, \xi) \rangle + \gamma(\xi), \quad v(t, x, \xi) \in \partial(\|x\|).$$

Множество $H \subset L_1(T, X)$ называется *равномерно интегрируемым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $E \in \Sigma$, $\mu_0(E) \leq \delta$ и любого $f \in H$ выполняется неравенство $\int_E \|f(t)\| d\mu_0 < \varepsilon$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.3. Пусть $f_n, f \in L_1(T, X)$, $n \geq 1$. Если последовательность f_n , $n \geq 1$, равномерно интегрируема и $f_n(t)$, $n \geq 1$, сходится почти всюду на T к $f(t)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_T \|f_n(t) - f(t)\| d\mu_0 = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим последовательность числовых функций z_n , $z_n(t) = \|f_n(t) - f(t)\|$, $n \geq 1$, которая равномерно интегрируема и почти всюду сходится к нулю. Из известной теоремы А. А. Ляпунова следует, что множество $\{\mu_0(E); E \in \Sigma\}$ является выпуклым и компактным. Следовательно, для произвольного $\delta > 0$ существует совокупность $A_n \in \Sigma$, $1 \leq n \leq N$, попарно непересекающихся множеств таких, что $T = \sum_{n=1}^N A_n$, $\mu_0(A_n) \leq \delta$, $1 \leq n \leq N$. Отсюда, в силу равномерной интегрируемости последовательности z_n , $n \geq 1$, следует, что последовательность z_n , $n \geq 1$, ограничена в $L_1(T, R)$. Поэтому она является относительно слабо компактным подмножеством пространства $L_1(T, R)$ [18]. Теперь утверждение вытекает из теоремы Данфорда–Петтиса [18].

2. Пусть $\{x'_s\}_{s=1}^\infty$ – счетное, плотное в топологии пространства $X'(\sigma)$, уравновешенное подмножество множества $\{x' \in X'; \|x'\| \leq 1\}$. Для множества $A \in cbX$ обозначим через $\text{ext } A$ совокупность всех его экстремальных точек и определим функции

$$d^s(A)(u) = \sup \left\{ \langle y - x, x'_s \rangle; y, x \in A, u = \frac{x + y}{2} \right\}, \quad s \geq 1. \quad (2.1)$$

Следующая лемма является бесконечномерной версией леммы 1 [15].

ЛЕММА 2.1. Для каждого $s \geq 1$

- а) функция $u \rightarrow d^s(A)(u)$ неотрицательна, вогнута и если $u \in A \subset B$, $B \in cbX$, то $d^s(A)(u) \leq d^s(B)(u)$;
- б) $u \in \text{ext } A$ тогда и только тогда, когда $d^s(A)(u) = 0$ для всех $s \geq 1$;
- в) если Y – топологическое пространство, $A: Y \rightarrow cbX$ – непрерывное в метрике Хаусдорфа многозначное отображение и $u(y)$ – его непрерывный селектор, то функция $y \rightarrow d^s(A(y))(u(y))$ полунепрерывна сверху.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство утверждений а), б) мы опускаем, поскольку они с достаточно очевидными видоизменениями повторяют доказательства аналогичных утверждений в [15]. Следует только учесть, что множество $\{x'_s\}_{s=1}^\infty$ разделяет точки пространства X [17].

Остановимся на доказательстве утверждения в). Обозначим через X'' второе топологически сопряженное к X пространство с нормированной топологией. Будем рассматривать X как подпространство пространства X'' . Тогда $A(y) \subset X''$, $y \in Y$, является относительно компактным, выпуклым подмножеством пространства X'' в слабой топологии $\sigma(X'', X')$ [17]. Обозначим через $\overline{A}(y)$, $y \in Y$, замыкание множества $A(y)$ в $\sigma(X'', X')$ топологии. Так как шар $\{x \in X; \|x\| \leq 1\}$ плотен в шаре $\{x'' \in X''; \|x''\| \leq 1\}$ в $\sigma(X'', X')$ топологии, а топология пространства X'' индуцирует топологию пространства X , то многозначное отображение $\overline{A}(y)$, $y \in Y$, непрерывно в метрике Хаусдорфа $\text{dist}_{X''}(\cdot, \cdot)$ на пространстве всех выпуклых, замкнутых, ограниченных подмножеств из X'' .

Из компактности множества $\overline{A}(y)$, $y \in Y$, в $\sigma(X'', X')$ топологии следует, что отображение $\overline{A}(y)$, $y \in Y$, полунепрерывно сверху в $\sigma(X'', X')$ топологии. Тогда многозначное отображение $C(y) = (\overline{A}(y) - u(y)) \cap (-\overline{A}(y) + u(y))$ является полунепрерывным сверху в $\sigma(X'', X')$ топологии как пересечение двух полунепрерывных сверху отображений.

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} d^s(A(y))(u(y)) &= \sup\{\langle z - x, x'_s \rangle; x, z \in \overline{B}(y) - u(y), x + z = 0\} \\ &= 2 \sup\{\langle 2z, x'_s \rangle; z \in C(y)\}. \end{aligned}$$

Отсюда и из полунепрерывности сверху $C(y)$ в $\sigma(X'', X')$ топологии следует, что функция $d^s(A(y))(u(y))$ полунепрерывна сверху. Лемма доказана.

Для множества $A \in cbX$ обозначим через

$$g^s(A) = \sup\{\langle x - y, x'_s \rangle; x, y \in A\}, \quad s \geq 1. \quad (2.2)$$

Ясно, что $g^s(A) \geq 0$ и $d^s(A)(u) \leq g^s(A)$ для любого $u \in A$. Пусть

$$\begin{aligned} L^s(A)(u) &= \{r \in \mathbb{R}^+; d^s(A)(u) \leq r \leq g^s(A)\}, \\ A_n &\in cbX, \quad u_n \in A_n, \quad n \geq 1, \\ A &\in cbX, \quad u \in A, \quad r \in L^s(A)(u). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Обозначим через $r_n \in L^s(A_n)(u_n)$ точку такую, что

$$|r - r_n| = \min\{|r - k|; k \in L^s(A_n)(u_n)\}.$$

ЛЕММА 2.2. Пусть последовательность $A_n \in cbX$, $n \geq 1$, сходится к $A \in cbX$ в метрике Хаусдорфа, а последовательность u_n , $n \geq 1$, сходится к u . Тогда при фиксированных $s \geq 1$, $r \in L^s(A)(u)$ последовательность $r_n \in L^s(A_n)(u_n)$, $n \geq 1$, сходится к r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем вначале, что последовательность $g^s(A_n)$, $n \geq 1$, сходится к $g^s(A)$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Тогда найдется номер N такой, что

$$A \subset A_n + \varepsilon B, \quad A_n \subset A + \varepsilon B, \quad n \geq N, \quad (2.4)$$

где $B = \{x \in X; \|x\| < 1\}$. Возьмем произвольные $x, y \in A$. Из левого включения (2.4) вытекает, что $x = x_n + v_n$, $y = y_n + w_n$, $n \geq N$, где $x_n, y_n \in A_n$, $v_n, w_n \in \varepsilon B$. Следовательно,

$$\langle x - y, x'_s \rangle = \langle x_n - y_n, x'_s \rangle + \langle v_n - w_n, x'_s \rangle.$$

Отсюда непосредственно следует

$$g^s(A_n) \leq g^s(A) + 2\varepsilon, \quad n \geq N.$$

Аналогично, воспользовавшись правым включением (2.4), получим

$$g^s(A) \leq g^s(A_n) + 2\varepsilon, \quad n \geq N.$$

Тем самым последовательность $g^s(A_n)$, $n \geq 1$, сходится к $g^s(A)$. Поэтому в соответствии с утверждением в) леммы 2.1 для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что для всех $n \geq N$

$$d^s(A_n)(u_n) \leq d^s(A)(u) + \varepsilon, \quad g^s(A) \leq g^s(A_n) + \varepsilon.$$

Следовательно,

$$L^s(A)(u) \subset L^s(A_n)(u_n) + \varepsilon C,$$

где $C = \{r \in \mathbb{R}; |r| < 1\}$. Из этого включения вытекает, что $|r_n - r| < \varepsilon$, $n > N$. Следовательно, последовательность r_n , $n \geq 1$, сходится к r . Лемма доказана.

