Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Н. Хабибуллин, Последовательности нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций и гармонические миноранты, *Матем. сб.*, 2007, том 198, номер 2, 121–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1318>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 17:57:11

УДК 517.53+517.54+517.57+517.98

Б. Н. Хабибуллин

Последовательности нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций и гармонические миноранты

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}$ – последовательность точек в области Ω комплексной плоскости $\mathbb{C}$. В терминах гармонических мер, функций Грина, выметания, мер Йенсена и др. получены различные общие условия, при которых Λ – последовательность нулей для некоторой голоморфной функции из заданного весового пространства голоморфных функций в Ω . В аналогичных терминах рассмотрен вопрос о представлении мероморфной в Ω функции в виде отношения двух голоморфных функций без общих нулей из заданного весового пространства.

Даны примеры применений.

Библиография: 46 названий.

§ 1. Введение

Пусть H – некоторое весовое пространство голоморфных функций в области Ω комплексной плоскости $\mathbb{C}$, выделяемое поточечными ограничениями на эти функции посредством некоторой системы мажорант M . Настоящая работа нацелена на построение единой схемы решения трех задач:

- (Z) какие последовательности точек Λ могут быть последовательностью нулей некоторой функции из H , т.е. *последовательностью нулей для H* ;
- (U) в каких случаях *подпоследовательность нулей*, или *множество неединственности*, Λ для H является одновременно и *последовательностью нулей для H* или же *последовательностью нулей для* некоторого, по возможности минимального, *пространства-расширения* $H' \supset H$ голоморфных в Ω функций;
- (M) когда мероморфная в Ω функция может быть представлена отношением двух голоморфных функций из H *без общих нулей*?

Работа представляет собой значительно расширенное и модернизированное изложение первой части электронной публикации [1]. Результаты работы носят общий характер. Это, наряду с необъятностью материала об описаниях нулевых множеств для различных классов голоморфных функций и о представлении мероморфных функций в конкретных областях (круг, плоскость и пр.), послужило причиной воздержаться здесь от подробного обсуждения каких бы то ни было известных ранее результатов в этих направлениях и ограничиться ссылкой на очень далекий от полноты список источников [2]–[15].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00067a) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-10052.2006.1).

Используемый здесь метод исследования основан на выметании мер, функций или, более общо, функционалов. Он хорошо зарекомендовал себя в серии работ автора применительно к родственным задачам описания *множеств неединственности*, или *подпоследовательностей нулей*, для весовых пространств типа H и представления мероморфных в Ω функций в виде частного двух голоморфных функций из H , вообще говоря, *с общими нулями*. Это касается как общей схемы [16]–[18], так и полученных на ее основе новых совершенно конкретных результатов, формулируемых в классических традиционных терминах (из последних работ см., например, статьи [19], [20], обзор [15] и монографию-обзор [21]). В плане применения к приведенным вначале трем задачам метод выметания является уже новым и, кроме как в [1], ранее нигде не использовался. Основная отличительная особенность этого метода состоит в том, что возникающая при традиционных подходах к трем задачам (Z), (U), (M) проблема в том или ином смысле явного построения (в виде произведения, в интегральной форме, с помощью $\bar{\partial}$ - или $\partial\bar{\partial}$ -задачи и пр.) голоморфных функций с определенными последовательностями нулей и ограничениями на их рост заменяется проверкой справедливости некоторой серии (вообще говоря, бесконечной) априорных неравенств, относящихся исключительно к субгармоническим мажорантам M , определяющим весовое пространство H , и их мерам Рисса.

Рецензент первоначального варианта настоящей работы абсолютно верно отметил, что проверка некоторых условий доказанных здесь теорем в конкретных частных случаях требует серьезных усилий. Действительно, применение предложенной единой схемы к весовым пространствам голоморфных функций H с явно заданными определяющими мажорантами M нуждается в дополнительном использовании достаточно тонкой аналитической и геометрической техники. Но в то же время эта схема может и, надеемся, будет служить основой нетривиальных исследований и ряда новых результатов, недоступных для применявшихся ранее традиционных методов. В связи же с определенной сложностью прежде всего контроля за выполнением отмеченной выше системы априорных неравенств, здесь иллюстрируются применения общих результатов работы лишь к простейшей ситуации пространства ограниченных в Ω голоморфных функций (см. примеры 2 и 3 соответственно из пп. 1.3 и 1.4). Эти применения не претендуют на сколь-нибудь значительную новизну, но достаточно ясно отражают суть основных результатов работы и используемого метода выметания.

В ближайших исследованиях, частично анонсированных в [22] и [23], предполагается применить наш общий подход к конкретным весовым пространствам H голоморфных функций в единичном круге, для которых история вопроса будет изложена достаточно детально. Дальнейшие перспективы такого подхода – применения к весовым пространствам H целых функций и к пространствам H голоморфных функций в многосвязных областях (кольцо и т.п.), для чего изложение в статье ведется для произвольных или, как минимум, конечносвязных областей Ω .

1.1. Обозначения, соглашения и основные понятия. Как обычно, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ – множества соответственно всех натуральных, целых, вещественных и комплексных чисел.

Для отображения $f: A \rightarrow B$ и $b \in B$ пишем $f \equiv b$ на A' , если f тождественно равно b на подмножестве $A' \subset A$; в противном случае $f \not\equiv b$ на A' . Как обычно, для $A' \subset A$ через $f|_{A'}$ обозначаем сужение f на A' . При $A, B \subset [-\infty, +\infty]$ функция f возрастающая (соответственно убывающая), если для любых $x_1, x_2 \in A$ из $x_1 \leq x_2$ следует $f(x_1) \leq f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) \geq f(x_2)$). “Положительность” (соответственно “отрицательность”) всегда означает “ ≥ 0 ” (соответственно “ ≤ 0 ”). Для $a \in [-\infty, +\infty]$ (соответственно для функции $f: X \rightarrow [-\infty, +\infty]$), как обычно, $a^+ := \max\{a, 0\}$ (соответственно $f^+: x \mapsto \max\{f(x), 0\}$, $x \in X$).

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, – не более чем счетная последовательность точек в области Ω на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ без предельных точек в Ω . Среди точек λ_k могут быть и повторяющиеся. Возможно, что $\Lambda = \emptyset$ – пустое множество. С каждой последовательностью Λ связываем целочисленную положительную считающую меру n_Λ на Ω по правилу

$$n_\Lambda(S) := \sum_{\lambda_k \in S} 1, \quad S \subset \Omega, \quad (1.1)$$

$n_\Lambda(S)$ – число точек λ_k , содержащихся в S . Обозначаемая тем же символом, что и последовательность Λ , функция $\Lambda: z \mapsto n_\Lambda(\{z\})$, $z \in \Omega$, – дивизор последовательности Λ . Отходя от традиционного понимания последовательности как функции натурального или целого аргумента, считаем, что последовательность Λ совпадает с последовательностью $\Gamma = \{\gamma_k\}$ или равна ей (пишем $\Lambda = \Gamma$), если для соответствующих им дивизоров $\Lambda(z) \equiv \Gamma(z)$ при всех $z \in \Omega$. Иначе говоря, каждая последовательность точек рассматривается как представитель некоторого класса эквивалентности, состоящего из последовательностей в Ω с одинаковыми дивизорами. Вложение $\Lambda \subset \Gamma$ означает, что $\Lambda(z) \leq \Gamma(z)$ для всех $z \in \Omega$. Объединение $\Lambda \cup \Gamma$ и пересечение $\Lambda \cap \Gamma$ последовательностей Λ и Γ через дивизоры задается соответственно тождествами $(\Lambda \cup \Gamma)(z) \equiv \Lambda(z) + \Gamma(z)$ и $(\Lambda \cap \Gamma)(z) \equiv \min\{\Lambda(z), \Gamma(z)\}$, $z \in \Omega$.

Носитель $\text{supp } \Lambda$ для последовательности точек Λ – это носитель соответствующего ей дивизора. Запись $\lambda \in \Lambda$ (соответственно $\lambda \notin \Lambda$) означает, что $\lambda \in \text{supp } \Lambda$ (соответственно $\lambda \notin \text{supp } \Lambda$). Для подмножества $B \subset \mathbb{C}$ пишем $\Lambda \subset B$, если $\text{supp } \Lambda \subset B$.

Через $\text{Hol}(\Omega)$ обозначаем класс всех голоморфных функций в области $\Omega \subset \mathbb{C}$.

По функции $M: \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$ определим класс функций

$$\text{Hol}(\Omega; M) := \left\{ f \in \text{Hol}(\Omega) : \sup_{z \in \Omega} \frac{|f(z)|}{\exp M(z)} < +\infty \right\}. \quad (1.2)$$

Пусть $f \in \text{Hol}(\Omega)$, $f \not\equiv 0$ на Ω . Последовательность нулей функции f в Ω , перенумерованную с учетом кратностей, обозначаем через Zero_f . Последовательность Λ – последовательность нулей для подкласса $H \subset \text{Hol}(\Omega)$, если найдется функция $f \in H$ такая, что $\Lambda = \text{Zero}_f$. Функция $f \in \text{Hol}(\Omega)$ обращается

в нуль на Λ , если $\Lambda \subset \text{Zero}_f$ (пишем $f(\Lambda) = 0$). Последовательность Λ – *последовательность нулей* для подкласса $H \subset \text{Hol}(\Omega)$, если существует функция $f \neq 0$ на Ω из класса H , обращающаяся в нуль на Λ .

Через m обозначаем лебегову меру на $\mathbb{C}$, а иногда, когда это ясно из контекста, и ее сужения на подмножества комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Будем говорить, что S *предкомпактно* в Ω (пишем $S \Subset \Omega$), если замыкание $\bar{S}$ подмножества $S \subset \Omega$ – компакт в Ω .

Для области $D \Subset \mathbb{C}$ через $g_D(\cdot, z)$ обозначаем *продолженную функцию Грина* для D с полюсом в точке $z \in D$ [24; 5.7.4], т.е. $g_D(\zeta, z) \equiv 0$ для всех $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}$ и $g(\zeta, z)$ – субгармоническая функция от $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{z\}$. Соответственно $\omega_D(z, \cdot)$ – гармоническая мера в точке z относительно области $D \Subset \mathbb{C}$ [24; 5.7.1].

Всюду далее предполагаем, что область $\Omega \subset \mathbb{C}$ содержит начало координат, т.е. $0 \in \Omega$, что не влияет на общность утверждений работы.

Как обычно, $C(S)$ – пространство всех непрерывных вещественнозначных функций на множестве $S \subset \mathbb{C}$. Через $\mathcal{M}(S)$ обозначаем множество всех вещественных борелевских мер (мер Радона) на борелевском множестве S (на $C(S)$); $\mathcal{M}^+(S)$ – конус в $\mathcal{M}(S)$, состоящий из положительных борелевских мер; $\mathcal{M}_{ac}^+(S)$ – подкласс $\mathcal{M}^+(S)$, состоящий из мер, абсолютно непрерывных относительно меры Лебега m . Интегралы от функций со значениями в $[-\infty, +\infty]$ по положительной мере ν понимаются в широком смысле, т.е. интегралы могут принимать значения из $[-\infty, +\infty]$, как в [24], но функция *интегрируема по мере ν* , если интеграл от нее по мере ν конечен.

Пусть $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Как обычно, $\text{supp } \mu$ – *носитель* меры μ . Мера $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ *сосредоточена* на борелевском подмножестве $B \subset \Omega$, если $\mu(\Omega \setminus B) = 0$. Для борелевского множества $B \subset \Omega$ *сужение меры μ на B* обозначается $\mu|_B$.

Через $D(z, t)$ обозначаем открытый круг радиуса $t \in \mathbb{R}$ с центром в точке $z \in \mathbb{C}$. Если $t \leq 0$, то $D(z, t) = \emptyset$. По определению $D(t) := D(0, t)$.

Единичный круг $D(1)$ обозначаем через $\mathbb{D}$.

Для $\nu \in \mathcal{M}(\Omega)$ и $D(t) \subset \Omega$ используем обозначение $\nu^{\text{rad}}(t) := \nu(D(t))$.

Через $\text{Har}(\Omega)$ обозначаем пространство всех гармонических функций на Ω , а $\text{SH}(\Omega)$ – конус всех субгармонических функций на Ω . Функция, тождественно равная $-\infty$ на Ω , по определению принадлежит $\text{SH}(\Omega)$. Для $u \in \text{SH}(\Omega)$ при $u \not\equiv -\infty$ на Ω через $\nu_u := \frac{1}{2\pi} \Delta u$ обозначаем *меру Рисса* функции u (здесь Δ – оператор Лапласа, действующий в смысле теории распределений).

Как обычно, $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ – множество всех локально интегрируемых по мере Лебега m функций $F: \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$. Последовательность $\{w_n\}$ из $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ сходится в $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ к некоторой функции $w \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$, если последовательность

$\int_K |w_n - w| dm$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ для каждого компакта $K \subset \Omega$.

Через $\text{dist}(\cdot, \cdot)$ обозначаем функцию евклидова расстояния между точками или множествами в $\mathbb{C}$. В частности, $\text{dist}(z, \partial\Omega)$ – евклидово расстояние от точки $z \in \mathbb{C}$ до *границы $\partial\Omega$* области Ω .

Всюду далее мера $m^{(r)} \in \mathcal{M}^+(\mathbb{C})$ – это сужение меры Лебега m на круг $D(r)$, нормированное условием $m^{(r)}(D(r)) = 1$, т.е.

$$m^{(r)} := \frac{1}{m^{\text{rad}}(r)} m|_{D(r)}. \quad (1.3)$$

В частности, по определению субгармонической функции

$$v(z) \leq (v * m^{(r)})(z), \quad v \in \text{SH}(\Omega), \quad (1.4)$$

если $z + D(r) = D(z, r) \in \Omega$ (здесь и ниже “ $*$ ” обозначает оператор свертки).

Пусть функция $\sigma: \Omega \rightarrow (0, +\infty)$ удовлетворяет ограничениям

$$0 < \sigma(z) < \text{dist}(z, \partial\Omega) \quad \forall z \in \Omega. \quad (1.5)$$

Тогда для функции $F \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ можем определить функцию

$$F^{(\sigma)}(z) := \int_{D(\sigma(z))} F(z + w) dm^{(\sigma(z))}(w), \quad z \in \Omega, \quad (1.6)$$

которая при дополнительном условии непрерывности σ также непрерывна.

Область в $\mathbb{C}$ назовем *регулярной*, если для нее разрешима задача Дирихле.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть Ω – область в $\mathbb{C}$, $S_0 \in \Omega$ и $0 \in S_0$. Систему регулярных областей $\mathcal{U}_{S_0}(\Omega) \subset \{D \in \Omega : S_0 \subset D\}$ называем *регулярной оптимально исчерпывающей в Ω* (с центром S_0), если для любых двух областей Ω_1 и Ω_2 при $S_0 \subset \Omega_1 \in \Omega_2 \subset \Omega$ выполнены два условия:

- 1) найдется область $D \in \mathcal{U}_{S_0}(\Omega)$ такая, что $\Omega_1 \in D \in \Omega_2$ и каждая непустая ограниченная компонента связности множества $\mathbb{C} \setminus D$ пересекает $\mathbb{C} \setminus \Omega_2$;
- 2) для любой области $D \in \mathcal{U}_{S_0}(\Omega)$ существует область $\Omega_D \in \mathcal{U}_{S_0}(\Omega)$ такая, что $\Omega_1 \in \Omega_D \in \Omega_2$, а объединение $\Omega_D \cup D$ также принадлежит $\mathcal{U}_{S_0}(\Omega)$;

и, кроме того, эта система *условно инвариантна относительно сдвига в Ω* , т.е. из $D \in \mathcal{U}_{S_0}(\Omega)$, $w \in \mathbb{C}$ и $S_0 \subset D + w \in \Omega$ следует, что $D + w \in \mathcal{U}_{S_0}(\Omega)$.