ЛЕММА 2.3. Пусть $F: T \rightarrow cbX$ – измеримое отображение и $u(t)$ – его измеримый селектор. Тогда функции $d^s(F)(u(t))$, $g^s(F)(t)$ и многозначное отображение $L^s(F)(u(t))$, определенные по формулам (2.1)–(2.3), измеримы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим многозначное отображение $F_0(t)$, определенное по правилу

$$F_0(t) = \{x \in X; x \in F(t) - u(t), -x \in F(t) - u(t)\}, \quad (2.5)$$

которое является измеримым отображением [20] со значениями в cbX . Простая проверка показывает, что

$$d^s(F)(u(t)) = \sup\{\langle 2z, x'_s \rangle; z \in F_0(t)\}. \quad (2.6)$$

Теперь измеримость $d^s(F)(u(t))$ следует из (2.6) и теоремы 2.2 [22]. Измеримость функции $g^s(F)(t)$ также следует из этой теоремы, если учесть, что

$$g^s(F)(t) = \sup\{\langle x - y, x'_s \rangle; (x, y) \in F(t) \times F(t)\}$$

и отображение $F(t) \times F(t)$ измеримо [20]. Измеримость отображения $L^s(F)(u(t))$ непосредственно вытекает из измеримости функций $d^s(F)(u(t))$ и $g^s(F)(t)$. Лемма доказана.

Из леммы 2.3 и свойств измеримых отображений с компактными значениями следует, что если $F_n, F: T \rightarrow cbX$, $n \geq 1$, измеримы и $u_n(t)$, $u(t)$, $r(t)$ – измеримые селекторы отображений $F_n(t)$, $F(t)$, $L^s(F)(u(t))$, то существует последовательность измеримых селекторов $r_n(t)$, $n \geq 1$, отображений $L^s(F_n)(u_n(t))$ такая, что

$$|r(t) - r_n(t)| = \min\{|r(t) - k|; k \in L^s(F_n)(u_n(t))\}. \quad (2.7)$$

ЛЕММА 2.4. Пусть при почти всех $t \in T$ последовательность $F_n: T \rightarrow cbX$, $n \geq 1$, измеримых отображений сходится к измеримому отображению $F: T \rightarrow cbX$ в метрике Хаусдорфа, а последовательность $u_n(t)$, $n \geq 1$, измеримых селекторов $F_n(t)$ сходится к измеримому селектору $u(t)$ отображения $F(t)$. Тогда для любого измеримого селектора $r(t)$ отображения $L^s(F)(u(t))$ последовательность измеримых селекторов $r_n(t)$, $n \geq 1$, отображений $L^s(F_n)(u_n(t))$, удовлетворяющая (2.7), почти всюду сходится к $r(t)$.

Лемма непосредственно следует из леммы 2.2.

3. Пусть $F: T \rightarrow bX$ – измеримое, интегрально ограниченное отображение. Обозначим через $S(F)$ совокупность всех измеримых селекторов отображения F . Тогда $S(F)$ является элементом пространства dbL_1 [21].

ЛЕММА 3.1. Пусть $F_1, F_2: T \rightarrow bX$ – измеримые, интегрально ограниченные отображения. Тогда

$$\text{dist}_{L_1}(S(F_1), S(F_2)) \leq \int_T \text{dist}(F_1(t), F_2(t)) d\mu_0 \leq 2 \text{dist}_{L_1}(S(F_1), S(F_2)). \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не оговаривая особо, отметим, что все функции, фигурирующие в доказательстве, будут интегрируемыми в силу леммы 2.1 [21].

Возьмем произвольный элемент $x(\cdot) \in S(F_1)$. Тогда, воспользовавшись теоремой 2.2 [21], получим

$$\begin{aligned} d_{L_1}(x(\cdot), S(F_2)) &= \inf \{ \|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_1}; y \in S(F_2) \} \\ &= \int_T d(x(t), F_2(t)) d\mu_0 \leq \int_T \text{dist}(F_1(t), F_2(t)) d\mu_0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Аналогично, для любого элемента $y(\cdot) \in S(F_2)$ имеем

$$d_{L_1}(y(\cdot), S(F_1)) \leq \int_T \text{dist}(F_1(t), F_2(t)) d\mu_0. \quad (3.3)$$

Из неравенств (3.2), (3.3) сразу вытекает левое неравенство (3.1).

Перейдем к доказательству правого неравенства (3.1). Из определения функции $\text{dist}(F_1(t), F_2(t))$ следует, что существует множество $E \in \Sigma$ такое, что

$$\begin{aligned} \text{dist}(F_1(t), F_2(t)) &= \{ \sup d(x, F_1(t)); x \in F_2(t) \}, \quad t \in E, \\ \text{dist}(F_1(t), F_2(t)) &= \{ \sup d(y, F_2(t)); y \in F_1(t) \}, \quad t \in T \setminus E. \end{aligned}$$

Воспользовавшись теоремой 2.2 [21], получаем,

$$\begin{aligned} \int_E \sup \{ d(x, F_1(t)); x \in F_2(t) \} d\mu_0 &= \sup_{x(\cdot) \in S(F_2)} \int_E d(x(t), F_1(t)) d\mu_0 \\ &\leq \sup_{x(\cdot) \in S(F_2)} \int_T d(x(t), F_1(t)) d\mu_0 \\ &= \sup_{x(\cdot) \in S(F_2)} d_{L_1}(x(\cdot), S(F_1)) \\ &\leq \text{dist}_{L_1}(S(F_1), S(F_2)). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Аналогично,

$$\int_{T \setminus E} \sup \{ d(y, F_2(t)); y \in F_1(t) \} d\mu_0 \leq \text{dist}_{L_1}(S(F_1), S(F_2)). \quad (3.5)$$

Складывая неравенства (3.4), (3.5), приходим к правому неравенству (3.1). Лемма доказана.

Пусть $\Gamma \in dcbL_1$. Тогда в соответствии с теоремами 3.1, 3.2 [21] существует единственное с точностью до множества нулевой меры, измеримое, интегрально ограниченное отображение $F: T \rightarrow cbX$ такое, что

$$\Gamma = S(F). \quad (3.6)$$

Для множества $\Gamma \in dcbL_1$ и элемента $u(\cdot) \in \Gamma$ положим

$$\begin{aligned} D^s(\Gamma)(u(\cdot)) &= \sup \left\{ \langle y(\cdot) - z(\cdot), x'_s \chi(\cdot) \rangle; y(\cdot), z(\cdot) \in \Gamma, u(\cdot) = \frac{y(\cdot) + z(\cdot)}{2} \right\}, \\ G^s(\Gamma) &= \sup \{ \langle y(\cdot) - z(\cdot), x'_s \chi(\cdot) \rangle; y(\cdot), z(\cdot) \in \Gamma \}, \end{aligned}$$

где $\chi(\cdot)$ – характеристическая функция множества T . Для многозначного отображения $F: T \rightarrow cbX$, связанного с множеством Γ равенством (3.6), и его селектора $u(\cdot)$ определим по формулам (2.1)–(2.3) функции $d^s(F)(u(t))$, $g^s(F)(t)$ и многозначное отображение $L^s(F)(u(t))$. Из интегральной ограниченности отображения $F(t)$ и леммы 2.3 следует, что функции $d^s(F)(u(t))$, $g^s(F)(t)$ суммируемы, а многозначное отображение $L^s(F)(u(t))$ измеримо и интегрально ограничено.

Поскольку множество $\{x'_s \chi(\cdot)\}_1^\infty \subset L_\infty(T, X)$ не разделяет точки пространства L_1 , то свойства функции $D^s(\Gamma)(u(\cdot))$ формально не следуют из леммы 2.1. Тем не менее справедлива

ЛЕММА 3.2. Пусть $\Gamma \in dcbL_1$ и $u(\cdot) \in \Gamma$. Тогда для любого $s \geq 1$

$$1) \quad D^s(\Gamma)(u(\cdot)) = \int_T d^s(F)(u(t)) d\mu_0; \quad (3.7)$$

$$2) \quad G^s(\Gamma) = \int_T g^s(F)(t) d\mu_0; \quad (3.8)$$

3) $u(\cdot) \in \text{ext } \Gamma$ тогда и только тогда, когда $D^s(\Gamma)(u(\cdot)) = 0$ для всех $s \geq 1$;

4) если последовательность $\Gamma_n \in dcbL_1$, $n \geq 1$, сходится в метрике Хаусдорфа $\text{dist}_{L_1}(\cdot, \cdot)$, а последовательность $u_n(\cdot) \in \Gamma_n$, $n \geq 1$, сходится в L_1 к $u(\cdot) \in \Gamma$, то

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} D^s(\Gamma_n)(u_n(\cdot)) \leq D^s(\Gamma)(u(\cdot)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество

$$\Gamma_0 = \{y(\cdot) \in L_1; y(\cdot) \in \Gamma - u(\cdot), -y(\cdot) \in \Gamma - u(\cdot)\}$$

и многозначное отображение $F_0(t)$, определенное по правилу (2.5). Тогда $\Gamma_0 \in dcbL_1$ и $\Gamma_0 = S(F_0)$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$D^s(\Gamma)(u(\cdot)) = \sup\{\langle 2y(\cdot), x'_s \chi(\cdot) \rangle; y(\cdot) \in \Gamma_0\} \quad (3.9)$$

и справедливо равенство (2.6). Поскольку для любого $y(\cdot) \in \Gamma_0$

$$\langle 2y(\cdot), x'_s \chi(\cdot) \rangle = \int_T \langle 2y(t), x'_s \rangle d\mu_0, \quad (3.10)$$

то равенство (3.7) следует из (3.9), (2.6), (3.10) и теоремы 2.2 [21].