Если $S_0 = \{0\}$, то используем обозначение $\mathcal{U}_0(\Omega) := \mathcal{U}_{\{0\}}(\Omega)$.

ПРИМЕР 1. Связное объединение D конечного числа открытых кругов регулярно тогда и только тогда, когда в дополнении этого объединения нет одноточечных компонент связности [25; теорема 4.2.2]. Вследствие этого простым примером регулярной оптимально исчерпывающей системы областей может служить специальная система $\mathcal{U}_{S_0}^d(\Omega)$ всевозможных связных объединений $D \supset S_0$ конечного числа кругов $D(z_j, t_j) \in \Omega$, $j = 1, \dots, m$, исключая те области D , в дополнении $\mathbb{C} \setminus D$ которых есть изолированные точки. С такими же исключениями круги в этом примере можно заменить на предкомпактные в Ω всевозможные n -угольники или, более общо, односвязные подобласти какого-либо специального типа [25; теоремы 4.2.1 и 4.2.2].

Первое условие определения 1, а также условная инвариантность относительно сдвига в Ω для системы областей $\mathcal{U}_{S_0}^d(\Omega)$ достаточно прозрачны. По поводу второго условия заметим, что если для некоторой области $\Omega' \in \mathcal{U}_{S_0}^d(\Omega)$ при $\Omega_1 \in \Omega' \in \Omega_2$ объединение $\Omega' \cup D$ все же не принадлежит системе $\mathcal{U}_{S_0}^d(\Omega)$, то путем объединения области Ω' с конечным числом кругов достаточно малого радиуса, содержащих изолированные точки дополнения $\mathbb{C} \setminus (\Omega' \cup D)$, легко получить область Ω_D , требуемую во втором условии.

1.2. Субгармонические ядра и весовые функции. Пусть B – борелевское подмножество в Ω и $\nu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$. По определению $L^1(B, d\nu)$ – множество всех функций $g: B \rightarrow [-\infty, +\infty]$, интегрируемых по мере $\nu|_B$, т.е. таких, что

$$\int_B |g| d\nu < +\infty.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть B – борелевское подмножество в Ω , а борелевская функция $h: B \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ локально ограничена и для каждой фиксированной точки $\zeta \in B$ функция $h(\zeta, \cdot): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ гармоническая на Ω . Тогда функцию

$$k: (\zeta, z) \mapsto \log |\zeta - z| + h(\zeta, z), \quad (\zeta, z) \in B \times \Omega, \quad (1.7)$$

будем называть *субгармоническим ядром на $B \times \Omega$ (с гармонической компонентой h и несущим множеством B)*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть мера $\nu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ сосредоточена на борелевском подмножестве $B \subset \Omega$. Субгармоническое ядро k на $B \times \Omega$ называем *подходящим для ν* , если для каждой точки $z \in \Omega$ найдутся подобласть $D_z \Subset \Omega$, содержащая точку z , и функция $g_z \in L^1((\Omega \setminus D_z) \cap B, d\nu)$, для которых

$$\sup_{w \in D_z} |k(\zeta, w)| \leq g_z(\zeta) \quad \text{при всех } \zeta \in (\Omega \setminus D_z) \cap B. \quad (1.8)$$

Серия примеров часто встречающихся субгармонических ядер, подходящих для определенных классов мер на $\mathbb{D}$ и на $\mathbb{C}$, приведена в п. 2.1.

Важную роль в основных результатах работы будет играть функция

$$Q_k^\nu(z) := \int_B (k(\zeta, 0) - k(\zeta, z))^+ d\nu(\zeta), \quad z \in \Omega, \quad (1.9)$$

со значениями в $[0, +\infty]$. Корректность ее определения обеспечивает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Для субгармонического ядра k на $B \times \Omega$, подходящего для меры $\nu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$, удовлетворяющей при некотором $\varepsilon > 0$ условию

$$\int_0^\varepsilon \frac{\nu^{\text{rad}}(t)}{t} dt < +\infty, \quad D(\varepsilon) \Subset \Omega, \quad (1.10)$$

функция (1.9) локально интегрируема по мере Лебега t , т.е. $Q_k^\nu \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $Q := Q_k^\nu$. Зафиксируем произвольную точку $z \in \Omega$. Пусть $D_z \Subset \Omega$ – подобласть из определения 3. Из вида субгармонического ядра (1.7) и измеримости по Борелю и локальной ограниченности его гармонической компоненты h на $B \times \Omega$ легко следует измеримость подынтегральной функции в (1.9) по тензорному произведению [26; гл. IV, § 8] мер $\nu \otimes t$ на $B \times D_z$. Ввиду положительности подынтегральной функции это влечет за собой t -измеримость функции Q [27; III.11.14, теорема Тонелли]. Для локальной интегрируемости по t функции Q со значениями в $[0, +\infty]$ достаточно

установить конечность верхнего интеграла (см. [26; гл. IV, § 4, теорема 39]):

$$\begin{aligned} \int_{D_z}^* Q(w) dm(w) &= \int_{D_z}^* \int_B (k(\zeta, 0) - k(\zeta, w))^+ d\nu(\zeta) dm(w) \\ &\leq \int_{D_z}^* \int_B k^+(\zeta, 0) d\nu(\zeta) dm(w) + \int_{D_z}^* \int_B (-k(\zeta, w))^+ d\nu(\zeta) dm(w) \\ &=: I_0(z) + I(z). \end{aligned}$$

Пусть D_0 – подобласть из определения 3 для точки 0. Можем считать, что число $\varepsilon > 0$ в (1.10) столь мало, что $D(\varepsilon) \Subset D_0$. Тогда независимо от w

$$\begin{aligned} \int_B k^+(\zeta, 0) d\nu(\zeta) &\leq \left(\int_{D(\varepsilon)} + \int_{D_0 \setminus D(\varepsilon)} \right) \log^+ |\zeta| d\nu(\zeta) \\ &\quad + \int_{D_0} |h(\zeta, 0)| d\nu(\zeta) + \int_{(\Omega \setminus D_0) \cap B} |k(\zeta, 0)| d\nu(\zeta) \\ &\leq \int_0^\varepsilon \frac{\nu^{\text{rad}}(t)}{t} + c_0 \nu(D_0 \setminus D(\varepsilon)) + C_0 \nu(D_0) + \int_{(\Omega \setminus D_0) \cap B} g_0(\zeta) d\nu(\zeta), \end{aligned}$$

где в правой части неравенства первый интеграл конечен по условию (1.10), постоянные величины c_0 и C_0 конечны ввиду ограниченности функции $\log^+ |\cdot|$: $z \mapsto \log^+ |z|$ в $D_0 \setminus D(\varepsilon)$ и локальной ограниченности h по определению 2, а функция $g_0 \in L^1((\Omega \setminus D_z) \cap B, d\nu)$ из (1.8) по определению 3 обеспечивает конечность последнего интеграла. Отсюда $I_0(z) \leq c_z m(D_z) \leq C_z$, где c_z и C_z – постоянные. Для внутреннего интеграла в повторном интеграле $I(z)$ при $w \in D_z$ имеем

$$\begin{aligned} \int_B (-k(\zeta, w))^+ d\nu(\zeta) &\leq \int_{D_z} (-\log |\zeta - w|)^+ d\nu(\zeta) + \int_{D_z \cap B} |h(\zeta, w)| d\nu(\zeta) \\ &\quad + \int_{(\Omega \setminus D_z) \cap B} \sup_{w \in D_z} |k(\zeta, z)| d\nu(\zeta). \end{aligned}$$

Отсюда ввиду локальной ограниченности функции h по определению 2, а также из соотношения (1.8) определения 3 получаем оценку для $I(z)$:

$$\begin{aligned} I(z) &\leq \int_{D_z}^* \int_{D_z} (-\log |\zeta - w|)^+ d\nu(\zeta) dm(w) + c'_z \nu(D_z \cap B) m(D_z) \\ &\quad + \int_{D_z} \int_{(\Omega \setminus D_z) \cap B} g_z(\zeta) d\nu(\zeta) dm(w) \\ &\leq \int_{D_z}^* \int_{D_z} (-\log |\zeta - w|)^+ d\nu(\zeta) dm(w) + c''_z + C'_z m(D_z) \\ &\leq \int_{D_z}^* \int_{D_z} (-\log |\zeta - w|)^+ d\nu(\zeta) dm(w) + C''_z =: L + C''_z, \end{aligned}$$

где постоянные величины c'_z , c''_z , C'_z , C''_z конечны. Осталось доказать конечность повторного интеграла L . По теореме Фубини–Фату [26; гл. IV, § 8, теорема 78]

$$L = \int_{D_z} \int_{D_z}^* (-\log |\zeta - w|)^+ dm(w) d\nu(\zeta),$$

где внутренний интеграл определяет непрерывную функцию от ζ ввиду локальной интегрируемости его подынтегральной функции по мере Лебега m . Отсюда в силу предкомпактности D_z в Ω следует $L < +\infty$. Предложение 1.1 доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $0 \in \Omega$ и k – субгармоническое ядро на $B \times \Omega$. Функцию $M \in \text{SH}(\Omega)$ с мерой Рисса ν_M называем *субгармонической весовой функцией с ядром k* (относительно точки 0) или просто *весом*, если выполнены два условия:

- (i) функция M ограничена в открытой окрестности некоторого связного компакта $K_0 \subset \Omega$, содержащего точку $0 \in \mathbb{C}$;
- (ii) мера ν_M сосредоточена на борелевском подмножестве $B \subset \Omega$, а субгармоническое ядро k на $B \times \Omega$ – подходящее для ν_M .

Из конечности $M(0)$ для веса M при некотором $\varepsilon > 0$ следует (1.10) для $\nu = \nu_M$ [24; 3.9]. Это позволяет переформулировать предложение 1.1 следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Для веса $M \in \text{SH}(\Omega)$ в обозначении (1.9)

$$Q_k^{\nu_M} \in L_{\text{loc}}^1(\Omega).$$

1.3. Теоремы о последовательностях нулей. Одну из ключевых ролей далее будет играть

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 (см. [28], [29], [1], [16]–[18]). Мера $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ с компактным носителем в области $\Omega \ni 0$ называется *мерой Аренса–Зингера* или *представляющей мерой для точки $z \in \Omega$ на Ω* , если

$$h(z) = \int_{\Omega} h d\mu \quad \text{для всех } h \in \text{Har}(\Omega). \quad (1.11)$$

Через $\mathcal{AS}_z(\Omega)$ обозначаем класс всех мер Аренса–Зингера для $z \in \Omega$, а если $z = 0 \in \Omega$, то $\mathcal{AS}(\Omega) := \mathcal{AS}_0(\Omega)$. При этом меру Аренса–Зингера для точки $0 \in \Omega$ будем называть просто мерой Аренса–Зингера.

Примерами мер Аренса–Зингера для $z \in \Omega$ могут служить все гармонические меры $\omega_D(z, \cdot)$ относительно областей $D \Subset \Omega$ в точке $z \in D$.

Очевидно, каждая мера $\mu \in \mathcal{AS}_z(\Omega)$ вероятностная, т.е. $\mu(\Omega) = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 (см. [1], [16]–[18], [29]). Функцию $V \in \text{SH}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ называем *потенциалом Аренса–Зингера* на Ω (с полюсом в точке $0 \in \Omega$), если она удовлетворяет двум условиям:

- (1) $V \equiv 0$ на $\mathbb{C} \setminus (K \cup \{0\})$ для некоторого $K \Subset \Omega$ (финитность V);
- (2) $\limsup_{\zeta \rightarrow 0} \frac{V(\zeta)}{-\log |\zeta|} \leq 1$ (нормировка в нуле для V).

Класс всех таких потенциалов Аренса–Зингера обозначаем через $\mathcal{PAS}(\Omega)$.

¹Ранее нами для таких функций использовался термин “функция Аренса–Зингера” как обобщение функции Грина. Но впоследствии выяснилось, что этот термин уже занят и используется в ином смысле в теории обобщенных аналитических функций [30].

Примерами потенциалов Аренса–Зингера могут служить все продолженные функции Грина $g_D(\cdot, 0)$ для областей $D \in \Omega$ с полюсом в точке 0.

Первые две теоремы этого пункта в некоторой общей форме отвечают на вопрос (Z) из начала § 1 применительно к пространствам типа (1.2) и, естественно, к различным построенным из них пространствам (объединениям, пересечениям, индуктивным или проективным пределам по разнообразным системам мажорант M). Первая из них – относительно простая по доказательству – может служить источником бесконечного списка необходимых условий на последовательность нулей $\Lambda \subset \Omega$ для таких пространств.

ТЕОРЕМА 1 (о последовательностях нулей: необходимые условия). Пусть область $\Omega \subset \mathbb{C}$ содержит точку 0, $\Lambda = \{\lambda_k\}$ – последовательность точек в Ω и $0 \notin \Lambda$, а $M: \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$ – борелевская функция.

Если Λ – последовательность нулей для $\text{Hol}(\Omega; M)$, то

(zn1) для каждой голоморфной в Ω функции f_Λ с $\text{Zero}_{f_\Lambda} = \Lambda$ найдется постоянная C такая, что при любой мере Аренса–Зингера $\mu \in \mathcal{AS}(\Omega)$ выполнено

$$\int_{\Omega} \log |f_\Lambda(z)| d\mu(z) \leq \int_{\Omega} M(z) d\mu(z) + C; \quad (1.12)$$

(zn2) при $M \in \text{SH}(\Omega)$ с мерой Рисса ν_M и $M(0) \neq -\infty$ найдется постоянная C такая, что для каждого потенциала Аренса–Зингера V выполнено

$$\sum_k V(\lambda_k) \leq \int_{\Omega \setminus \{0\}} V(\zeta) d\nu_M(\zeta) + C. \quad (1.13)$$

Теорема 1 доказывается в п. 3.2. Значительно более глубокой и в определенном смысле обратной к теореме 1, но с некоторым “зазором”, является

ТЕОРЕМА 2 (о последовательностях нулей: достаточные условия). Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ – $(n+1)$ -связная область, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ и $0 \in \Omega$, а $M \in \text{SH}(\Omega)$ – вес с мерой Рисса ν_M и с ядром k , $Q := Q_k^{\nu_M} \geq 0$ – функция на Ω , определенная в (1.9), и $\mathcal{U}_{K_0}(\Omega)$ – регулярная оптимально исчерпывающая система областей в Ω с центром K_0 – связным компактом из свойства (i) определения 4.

Допустим, для последовательности $\Lambda = \{\lambda_k\} \subset \Omega$, $0 \notin \Lambda$, найдется постоянная C такая, что выполнено какое-либо из следующих двух утверждений:

(zs1) для некоторой голоморфной в Ω функции f_Λ с последовательностью нулей $\text{Zero}_{f_\Lambda} = \Lambda$ для каждой области $D \in \mathcal{U}_{K_0}(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} \log |f_\Lambda(z)| d\omega_D(0, z) \leq \int_{\Omega} M(z) d\omega_D(0, z) + C; \quad (1.14)$$

(zs2) для каждой области $D \in \mathcal{U}_{K_0}(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\sum_k g_D(\lambda_k, 0) \leq \int_{\Omega \setminus \{0\}} g_D(\zeta, 0) d\nu_M(\zeta) + C. \quad (1.15)$$

Тогда найдется такое число $b < n$, что для любой функции $\sigma \in C(\Omega)$, удовлетворяющей (1.5), Λ – последовательность нулей для пространства

$$\text{Hol}(\Omega; M^{(\sigma)} + Q^{(\sigma)} + b^+ \log^+ |\cdot|), \quad \log |\cdot|: z \mapsto \log |z|, \quad z \in \Omega. \quad (1.16)$$

Очевидно, каждая последовательность нулей для пространства H – это и подпоследовательность нулей для H . Обратное утверждение довольно часто неверно, в связи с чем и поставлена задача (U) в начале §1. Следующая теорема дает общий метод решения подобных задач.