Равенство (3.8) доказывается аналогичным образом с использованием теоремы 2.2 [21].

Перейдем к доказательству утверждения 3). Если $u(\cdot) \in \text{ext } \Gamma$, то равенства $D^s(\Gamma)(u(\cdot)) = 0$, $s \geq 1$, следуют из определения экстремальной точки.

Пусть теперь $D^s(\Gamma)(u(\cdot)) = 0$, $s \geq 1$. Предположим, что $u(\cdot)$ не является экстремальной точкой. Тогда найдутся элементы $y(\cdot), z(\cdot) \in \Gamma$, $y(\cdot) \neq z(\cdot)$, такие, что $u(\cdot) = (y(\cdot) + z(\cdot))/2$. Для $\varepsilon > 0$ выберем, используя равенство (3.7),

компактное подмножество $T_\varepsilon \subset T$, $\mu(T \setminus T_\varepsilon) \leq \varepsilon$, такое, что $u(t)$, $y(t)$, $z(t)$ непрерывны на T_ε , $y(t) \neq z(t)$, $u(t) = (y(t) + z(t))/2$, $u(t), y(t), z(t) \in F(t)$, $t \in T_\varepsilon$, и $d^s(F)(u(t)) = 0$, $t \in T_\varepsilon$, $s \geq 1$. Так как множество $\{x'_s\}_{s=1}^\infty$ разделяет точки пространства X , то для любой точки $t \in T_\varepsilon$ найдется номер $s \geq 1$, зависящий от t , который мы будем обозначать $s(t)$, такой, что $\langle y(t) - z(t), x'_{s(t)} \rangle > 0$. Тогда в силу непрерывности $y(t)$, $z(t)$ на T_ε , найдется окрестность $V(t)$ в T_ε точки t такая, что $\langle y(\tau) - z(\tau), x'_{s(t)} \rangle > 0$ для всех $\tau \in V(t)$. Поскольку множества $V(t)$, $t \in T_\varepsilon$, образуют открытое покрытие компакта T_ε , то существует $t^* \in T_\varepsilon$ такое, что $\mu_0(V(t^*)) > 0$.

Из определения меры Радона следует, что существует компакт $T_0 \subset V(t^*)$ такой, что $\mu_0(T_0) > 0$. Тогда для $s^* = s(t^*)$

$$0 < \int_{T_0} \langle y(\tau) - z(\tau), x'_{s^*} \rangle d\mu_0 \leq \int_T d^{s^*}(F)(u(\tau)) d\mu_0 = D^{s^*}(\Gamma)(u(\cdot)) = 0,$$

что противоречит нашему предположению. Тем самым утверждение 3) доказано.

Так как L_1 сепарабельно, то утверждение 4) следует из леммы 2.1. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть $\Gamma \in dcbL_1$. Точка $u(\cdot) \in \text{ext } \Gamma$ тогда и только тогда, когда $u(t) \in \text{ext } F(t)$ при почти всех $t \in T$.

Следствие вытекает из утверждения б) леммы 2.1 и утверждений 1), 3) леммы 3.2.

Пусть M — сепарабельное метрическое пространство и $\Gamma: M \rightarrow dcbL_1$ — непрерывное отображение, $u: M \rightarrow L_1$ — его непрерывный селектор, который всегда существует [3]. Обозначим через $F(\xi)$, $\xi \in M$, многозначное отображение $F(\xi): T \rightarrow cbX$, связанное с $\Gamma(\xi)$ равенством (3.6). Тогда на M будут определены функции

$$\begin{aligned} D^s(u(\xi)) &= D^s(\Gamma(\xi))(u(\xi)), \quad G^s(\xi) = G^s(\Gamma(\xi)), \quad D^s(u(\xi)) \leq G^s(\xi), \\ d^s(u(\xi))(t) &= d^s(F(\xi))(u(\xi)(t)), \quad g^s(\xi)(t) = g^s(F(\xi))(t), \quad \xi \in M, \end{aligned}$$

и многозначное отображение

$$L^s(u(\xi))(t) = L^s(F(\xi))(u(\xi)(t)), \quad \xi \in M.$$

Согласно лемме 3.1

$$D^s(u(\xi)) = \int_T d^s(u(\xi))(t) d\mu_0, \quad (3.11)$$

$$G^s(\xi) = \int_T g^s(\xi)(t) d\mu_0, \quad \xi \in M. \quad (3.12)$$

Для каждого $\xi \in M$ положим $\mathcal{L}^s(u(\xi)) = S(L^s(u(\xi)))$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\Gamma: M \rightarrow dcbL_1$ непрерывно. Тогда отображение $\xi \rightarrow \mathcal{L}^s(u(\xi))$ является полунепрерывным снизу многозначным отображением из M в $d \text{conv}(L_1(T, R)(\sigma))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для фиксированного $\xi \in M$ и каждого измеримого селектора $r(t)$ отображения $L^s(u(\xi))$ почти всюду справедливо неравенство

$$0 \leq d^s(u(\xi))(t) \leq r(t) \leq g^s(\xi)(t) \leq 2\|F(\xi)(t)\|. \quad (3.13)$$

Из этого неравенства следует, что $\mathcal{L}^s(u(\xi)) \in d \operatorname{conv}(L_1(T, R)(\sigma))$.

Пусть $\xi_0 \in M$ — фиксированная точка. Для доказательства полунепрерывности снизу отображения $\mathcal{L}^s(u(\xi))$ в точке ξ_0 достаточно показать, что для любой последовательности $\xi_n \rightarrow \xi_0$, $n \geq 1$, и любого элемента $r(\xi_0) \in \mathcal{L}^s(u(\xi_0))$ существует последовательность элементов $r(\xi_n) \in \mathcal{L}^s(u(\xi_n))$, $n \geq 1$, сходящаяся к $r(\xi_0)$ в топологии пространства $L_1(T, R)$. Так как $r(\xi_0) \in \mathcal{L}^s(u(\xi_0))$, то $r(\xi_0)(t) \in L^s(u(\xi_0))(t)$, $t \in T$. Тогда существует последовательность измеримых селекторов $r(\xi_n)(t) \in L^s(u(\xi_n))(t)$, $n \geq 1$, такая, что

$$|r(\xi_0)(t) - r(\xi_n)(t)| = \min\{|r(\xi_0)(t) - k|; k \in L^s(u(\xi_n))(t)\}, \quad t \in T.$$

Так как последовательность $\Gamma(\xi_n)$, $n \geq 1$, сходится к $\Gamma(\xi_0)$ в метрике $\operatorname{dist}_{L_1}(\cdot, \cdot)$, а последовательность $u(\xi_n)$, $n \geq 1$, сходится к $u(\xi_0)$ в L_1 , то в соответствии с леммой 3.1 существует подпоследовательность ξ_{n_k} , $k \geq 1$, последовательности ξ_n , $n \geq 1$, такая, что $F(\xi_{n_k})(t)$ сходится к $F(\xi_0)(t)$ в метрике $\operatorname{dist}(\cdot, \cdot)$, а $u(\xi_{n_k})(t)$, $k \geq 1$, сходится к $u(\xi_0)(t)$ при почти всех $t \in T$. Тогда в соответствии с леммой 2.4 последовательность $r(\xi_{n_k})(t)$, $k \geq 1$, при почти всех $t \in T$ сходится к $r(\xi_0)(t)$.

Из неравенства

$$\int_E \|F(\xi_n)(t)\| d\mu_0 \leq \int_E \operatorname{dist}(F(\xi_n)(t), F(\xi_0)(t)) d\mu_0 + \int_E \|F(\xi_0)(t)\| d\mu_0, \quad E \in \Sigma,$$

и леммы 3.1 следует, что последовательность $\|F(\xi_n)(t)\|$, $n \geq 1$, равномерно интегрируема. Тогда в соответствии с (3.13) последовательность $r(\xi_{n_k})(t)$, $k \geq 1$, также равномерно интегрируема. Следовательно, согласно утверждению 1.3 последовательность $r(\xi_{n_k})$, $k \geq 1$, сходится к $r(\xi_0)$ в $L_1(T, R)$.

Предположим, что сама последовательность $r(\xi_n)$, $n \geq 1$, не сходится к $r(\xi_0)$ в $L_1(T, R)$. Тогда существует подпоследовательность $r(\xi_{n_k})$, $k \geq 1$, последовательности $r(\xi_n)$, $n \geq 1$, такая, что любая подпоследовательность последовательности $r(\xi_{n_k})$, $k \geq 1$, не сходится к $r(\xi_0)$. Применяя к последовательности $r(\xi_{n_k})$, $k \geq 1$, рассуждения, приведенные выше, приходим к противоречию. Теорема доказана.

Обозначим через $\Lambda^s(u(\cdot))$ совокупность всех непрерывных селекторов отображения $\mathcal{L}^s(u(\xi))$. Поскольку отображение $\mathcal{L}^s(u(\xi))$ полунепрерывно снизу и принимает значения в $d \operatorname{conv}(L_1(T, R)(\sigma))$, то множество $\Lambda^s(u(\cdot)) \neq \emptyset$ и для любого элемента $r_0 \in \mathcal{L}^s(u(\xi_0))$ существует непрерывный селектор $r(u(\xi))$ отображения $\mathcal{L}^s(u(\xi))$, $\xi \in M$, такой, что $r(u(\xi_0)) = r_0$ [3]. Отсюда и из (3.11), (3.12) вытекает

ЛЕММА 3.3. Пусть отображение $\Gamma: M \rightarrow dcbL_1$ удовлетворяет всем предположениям теоремы 3.1. Тогда

- 1) $\mathcal{L}^s(u(\xi)) = \{r(u(\xi)); r(u(\cdot)) \in \Lambda^s(u(\cdot))\}, \quad \xi \in M;$
- 2) $D^s(u(\xi)) \leq \int_T r(u(\xi))(t) d\mu_0 \leq G^s(\xi), \quad \xi \in M;$
- 3) для любого $\xi_0 \in M$ существует элемент $r(u(\cdot)) \in \Lambda^s(u(\cdot))$ такой, что

$$D^s(u(\xi_0)) = \int_T r(u(\xi_0))(t) d\mu_0.$$

4. Для $A \in cbX$ и $x' \in X', x' \neq 0$, положим $M(A, x') = \sup\{\langle x, x' \rangle; x \in A\}$. Если $\alpha > 0$, то

$$S(A, x', \alpha) = \{x \in A; \langle x, x' \rangle > M(A, x') - \alpha\}.$$

Точка $x \in A$ называется *строго выступающей* (strongly exposed), если существует $x' \in X'$ такой, что $\langle x, x' \rangle \geq \langle y, x' \rangle$ для всех $y \in A, y \neq x$, и множества $\{S(A, x', \alpha); \alpha > 0\}$ являются базой окрестностей в A точки x в топологии, индуцированной на A из X [23].

Совокупность всех строго выступающих точек множества A обозначим $\text{st } A$.

Скажем, что множество $A \in cbX$ обладает *свойством Радона–Никодима* (R–N свойство), если каждое замкнутое выпуклое подмножество $C \subset A$ представимо в виде $C = \overline{\text{co}} \text{st } C$ [23].

Хорошо известно, что любой элемент $A \in \text{conv } X(\sigma)$ обладает R–N свойством [23].

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ (H1). Для непрерывного отображения $\Gamma: M \rightarrow dcbL_1$ множество $\text{ext } \Gamma(\xi) \neq \emptyset, \xi \in M$, и существует полунепрерывное снизу многозначное отображение $\mathcal{F}: M \rightarrow L_1$ такое, что $\mathcal{F}(\xi) \subset \text{ext } \Gamma(\xi), \xi \in M$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ (H2). Для непрерывного отображения $\Gamma: M \rightarrow dcbL_1$ множество $\text{ext } \Gamma(\xi) \neq \emptyset, \xi \in M$, и существует полунепрерывное снизу многозначное отображение $\mathcal{F}: M \rightarrow L_1$ такое, что $\mathcal{F}(\xi) \subset \overline{\text{ext}} \Gamma(\xi), \xi \in M$, где черта означает замыкание множества $\text{ext } \Gamma(\xi)$.

Приведем пример отображения Γ , удовлетворяющего предположению (H1).

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. Пусть $\Gamma: M \rightarrow dcbL_1$ непрерывно и значениями Γ являются множества, обладающие свойством R–N. Тогда Γ удовлетворяет предположению (H1).

Так как $\Gamma(\xi), \xi \in M$, обладает свойством R–N, то $\text{st } \Gamma(\xi) \neq \emptyset$ [23]. Согласно лемме 2 [16] для непрерывного отображения $\Gamma: M \rightarrow dcbL_1$ отображение $\text{st } \Gamma(\xi), \xi \in M$, полунепрерывно снизу. Теперь в качестве отображения $\mathcal{F}$, фигурирующего в предположении (H1), можно взять отображение $\text{st } \Gamma$.

Пусть непрерывное отображение $\Gamma: M \rightarrow dcbL_1$ удовлетворяет предположению (H1) и $\mathcal{F}: M \rightarrow L_1, \mathcal{F}(\xi) \subset \text{ext } \Gamma(\xi), \xi \in M$, – полунепрерывное снизу отображение. Обозначим через $\text{dec } \mathcal{F}(\xi)$ разложимую оболочку множества $\mathcal{F}(\xi)$, т.е.

наименьшее по включению разложимое множество, содержащее $\mathcal{F}(\xi)$. Из следствия 3.1 вытекает, что множество $\text{ext } \Gamma(\xi)$, $\xi \in M$, разложимо. Поэтому $\text{des } \mathcal{F}(\xi) \subset \text{ext } \Gamma(\xi)$, $\xi \in M$. Согласно лемме 3.2 [4] множества $\overline{\text{des } \mathcal{F}(\xi)}$, $\overline{\text{ext } \Gamma(\xi)}$, $\xi \in M$, где черта вверху означает замыкание в L_1 , разложимы и отображение $\overline{\text{des } \mathcal{F}(\xi)}$ полунепрерывно снизу. Более того, отображение $\overline{\text{des } \mathcal{F}}$ имеет непрерывные селекторы, и для любых $\xi_0 \in M$, $w_0 \in \overline{\text{des } \mathcal{F}(\xi_0)}$ существует непрерывный селектор $w(\cdot)$ отображения $\overline{\text{des } \mathcal{F}}$ такой, что $w(\xi_0) = w_0$ [3].

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\Gamma: M \rightarrow \text{dcb}L_1$ непрерывно и удовлетворяет предположению (H1), $w(\cdot)$ – непрерывный селектор отображения $\overline{\text{des } \mathcal{F}}$ и $\varphi_i: M \rightarrow (0, +\infty)$, $i = 1, 2$, – полунепрерывные снизу функции. Тогда для любого $s \geq 1$ существует непрерывный селектор $v(\cdot)$ отображения $\overline{\text{des } \mathcal{F}}$ такой, что

$$\|w(\xi) - v(\xi)\|_{L_1} < \varphi_1(\xi), \quad (4.1)$$

$$D^s(v(\xi)) < \varphi_2(\xi), \quad \xi \in M. \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathcal{G}$ совокупность всех непрерывных селекторов отображения $\overline{\text{des } \mathcal{F}(\xi)}$. Для каждого элемента $v(\cdot) \in \mathcal{G}$ возьмем совокупность $\Lambda^s(v(\cdot))$ всех непрерывных селекторов отображения $\mathcal{L}^s(v(\cdot))$ (см. лемму 3.3).

Пусть B – единичный открытый шар в L_1 с центром в нуле и

$$c(\xi) = \min\{\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi)\}, \quad \xi \in M.$$

Выберем непрерывную функцию $\nu: M \rightarrow \mathbb{R}^+$ такую, что $0 < \nu(\xi) < c(\xi)$. Такая функция существует согласно лемме 3.6 [24], поскольку функция $c(\xi)$ полунепрерывна снизу. Для каждой пары $v(\cdot) \in \mathcal{G}$, $r(v(\cdot)) \in \Lambda^s(v(\cdot))$ положим

$$\mathcal{U}_{v,r(v)} = \left\{ \xi \in M; v(\xi) \in w(\xi) + (\varphi_1(\xi) - \nu(\xi))B, \int_T r(v(\xi))(t) d\mu_0 < \varphi_2(\xi) - \nu(\xi) \right\}.$$

Так как функции $\varphi_1(\xi) - \nu(\xi)$, $\varphi_2(\xi) - \nu(\xi)$ полунепрерывны снизу, функции $v(\xi)$, $w(\xi)$ непрерывны в $L_1(T, X)$, а $r(v(\xi))$ непрерывна в $L_1(T, R)$, то множества $\mathcal{U}_{v,r(v)}$ открыты в M .