ТЕОРЕМА 3 (о (под)последовательностях нулей). *Если в условиях, приведенных в первом абзаце теоремы 2, последовательность $\Lambda \subset \Omega$ – подпоследовательность нулей для $\text{Hol}(\Omega; M)$, $0 \notin \Lambda$, то при некотором $b < n$ для любой функции $\sigma \in C(\Omega)$, удовлетворяющей (1.5), Λ – последовательность нулей для класса (1.16).*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При применении теорем 2 и 3 к конкретным пространствам функций, конечно же, нет необходимости явно вычислять функцию $Q_k^{\nu_M}$, а достаточно оценить ее “хорошей” функцией Q сверху. При этом если функция M или $Q \geq Q_k^{\nu_M}$ непрерывна на Ω , то функцию $M^{(\sigma)} + Q^{(\sigma)}$ всюду можно заменить соответственно на $M + Q^{(\sigma)}$ или на $M^{(\sigma)} + Q$, а если одновременно $M \in C(\Omega)$ и $Q \in C(\Omega)$, то и на функцию $M + Q$. Действительно, для $M \in C(\Omega)$ в силу ее локальной равномерной непрерывности на Ω всегда можно подобрать функцию $\sigma \in C(\Omega)$, удовлетворяющую условию (1.5), столь малую, что $M^{(\sigma)} \leq M + 1$ на Ω . Аналогично по отношению к $Q \in C(\Omega)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В теоремах 2 и 3 слагаемое $b^+ \log^+ |\cdot|$ в описании пространства (1.16) можно удалить, если область Ω односвязна или внутренность ее дополнения $\mathbb{C} \setminus \Omega$ непуста (в частности, если область Ω ограничена в $\mathbb{C}$). Так, для односвязной области Ω имеем $n = 0$, откуда $b^+ = 0$. Случай непустой внутренней области дополнения $\mathbb{C} \setminus \Omega$ рассмотрен в доказательствах теорем 2 и 3 (в п. 2.2 теоремы 2 и 3 выводятся из основной теоремы).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Согласно приведенным после определений 5 и 6 примерам классов мер и потенциалов Аренса–Зингера справедливы следующие импликации для условий теорем 1 и 2, каждая из которых, вообще говоря, необратима:

$$\begin{array}{ccc} (\text{zn1}) & \Rightarrow & (\text{zs1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\text{zn2}) & \Rightarrow & (\text{zs2}) \end{array}.$$

Из диаграммы видно, что достаточные условия в теореме 2 даже слабее необходимых условий из теоремы 1. Но расплачиваться за это приходится, наряду с незначительными деталями, “зазором” в виде дополнительных условий на область Ω (конечность связности), вес M и самым осложняющим в применениях обстоятельством – появлением в теореме 2 в определении пространства (1.16) добавки $Q^{(\sigma)}$ к весу M . Из доказательства основной теоремы неявно следует, что и усиление достаточных условий (zs1) или (zs2) до необходимых условий (zn1) или (zn2) не даст каких-либо серьезных усовершенствований теоремы 2.

ПРИМЕР 2. Проиллюстрируем результаты этого пункта в простейшей ситуации: $M \equiv 0$ в области $\Omega \ni 0$, обладающей функцией Грина g_Ω , т.е. на области Ω с неполярной границей $\partial\Omega$. В этом случае пространство $\text{Hol}(\Omega; M)$ обозначаем через $H^\infty(\Omega)$ – пространство всех ограниченных в Ω голоморфных функций. При этом $\nu_M = 0$. Всюду предполагаем, что $0 \notin \Lambda = \{\lambda_k\} \subset \Omega$.

Всегда можно подобрать возрастающую относительно включения последовательность подобластей $D_n \subset D_{n+1} \Subset \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, содержащих 0 и дающих в объединении область Ω (даже с гладкими или кусочно линейными границами ∂D_n и предкомпактными вложениями $D_n \Subset D_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$). Такая система $\{D_n\}$ называется *исчерпанием области Ω* . По теореме 1 имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. *Если Λ – последовательность нулей для $H^\infty(\Omega)$, то (zn1') для любой функции $f_\Lambda \in \text{Hol}(\Omega)$ с $\text{Zero}_{f_\Lambda} = \Lambda$ конечна точная верхняя грань по всем исчерпаниям $\{D_n\}$ области Ω величин*

$$\sup_n \int_{\partial D_n} \log |f_\Lambda(z)| d\omega_{D_n}(0, z); \quad (1.17)$$

$$(zn2') \sum_k g_\Omega(\lambda_k, 0) < +\infty.$$

Действительно, (zn1') – тривиальное следствие условия (zn1) теоремы 1, поскольку $M \equiv 0$ на Ω и каждая гармоническая мера $\omega_{D_n}(0, \cdot)$ – мера Аренса–Зингера с носителем на ∂D_n при $0 \in D_n \Subset \Omega$. Более того, во многих случаях, когда для f_Λ определены² угловые граничные значения на $\partial\Omega$ п.в. по гармонической мере $\omega_\Omega(0, \cdot)$ на $\partial\Omega$ и они определяют некоторую функцию, обозначаемую здесь как $\log_* |f_\Lambda|$ и интегрируемую по мере $\omega_\Omega(0, \cdot)$, в силу возрастания по n интегралов в (zn1') условие (zn1') можно заменить на ограничение

$$\int_{\partial\Omega} \log_* |f_\Lambda(z)| d\omega_\Omega(0, z) < +\infty. \quad (1.18)$$

Условие (zn2') – следствие условия (zn2) теоремы 1, поскольку $\nu_M = 0$, а для исчерпания $\{D_n\}$ области Ω продолженные функции Грина $g_{D_n}(\cdot, 0)$ – это потенциалы Аренса–Зингера, для которых последовательность $\{g_{D_n}(\zeta, 0)\}$, возрастающая, стремится к $g_\Omega(\zeta, 0)$ при $\zeta \in \Omega$ [25; следствие 4.4.5 и теорема 4.4.6].

Обратно, из теоремы 2 легко следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ – $(n+1)$ -связная область при некотором $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $0 \in \Omega$, и выполнено какое-либо из следующих двух условий:*

- (zs1') *для некоторой функции $f_\Lambda \in \text{Hol}(\Omega)$ с $\text{Zero}_{f_\Lambda} = \Lambda$ существует исчерпание $\{D_n\}$ области Ω , для которого конечна точная верхняя грань (1.17) (соответственно выполнено условие (1.18), когда это возможно);*
- (zs2') *справедливо неравенство (zn2').*

Тогда последовательность Λ – последовательность нулей для пространства $\text{Hol}(\Omega; b^+ \log^+ |\cdot|)$ при некотором $b < n$ (и даже для пространства $H^\infty(\Omega)$, когда область Ω односвязна или внутренность ее дополнения $\mathbb{C} \setminus \Omega$ непуста).

Действительно, функция $M \equiv 0$ – субгармонический вес с нулевой мерой Рисса и субгармоническим ядром, к примеру $k(\zeta, z) \equiv \log |\zeta - z|$, $(\zeta, z) \in \Omega^2$.

²К примеру, это так, если функция $\log^+ |f_\Lambda|$ имеет гармоническую мажоранту, т.е. принадлежит классу $N^*(\Omega)$ в конечносвязной области Ω со спрямляемой границей $\partial\Omega$.

Очевидно, в этом случае функция $Q_k^{\nu_M} \equiv 0$ на Ω , и тогда пространство (1.16) – это $\text{Hol}(\Omega; b^+ \log^+ |\cdot|)$. Условия (zs1') (соответственно (1.18), когда это возможно) или (zs2') = (zn2') по принципу подчинения [25; теоремы 4.3.8 и 4.4.4] для гармонических мер и для функций Грина влекут за собой выполнение условий соответственно (zs1) и (zs2) теоремы 2 с нулем вместо интеграла в правой части соответственно (1.14) или (1.15). Остается воспользоваться заключением теоремы 2 и замечанием 2.

Наконец, теорема 3 в рассматриваемом частном случае сразу дает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. *Каждая подпоследовательность нулей для пространства $H^\infty(\Omega)$ в случае $(n+1)$ -связной области $\Omega \ni 0$ – последовательность нулей для $\text{Hol}(\Omega; b^+ \log^+ |\cdot|)$ при некотором $b < n$ (и даже для $H^\infty(\Omega)$, когда область Ω односвязна или внутренность ее дополнения $\mathbb{C} \setminus \Omega$ непуста).*

В частности, в случае единичного круга $\Omega = \mathbb{D}$ приведенные утверждения в точности дают объединенную версию классических результатов Р. Неванлинны.

ТЕОРЕМА НЕВАНЛИННЫ (о нулях). *Попарно эквивалентны следующие пять утверждений:*

- (0) $\Lambda = \{\lambda_k\}$ – последовательность нулей для $H^\infty(\mathbb{D})$;
 (zn1'') для любой функции $f_\Lambda \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ с $\text{Zero}_{f_\Lambda} = \Lambda$ выполнено условие

$$\sup_{r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f_\Lambda(re^{i\theta})| d\theta < +\infty; \quad (1.19)$$

- (zs1'') $\Lambda = \text{Zero}_{f_\Lambda}$ для некоторой функции $f_\Lambda \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, удовлетворяющей (1.19);

$$(zs2'') \sum_k \log \frac{1}{|\lambda_k|} < +\infty \Leftrightarrow \sum_k (1 - |\lambda_k|) < +\infty \Leftrightarrow \int_0^1 n_\Lambda^{\text{rad}}(t) dt < +\infty;$$

- (0') $\Lambda = \{\lambda_k\}$ – подпоследовательность нулей для $H^\infty(\mathbb{D})$.

1.4. О представлении мероморфных функций в виде отношения двух голоморфных. Начиная с классических теорем Р. Неванлинны об описании последовательностей нулей для пространства $H^\infty \subset \text{Hol}(\mathbb{D})$ ограниченных функций и о представлении мероморфной в круге функции с ограниченной характеристикой Неванлинны в виде отношения двух ограниченных функций известны следующие параллели (см. [14]–[18])

- 1) между описаниями последовательностей нулей для весовых пространств голоморфных функций в области Ω и представлением мероморфной в области Ω функции f в виде отношения $f = g/h$ двух функций $g, h \in \text{Hol}(\Omega)$ без общих нулей с заданными ограничениями на их рост вблизи границы $\partial\Omega$;
- 2) между описаниями подпоследовательностей нулей для таких весовых пространств и представлением мероморфной в области Ω функции f в виде отношения $f = g/h$ двух функций $g, h \in \text{Hol}(\Omega)$ с заданными ограничениями на их рост вблизи $\partial\Omega$, но, возможно, имеющих общие нули.

Аналогичные параллели с теоремами 1 и 2 отражают соответственно теоремы 4 и 5.

ТЕОРЕМА 4 (о представлении мероморфных функций: необходимость). Если $M: \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$ – борелевская функция в области $\Omega \subset \mathbb{C}$, содержащей 0, а мероморфная в Ω функция f представима в виде отношения $f = g/q$ двух функций $g, q \in \text{Hol}(\Omega; M)$, то выполнено условие

(г) существует постоянная C такая, что для любых вероятностных мер $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ с компактным носителем выполнено неравенство

$$\int_{\Omega} \log \max\{|g|, |q|\} d\mu \leq \int_{\Omega} M d\mu + C. \quad (1.20)$$

ТЕОРЕМА 5 (о представлении мероморфных функций: достаточность). Пусть в условиях, приведенных в первом абзаце теоремы 2, мероморфная в Ω функция f представлена в виде отношения $f = g/q$ двух функций $g, q \in \text{Hol}(\Omega)$, $\max\{|g(0)|, |q(0)|\} \neq 0$.

Допустим, что выполнено одно из следующих двух условий:

(г1) существует постоянная C такая, что для каждой области $D \in \mathcal{U}_{K_0}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \log \max\{|g(z)|, |q(z)|\} d\omega_D(0, z) \leq \int_{\Omega} M(z) d\omega_D(0, z) + C; \quad (1.21)$$

(г2) $g \in \text{Hol}(\Omega; M)$ и $q \in \text{Hol}(\Omega; M)$.

Тогда при некотором $b < n$ для любой функции $\sigma \in C(\Omega)$, удовлетворяющей ограничению (1.5), найдутся функции g_0 и q_0 из пространства (1.16) без общих нулей такие, что справедливо представление $f = g_0/q_0$ на Ω .

При этом справедливы замечания 1 и 2 о пространстве (1.16).

Теорема 4 тривиальна и дана лишь для цельности картины. Действительно, если $g, q \in \text{Hol}(\Omega; M)$, то по определению (1.2) пространства $\text{Hol}(\Omega; M)$ для некоторой постоянной $c > 0$ выполнено неравенство $\max\{|g|, |q|\} \leq c \exp M$ на Ω . Логарифмируя его, а затем интегрируя по вероятностной мере μ , получаем (1.20) с $C := \log c$. Теорема 5 выводится из основной теоремы в п. 2.2.

Подробный обзор результатов о представлении мероморфных в $\mathbb{C}$ функций как отношения двух целых функций заданного роста дан в работе [15] (см. также [14]).

ЗАМЕЧАНИЕ. Необратимые импликации $(г2) \Rightarrow (г) \Rightarrow (г1)$ очевидны. Первая – это теорема 4. Вторая – следствие того, что гармоническая мера вероятностная. Дальнейший комментарий аналогичен обсуждению из замечания 3 в п. 1.3.

ПРИМЕР 3. Как и в примере 2, проиллюстрируем теорему 5 в простейшей ситуации $M \equiv 0$ на $(n+1)$ -связной области $\Omega \ni 0$ с неполярной границей $\partial\Omega$, т.е. применительно к пространству $H^\infty(\Omega)$ и мероморфной функции $f = g/q$ с $g, q \in \text{Hol}(\Omega)$ и $\max\{|g(0)|, |q(0)|\} \neq 0$. По теореме 5 имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6. Пусть выполнено хотя бы одно из двух условий:
(r1') существует исчерпание $\{D_n\}$ области Ω , для которого

$$\sup_n \int_{\partial D_n} \log \max\{|g(z)|, |q(z)|\} d\omega_{D_n}(0, z) < +\infty; \quad (1.22)$$

(r2') функции g и q ограничены в Ω .

Тогда найдутся функции g_0 и q_0 без общих нулей из $\text{Hol}(\Omega; b^+ \log^+ |\cdot|)$ для некоторого $b < n$ (и даже ограниченные голоморфные в Ω , когда область Ω односвязна или внутренность ее дополнения $\mathbb{C} \setminus \Omega$ непуста) такие, что справедливо представление $f = g_0/q_0$ на Ω .

Вывод этого следствия из теоремы 5 вполне аналогичен соответствующим рассуждениям из примера 2, и мы его опускаем.

В частном случае $\Omega = \mathbb{D}$ и исчерпания кругами $D_n = D(r_n)$, где $1 > r_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, из элементарных фактов теории распределения Неванлинны следует, что интегралы в (1.22) мажорируются характеристиками Неванлинны $T(r_n; f)$ с точностью до константы. Тогда из предложения 1.6 вытекает классическая

ТЕОРЕМА НЕВАНЛИННЫ (о функциях ограниченной характеристики). Если для мероморфной в круге $\mathbb{D}$ функции

$$f = g/q, \quad g, q \in \text{Hol}(\mathbb{D}), \quad \max\{|g(0)|, |q(0)|\} \neq 0,$$

выполнено условие $\sup_{r < 1} T(r, f) < +\infty$ или голоморфные функции g и q ограничены в $\mathbb{D}$, то найдутся ограниченные голоморфные функции g_0 и q_0 в $\mathbb{D}$ без общих нулей такие, что справедливо представление $f = g_0/q_0$ на $\mathbb{D}$.