Покажем, что

$$M = \left\{ \bigcup \mathcal{U}_{v,r(v)}; v(\cdot) \in \mathcal{G}, r(v(\cdot)) \in \Lambda^s(v(\cdot)) \right\}.$$

Пусть $\xi_0 \in M$. Тогда в любой окрестности элемента $w(\xi_0)$ найдется элемент $v_0 \in \text{des } \mathcal{F}(\xi_0)$, через который проходит непрерывный селектор $v(\xi)$ отображения $\overline{\text{des } \mathcal{F}}$ такой, что $v(\xi_0) = v_0$. Поскольку $v_0 \in \text{ext } \Gamma(\xi_0)$, то в соответствии с леммой 3.2 $D^s(v(\xi_0)) = 0$. Согласно лемме 3.3 для ξ_0 существует элемент $r(v(\cdot)) \in \Lambda^s(v(\cdot))$ такой, что

$$D^s(v(\xi_0)) = \int_T r(v(\xi_0))(t) d\mu_0 = 0.$$

Поэтому $\xi_0 \in \mathcal{U}_{v,r(v)}$ при указанных выше $v(\cdot) \in \mathcal{G}$, $r(v(\cdot)) \in \Lambda^s(v(\cdot))$.

Пусть $\{V_n\}_1^\infty$ – счетное локально конечное измельчение покрытия $\mathcal{U}_{v,r(v)}$ и $\{e_n\}_1^\infty$ – непрерывное локально конечное разбиение единицы, подчиненное $\{V_n\}_1^\infty$, такое, что $\text{supp } e_n \subset V_n$, где $\text{supp } e_n$ – носитель функции V_n [26]. Тогда для каждого $n \geq 1$ найдутся $v_n(\cdot) \in \mathcal{G}$, $r_n(v_n(\cdot)) \in \Lambda^s(v_n(\cdot))$, при которых $V_n \subset \mathcal{U}_{v_n, r(v_n)}$ [26]. Так как $\text{supp } e_n$ является замкнутым подмножеством пространства M , то существует непрерывная функция $h[\text{supp } e_n, V_n]$, удовлетворяющая $0 \leq h[\text{supp } e_n, V_n](\xi) \leq 1$, равная 1 на $\text{supp } e_n$ и нулю вне V_n . В силу утверждения 1.2 существует функция $f: T \times X \times M \rightarrow X'$, слабо измеримая по t , непрерывная по (x, ξ) в топологии пространства $X'(\sigma)$ и такая, что

$$\|x\| \leq \langle x, f(t, x, \xi) \rangle + \frac{\nu(\xi)}{2k(\xi)\mu_0(T)}, \quad f(t, x, \xi) \in \partial(\|x\|), \quad (4.3)$$

почти всюду для любых $x \in X$, $\xi \in M$, где $k(\xi) = \sum_{n=1}^\infty h[\text{supp } e_n, V_n](\xi)$.

Поскольку $\text{supp } e_n \subset V_n$, $n \geq 1$, и $\{V_n\}_1^\infty$ – локально конечное покрытие M , то функция $k(\xi) > 0$, $\xi \in M$, определена и непрерывна. Из свойств $f(t, x, \xi)$ следует, что для любого $x(\cdot) \in L_1$ функция $\langle x(t), f(t, x(t), \xi) \rangle$ интегрируема.

Для каждой $x(\cdot) \in L_1$, $\xi \in M$, определим числовую меру $\mathfrak{R}_1(x(\cdot), \xi)$,

$$\mathfrak{R}_1(x(\cdot), \xi)(E) = \int_E \langle x(t), f(t, x(t), \xi) \rangle d\mu_0, \quad E \in \Sigma.$$

Тогда отображение $\mathfrak{R}_1: L_1 \times M \rightarrow \mathcal{M}$ непрерывно. Доказательство этого утверждения можно найти в [6, с. 546]. Аналогично, для каждой пары $(v(\cdot), r(v(\cdot))) \in \mathcal{G} \times \Lambda^s(v(\cdot))$ и $\xi \in M$ определим меру

$$\mathfrak{R}_2(v(\xi), r(v(\xi)))(E) = \int_E r(v(\xi))(t) d\mu_0, \quad E \in \Sigma.$$

Тогда отображение $\mathfrak{R}_2(v(\cdot), r(v(\cdot))): M \rightarrow \mathcal{M}$ непрерывно, что следует из определения полной вариации меры на T .

Для каждого $n \geq 1$, $\xi \in M$ положим

$$\mathcal{P}_n(\xi) = \frac{k(\xi)}{\nu(\xi)} \cdot \{\mathfrak{R}_1(v_n(\xi) - w(\xi), \xi) \cup \mathfrak{R}_2(v_n(\xi), r_n(v_n(\xi)))(E)\}.$$

В силу непрерывности по ξ всех функций, входящих в выражение для $\mathcal{P}_n(\xi)$, многозначное отображение $\mathcal{P}_n: M \rightarrow \mathcal{M}$ непрерывно и его значениями являются компактные множества, состоящие из двух элементов. Воспользовавшись утверждением 1.1, получаем последовательность непрерывных отображений $\mathcal{B}_n(\xi)$, $n \geq 1$, со свойствами:

1) $\{\mathcal{B}_n(\xi)\}_1^\infty$ для каждого $\xi \in M$ является разбиением T , т.е. множества $\mathcal{B}_n(\xi)$ попарно не пересекаются и

$$\mu_0\left(\bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{B}_n(\xi)\right) = \mu_0(T);$$

2) для каждого $n \geq 1$ и $\xi \in M$ множество $\mathcal{B}_n(\xi) = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $e_n(\xi) = 0$;

3) для любых $\xi \in M$, $n \geq 1$, $\mu(\cdot) \in \mathcal{P}_n(\xi)$ справедливо неравенство

$$|\mu(\mathcal{B}_n(\xi)) - e_n(\xi)\mu(T)| < \frac{1}{2}. \quad (4.4)$$

Положим $v(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(\xi)\chi(\mathcal{B}_n(\xi))$, где $\chi(\mathcal{B}_n(\xi))$ – характеристическая функция множества $\mathcal{B}_n(\xi)$. Так как каждая из функций $v_n(\xi)\chi(\mathcal{B}_n(\xi))$ непрерывна [2, утверждение 1.3], а $\{e_n\}_1^{\infty}$ – непрерывное локально конечное разбиение единицы, то из свойства 2) отображений $\mathcal{B}_n(\xi)$ следует, что функция $v(\xi)$ определена и непрерывна. Более того, в силу разложимости множества $\overline{\text{des}} \mathcal{F}(\xi)$, $\xi \in M$, следует, что $v(\xi) \in \overline{\text{des}} \mathcal{F}(\xi)$, $\xi \in M$.

Покажем, что

$$\|w(\xi) - v(\xi)\|_{L_1} < \varphi_1(\xi), \quad \xi \in M.$$

Для любых $n \geq 1$, $\xi \in M$ мера

$$\mu(\cdot) = \frac{k(\xi)}{\nu(\xi)} \cdot \Re_1(v_n(\xi) - w(\xi), \xi)$$

имеет вид

$$\mu(E) = \frac{k(\xi)}{\nu(\xi)} \int_E \langle v_n(\xi)(t) - w(\xi)(t), f(t, v_n(\xi)(t) - w(\xi)(t), \xi) \rangle d\mu_0, \quad E \in \Sigma.$$

Для нее неравенство (4.4) переписывается в виде

$$\left| \int_{\mathcal{B}_n(\xi)} \langle v_n(\xi)(t) - w(\xi)(t), f(t, v_n(\xi)(t) - w(\xi)(t), \xi) \rangle d\mu_0 - e_n(\xi) \int_T \langle v_n(\xi)(t) - w(\xi)(t), f(t, v_n(\xi)(t) - w(\xi)(t), \xi) \rangle d\mu_0 \right| < \frac{\nu(\xi)}{2k(\xi)}.$$

Тогда из этого неравенства и (4.3) получим

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{B}_n(\xi)} \|v_n(\xi)(t) - w(\xi)(t)\| d\mu_0 \\ & \leq \int_{\mathcal{B}_n(\xi)} \langle v_n(\xi)(t) - w(\xi)(t), f(t, v_n(\xi)(t) - w(\xi)(t), \xi) \rangle d\mu_0 + \frac{\nu(\xi)}{2k(\xi)} \\ & < e_n(\xi) \int_T \langle v_n(\xi)(t) - w(\xi)(t), f(t, v_n(\xi)(t) - w(\xi)(t), \xi) \rangle d\mu_0 + \frac{\nu(\xi)}{k(\xi)} \\ & < e_n(\xi) \|v_n(\xi) - w(\xi)\|_{L_1} + \frac{\nu(\xi)}{k(\xi)}. \end{aligned}$$

Если $e_n(\xi) > 0$, то $\xi \in V_n \subset \mathcal{U}_{v_n, r_n(v_n)}$. Поэтому $\|v_n(\xi) - w(\xi)\|_{L_1} < \varphi_1(\xi) - \nu(\xi)$ и

$$\int_{\mathcal{B}_n(\xi)} \|v_n(\xi)(t) - w(\xi)(t)\| d\mu_0 < e_n(\xi) (\varphi_1(\xi) - \nu(\xi)) + \frac{\nu(\xi)}{k(\xi)}. \quad (4.5)$$

Если $e_n(\xi) = 0$, то $\mathcal{B}_n(\xi) = \emptyset$ и, следовательно, неравенство (4.5) выполняется автоматически.

Для каждого $\xi \in M$ обозначим через $m(\xi)$ число номеров n таких, что $\mathcal{B}_n(\xi) \neq \emptyset$. Тогда $e_n(\xi) > 0$ и, поскольку $\{V_n\}_1^\infty$ — локально конечное покрытие, то $m(\xi)$ конечное число и $m(\xi) \leq k(\xi)$, $\xi \in M$. Теперь из (4.5) вытекает

$$\begin{aligned} \|v_n(\xi) - w(\xi)\|_{L_1} &\leq \sum_{\{n, \mathcal{B}_n(\xi) \neq \emptyset\}} e_n(\xi) (\varphi_1(\xi) - \nu(\xi)) + \frac{m(\xi)\nu(\xi)}{k(\xi)} \\ &< \varphi_1(\xi) - \nu(\xi) + \nu(\xi) = \varphi_1(\xi), \quad \xi \in M. \end{aligned}$$

Тем самым неравенство (4.1) доказано.

Для любых $n \geq 1$, $\xi \in M$ мера

$$\mu(\cdot) = \frac{k(\xi)}{\nu(\xi)} \cdot \Re_2(v_n(\xi), r_n(v_n(\xi)))$$

имеет вид

$$\mu(E) = \frac{k(\xi)}{\nu(\xi)} \int_E r_n(v_n(\xi))(t) d\mu_0.$$

Для нее неравенство (4.4) переписывается в виде

$$\int_{\mathcal{B}_n(\xi)} r_n(v_n(\xi))(t) d\mu_0 < e_n(\xi) \int_T r_n(v_n(\xi))(t) d\mu_0 + \frac{\nu(\xi)}{2k(\xi)}.$$

Если $e_n(\xi) > 0$, то $\xi \in V_n \subset \mathcal{U}_{v_n, r_n(v_n)}$. Поэтому

$$\int_T r_n(v_n(\xi))(t) d\mu_0 < \varphi_2(\xi) - \nu(\xi).$$

Следовательно,

$$\int_{\mathcal{B}_n(\xi)} r_n(v_n(\xi))(t) d\mu_0 < e_n(\xi) (\varphi_2(\xi) - \nu(\xi)) + \frac{\nu(\xi)}{2k(\xi)}. \quad (4.6)$$

Если $e_n(\xi) = 0$, то $\mathcal{B}_n(\xi) = \emptyset$ и неравенство (4.6) выполняется автоматически.

Так как $d^s(v_n(\xi))(t) \leq r_n(v_n(\xi))(t)$ почти всюду на T , то

$$\int_{\mathcal{B}_n(\xi)} d^s(v_n(\xi))(t) d\mu_0 < e_n(\xi) (\varphi_2(\xi) - \nu(\xi)) + \frac{\nu(\xi)}{2k(\xi)}. \quad (4.7)$$

Теперь из (3.11) и (4.7) получаем

$$\begin{aligned} D^s(v(\xi)) &= \sum_{\{n, \mathcal{B}_n(\xi) \neq \emptyset\}} \int_{\mathcal{B}_n(\xi)} d^s(v_n(\xi))(t) d\mu_0 \\ &< \varphi_2(\xi) - \nu(\xi) + \frac{\nu(\xi)}{2} < \varphi_2(\xi), \quad \xi \in M. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $\Gamma: M \rightarrow dcbL_1$ непрерывно и удовлетворяет предположению (H2), $w(\cdot)$ – непрерывный селектор отображения $\overline{des} \mathcal{F}$ и $\varphi_i: M \rightarrow (0, +\infty)$, $i = 1, 2$, – полунепрерывные снизу функции. Тогда для любого $s \geq 1$ существует непрерывный селектор $v(\cdot)$ отображения Γ такой, что выполняются неравенства (4.1) и (4.2).

Доказательство дословно повторяет доказательство теоремы 4.1, следует только в качестве $\mathcal{U}$ взять совокупность всех непрерывных селекторов отображения Γ и учесть, что отображение Γ имеет разложимые значения.

5. Всюду в дальнейшем предполагается, что отображение $\Gamma: M \rightarrow dcbL_1$ ограничено на M .

Обозначим через $C(M, L_1)$ пространство всех непрерывных ограниченных функций из M в L_1 с топологией равномерной сходимости на M , которое является полным метрическим пространством.

Пусть $C(M, \overline{des} \mathcal{F})$ и $C(M, \Gamma)$ – совокупности всех непрерывных селекторов отображений $\overline{des} \mathcal{F}$ и Γ с топологией, индуцированной из $C(M, L_1)$. Тогда $C(M, \overline{des} \mathcal{F})$ и $C(M, \Gamma)$ являются замкнутыми подмножествами $C(M, L_1)$ и, следовательно, полными метрическими пространствами.

Возьмем фиксированное σ -компактное подмножество $M_0 \subset M$, плотное в M . Следующая теорема является основной в работе.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть непрерывное отображение $\Gamma: M \rightarrow dcbL_1$ удовлетворяет предположению (H1). Тогда для любого элемента $u(\cdot) \in C(M, \overline{des} \mathcal{F})$ и любой полунепрерывной снизу функции $\varphi: M \rightarrow (0, +\infty)$ найдется элемент $v(\cdot) \in C(M, \overline{des} \mathcal{F})$ такой, что

$$\|u(\xi) - v(\xi)\|_{L_1} < \varphi(\xi), \quad \xi \in M, \quad (5.1)$$

$$v(\xi) \in \text{ext } \Gamma(\xi), \quad \xi \in M_0. \quad (5.2)$$

Если M σ -компактно, то включение (5.2) выполняется для всех $\xi \in M$.

Доказательству теоремы предпослём ряд вспомогательных лемм.

Для непрерывного селектора $u(\cdot) \in C(M, \overline{des} \mathcal{F})$ и полунепрерывной снизу функции $\varphi: M \rightarrow (0, +\infty)$ обозначим через $\mathcal{H}_{u, \varphi}$ замыкание в топологии $C(M, L_1)$ множества всех непрерывных селекторов отображения $\overline{des} \mathcal{F}$, удовлетворяющих неравенству

$$\|u(\xi) - v(\xi)\|_{L_1} < \frac{\varphi(\xi)}{2}, \quad \xi \in M, \quad (5.3)$$

которое является полным, замкнутым подмножеством пространства $C(M, \overline{des} \mathcal{F})$.

Возьмем фиксированные $\eta > 0$ и $s \geq 1$. Положим

$$\mathcal{H}_\eta^s = \{v(\cdot) \in \mathcal{H}_{u, \varphi}; D^s(v(\xi)) < \eta, \xi \in M_0\}.$$

ЛЕММА 5.1. Множество $\mathcal{H}_\eta^s$ является G_δ -подмножеством $\mathcal{H}_{u, \varphi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с теоремой 4.1 множество $\mathcal{H}_\eta^s$ не пусто. Представим M_0 в виде $M_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, где M_n , $n \geq 1$, — компактные подмножества из M . Положим

$$\mathcal{H}_\eta^s(n) = \{v(\cdot) \in \mathcal{H}_{u,\varphi}; D^s(v(\xi)) < \eta, \xi \in M_n\}, \quad n \geq 1.$$

Тогда $\mathcal{H}_\eta^s = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_\eta^s(n)$. Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что множество $\mathcal{H}_\eta^s(n)$ открыто в $\mathcal{H}_{u,\varphi}$. Для этого рассмотрим множество $\mathcal{H}_{u,\varphi} \setminus \mathcal{H}_\eta^s(n)$, $n \geq 1$, и покажем, что оно замкнуто в $\mathcal{H}_{u,\varphi}$.