§ 2. Основная теорема

2.1. Субгармонические ядра и глобальное представление Рисса.

Следующее предложение 2.1 представляет собой глобальную версию классической теоремы Рисса о локальном представлении субгармонической функции в виде суммы логарифмического потенциала ее меры Рисса и некоторой гармонической функции [24; теорема 3.9], [25; теорема 3.7.9].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть мера $\nu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ сосредоточена на борелевском подмножестве $B \subset \Omega$ и субгармоническое ядро k на $B \times \Omega$ – подходящее для меры ν . Тогда интеграл

$$U_k^\nu(z) := \int_B k(\zeta, z) d\nu(\zeta), \quad z \in \Omega, \quad (2.1)$$

определяет субгармоническую на Ω функцию с мерой Рисса ν , а для каждой функции $M \in \text{SH}(\Omega)$ с мерой Рисса $\nu_M = \nu$ имеет место представление

$$M = U_k^\nu + H \quad \text{на } \Omega, \quad \text{где } H \in \text{Har}(\Omega). \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При доказательстве предложения 2.1 будет использована

ТЕОРЕМА А (см. [31; теорема 2.6.5]). Пусть (T, μ) – пространство с σ -конечной мерой и Ω – область в $\mathbb{R}^d$. Допустим, что измеримая (относительно $\mu \otimes m$) функция $u: T \times \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty)$ такова, что

- (i) функция $x \mapsto u(t, x)$ субгармоническая на Ω для каждого $t \in T$;
- (ii) существует функция $g \in L^1(T, d\mu)$ такая, что $u(t, x) \leq g(t)$ при $t \in T$ и $x \in \Omega$.

Тогда функция

$$U(x) := \int_T u(t, x) d\mu(t), \quad x \in \Omega,$$

субгармоническая на Ω .

Пусть $z \in \Omega$. Определение 3 обеспечивает существование некоторой под области $D_z \Subset \Omega$, $z \in D_z$, и некоторой функции $g_z \in L^1((\Omega \setminus D_z) \cap B, d\nu)$, для которых выполнено неравенство (1.8). Представим интеграл (2.1) в виде суммы

$$\begin{aligned} U_k^\nu(w) &= \int_{D_z \cap B} k(\zeta, w) d\nu(\zeta) + \int_{(\Omega \setminus D_z) \cap B} k(\zeta, w) d\nu(\zeta) \\ &= \int_{D_z \cap B} \log |\zeta - w| d\nu(\zeta) + \int_{D_z \cap B} h(\zeta, w) d\nu(\zeta) \\ &\quad + \int_{(\Omega \setminus D_z) \cap B} k(\zeta, w) d\nu(\zeta), \quad w \in D_z, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где h – гармоническая компонента субгармонического ядра k . Здесь первый интеграл в правой части – логарифмический потенциал меры $\nu|_{D_z \cap B}$ с компактным носителем. Следовательно, это субгармоническая функция в $\mathbb{C}$ с мерой Рисса $\nu|_{D_z \cap B}$. Гармоническая компонента ограничена на предкомпактном подмножестве $D_z \cap B \Subset \Omega$. Рассматривая в теореме А в качестве (T, μ) пространство с конечной мерой $(D_z \cap B, \nu|_{D_z \cap B})$, а в роли функции g – достаточно большую постоянную, мажорирующую одновременно $\pm h$ равномерно по $w \in D_z$, убеждаемся, что второй интеграл в правой части (2.3) – одновременно субгармоническая и супергармоническая функция, т.е. гармоническая в D_z .

По определению 2 субгармоническое ядро $k(\zeta, w)$ – гармоническая функция по второй переменной w в области D_z ввиду представления (1.7) при каждом $\zeta \in (\Omega \setminus D_z) \cap B$. Рассмотрим в теореме А в качестве (T, μ) пространство с σ -конечной мерой $((\Omega \setminus D_z) \cap B, \nu|_{(\Omega \setminus D_z) \cap B})$. По определению 3 подходящего субгармонического ядра найдется функция $g_z \in L^1((\Omega \setminus D_z) \cap B, d\nu)$, мажорирующая одновременно $\pm k$ на $(\Omega \setminus D_z) \cap B$ равномерно по $w \in D_z$. Ее выбираем в роли функции g в теореме А. Тогда по теореме А и третий интеграл в правой части (2.3) – одновременно субгармоническая и супергармоническая функция, т.е. гармоническая в D_z . Таким образом, для любой точки $z \in \Omega$ существует некоторая область $D_z \subset \Omega$, содержащая z , для которой функция $U_k^\nu|_{D_z}$ субгармоническая в D_z с мерой Рисса $\nu|_{D_z}$. Но определения субгармонической функции и ее меры Рисса локальны, откуда следует, что $U_k^\nu \in \text{SH}(\bigcup_{z \in \Omega} D_z) = \text{SH}(\Omega)$ с мерой Рисса, равной ν .

Если $M \in \text{SH}(\Omega)$ с мерой Рисса $\nu_M = \nu$, то в смысле теории распределений $\Delta(M - U_k^\nu) = \nu_M - \nu = 0$. Следовательно, $M - U_k^\nu =: H \in \text{Har}(\Omega)$ по известной лемме Вейля [25; лемма 3.7.1], что дает представление (2.2). Предложение 2.1 доказано.

ПРИМЕРЫ. Ниже приведены часто использующиеся субгармонические ядра.

0) Функция $(\zeta, z) \mapsto \log |\zeta - z|$ – подходящее субгармоническое ядро на $\Omega \times \Omega$ для всякой меры $\nu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ с компактным носителем в Ω .

1) Если для области Ω существует функция Грина g_Ω (граница $\partial\Omega$ – непустое множество), то функции

$$(\zeta, z) \mapsto -g_\Omega(\zeta, z) \quad \text{и} \quad (\zeta, z) \mapsto -g_\Omega(\zeta, z) + \log |\zeta| \quad (2.4)$$

– субгармонические ядра соответственно на $\Omega \times \Omega$ и $(\Omega \setminus \{0\}) \times \Omega$. Эти ядра подходящие для мер $\nu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ при условии (см. [25; теорема 4.5.4])

$$\int_{\Omega} g_\Omega(\zeta, 0) d\nu(\zeta) < +\infty.$$

2) Пусть $\Omega = \mathbb{D}$. Здесь используются множитель Бляшке, его варианты и псевдогиперболическое расстояние для $\mathbb{D}$:

$$\begin{aligned} B_\zeta(z) &:= \frac{|\zeta|}{\zeta} \frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta}z}, \quad \zeta \in \mathbb{D} \setminus \{0\}, \quad z \in \mathbb{D}, \quad |B_0(z)| := |z|, \\ \bar{B}_\zeta(z) &:= \frac{\bar{\zeta}(\zeta - z)}{1 - \bar{\zeta}z} = |\zeta| B_\zeta(z), \quad \zeta \in \mathbb{D}, \quad z \in \mathbb{D}, \\ \rho(\zeta, z) &:= \left| \frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta}z} \right| = |B_\zeta(z)| = \frac{1}{|\zeta|} |\bar{B}_\zeta(z)|. \end{aligned}$$

Следующие функции – субгармонические ядра.

(В₀) Субгармоническое ядро Бляшке на $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$:

$$(\zeta, z) \mapsto b_1(\zeta, z) := \log |B_\zeta(z)| = \log |\rho(\zeta, z)| = -g_{\mathbb{D}}(\zeta, z).$$

Это ядро подходящее для мер $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{D})$, удовлетворяющих условию

$$\int_0^{1-} (1-t) d\nu^{\text{rad}}(t) < +\infty. \quad (2.5)$$

Аналогично

$$(\zeta, z) \mapsto \bar{b}_1(\zeta, z) := \log |\bar{B}_\zeta(z)| = -g_{\mathbb{D}}(z, \zeta) + \log |\zeta|$$

– субгармоническое ядро на $(\mathbb{D} \setminus \{0\}) \times \mathbb{D}$, подходящее для $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{D})$, если одновременно с (2.5) выполнено (1.10) при некотором $0 < \varepsilon < 1$. Это условие влечет за собой конечность интеграла $\int_0^\varepsilon \log |\zeta| d\nu(\zeta)$ и обеспечивает равенство $\nu(\{0\}) = 0$.

($\overline{D}_p$) Субгармоническое ядро Джербашяна–Нафталевича–Цудзи рода p для целого $p \geq 0$ с несущим множеством $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ (см. [2]–[5], [32]–[34]):³

$$\begin{aligned} (\zeta, z) \mapsto \bar{d}_p(\zeta, z) &:= \log |\overline{B}_\zeta(z)| + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \operatorname{Re}(1 - \overline{B}_\zeta(z))^k \\ &= \log \left| \frac{\bar{\zeta}(\zeta - z)}{1 - \bar{\zeta}z} \right| + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \operatorname{Re} \left(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \bar{\zeta}z} \right)^k, \end{aligned} \quad (2.6)$$

которое при $p = 0$ совпадает со вторым ядром из (2.4) для $\Omega = \mathbb{D}$, т.е. с $\bar{b}_1$. Такие ядра подходящие для мер $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{D})$ при условии

$$\int_0^{1^-} (1-t)^{p+1} d\nu^{\text{rad}}(t) + \int_0^{1/2} \frac{\nu^{\text{rad}}(t)}{t} dt < +\infty. \quad (2.7)$$

(H_2) Субгармоническое ядро Горовица (см. [6], [5]) на $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$:

$$(\zeta, z) \mapsto h_2(\zeta, z) := \log |1 - (1 - B_\zeta(z))^2|.$$

Это ядро подходящее для мер $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{D})$ при условии

$$\int_0^{1^-} (1-t)^2 d\nu^{\text{rad}}(t) < +\infty.$$

(B_s) Субгармоническое ядро Беллера для $0 < s \leq 6$ на $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ (см. [7], [5]):

$$(\zeta, z) \mapsto b_s(\zeta, z) := \log |1 - (1 - B_\zeta(z))^s|,$$

которое совпадает с ядром Горовица при $s = 2$ и с ядром Бляшке при $s = 1$. Такие ядра подходящие для мер $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{D})$, удовлетворяющих условию

$$\int_0^{1^-} (1-t)^s d\nu^{\text{rad}}(t) < +\infty.$$

($\overline{B}_s$) Субгармоническое ядро Бомаша для $s \geq 1$ с несущим множеством $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ (см. [35], [8]):

$$\bar{b}_s(\zeta, z) := \log |1 - (1 - \overline{B}_\zeta(z))^s|.$$

Такие ядра подходящие для мер $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{D})$ при условии (2.7) с $p = s - 1$.

(K_1) Субгармоническое ядро Коренблюма на $(\mathbb{D} \setminus \{0\}) \times \mathbb{D}$ (см. [9], [5]):

$$k_1(\zeta, z) := \log |B_\zeta(z)| + \log \frac{1}{|\zeta|} \operatorname{Re} \frac{\zeta/|\zeta| + z}{\zeta/|\zeta| - z}.$$

Это ядро подходящее для мер $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{D})$ при условии (2.7) с $p = 1$.

³Для $q > p$ по определению $\sum_{k=q}^p \dots := 0$, $\prod_{k=q}^p \dots := 1$. Аналогично $\sum_{k \in \emptyset} \dots := 0$, $\prod_{k \in \emptyset} \dots := 1$.

($\bar{D}_\infty$) Для последовательности $\{p_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, $p_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, и последовательности $0 < r_0 \leq r_1 \leq \dots \leq 1$ (конечной или бесконечной) субгармоническое *ядро Джрбашяна–Шамояна* (относительно этих двух последовательностей) на $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ (см. (2.6) и [10; § 2]):

$$(\zeta, z) \mapsto d_\infty(\zeta, z) := \begin{cases} \bar{d}_{p_n}(\zeta, z), & \text{если } r_n \leq |\zeta| < r_{n+1}, \quad n \geq 1, \\ \log |\zeta - z|, & \text{если } |\zeta| < r_0. \end{cases}$$

Это ядро подходящее для меры $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{D})$, например при условии (см. оценки в [36; гл. V, 10], [10; § 2]), что для любой постоянной $a > 1$

$$\sum_{n \geq 1} a^{p_n+1} \int_{r_n}^{r_{n+1}^-} (1-t^2)^{p_n+1} d\nu^{\text{rad}}(t) < +\infty. \quad (2.8)$$

Отметим, что для каждой меры $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{D})$ можно подобрать подходящее для ν субгармоническое ядро (ср. с теорией факторизации М. М. Джрбашяна [3]–[5]), которое, во всяком случае для не слишком быстро растущей $\nu^{\text{rad}}(t)$ при $t \rightarrow 1^-$, в определенном смысле оптимально.

3) Пусть $\Omega = \mathbb{C}$. Следующие функции – субгармонические ядра.

(E_q) Субгармоническое *ядро Вейерштрасса–Адамара рода q* для целого $q \geq 0$ на $(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}$:

$$(\zeta, z) \mapsto e_q(\zeta, z) := \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| + \sum_{k=1}^q \frac{1}{k} \operatorname{Re} \frac{z^k}{\zeta^k}. \quad (2.9)$$

Такое ядро подходящее для меры $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{C})$ при условии

$$\int_0^1 \frac{\nu^{\text{rad}}(t)}{t^{q+1}} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\nu^{\text{rad}}(t)}{t^{q+2}} dt < +\infty.$$

(W_∞) Для последовательности целых чисел $\{q_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, и возрастающей последовательности чисел $0 < r_0 \leq r_1 \leq \dots < +\infty$ (конечной или бесконечной) субгармоническое *ядро Вейерштрасса* (относительно этих двух последовательностей) на $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$:

$$(\zeta, z) \mapsto w_\infty(\zeta, z) := \begin{cases} e_{q_n}(\zeta, z), & \text{если } r_n \leq |\zeta| < r_{n+1}, \quad n \geq 1, \\ \log |\zeta - z|, & \text{если } |\zeta| < r_0. \end{cases}$$

Это ядро подходящее для меры $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{C})$, удовлетворяющей условию (см. [24; теорема 4.1])

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_{n-1}}^{r_n} \frac{\nu^{\text{rad}}(t)}{t^{q_n+2}} dt < +\infty. \quad (2.10)$$

Отметим здесь, что для каждой меры $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{C})$ можно подобрать подходящее для ν субгармоническое ядро (см. теорию факторизации М. М. Джрбашяна [11] и обзор [12], а также статью [13]), в некотором смысле оптимальное.

4) Различные субгармонические ядра можно выписать явно и для конечно-связных областей, например для кольца, путем сочетания приведенных выше ядер и использования инверсий, конформных отображений и пр.

2.2. Формулировка основной теоремы и доказательства теорем 2, 3 и 5. Функция $F: \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$ допускает гармоническую миноранту (соответственно субгармоническую миноранту) на Ω , если найдется функция $h \in \text{Har}(\Omega)$ (соответственно $h \in \text{SH}(\Omega)$, $h \not\equiv -\infty$ на Ω) такая, что $h(z) \leq F(z)$ для всех $z \in \Omega$.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть $M \in \text{SH}(\Omega)$ – вес с мерой Рисса ν_M и подходящим ядром k на $\Omega \subset \mathbb{C}$, $0 \in \Omega$, $Q := Q_k^{\nu_M} \geq 0$ – функция, определенная в (1.9), а $\mathcal{U}_{K_0}(\Omega)$ – регулярная оптимально исчерпывающая система областей в Ω с центром K_0 – связным компактом из свойства (i) определения 4.