Пусть $v(\cdot) \in \overline{\mathcal{H}_{u,\varphi} \setminus \mathcal{H}_\eta^s(n)}$, где черта сверху означает замыкание в топологии пространства $C(M, L_1)$. Тогда найдется последовательность $u_k(\cdot) \in \mathcal{H}_{u,\varphi} \setminus \mathcal{H}_\eta^s(n)$, $k \geq 1$, сходящаяся к $v(\cdot)$ в топологии пространства $C(M, L_1)$. Для каждого $u_k(\cdot)$, $k \geq 1$, найдется точка $\xi_k \in M_n$ такая, что $D^s(u_k(\xi_k)) \geq \eta$, $k \geq 1$. Не нарушая общности, можно считать, что последовательность $\xi_k \in M_n$, $k \geq 1$, сходится к некоторому элементу $\xi \in M_n$. Так как последовательность $u_k(\xi_k)$, $k \geq 1$, сходится к $v(\xi)$ в топологии пространства L_1 , а функция $D^s(\cdot)$ в соответствии с леммой 3.2 полунепрерывна снизу, то $D^s(v(\xi)) \geq \eta$. Следовательно, $v(\cdot) \in \mathcal{H}_{u,\varphi} \setminus \mathcal{H}_\eta^s(n)$, и множество $\mathcal{H}_\eta^s(n)$ открыто в $\mathcal{H}_{u,\varphi}$. Поэтому $\mathcal{H}_\eta^s$ является G_δ -подмножеством $\mathcal{H}_{u,\varphi}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5.2. Множество $\mathcal{H}_\eta^s$ плотно в $\mathcal{H}_{u,\varphi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольный элемент $v(\cdot) \in \mathcal{H}_{u,\varphi}$ и произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда найдется элемент $v_1(\cdot) \in C(M, \overline{\text{des } \mathcal{F}})$ такой, что

$$\begin{aligned} \|u(\xi) - v_1(\xi)\|_{L_1} &< \varphi(\xi)/2, \\ \|v(\xi) - v_1(\xi)\|_{L_1} &< \varepsilon, \quad \xi \in M. \end{aligned}$$

Пусть

$$d(\xi) = \min\{\varphi(\xi)/2 - \|u(\xi) - v_1(\xi)\|_{L_1}, \varepsilon - \|v(\xi) - v_1(\xi)\|_{L_1}\}.$$

Функция $d(\xi) > 0$, $\xi \in M$, и полунепрерывна снизу. Тогда в соответствии с леммой 3.6 [24] существует непрерывная функция $c(\xi)$, $0 < c(\xi) < d(\xi)$, $\xi \in M$. Согласно теореме 4.1 существует непрерывный селектор $w(\cdot)$ отображения $\overline{\text{des } F}$ такой, что

$$\|v_1(\xi) - w(\xi)\|_{L_1} < c(\xi), \quad D^s(w(\xi)) < \eta, \quad \xi \in M.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|u(\xi) - w(\xi)\|_{L_1} &\leq \|u(\xi) - v_1(\xi)\|_{L_1} + \|v_1(\xi) - w(\xi)\|_{L_1} \\ &\leq \|u(\xi) - v_1(\xi)\|_{L_1} + c(\xi) \\ &< \|u(\xi) - v_1(\xi)\|_{L_1} + \varphi(\xi)/2 - \|u(\xi) - v_1(\xi)\|_{L_1} \\ &\leq \varphi(\xi)/2, \quad \xi \in M. \end{aligned}$$

Аналогично получим, что

$$\|v(\xi) - w(\xi)\|_{L_1} < \varepsilon, \quad \xi \in M.$$

Следовательно, $w(\cdot) \in \mathcal{H}_\eta^s$. Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то множество $\mathcal{H}_\eta^s$ плотно в $\mathcal{H}_{u,\varphi}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5.3. $\mathcal{H}_{u,\varphi} = \overline{\{\bigcap_{n \geq 1} \bigcap_{s \geq 1} \mathcal{H}_{1/n}^s\}}$, где черта означает замыкание в топологии пространства $C(T, L_1)$.

Лемма вытекает из лемм 5.1, 5.2 и теоремы Бэра о категориях [26].

Перейдем к доказательству теоремы 5.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.1. Пусть $v(\cdot) \in \{\bigcap_{n \geq 1} \bigcap_{s \geq 1} \mathcal{H}_{1/n}^s\}$. Тогда $D^s(v(\xi)) < 1/n$ для всех $\xi \in M_0$, $s \geq 1$. Следовательно, $D^s(v(\xi)) = 0$, $\xi \in M_0$, $s \geq 1$. Тогда согласно лемме 3.2 $v(\xi) \in \text{ext } \Gamma(\xi)$, $\xi \in M_0$. Поскольку $v(\cdot) \in \mathcal{H}_{u,\varphi}$, то

$$\|u(\xi) - v(\xi)\|_{L_1} \leq \varphi_1(\xi)/2 < \varphi_1(\xi), \quad \xi \in M.$$

Если M σ -компактно, то в качестве M_0 мы можем взять само пространство M . Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть непрерывное отображение $\Gamma: M \rightarrow dcbL_1$ удовлетворяет предположению (H2). Тогда для любого элемента $u(\cdot) \in C(M, \text{dec } \mathcal{F})$ и любой полунепрерывной снизу функции $\varphi: M \rightarrow (0, +\infty)$ найдется элемент $v(\cdot) \in C(M, \Gamma)$ такой, что выполняются неравенство (5.1) и включение (5.2). Если M σ -компактно, то включение (5.2) выполняется для всех $\xi \in M$.

Доказательство теоремы дословно повторяет доказательство теоремы 5.1, следует только в леммах 5.1–5.3 в качестве $\mathcal{H}_{u,\varphi}$ взять замыкание в топологии пространства $C(M, L_1)$ множества всех непрерывных селекторов отображения Γ , удовлетворяющих неравенству (5.3).

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть значениями отображения $\Gamma: M \rightarrow dcbL_1$ являются множества со свойством R–N. Тогда для любого непрерывного селектора $u(\cdot)$ отображения $\text{dec st } \Gamma$ и любой полунепрерывной снизу функции $\varphi: M \rightarrow (0, +\infty)$ существует непрерывный селектор $v(\cdot)$ отображения $\text{dec st } \Gamma$ такой, что выполняются неравенство (5.1), включение (5.2) и

$$v(\xi) \in \overline{\text{ext } \Gamma(\xi)}, \quad \xi \in M \setminus M_0. \quad (5.4)$$

Если M σ -компактно, то включение (5.2) выполняется для всех $\xi \in M$.

Следствие вытекает из утверждения 4.1 и теоремы 5.1, так как в качестве $\mathcal{F}$ мы можем взять отображение $\text{st } \Gamma$. Следует только заметить, что

$$\overline{\text{dec st } \Gamma(\xi)} \subset \overline{\text{ext } \Gamma(\xi)}, \quad \xi \in M.$$

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Пусть отображение $\Gamma: M \rightarrow dbL_1$ ограничено на M и таково, что отображение $\overline{\text{co}} \Gamma$ непрерывно и его значениями являются множества со свойством R–N. Тогда существует непрерывный селектор $u(\cdot)$ отображения Γ такой, что

$$u(\xi) \in \text{ext } \overline{\text{co}} \Gamma(\xi), \quad \xi \in M_0, \quad (5.5)$$

$$u(\xi) \in \overline{\text{ext } \overline{\text{co}} \Gamma(\xi)}, \quad \xi \in M \setminus M_0. \quad (5.6)$$

Если к тому же M σ -компактно, то включение (5.5) выполняется для всех $\xi \in M$.

Так как отображение Γ ограничено и его значениями являются разложимые множества, то отображение $\overline{\text{co}} \Gamma$ ограничено, и в соответствии с леммой 3.1 [4] значениями отображения $\overline{\text{co}} \Gamma$ являются разложимые множества. Тогда согласно следствию 5.1 существует непрерывный селектор $u(\cdot)$ отображения $\overline{\text{dec st}} \overline{\text{co}} \Gamma(\xi)$, такой, что выполняются включения (5.5), (5.6). Поскольку значениями отображения Γ являются замкнутые множества, то $\text{st } \overline{\text{co}} \Gamma(\xi) \subset \Gamma(\xi)$, $\xi \in M$ [23], что в свою очередь влечет $\overline{\text{dec st}} \overline{\text{co}} \Gamma(\xi) \subset \Gamma(\xi)$, $\xi \in M$. Поэтому $u(\cdot)$ является искомым селектором отображения Γ .

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Поскольку значениями отображения $\text{ext } \Gamma$ являются в общем случае незамкнутые, невыпуклые множества, то теоремы 5.1, 5.2 и следствие 5.1 дают условия, при которых отображение $\text{ext } \Gamma$ имеет непрерывный селектор.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. В следствии 5.1 мы не предполагаем, что отображение Γ обладает какими-либо свойствами непрерывности или полунепрерывности. Поэтому следствие 5.2 дает условия существования непрерывного селектора у многозначного отображения с замкнутыми разложимыми значениями, не обладающего свойствами непрерывности или полунепрерывности.

Перейдем теперь к примерам отображений $\Gamma: M \rightarrow \text{dcb}L_1$, широко используемых при изучении дифференциальных и эволюционных включений [2]–[6] и др.

Пусть T – метрическое компактное пространство, $C(T, X)$ – пространство всех непрерывных отображений из T в X с топологией равномерной сходимости на T . При этих предположениях $C(T, X)$ является сепарабельным метрическим пространством.

Рассмотрим отображение типа Каратеодори $F: T \times X \rightarrow \text{con}v X(\sigma)$, т.е. при каждом $x \in X$ отображение $F(T, X)$ измеримо по t и при почти каждом t непрерывно по x в метрике Хаусдорфа $\text{dist}(\cdot, \cdot)$.

Возьмем $M \subset C(T, X)$. Предположим, что отображение Γ интегрально ограничено на M , т.е. существует суммируемая функция $\lambda: T \rightarrow \mathbb{R}^+$ такая, что для любого $x(\cdot) \in M$ при почти всех t выполняется неравенство

$$\sup \{ \|y\|; y \in F(t, x(t)) \} \leq \lambda(t).$$

Выберем плотное σ -компактное подмножество $M_0 \subset M$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.1. Пусть $F: T \times X \rightarrow \text{con}v X(\sigma)$ – интегрально ограниченное на M отображение типа Каратеодори. Тогда существует непрерывное отображение $g: M \rightarrow L_1$ такое, что для каждого $x(\cdot) \in M_0$ при почти всех $t \in T$

$$g(x)(t) \in \text{ext } F(t, x(t)) \quad (5.7)$$

и для каждого $x(\cdot) \in M \setminus M_0$ при почти всех $t \in T$

$$g(x)(t) \in \overline{\text{ext } F(t, x(t))}. \quad (5.8)$$

Если M σ -компактно, то включение (5.7) выполняется для всех $x(\cdot) \in M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко показать, что для каждого $x(\cdot) \in M$ отображение $F(t, x(t))$ измеримо. Обозначим через $S(F)(x(\cdot))$ совокупность всех интегрируемых селекторов отображения $F(t, x(t))$. Тогда $\Gamma(x(\cdot)) \in d \operatorname{conv} L_1(\sigma)$ [20], [22]. В силу леммы 3.1 отображение $\Gamma: M \rightarrow d \operatorname{conv} L_1(\sigma)$ непрерывно и ограничено. Поэтому согласно следствию 5.1 существует непрерывный селектор $g(\cdot)$ отображения $\overline{\operatorname{desc} \operatorname{st} \operatorname{co}} \Gamma(\xi)$, такой, что выполняются включения (5.2), (5.4). Воспользовавшись следствием 3.1, получаем, что отображение $g(\cdot)$ удовлетворяет включению (5.7).

Обозначим через $S(\overline{\operatorname{ext} F})(x(\cdot))$ совокупность всех интегрируемых селекторов отображения $\overline{\operatorname{ext} F}(t, x(t))$. Легко показать, что оно является замкнутым подмножеством в $L_1(T, X)$. Тогда $\overline{\operatorname{ext} \Gamma}(x(\cdot)) \subset S(\overline{\operatorname{ext} F})(x(\cdot))$, $x(\cdot) \in M$. Воспользовавшись включением (5.4), получаем, что отображение $g(\cdot)$ удовлетворяет включению (5.8). Утверждение доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.2. Пусть интегрально ограниченное многозначное отображение $F: T \times X \rightarrow X$ с замкнутыми, относительно слабо компактными значениями таково, что отображение $\operatorname{co} F(t, x(t))$ типа Каратеодори. Предположим, что для каждого $x(\cdot) \in M$ отображение $F(t, x(t))$ измеримо. Тогда существует непрерывное отображение $g: M \rightarrow L_1$ такое, что для каждого $x(\cdot) \in M$ при почти всех t

$$g(x)(t) \in F(t, x(t)),$$

для каждого $x(\cdot) \in M_0$ при почти всех t

$$g(x)(t) \in \operatorname{ext} \operatorname{co} F(t, x(t)),$$

для каждого $x(\cdot) \in M \setminus M_0$ при почти всех t

$$g(x)(t) \in \overline{\operatorname{ext} \operatorname{co}} F(t, x(t)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathcal{F}(x(\cdot))$ совокупность всех интегрируемых селекторов отображения $F(t, x(t))$, а через $\Gamma(x(\cdot))$ совокупность всех интегрируемых селекторов отображения $\operatorname{co} F(t, x(t))$. Тогда $\mathcal{F}(x(\cdot)) \in dbL_1$, $\mathcal{F}(x(\cdot)) \subset \Gamma(x(\cdot))$, $x(\cdot) \in M$, и отображение $\Gamma: M \rightarrow d \operatorname{conv} L_1(\sigma)$ непрерывно и интегрально ограничено на M . Согласно теореме 1.5 [21] $\operatorname{co} \mathcal{F}(x(\cdot)) = \Gamma(x(\cdot))$, $x(\cdot) \in M$. Тогда в соответствии со следствием 5.2 существует непрерывный селектор $g(\cdot)$ отображения $\mathcal{F}$, удовлетворяющий

$$g(x(\cdot)) \in \operatorname{ext} \operatorname{co} \mathcal{F}(x(\cdot)), \quad x(\cdot) \in M_0, \quad (5.9)$$

$$g(x(\cdot)) \in \overline{\operatorname{ext} \operatorname{co}} \mathcal{F}(x(\cdot)), \quad x(\cdot) \in M \setminus M_0. \quad (5.10)$$

Воспользовавшись аргументами, использованными при доказательстве утверждения 5.1, из (5.9), (5.10) получаем, что $g(x(\cdot))$ — искомое отображение. Утверждение доказано.

Список литературы

1. *Antosiewicz A., Cellina A.* Continuous selectors and differential relations // J. Differential Equations. 1975. V. 19. № 2. P. 386–398.
2. *Fryszkowski A.* Continuous selections for a class of nonconvex multivalued maps // Studia Math. 1983. V. 76. № 2. P. 163–174.
3. *Bressan A., Colombo G.* Extensions and selections of maps with decomposable values // Studia Math. 1988. V. 90. № 1. P. 69–86.
4. *Гончаров В. В., Толстоногов А. А.* Совместные непрерывные селекторы многозначных отображений с невыпуклыми значениями и их приложения // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 7. С. 946–969.
5. *Толстоногов А. А.* Экстремальные селекторы многозначных отображений и принцип “бэнг-бэнг” для эволюционных включений // ДАН СССР. 1991. Т. 317. № 3. С. 589–593.
6. *Гончаров В. В., Толстоногов А. А.* Непрерывные селекторы семейства невыпуклозначных отображений с некомпактной областью определения // Сиб. матем. журн. 1994. Т. 35. № 3. С. 537–553.
7. *Cellina A.* On the differential inclusion $\dot{x} \in [-1, 1]$ // Atti. Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Math. Appl. 1980. V. 69. P. 1–6.
8. *De Blasi F. S., Piangiani G.* A Baire category approach to the existence of solutions of multivalued differential inclusions in Banach Spaces // Funkcial. Ekvac. 1982. V. 25. № 2. P. 153–162.
9. *De Blasi F. S., Piangiani G.* The Baire category method in existence problem for a class of multivalued differential equations with nonconvex right hand side // Funkcial. Ekvac. 1985. V. 28. № 2. P. 139–156.
10. *De Blasi F. S., Piangiani G.* Differential inclusions in Banach Spaces // J. Differential Equations. 1987. V. 66. P. 208–229.
11. *De Blasi F. S., Piangiani G.* Non-convex valued differential in Banach Spaces // J. Math. Anal. Appl. 1991. V. 157. P. 469–494.
12. *De Blasi F. S., Piangiani G.* On the density of extremal solutions of differential inclusions // Ann. Polon. Math. 1992. V. 56. № 2. P. 133–142.
13. *Chuong P. V.* Un resultat d'existence de solutions pour des equations differentielles multivoques // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. Math. 1985. V. 30. P. 339–402.
14. *Bressan A.* Differential inclusions with non-closed non-convex right-hand side // Differential Integral Equations. 1990. V. 3. P. 633–638.
15. *Суслов С. И.* Нелинейный “бэнг-бэнг” принцип в $\mathbb{R}^n$ // Матем. заметки. 1991. Т. 49. № 5. С. 110–116.
16. *Суслов С. И.* Нелинейный “бэнг-бэнг” принцип в банаховом пространстве // Сиб. матем. журн. 1992. Т. 33. № 4. С. 142–154.
17. *Бурбаки Н.* Топологические векторные пространства. М.: ИЛ, 1959.
18. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: Мир, 1969.
19. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
20. *Himmelberg C. J.* Measurable relations // Fund. Math. 1975. V. 87. № 1. P. 53–72.
21. *Hiai F., Umegaki H.* Integrals, conditional expectations and martingales of multivalued functions // J. Multivariate Anal. 1977. V. 7. P. 149–182.
22. *Papageorgiou N. S.* Representation of set-valued operators // Trans. Amer. Math. Soc. 1985. V. 292. № 2. P. 557–572.
23. *Bourgin R. D.* Geometric Aspects of Convex Sets with the Radon–Nikodym Property // Lect. Notes in Math. V. 993. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer-Verlag, 1983.
24. *De Blasi F. S., Piangiani G.* Remarks on Hausdorff continuous multifunctions and selections // Comment. Math. Univ. Carolin. 1983. V. 24. № 3. P. 553–561.
25. *Келли Дж. Л.* Общая топология. М.: Наука, 1981.
26. *Кураатовский К.* Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966.