Пусть u – субгармоническая функция с мерой Рисса ν_u на Ω , $u(0) \neq -\infty$.

Допустим, выполнено какое-либо из следующих трех условий:

(h1) имеет место неравенство

$$-\infty < \inf_{D \in \mathcal{U}_{K_0}(\Omega)} \left(\int_{\Omega \setminus \{0\}} g_D(\zeta, 0) d\nu_u(\zeta) - \int_{\Omega \setminus \{0\}} g_D(\zeta, 0) d\nu_M(\zeta) \right); \quad (2.11)$$

(h2) выполнено соотношение

$$-\infty < \inf_{D \in \mathcal{U}_{K_0}(\Omega)} \left(\int_{\Omega} u(z) d\omega_D(0, z) - \int_{\Omega} M(z) d\omega_D(0, z) \right); \quad (2.12)$$

(h3) разность $M - u$ допускает⁴ субгармоническую миноранту на Ω .

Тогда при любой функции $\sigma \in C(\Omega)$, удовлетворяющей ограничению (1.5), найдется гармоническая функция h на Ω такая, что

$$u(z) + h(z) \leq M^{(\sigma)}(z) + Q^{(\sigma)}(z) \quad \forall z \in \Omega, \quad (2.13)$$

т.е. для любой функции $\sigma \in C(\Omega)$, удовлетворяющей (1.5), функция

$$M^{(\sigma)} + Q^{(\sigma)} - u \quad (2.14)$$

допускает гармоническую миноранту на Ω .

Для доказательства теорем 2, 3 и 5 потребуется

ЛЕММА 2.1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ – $(n+1)$ -связная область, $n \geq 0$, $h \in \text{Har}(\Omega)$. Тогда при некотором $b < n$ найдется функция $g \in \text{Hol}(\Omega)$ без нулей в Ω такая, что

$$\log |g(z)| \leq h(z) + b^+ \log^+ |z| \quad \forall z \in \Omega. \quad (2.15)$$

При этом если внутренность дополнения $\mathbb{C} \setminus \Omega$ – непустое множество, то в правой части (2.15) можно выбрать $b = 0$.

⁴Если $M(z) = u(z) = -\infty$, то здесь удобно полагать $(M - u)(z) = +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $K_1, \dots, K_n$ – все ограниченные компоненты дополнения $\mathbb{C} \setminus \Omega$, и пусть $a_j \in K_j$ для $j = 1, \dots, n$. Тогда существуют [37; 9.12] функция $f \in \text{Hol}(\Omega)$ и набор чисел $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ такие, что

$$h(z) = \text{Re } f(z) + c_1 \log |z - a_1| + \dots + c_n \log |z - a_n| \quad \forall z \in \Omega. \quad (2.16)$$

Если все числа $c_1, \dots, c_n$ целые или $n = 0$, то

$$h(z) = \log \left| e^{f(z)} \prod_{j=1}^n (z - a_j)^{c_j} \right| =: \log |g(z)| \quad \forall z \in \Omega, \quad (2.17)$$

где голоморфная в Ω функция $g: z \mapsto e^{f(z)} \prod_{j=1}^n (z - a_j)^{c_j}$ не имеет нулей в Ω , поскольку $a_j \notin \Omega$, а неравенство (2.15) очевидно ввиду равенства (2.17).

Допустим теперь, что хотя бы одно число c_j не целое и $n > 0$. Для $s \in \mathbb{R}$ через $[s]$ и $\{s\}$ здесь обозначаем соответственно целую и дробную часть числа s . В этих обозначениях представление (2.16) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} h(z) + \sum_{j=1}^n (1 - \{c_j\}) \log |z - a_j| &= \text{Re } f(z) + \sum_{j=1}^n (1 + [c_j]) \log |z - a_j| \\ &= \log \left| e^{f(z)} \prod_{j=1}^n (z - a_j)^{1+[c_j]} \right| =: \log |g_1(z)| \quad \forall z \in \Omega, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где голоморфная в Ω функция $g_1: z \mapsto e^{f(z)} \prod_{j=1}^n (z - a_j)^{1+[c_j]}$ не имеет нулей в Ω , поскольку $a_j \notin \Omega$. При этом правая часть в (2.18) оценивается так:

$$\log |g_1(z)| \leq h(z) + \left(n - \sum_{j=1}^n \{c_j\} \right) \log(|z| + \max_{1 \leq j \leq n} |a_j|) =: h(z) + b \log(|z| + A) \quad \forall z \in \Omega,$$

где $A := \max_{1 \leq j \leq n} |a_j|$ и $0 < b := n - \sum_{j=1}^n \{c_j\} < n$, поскольку хотя бы одна из дробных частей $\{c_j\}$ больше нуля. Отсюда следует оценка

$$\begin{aligned} \log |g_1(z)| &\leq h(z) + b \log^+ |z| + b(\log(|z| + A) - \log^+ |z|) \\ &\leq h(z) + b^+ \log^+ |z| + C \quad \forall z \in \Omega, \end{aligned}$$

если постоянная $C \in \mathbb{R}$ достаточно велика. Это дает требуемое неравенство (2.15) для функции $g := e^{-C} g_1 \in \text{Hol}(\Omega)$ с $\text{Zero}_g = \emptyset$ на Ω .

Пусть теперь a – точка из непустой внутренности дополнения $\mathbb{C} \setminus \Omega$, которая включается в нее вместе с некоторым кругом $D(a, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Из доказанного неравенства (2.15) получаем

$$\log \left| \frac{g(z)}{(z - a)^{[b]^+ + 1}} \right| \leq h(z) + (b^+ \log^+ |z| - ([b]^+ + 1) \log |z - a|) \leq h(z) + C_\varepsilon \quad \forall z \in \Omega,$$

если постоянная $C_\varepsilon \in \mathbb{R}$ достаточно велика. Это дает заключительное утверждение леммы 2.1, если в роли g рассмотреть функцию $e^{-C_\varepsilon} g(z)/(z - a)^{[b]^+ + 1}$.

В следующих трех доказательствах $\sigma \in C(\Omega)$ – некоторая произвольная функция, удовлетворяющая ограничению (1.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Всюду в доказательстве f_Λ – голоморфная функция с $\text{Zero}_{f_\Lambda} = \Lambda = \{\lambda_k\}$, которая существует по теореме Вейерштрасса.

Функция $u := \log |f_\Lambda|$ субгармоническая с мерой Рисса n_Λ , где n_Λ – считающая мера последовательности Λ , определенная в (1.1) [25; теорема 3.7.8], т.е. $\nu_u = n_\Lambda$. При этом $u(0) \neq -\infty$, поскольку по условию $0 \notin \Lambda$.

Заметим, что при $u = \log |f_\Lambda|$ неравенства (1.15) и (1.14) с неизменной постоянной C – это в точности соотношения (2.11) и (2.12) соответственно, а значит, высказывания (zs1) и (zs2) влекут за собой соответственно условия (h1) и (h2) основной теоремы. Следовательно, существует гармоническая на Ω функция h такая, что выполнено неравенство (2.13), т.е.

$$\log |f_\Lambda(z)| + h(z) \leq M^{(\sigma)}(z) + Q^{(\sigma)}(z) \quad \forall z \in \Omega. \quad (2.19)$$

Отсюда по лемме 2.1 существует функция $g \in \text{Hol}(\Omega)$ с $\text{Zero}_g = \emptyset$ такая, что выполнено неравенство (2.15) с $b < n$ на Ω в общем случае и с $b = 0$ в случае непустой внутренности дополнения $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Таким образом⁵, согласно (2.19)

$$\begin{aligned} \log |f_\Lambda(z)| + \log |g(z)| &\leq u(z) + h(z) + b^+ \log^+ |z| \\ &\stackrel{(2.13)}{\leq} M^{(\sigma)}(z) + Q^{(\sigma)}(z) + b^+ \log^+ |z| \quad \forall z \in \Omega. \end{aligned}$$

Последнее означает, что функция $f := f_\Lambda g \in \text{Hol}(\Omega)$ с последовательностью нулей $\text{Zero}_f = \text{Zero}_{f_\Lambda} \cup \text{Zero}_g = \Lambda \cup \emptyset = \Lambda$ удовлетворяет на Ω неравенству

$$\log |f| \leq M^{(\sigma)} + Q^{(\sigma)} + b^+ \log^+ |\cdot|$$

и при этом $f(0) = f_\Lambda(0)g(0) \neq 0$. Это доказывает, что Λ – последовательность нулей для пространства $\text{Hol}(\Omega; M^{(\sigma)} + Q^{(\sigma)} + b^+ \log^+ |\cdot|)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Если Λ – подпоследовательность нулей для пространства $\text{Hol}(\Omega; M)$, то существует функция $f \not\equiv 0$ на Ω такая, что $f(\Lambda) = 0$ и при этом $f \in \text{Hol}(\Omega; M)$. Очевидно, имеет место представление $f = f_\Lambda q$, где $q \not\equiv 0$ – голоморфная функция на Ω , а $\text{Zero}_{f_\Lambda} = \Lambda$. Из $f \in \text{Hol}(\Omega; M)$ следует, что для некоторой постоянной C выполнены неравенства $\log |f_\Lambda(z)| + \log |q(z)| \leq M(z) + C$ при всех $z \in \Omega$. Последнее можно переписать в виде $\log |q(z)| - C \leq M(z) - \log |f_\Lambda(z)|$ для всех $z \in \Omega$. Это означает, что разность $M - \log |f_\Lambda|$ допускает субгармоническую миноранту $\log |q| - C$ на Ω , т.е. выполнено условие (h3) основной теоремы с $\log |f_\Lambda|$ в роли u . Следовательно, функция $M^{(\sigma)} + Q^{(\sigma)} - \log |f_\Lambda|$ допускает гармоническую миноранту на Ω . Иными словами, существует функция $h \in \text{Har}(\Omega)$, для которой выполнено (2.19). Остается дословно повторить конец доказательства теоремы 2 после формулы (2.19).

⁵Ссылка на номер формулы или утверждения над знаком равенства или неравенства означает, что при переходе к правой части этого выражения применялась эта формула или утверждение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Пусть $f = g/q$ – мероморфная функция на Ω и $g, q \in \text{Hol}(\Omega)$, а $\max\{|g(0)|, |q(0)|\} \neq 0$. Ясно, что существует представление

$$\begin{aligned} f &= \frac{g_1}{q_1} = \frac{g_1 l}{q_1 l}, & g &= g_1 l, & q &= q_1 l, & g_1, q_1, l &\in \text{Hol}(\Omega), \\ \text{Zero}_{g_1} \cap \text{Zero}_{q_1} &= \emptyset, & l(0) &\neq 0, & \max\{|g_1(0)|, |q_1(0)|\} &\neq 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

При выполнении условия (r1) неравенство (1.21) перепишется в виде

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \log \max\{|g_1(z)|, |q_1(z)|\} d\omega_D(0, z) \\ &= \int_{\Omega} \log \max\{|g(z)|, |q(z)|\} d\omega_D(0, z) - \int_{\Omega} \log |l(z)| d\omega_D(0, z) \\ &\leq \int_{\Omega} M(z) d\omega_D(0, z) + C - \int_{\Omega} \log |l(z)| d\omega_D(0, z). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Но по свойствам гармонической меры последний интеграл в (2.21) определяет значение в нуле гармонического продолжения функции $\log |l|_{\partial D}$ внутрь области D . Отсюда для $\log |l| \in \text{SH}(\Omega)$ получаем

$$\int_{\Omega} \log |l(z)| d\omega_D(0, z) \geq \log |l(0)| \neq -\infty.$$

Таким образом, для субгармонической на Ω функции

$$\begin{aligned} u &:= \max\{\log |g_1|, \log |q_1|\} = \log \max\{|g_1|, |q_1|\}, \\ u(0) &= \log \max\{|g_1(0)|, |q_1(0)|\} \neq -\infty, \end{aligned} \quad (2.22)$$

и постоянной $C_1 := C - \log |l(0)| \in \mathbb{R}$, не зависящей от областей D , неравенство (2.21) записывается в виде

$$\int_{\Omega} u(z) d\omega_D(0, z) \leq \int_{\Omega} M(z) d\omega_D(0, z) + C_1 \quad \forall D \in \mathcal{U}_{K_0}(\Omega).$$

Это неравенство совпадает с неравенством (2.12) (с постоянной C_1 в роли C), а значит, утверждение (r1) теоремы 5 влечет за собой выполнение условия (h2) основной теоремы. Следовательно, существует функция $h \in \text{Har}(\Omega)$ такая, что

$$\max\{\log |g_1(z)|, \log |q_1(z)|\} + h(z) \leq M^{(\sigma)}(z) + Q^{(\sigma)}(z) \quad \forall z \in \Omega. \quad (2.23)$$

При выполнении условия (r2) найдется постоянная C такая, что имеет место неравенство $\max\{\log |g|, \log |q|\} \leq M + C$ на Ω , что в обозначениях (2.20) и (2.22) означает выполнение неравенства $u + \log |l| \leq M + C$ на Ω . Другими словами, функция $M - u$ допускает субгармоническую миноранту $\log |l| - C$, т.е. выполнено условие (h3) основной теоремы. Следовательно, функция $M^{(\sigma)} + Q^{(\sigma)} - u$ из (2.14) допускает некоторую гармоническую миноранту h на Ω . В обозначении (2.22) это означает в точности выполнение неравенства (2.23). Таким образом, неравенство (2.23) с некоторой функцией $h \in \text{Har}(\Omega)$ имеет место как при условии (r1), так и при условии (r2). По лемме 2.1 существует функция

$s \in \text{Hol}(\Omega)$ с $\text{Zero}_s = \emptyset$ такая, что выполнено неравенство вида (2.15) с функцией s вместо g для некоторого $b < n$ на Ω в общем случае и для $b = 0$ в случае непустой внутренней дополнения $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Тогда неравенство (2.23) влечет за собой неравенство $\max\{\log |g_1 s|, \log |q_1 s|\} \leq M^{(\sigma)} + Q^{(\sigma)} + b^+ \log^+ |\cdot|$ на Ω .

Отсюда, если положить $g_0 = g_1 s$ и $q_0 = q_1 s$, ввиду (2.20) имеем представление $f = g_1/q_1 = g_0/q_0$, где $g_0, q_0 \in \text{Hol}(\Omega; M^{(\sigma)} + Q^{(\sigma)} + b^+ \log^+ |\cdot|)$ и $\text{Zero}_{g_0} \cap \text{Zero}_{q_0} = \emptyset$, что и требовалось доказать.

§ 3. Выметание как основа общей схемы

3.1. Меры и потенциалы Аренса–Зингера и Йенсена. Пусть меры $\delta, \mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{C})$ имеют компактный носитель в $\mathbb{C}$, а H – некоторый выпуклый конус полунепрерывных сверху функций с единой областью определения, включающей в себя объединение $\text{supp } \delta \cup \text{supp } \mu$. Будем говорить, что мера μ – *выметание меры δ относительно H* (пишем $\delta \prec_H \mu$), если

$$\int h d\delta \leq \int h d\mu \quad \forall h \in H. \quad (3.1)$$

Очевидно, отношение $\prec_H$ – предпорядок, т.е. оно рефлексивно и транзитивно, а если $H = -H$, то неравенство в (3.1) можно заменить на равенство. Так, по определению 5 в силу равенства (1.11) меры Аренса–Зингера $\mu \in \mathcal{AS}_z(\Omega)$ – это не что иное, как выметания относительно $\text{Har}(\Omega)$ меры Дирака δ_z , т.е. такой меры, что $\text{supp } \delta_z = \{z\}$, $\delta_z(\mathbb{C}) = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7 (см. [28], [29], [1], [16], [17], [38]–[40]). Мера $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ с компактным носителем в области Ω называется *мерой Йенсена* для точки $z \in \Omega$ на Ω , если $\delta_z \prec_H \mu$, где $H = \text{SH}(\Omega)$, т.е. выполнены соотношения

$$h(z) \leq \int_{\Omega} h d\mu \quad \forall h \in \text{SH}(\Omega).$$

Через $\mathcal{J}_z(\Omega)$ обозначаем класс всех мер Йенсена для $z \in \Omega$. Если $z = 0 \in \Omega$, то $\mathcal{J}(\Omega) := \mathcal{J}_0(\Omega)$. При этом меру Йенсена для точки $0 \in \Omega$ будем называть просто мерой Йенсена.

Очевидно, $\mathcal{J}_z(\Omega) \subset \mathcal{AS}_z(\Omega)$. Напомним, что для мер Аренса–Зингера

$$\mu(\Omega) = 1 \quad \forall \mu \in \mathcal{AS}_z(\Omega). \quad (3.2)$$

При $D(z, r) \Subset \Omega$ простейшие примеры мер Йенсена для $z \in \Omega$ – это мера Дирака δ_z , мера $m_z^{(r)}$, полученная сдвигом на радиус-вектор точки z [26; гл. IV, § 6] меры $m^{(r)}$ из (1.3), и такой же сдвиг $s_z^{(r)}$ – меры длины дуги $s^{(r)}$ на окружности $\partial D(r)$ с нормировкой $s^{(r)}(\partial D(r)) = 1$.

Подклассами $\mathcal{J}_z(\Omega)$ служат классы $\mathcal{H}_z(\Omega)$ (соответственно $\mathcal{H}_z^{\text{reg}}(\Omega)$) всех гармонических мер $\omega_D(z, \cdot)$ относительно областей $D \Subset \Omega$ (соответственно регулярных областей $D \Subset \Omega$) в точке $z \in D$. Полагаем $\mathcal{H}(\Omega) := \mathcal{H}_0(\Omega)$, $\mathcal{H}^{\text{reg}}(\Omega) := \mathcal{H}_0^{\text{reg}}(\Omega)$.

Потенциал меры $\mu \in \mathcal{AS}(\Omega)$ определяем как функцию

$$\zeta \mapsto V_\mu(\zeta) := \int \log |z - \zeta| d\mu(z) - \log |\zeta| \stackrel{(3.2)}{=} \int \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| d\mu(z), \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (3.3)$$

Для любой функции $u_\nu \in \text{SH}(\Omega)$ с мерой Рисса ν_u при условии $u_\nu(0) \neq -\infty$ (это, в частности, означает, что $\nu_u(\{0\}) = 0$ [41; теорема 2]) имеет место *обобщенная формула Пуассона–Йенсена* [29; предложение 1.2]:

$$u_\nu(0) = \int_\Omega u_\nu d\mu - \int_{\Omega \setminus \{0\}} V_\mu d\nu_u. \quad (3.4)$$

В частности, в случае гармонической меры $\omega_D(0, \cdot) \in \mathcal{H}(\Omega) \subset \mathcal{J}(\Omega)$ в точке $0 \in D$ относительно области $D \Subset \mathbb{C}$ ее потенциал (3.3) – это продолженная функция Грина $g_D(\cdot, 0)$ области D с полюсом в точке 0, а формула (3.4) переходит в обычную формулу Пуассона–Йенсена [24; 5.7.4]

$$u_\nu(0) = \int_\Omega u_\nu(\zeta) d\omega_D(0, \zeta) - \int_{\Omega \setminus \{0\}} g_D(\zeta, 0) d\nu_u(\zeta). \quad (3.5)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть V_μ – потенциал (3.3) меры $\mu \in \mathcal{AS}(\Omega)$, k – субгармоническое ядро на $B \times \Omega$. Тогда V_μ можно представить в виде

$$V_\mu(\zeta) = \int_\Omega k(\zeta, z) d\mu(z) - k(\zeta, 0) = \int_\Omega (k(\zeta, z) - k(\zeta, 0)) d\mu(z) \quad \forall \zeta \in B \setminus \{0\}. \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (1.7) имеем представления

$$k(\zeta, z) = \log |\zeta - z| + h(\zeta, z), \quad k(\zeta, 0) = \log |\zeta| + h(\zeta, 0) \quad \forall \zeta \in B \setminus \{0\}, \quad (3.7)$$

где $h(\zeta, z)$ – гармоническая компонента ядра k , т.е. гармоническая по $z \in \Omega$ функция при фиксированных $\zeta \in B$. Отсюда для $\mu \in \mathcal{AS}(\Omega)$ по определению 5

$$\begin{aligned} \int_\Omega (k(\zeta, z) - k(\zeta, 0)) d\mu(z) &\stackrel{(3.7)}{=} \int_\Omega (\log |\zeta - z| + h(\zeta, z) - \log |\zeta| - h(\zeta, 0)) d\mu(z) \\ &\stackrel{(3.2)}{=} \int (\log |\zeta - z| - \log |\zeta|) d\mu(z) + \int h(\zeta, z) d\mu(z) - h(\zeta, 0) \\ &\stackrel{(3.3), (1.11)}{=} V_\mu(\zeta) + h(\zeta, 0) - h(\zeta, 0) = V_\mu(\zeta) \end{aligned}$$

для каждой точки $\zeta \in B \setminus \{0\}$, что и требовалось доказать.

Напомним, что понятие потенциала Аренса–Зингера было введено в определении 6, а класс всех таких потенциалов обозначался $\mathcal{PS}(\Omega)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8 (см. [1], [16]–[18], [42], [29]). Пусть $0 \in \Omega$. Потенциал Аренса–Зингера $V \in \text{SH}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ называем *потенциалом Йенсена* на Ω (с полюсом в точке 0), если наряду с условиями (1), (2) определения 6 выполнено и условие

(3) $V(\zeta) \geq 0$ для всех $\zeta \in \Omega \setminus \{0\}$ (положительность V).

Класс всех таких потенциалов Йенсена обозначаем через $\mathcal{PJ}(\Omega)$.

Очевидно, $\mathcal{P}_J(\Omega) \subset \mathcal{P}_{\mathcal{AS}}(\Omega)$. Класс $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}(\Omega)$ (соответственно $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}^{\text{reg}}(\Omega)$) всех продолженных функций Грина $g_D(\cdot, 0)$ для областей $D \Subset \Omega$ (соответственно для регулярных областей $D \Subset \Omega$) – подкласс в $\mathcal{P}_J(\Omega)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2 (см. [29; теорема двойственности]). *Отображение*

$$\mathcal{P}: \mu \rightarrow V_\mu$$

– аффинная⁶ биекция $\mathcal{AS}(\Omega)$ на $\mathcal{P}_{\mathcal{AS}}(\Omega)$ и $\mathcal{J}(\Omega)$ на $\mathcal{P}_J(\Omega)$.

Отметим, что согласно предложению 3.2 для $V \in \mathcal{P}_{\mathcal{AS}}(\Omega)$ условие (2) нормировки в нуле эквивалентно условию (см. [25; теорема 3.1.2])

$$(2') \quad V(\zeta) \leq -\log |\zeta| + O(1) \text{ при } \zeta \rightarrow 0.$$

Пусть $B \Subset \Omega$. Обозначим через $\mathcal{AS}^B(\Omega)$ и $\mathcal{J}^B(\Omega)$ класс всех мер соответственно Аренса–Зингера и Йенсена μ на Ω таких, что $B \cap \text{supp } \mu = \emptyset$.

Пусть $\Omega_0 \Subset \Omega$ – область, содержащая нуль. Через $\mathcal{P}_{\mathcal{AS}}^{\Omega_0}(\Omega)$ и $\mathcal{P}_J^{\Omega_0}(\Omega)$ обозначаем множество всех потенциалов соответственно Аренса–Зингера и Йенсена V , гармонических на $\Omega_0 \setminus \{0\}$ и таких (ср. с условием (2')), что

$$V(\zeta) = -\log |\zeta| + O(1), \quad \zeta \rightarrow 0. \quad (3.8)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть $\Omega_0 \Subset \Omega$ – область и $0 \in \Omega_0$. Отображение $\mathcal{P}$ из предложения 3.2 – аффинная биекция $\mathcal{AS}^{\Omega_0}(\Omega)$ на $\mathcal{P}_{\mathcal{AS}}^{\Omega_0}(\Omega)$ и $\mathcal{J}^{\Omega_0}(\Omega)$ на $\mathcal{P}_J^{\Omega_0}(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Инъективность и свойство аффинности сужений отображения $\mathcal{P}$ на $\mathcal{AS}^{\Omega_0}(\Omega)$ и $\mathcal{J}^{\Omega_0}(\Omega)$ следуют из предложения 3.2.

Пусть $\mu \in \mathcal{AS}^{\Omega_0}(\Omega) \supset \mathcal{J}^{\Omega_0}(\Omega)$. Гармоничность потенциала V_μ на $\Omega_0 \setminus \{0\}$ следует из условия $\Omega_0 \cap \text{supp } \mu = \emptyset$ и определения (3.3) потенциала, поскольку логарифмический потенциал $p_\mu(\zeta) := \int \log |z - \zeta| d\mu(z)$ – гармоническая функция вне $\text{supp } \mu$. Для доказательства соотношения (3.8) воспользуемся инверсией $z \mapsto 1/\bar{z} = z^*$ относительно единичной окружности $\partial\mathbb{D}$. Пусть μ^* – образ меры μ при инверсии. Тогда согласно (3.2) μ^* – вероятностная мера; так как $\mu \in \mathcal{AS}^{\Omega_0}(\Omega)$, то μ^* имеет компактный носитель и $\{0\} \cap \text{supp } \mu^* = \emptyset$, а

$$V_\mu(\zeta) = \int \log \left| 1 - \frac{\zeta^*}{z^*} \right| d\mu^*(z^*) = p_{\mu^*}(\zeta^*) - \int \log |z^*| d\mu^*(z^*). \quad (3.9)$$

Для логарифмического потенциала p_{μ^*} имеем [25; теорема 3.1.2]

$$p_{\mu^*}(\zeta^*) = \mu^*(\mathbb{C}) \log |\zeta^*| + O(|\zeta^*|^{-1}), \quad \zeta^* \rightarrow \infty,$$

откуда ввиду (3.9) получаем

$$V_\mu(\zeta) = 1 \cdot \log |\zeta^*| - O(1) + O(|\zeta^*|^{-1}) = -\log |\zeta| + O(1), \quad \zeta \rightarrow 0,$$

что дает (3.8) для $V = V_\mu$. Таким образом, доказано, что $\mathcal{P}$ действует из $\mathcal{AS}^{\Omega_0}(\Omega)$ в $\mathcal{P}_{\mathcal{AS}}^{\Omega_0}(\Omega)$ и с учетом предложения 3.2 из $\mathcal{J}^{\Omega_0}(\Omega)$ в $\mathcal{P}_J^{\Omega_0}(\Omega)$.

⁶Это значит, что $\mathcal{P}(\alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2) = \alpha\mathcal{P}(\mu_1) + (1-\alpha)\mathcal{P}(\mu_2)$ для $0 \leq \alpha \leq 1$.

Осталось доказать сюръективность отображений $\mathcal{P}: \mathcal{AS}^{\Omega_0}(\Omega) \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{AS}}^{\Omega_0}(\Omega)$ и $\mathcal{P}: \mathcal{J}^{\Omega_0}(\Omega) \rightarrow \mathcal{P}_J^{\Omega_0}(\Omega)$. Обратное отображение $\mathcal{P}^{-1}$ действует на потенциалы Аренса–Зингера и Йенсена V по правилу [29; предложение 1.4, (4)]

$$\mathcal{P}^{-1}(V) = \frac{1}{2\pi} \Delta V|_{\mathbb{C} \setminus \{0\}} + \left(1 - \limsup_{\zeta \rightarrow 0} \frac{V(\zeta)}{-\log |\zeta|}\right) \delta_0.$$

При условии (3.8) второе слагаемое справа можно убрать, а из гармоничности $V \in \mathcal{AS}^{\Omega_0}(\Omega)$ и $V \in \mathcal{J}^{\Omega_0}(\Omega)$ на $\Omega \setminus \{0\}$ следует, что с учетом предложения 3.2 $\mathcal{P}^{-1}$ действует соответственно из $\mathcal{P}_{\mathcal{AS}}^{\Omega_0}(\Omega)$ в $\mathcal{AS}^{\Omega_0}(\Omega)$ и из $\mathcal{J}^{\Omega_0}(\Omega)$ в $\mathcal{P}_J^{\Omega_0}(\Omega)$.

Напомним некоторые понятия и факты, связанные с классическим выметанием [43]. Для ограниченной регулярной области $\Omega_1 \Subset \Omega$ и меры $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ классическое выметание меры μ относительно Ω_1 – это мера $\mu^{\Omega_1} \in \mathcal{M}^+(\Omega)$, определенная на борелевских подмножествах $E \subset \Omega$ по правилу

$$\mu^{\Omega_1}(E) := \mu(E \setminus \Omega_1) + \int_{\Omega_1} \omega_{\Omega_1}(z, E) d\mu(z). \quad (3.10)$$

В частности, $\Omega_1 \cap \text{supp } \mu^{\Omega_1} = \emptyset$ и $\mu \prec_{\text{SH}(\Omega)} \mu^{\Omega_1}$ [44; лемма 6.4]. Отсюда для регулярных подобластей $\Omega_0 \Subset \Omega$, содержащих 0, имеем

$$\mathcal{AS}^{\Omega_0}(\Omega) = \{\mu^{\Omega_0} : \mu \in \mathcal{AS}(\Omega)\}, \quad \mathcal{J}^{\Omega_0}(\Omega) = \{\mu^{\Omega_0} : \mu \in \mathcal{J}(\Omega)\}. \quad (3.11)$$

Кроме того, если $\text{Har}(\overline{\Omega}_1)$ – пространство непрерывных на $\overline{\Omega}_1$ и одновременно гармонических в Ω_1 функций, то при условии $\text{supp } \mu \subset \Omega_1$ выполнены соотношения $\mu \prec_{\text{Har}(\overline{\Omega}_1)} \mu^{\Omega_1}$ и $\text{supp } \mu^{\Omega_1} \subset \partial\Omega_1$.

Пусть $D \Subset \mathbb{C}$ – регулярная область и $0 \in D$. Для краткости ω_D – гармоническая мера относительно D в нуле. Как и выше, δ_0 – мера Дирака в нуле.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Пусть $D, \Omega', D \cup \Omega' \Subset \Omega$, – регулярные области, содержащие нуль. Тогда во введенных обозначениях справедливы равенства

$$\delta_0^{D \cup \Omega'} = \omega_{D \cup \Omega'} = (\omega_D)^{D \cup \Omega'} = \omega_D - (\omega_D|_{\Omega'}) + (\omega_D|_{\Omega'})^{D \cup \Omega'}. \quad (3.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое равенство из (3.12) см., например, в [43; гл. IV, § 1, п. 6, замечание]. Из цепочки соотношений

$$\delta_0 \prec_{\text{Har}(\overline{D})} \delta_0^D = \omega_D \prec_{\text{Har}(\overline{D \cup \Omega'})} (\omega_D)^{D \cup \Omega'}$$

следует, что

$$\delta_0 \prec_{\text{Har}(\overline{D \cup \Omega'})} (\omega_D)^{D \cup \Omega'}$$

и в то же время

$$\delta_0 \prec_{\text{Har}(\overline{D \cup \Omega'})} \delta_0^{D \cup \Omega'} = \omega_{D \cup \Omega'}.$$

Но выметание относительно конуса $\text{Har}(\overline{D \cup \Omega'})$ меры δ_0 , т.е. выметание на компакт $\partial(D \cup \Omega')$, единственно [43; гл. IV, § 4, п. 14], что дает второе равенство в (3.12). По тем же причинам из цепочки соотношений

$$\delta_0 \prec_{\text{Har}(\overline{D})} \omega_D = \omega_D - (\omega_D|_{\Omega'}) + (\omega_D|_{\Omega'}) \prec_{\text{Har}(\overline{D \cup \Omega'})} \omega_D - (\omega_D|_{\Omega'}) + (\omega_D|_{\Omega'})^{D \cup \Omega'}$$

следует заключительное равенство в (3.12), поскольку носитель меры в правой части последнего отношения выметания – это $\partial(D \cup \Omega')$, т.е. справа вновь выметание на компакт $\partial(D \cup \Omega')$.

3.2. О существовании (суб)гармонических минорант.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5 (ср. с [18; предложение 7.1]). Пусть $F: \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$ – борелевская функция. Если F допускает гармоническую миноранту, то

$$-\infty < \inf \left\{ \int_{\Omega} F d\mu : \mu \in \mathcal{AS}(\Omega) \right\}. \quad (3.13)$$

Если F допускает субгармоническую миноранту и ограничена снизу в некоторой окрестности нуля, то

$$-\infty < \inf \left\{ \int_{\Omega} F d\mu : \mu \in \mathcal{J}(\Omega) \right\}. \quad (3.14)$$

Очевидно, $\mathcal{AS}(\Omega)$ в (3.13) можно заменить на $\mathcal{J}(\Omega)$, $\mathcal{H}(\Omega)$ или $\mathcal{H}^{\text{reg}}(\Omega)$ и подставить $\mathcal{H}(\Omega)$ или $\mathcal{H}^{\text{reg}}(\Omega)$ вместо $\mathcal{J}(\Omega)$ в (3.14).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть h – борелевская функция на Ω и $F \geq h$ на Ω . Тогда

$$\int F d\mu \geq \int h d\mu$$

для каждой меры $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$.

Если миноранта h гармоническая на Ω , то согласно (1.11) получаем

$$\int h d\mu = h(0)$$

для всех $\mu \in \mathcal{AS}(\Omega)$, что доказывает (3.13).

Допустим теперь, что функция F ограничена снизу в некотором круге $D(2\varepsilon) \Subset \Omega$, а миноранта h субгармоническая на Ω . Можно построить функцию $h_\varepsilon \in \text{SH}(\Omega)$, которая совпадает с h на $\Omega \setminus D(\varepsilon)$ и гармоническая на $D(\varepsilon)$ [24; теорема 2.18]. Отсюда вытекает, что разность $h_\varepsilon - C$ – субгармоническая миноранта для F , если постоянная C достаточно велика, и

$$\int F d\mu \geq \int (h_\varepsilon - C) d\mu \geq h_\varepsilon(0) - C$$

для всех $\mu \in \mathcal{J}(\Omega)$ по определению 7, что доказывает (3.14).

Дадим также другую трактовку предложения 3.5 для случая специальной функции F , представленной в виде разности

$$F = M - u, \quad M: \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty], \quad u \in \text{SH}(\Omega), \quad u(0) \neq -\infty. \quad (3.15)$$

Здесь функции M и u могут принимать значение $-\infty$ в некоторых точках $z \in \Omega$ одновременно. В таком случае удобно полагать $F(z) = +\infty$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. Пусть $M: \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$ – борелевская функция, а u – функция из (3.15) с мерой Рисса ν_u . Если функция F из (3.15) допускает гармоническую миноранту на Ω , то найдется постоянная C такая, что

$$\int_{\Omega} u d\mu \leq \int_{\Omega} M d\mu + C \quad \text{и} \quad \int_{\Omega \setminus \{0\}} V_{\mu} d\nu_u \leq \int_{\Omega} M d\mu + C \quad (3.16)$$

для всех $\mu \in \mathcal{AS}(\Omega)$, где V_μ – потенциал (3.3). Кроме того, если $M \in \text{SH}(\Omega)$ с мерой Рисса ν_M и $M(0) \neq -\infty$, то существует постоянная C такая, что

$$\int_{\Omega \setminus \{0\}} V d\nu_u \leq \int_{\Omega \setminus \{0\}} V d\nu_M + C \quad (3.17)$$

для всех потенциалов Аренса–Зингера V на Ω .

Если $F = M - u$ из (3.15) допускает субгармоническую миноранту и M ограничена снизу в некоторой окрестности нуля, то существует постоянная C такая, что (3.16) выполнено для всех $\mu \in \mathcal{J}(\Omega)$. При этом если $M \in \text{SH}(\Omega)$, то найдется постоянная C такая, что (3.17) выполнено для всех $V \in \mathcal{P}_J(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В связи с тем, что полярное множество точек, где u принимает значение $-\infty$, является множеством типа G_δ , функция F из (3.15) борелевская при борелевской функции M и соглашении, следующим за (3.15).

Первое неравенство в (3.16) (для всех $\mu \in \mathcal{AS}(\Omega)$) – это переписанное в иной форме (3.13) из предложения 3.5. Из него по обобщенной формуле Пуассона–Йенсена (3.4), примененной к u , $u(0) \neq -\infty$, следует второе неравенство в (3.16) с постоянной $C - u(0)$ в роли C . Далее, по той же формуле для $M \in \text{SH}(\Omega)$ и по предложению 3.2 получаем (3.17) с постоянной $C + M(0)$ в роли C . Аналогично из (3.14) выводится часть, касающаяся субгармонической миноранты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Если Λ – последовательность нулей для $\text{Hol}(\Omega; M)$, то для некоторой функции f с $\text{Zero}_f = \Lambda$ справедливо неравенство $\log |f| \leq M + c$ на Ω с некоторой постоянной c . Пусть $f_\Lambda \in \text{Hol}(\Omega)$ и $\text{Zero}_{f_\Lambda} = \Lambda$. Тогда $f_\Lambda = fg$, где $g \in \text{Hol}(\Omega)$ не имеет нулей в Ω , и $-\log |g| - c \leq M - \log |f_\Lambda|$ на Ω . Это означает, что функция $F = M - \log |f_\Lambda|$ допускает гармоническую миноранту $-\log |g| - c$ на Ω . По предложению 3.6 выполнены соотношения (3.16) для $u := \log |f_\Lambda|$ или (3.17) при $M \in \text{SH}(\Omega)$. Для такой функции u первое соотношение из (3.16) совпадает с (1.12), а (3.17) – с (1.13), что и требовалось доказать.

Пусть $\{u_n\}$ – последовательность субгармонических на Ω функций, локально ограниченная сверху в Ω . Через $\limsup^* u_n$ обозначаем полунепрерывную сверху регуляризацию поточечного верхнего предела последовательности $\{u_n\}$, которая также является субгармонической функцией на Ω .

Утверждением, почти обратным к предложению 3.5, является

ТЕОРЕМА В (см. [18; теорема 7.1]). Пусть $H \subset \text{SH}(\Omega)$ – выпуклый конус, содержащий отрицательную (≤ 0) на Ω функцию, и $F: \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$ из $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Допустим, что для любого $K \Subset \Omega$ и любого $C \in \mathbb{R}$ существует функция $v \in H$ такая, что $v \leq C$ на K , и выполнено одно из следующих двух условий:

(I*) $\limsup^* v_n \in H$ для любой локально ограниченной сверху последовательности функций $\{v_n\} \subset H$;

(CL) конус H секвенциально замкнут в $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Если при этом

$$-\infty < \inf \left\{ \int_{\Omega} F d\mu : \delta_0 \prec_H \mu, \mu \in \mathcal{M}_{\text{ac}}^+(\Omega) \right\}, \quad (3.18)$$

где δ_0 – мера Дирака в нуле, то для любой функции $\sigma \in C(\Omega)$, удовлетворяющей условию (1.5), найдется функция $h \in H$ такая, что⁷ $h \not\equiv -\infty$ на Ω и

$$h(z) \leq F^{(\sigma)}(z) \stackrel{(1.6)}{:=} \int_{D(\sigma(z))} F(z+w) dm^{(\sigma(z))}(w) \quad \forall z \in \Omega. \quad (3.19)$$

Пространство $H = \text{Har}(\Omega)$ и конус $H = \text{SH}(\Omega)$ удовлетворяют условиям теоремы В (см., например, [17], [18]). Результаты, более общие, чем теорема В, были установлены для абстрактных конусов H в проективных пределах векторных решеток [17; теоремы 5.1, 6.1] и для $H = \text{SH}(\Omega)$ в [45; следствие 1.7] (см. также библиографию в этих статьях). Здесь они не используются.

Далее потребуются трактовки теоремы В для случаев $H = \text{Har}(\Omega)$ или $H = \text{SH}(\Omega)$ и для функции F вида (3.15), где $M \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ или $M \in \text{SH}(\Omega)$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $u \not\equiv -\infty$ – субгармоническая функция с мерой Рисса ν_u и $u(0) \neq -\infty$, а функция $M \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ ограничена в открытой окрестности замыкания $\bar{\Omega}_0$ некоторой подобласти $\Omega_0 \Subset \Omega$, содержащей нуль.

Если существует постоянная C такая, что выполняется неравенство

$$\int_{\Omega} u d\mu \leq \int_{\Omega} M d\mu + C \quad \text{или} \quad \int_{\Omega \setminus \{0\}} V_{\mu} d\nu_u \leq \int_{\Omega} M d\mu + C \quad (3.20)$$

для любой меры $\mu \in \mathcal{AS}^{\Omega_0}(\Omega) \cap \mathcal{M}_{\text{ac}}(\Omega)$ (соответственно $\mu \in \mathcal{J}^{\Omega_0}(\Omega) \cap \mathcal{M}_{\text{ac}}(\Omega)$), где V_{μ} – потенциал (3.3), то для каждой функции $\sigma \in C(\Omega)$, удовлетворяющей условию (1.5), найдется гармоническая функция h (соответственно субгармоническая функция $h \not\equiv -\infty$) на Ω такая, что выполнено неравенство

$$u(z) + h(z) \stackrel{(1.6)}{\leq} M^{(\sigma)}(z) \quad \forall z \in \Omega. \quad (3.21)$$

Если, кроме того, $M \in \text{SH}(\Omega)$, то неравенства (3.20) можно заменить на

$$\int_{\Omega \setminus \{0\}} V d\nu_u \leq \int_{\Omega \setminus \{0\}} V d\nu_M + C \quad (3.22)$$

для каждой функции $V \in \mathcal{P}_{\mathcal{AS}}^{\Omega_0}(\Omega) \cap C(\Omega)$ (соответственно функции $V \in \mathcal{P}_J^{\Omega_0}(\Omega) \cap C(\Omega)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Всегда можно построить область Ω_1 такую, что она уже регулярна, $\Omega_0 \Subset \Omega_1 \Subset \Omega$, а функция M по-прежнему ограничена в открытой

⁷В [17] по определению $\text{SH}(\Omega)$ не содержит функцию, тождественно равную $-\infty$.

окрестности замыкания $\overline{\Omega}_1$. Затем можно выбрать достаточно малое число $\varepsilon > 0$ и постоянную $c \geq 0$ так, что

$$|M(z+w)| \leq c \quad \forall z \in \Omega_1, \quad \forall w \in D(\varepsilon), \quad (3.23M)$$

$$\bigcup_{z \in \Omega_1} D(z, \varepsilon) \Subset \Omega, \quad \Omega_0 \cap \left(\bigcup_{z \in \partial\Omega_1} D(z, \varepsilon) \right) = \emptyset. \quad (3.23\Omega)$$

Положим $F = M - u$, а $H = \text{SH}(\Omega)$ или $H = \text{Har}(\Omega)$. По обобщенной формуле Пуассона–Йенсена (3.4) и предложению 3.3 из (3.20) следует, что неравенство

$$\int F d\mu > -C \quad (3.24)$$

выполнено для каждой меры $\mu \in \mathcal{M}_{\text{ac}}(\Omega)$ такой, что $\delta_0 \prec_H \mu$ и $\Omega_0 \cap \text{supp } \mu = \emptyset$.

Пусть μ – произвольная мера из $\mathcal{M}_{\text{ac}}^+(\Omega)$ и $\delta_0 \prec_H \mu$. Обозначим через μ_1 сужение μ на Ω_1 . Имеет место представление

$$\mu = \mu_1 + \mu_\infty, \quad \mu_1, \mu_\infty \in \mathcal{M}_{\text{ac}}^+(\Omega). \quad (3.25)$$

Мера $\mu' := \mu_1^{\Omega_1} * m^{(\varepsilon)} \in \mathcal{M}_{\text{ac}}^+(\Omega)$ – выметание μ_1 относительно $\text{SH}(\Omega)$ (см. (3.11) и [18; лемма 7.1]). Отсюда $\delta_0 \prec_H (\mu' + \mu_\infty) \in \mathcal{M}_{\text{ac}}^+(\Omega)$,

$$\int u d\mu_1 \leq \int u d\mu', \quad (3.26)$$

а по построению (3.10) и (3.23 Ω) имеем $\Omega_0 \cap \text{supp}(\mu' + \mu_\infty) = \emptyset$. Неравенство (3.24) выполнено для всех таких мер. Таким образом,

$$\int F d(\mu' + \mu_\infty) \geq -C. \quad (3.27)$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \int F d\mu &\stackrel{(3.25)}{=} \int F d(\mu' + \mu_\infty) + \int F d\mu_1 - \int (M - u) d\mu' \\ &\stackrel{(3.27)}{\geq} -C - \left(\int u d\mu_1 - \int u d\mu' \right) + \int_{\overline{\Omega}_1} M d\mu_1 - \int_{\overline{\Omega}_1} M d\mu' \\ &\stackrel{(3.26)}{\geq} -C - \int_{\overline{\Omega}_1} |M| d(\mu_1 + \mu') \stackrel{(3.23M), (3.2)}{\geq} -C - 2c. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует условие (3.18) теоремы В. Отсюда найдется функция $h \in H$, для которой выполнено (3.19). В обозначении (3.15) это дает $u^{(\sigma)} + h \leq M^{(\sigma)}$. В силу субгармоничности u имеем $u \leq u^{(\sigma)}$ и приходим к (3.21).

Для случая (3.22) по предложению 3.3 видим, что отображение $\mathcal{P}$ действует из $\mathcal{A}\mathcal{S}^{\Omega_0}(\Omega) \cap \mathcal{M}_{\text{ac}}(\Omega)$ в $\mathcal{P}_{\mathcal{A}\mathcal{S}}^{\Omega_0}(\Omega) \cap C(\Omega)$ и из $\mathcal{A}\mathcal{S}^{\Omega_0}(\Omega) \cap \mathcal{M}_{\text{ac}}(\Omega)$ в $\mathcal{P}_{\mathcal{A}\mathcal{S}}^{\Omega_0}(\Omega) \cap C(\Omega)$, а (3.20) следует из (3.22) по обобщенной формуле Пуассона–Йенсена (3.4).

ЗАМЕЧАНИЕ. В теореме 6 можем считать, что (3.20) выполнено лишь для всех $\mu \in \mathcal{A}\mathcal{S}^{\overline{\Omega}_0}(\Omega) \cap \mathcal{M}_{\text{ac}}(\Omega)$ (соответственно $\mu \in \mathcal{S}^{\overline{\Omega}_0}(\Omega) \cap \mathcal{M}_{\text{ac}}(\Omega)$), поскольку всегда можно несколько увеличить область Ω_0 с сохранением всех условий этой теоремы.

§ 4. От функций Грина и гармонических мер к мерам Йенсена

Цель этого параграфа – показать, что каждое из трех условий (h1), (h2) и (h3) основной теоремы приводят к одному и тому же условию

- (J) существуют постоянная C и область $\Omega' \Subset \Omega$, содержащая центр K_0 системы $\mathcal{U}_{K_0}(\Omega)$ – связный компакт из условия (i) определения 4, при которых для всех мер Йенсена $\mu \in \mathcal{J}^{\Omega'}(\Omega)$ выполнено неравенство

$$\int_{\Omega \setminus \{0\}} V_\mu d\nu_u \leq \int_{\Omega} M d\mu + C, \quad (4.1)$$

а функция M ограничена в открытой окрестности замыкания $\overline{\Omega'}$.

Для (h3) это теперь совсем просто. Если функция $M-u$ в условиях основной теоремы допускает субгармоническую миноранту, то по предложению 3.6 (см. второе неравенство в (3.16)) сразу получаем условие (J).

В пп. 4.1, 4.2 то же самое устанавливается при каждом из условий (h1) и (h2).

4.1. Аппроксимация мер Йенсена гармоническими мерами. Сначала напомним важный результат Б. Коула и Т. Рансфорда [44], некоторая техническая вариация которого будет представлена в теореме 7.

Пусть S – открытое или компактное подмножество области $\Omega \subset \mathbb{C}$, а $C(S)$ пространство Фреше, снабженное топологией равномерной сходимости на компактах из S . Топологически сопряженное пространство $C(S)^*$ можно отождествить с пространством вещественных борелевских мер с компактным носителем на Ω . Далее используется только *-слабая топология в $C(S)^*$. Через $\text{conv } A$ и $\overline{\text{conv } A}$ обозначаем выпуклую оболочку множества $A \subset C(S)^*$ и ее замыкание.

ТЕОРЕМА С (Коула–Рансфорда [44; теорема 6.6]). $\mathcal{J}(\Omega) = \overline{\text{conv } \mathcal{H}(\Omega)}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1 (см. [44; предложение 2.1], [29; предложение 1.1]). Пусть Ω_1 – подобласть области $\Omega \subset \mathbb{C}$ и $0 \in \Omega_1$. Тогда $\mathcal{J}(\Omega_1) \subset \mathcal{J}(\Omega)$.

Обратно, если $\mu \in \mathcal{J}(\Omega)$, $\text{supp } \mu \subset \Omega_1$ и каждая ограниченная компонента связности дополнения $\mathbb{C} \setminus \Omega_1$ пересекается с дополнением $\mathbb{C} \setminus \Omega$, то $\mu \in \mathcal{J}(\Omega_1)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть D – подобласть в Ω и $0 \in D \Subset \Omega$, а возрастающая относительно включения последовательность областей $D_n \ni 0$, $n \in \mathbb{N}$, при объединении дает область D , т.е. $\{D_n\}$ – исчерпание области D . Тогда последовательность гармонических мер $\omega_{D_n}(0, \cdot)$ сходится к $\omega_D(0, \cdot)$ в $C(\Omega)^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно почти дословно повторить доказательство теоремы 5.14 [43] с использованием теоремы 4.15 [43].

Всюду в этом пункте K' – некоторый связный компакт в области Ω , содержащий 0, а $\mathcal{U} := \mathcal{U}_{K'}(\Omega)$ – фиксированная регулярная оптимально исчерпывающая система в Ω с центром K' (см. определение 1). При этом для произвольных областей $\Omega_1 \Subset \Omega_2 \subset \Omega$ используем обозначения

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\Omega_2; \Omega_1) &:= \{D \in \mathcal{U} : \Omega_1 \subset D \Subset \Omega_2\}, & \mathcal{U}(\Omega_2) &:= \mathcal{U}(\Omega_2; \emptyset), \\ \mathcal{H}^{\mathcal{U}}(\Omega_2; \Omega_1) &:= \{\omega_D(0, \cdot) : D \in \mathcal{U}(\Omega_2; \Omega_1)\}, & \mathcal{H}^{\mathcal{U}}(\Omega_2) &:= \mathcal{H}(\Omega_2; \emptyset), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где в последней строке предполагается, что $0 \in \Omega_1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Для любой области $\Omega_+ \subset \Omega$, содержащей 0, справедливо равенство $\overline{\text{con}} \mathcal{H}(\Omega_+) = \overline{\text{con}} \mathcal{H}^{\mathcal{U}}(\Omega_+)$, где замыкания – в топологии $C(\Omega_+)^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $D \Subset \Omega_+$ – область, $0 \in D$. Из части условия 1) определения 1 для регулярной оптимально исчерпывающей системы $\mathcal{U}$ в Ω сразу следует существование возрастающей относительно включения последовательности областей $D_n \in \mathcal{U}(D)$, $n \in \mathbb{N}$, такой, что $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Отсюда по предложению 4.2 имеем $\mathcal{H}(\Omega_+) = \overline{\mathcal{H}^{\mathcal{U}}(\Omega_+)}$ в силу произвола в выборе $D \Subset \Omega_+$. Это дает равенство $\overline{\text{con}} \mathcal{H}(\Omega_+) = \overline{\text{con}} \mathcal{H}^{\mathcal{U}}(\Omega_+)$. Последнее влечет за собой требуемое равенство, поскольку в топологическом векторном пространстве замкнутая выпуклая оболочка замыкания множества совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой этого множества [46; гл. II, § 1, п. 6].

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\mu \in \mathcal{J}(\Omega)$, $K := \text{supp } \mu$ и $K \cap K' = \emptyset$. Тогда найдутся области $\Omega_0, \Omega_1 \in \mathcal{U}$ такие, что $K' \subset \Omega_0 \Subset \Omega_1 \Subset \Omega$, $K \subset \Omega_1 \setminus \overline{\Omega}_0$ и одновременно $\mu \in \overline{\text{con}} \mathcal{H}^{\mathcal{U}}(\Omega_1; \Omega_0)$, где замыкание выпуклой оболочки – в топологии $C(\Omega_1)^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Ω' – какая-либо предкомпактная подобласть в Ω , включающая в себя компакт K . По условию 1) определения 1 найдется область $\Omega_1 \in \mathcal{U}$ такая, что $\Omega' \Subset \Omega_1 \Subset \Omega$ и каждая непустая ограниченная компонента связности множества $\mathbb{C} \setminus \Omega_1$ пересекает $\mathbb{C} \setminus \Omega$ (здесь пока в роли Ω_1 , D и Ω_2 условия 1) определения 1 выступают соответственно Ω' , Ω_1 и Ω). Тогда по второй части предложения 4.1 имеем $\mu \in \mathcal{J}(\Omega_1)$. Аналогично, применяя условие 1) определения 1, но уже к паре областей Ω' и Ω_1 , вновь можем подобрать вспомогательную область $\Omega_+ \in \mathcal{U}$ так, что $\Omega' \Subset \Omega_+ \Subset \Omega_1$ и каждая непустая ограниченная компонента связности множества $\mathbb{C} \setminus \Omega_+$ пересекает $\mathbb{C} \setminus \Omega_1$. Тогда по второй части предложения 4.1 имеем уже $\mu \in \mathcal{J}(\Omega_+)$, а по теореме С Коула–Рансфорда получаем $\mu \in \overline{\text{con}} \mathcal{H}(\Omega_+)$. Отсюда по предложению 4.3 и построению областей $\Omega_+, \Omega_1 \in \mathcal{U}$ следует

$$\mu \in \overline{\text{con}} \mathcal{H}^{\mathcal{U}}(\Omega_+) \quad \text{в } C(\Omega_+)^*, \quad \text{где } K \subset \Omega' \Subset \Omega_+ \Subset \Omega_1 \Subset \Omega. \quad (4.3)$$

Это означает, что существует сеть (или, в иной терминологии, обобщенная последовательность) $\{\sigma_n\} \subset \text{con} \mathcal{H}^{\mathcal{U}}(\Omega_+)$, где индексы n пробегают направленность (направленное множество) $\mathcal{N}$, сходящаяся к μ в $C(\Omega_+)^*$ по направленности $\mathcal{N}$. Конкретнее, каждому индексу n соответствует конечный по индексам $k \in \mathbb{N}$ набор чисел $c_{kn} > 0$ и регулярных областей $D_{kn} \in \mathcal{U}(\Omega_+)$ таких, что

$$\sigma_n = \sum_k c_{kn} \omega_{D_{kn}}, \quad \omega_{D_{kn}} := \omega_{D_{kn}}(0, \cdot), \quad \sum_k c_{kn} = 1. \quad (4.4)$$

Ввиду условия $K \cap K' = \emptyset$ и по условию 1) определения 1 можно ввести в рассмотрение область $\Omega_0 \in \mathcal{U}$, а затем еще две вспомогательные области Ω'_0 и Ω_- , для которых имеют место соотношения

$$K' \subset \Omega_0 \Subset \Omega'_0 \Subset \Omega_- \Subset \Omega', \quad K \cap \overline{\Omega}_- = \emptyset. \quad (4.5)$$

Каждой области D_{kn} по условию 2) определения 1, учитывая (4.5), можно сопоставить область $\Omega_{kn} \in \mathcal{U}$ такую, что $\Omega_0 \Subset \Omega_{kn} \Subset \Omega'_0$ и одновременно

$$D'_{kn} := \Omega_{kn} \cup D_{kn} \in \mathcal{U}, \quad \Omega_0 \Subset D'_{kn}, \quad D_{kn}, D'_{kn} \Subset \Omega_+. \quad (4.6)$$

Для лучшего ориентирования в большом количестве возникших областей выпишем отдельно всю цепочку их включений из (4.3), (4.5) и (4.6):

$$0 \in K' \subset \Omega_0 \in \Omega_{kn} \in \Omega'_0 \in \Omega_- \in \Omega' \in \Omega_+ \in \Omega_1 \in \Omega, \quad K \subset \Omega' \setminus \bar{\Omega}_-. \quad (4.7)$$

Из этих включений по теореме Титца–Урысона о продолжении непрерывных функций стандартно выводится, что сеть из сужений выпуклых комбинаций мер из (4.4) на $\Omega'_0 \in \Omega_-$ сходится к нулевой мере в $C(\bar{\Omega}_+)^*$ по направленности $\mathcal{N}$, поскольку носитель $\text{supp } \mu = K$ лежит вне Ω_- . Тем более этим свойством обладает сеть из соответствующих выпуклых комбинаций

$$\sigma_n^\circ := \sum_k c_{kn} \omega_{D_{kn}}^\circ, \quad \omega_{D_{kn}}^\circ := \omega_{D_{kn}}|_{\Omega_{kn}}, \quad (4.8)$$

так как $\Omega_{kn} \in \Omega'_0$ по (4.7). Теперь наша задача – преобразовать сеть $\{\sigma_n\}$ из (4.4), не меняя ее предела μ в $C(\Omega_+)^*$, так, чтобы определяющие ее слагаемые $\omega_{D_{kn}}$ в (4.4) по-прежнему оставались гармоническими мерами, но уже относительно областей из $\mathcal{U}$, включающих в себя область Ω_0 .

Для мер $\omega_{D_{kn}}^\circ$ из (4.8) и гармонических мер $\omega_{D_{kn}}$ из (4.4) рассмотрим их классические выметания соответственно $(\omega_{D_{kn}}^\circ)^{D'_{kn}}$ и $(\omega_{D_{kn}})^{D'_{kn}}$ относительно D'_{kn} из (4.6). По предложению 3.4 (в роли D , Ω' и $D \cup \Omega'$ в данном случае выступают соответственно D_{kn} , Ω_{kn} и D'_{kn} из (4.6)) каждая мера $(\omega_{D_{kn}})^{D'_{kn}}$ – это гармоническая мера $\omega_{D'_{kn}}(0, \cdot) =: \omega_{D'_{kn}}$ (см. второе равенство в (3.12)), после чего последнее равенство из (3.12) в обозначениях (4.8) записывается в виде

$$\omega_{D'_{kn}} = \omega_{D_{kn}} - \omega_{D_{kn}}^\circ + (\omega_{D_{kn}}^\circ)^{D'_{kn}}.$$

Суммируя последнее равенство по k с коэффициентами c_{nk} из (4.4), при каждом $n \in \mathcal{N}$ с учетом (4.8) получаем

$$\sigma'_n := \sum_k c_{kn} \omega_{D'_{kn}} = \sigma_n - \sigma_n^\circ + \sum_k c_{kn} (\omega_{D_{kn}}^\circ)^{D'_{kn}}. \quad (4.9)$$

Как уже отмечалось перед (4.8), сеть σ_n° сходится к нулевой мере в $C(\bar{\Omega}_+)^*$ по направленности $\mathcal{N}$. В частности, числовая сеть из полных мер $\sigma_n^\circ(\bar{\Omega}_+)$ сходится к нулю по $\mathcal{N}$. Но при классическом выметании каждой положительной меры $\omega_{D_{kn}}^\circ$ ее полная мера равна полной мере выметания $(\omega_{D_{kn}}^\circ)^{D'_{kn}}$. Следовательно, сеть из полных мер последних выпуклых комбинаций в (4.9), состоящих из выметаний, также сходится к нулю по направленности $\mathcal{N}$, причем все носители этих выпуклых комбинаций ввиду (4.6) содержатся в Ω_+ . Отсюда сеть из этих выпуклых комбинаций также сходится к нулевой мере в $C(\bar{\Omega}_+)^*$ по направленности $\mathcal{N}$. Таким образом, сети σ'_n и σ_n сходятся к одной и той же мере μ в $C(\bar{\Omega}_+)^*$ и, тем более, в $C(\Omega_1)^*$ ввиду (4.7). Остается отметить, что по построению согласно (4.6) и (4.7) каждая мера σ'_n принадлежит $\text{conv } \mathcal{H}^{\mathcal{U}}(\Omega_1; \Omega_0)$. Теорема 7 доказана.

4.2. Свойство (J) в условиях (h1) или (h2) основной теоремы. Напомним, что по условию основной теоремы K_0 – связный компакт в области Ω , содержащий 0, а $\mathcal{U}_{K_0}(\Omega)$ – регулярная оптимально исчерпывающая система в Ω с центром K_0 . Будем также придерживаться обозначений (4.2).

По условию (i) определения 4 на функцию M можно подобрать область Ω' так, что $K_0 \subset \Omega'$ и функция M ограничена в открытой окрестности связного компакта $K' := \overline{\Omega'}$. При этом $\mathcal{U} := \mathcal{U}_{K'}(\Omega) := \{D \in \mathcal{U}_{K_0}(\Omega) : K' \subset D\}$ – регулярная оптимально исчерпывающая система областей в Ω с центром K' , включенная в $\mathcal{U}_{K_0}(\Omega)$.

Из условия (h1), т.е. соотношения (2.11), следует неравенство

$$\int_{\Omega \setminus \{0\}} g_D(\zeta, 0) d\nu_u(\zeta) \leq \int_{\Omega \setminus \{0\}} g_D(\zeta, 0) d\nu_M(\zeta) + C$$

с некоторой единой постоянной C для всех областей $D \in \mathcal{U}_{K_0}(\Omega)$. Отсюда в силу условия $u(0) \neq -\infty$ и ввиду конечности $M(0)$ по классической формуле Пуассона–Йенсена (3.5), примененной к функциям $u, M \in \text{SH}(\Omega)$, имеем

$$\int_{\Omega} u(z) d\omega_D(0, z) \leq \int_{\Omega} M(z) d\omega_D(0, z) + C', \quad C' := u(0) - M(0) + C,$$

C' – постоянная, не зависящая от $D \in \mathcal{U}_{K_0}(\Omega)$. Это значит, что выполнено (2.12), т.е. из (h1) следует (h2). Таким образом, достаточно вывести (J) из (h2).

Пусть мера Йенсена μ принадлежит классу $\mathcal{J}^{K'}(\Omega)$, определенному после предложения 3.2. Положим $K := \text{supp } \mu$. Тогда $K \cap K' = \emptyset$ по определению класса $\mathcal{J}^{K'}(\Omega)$. Следовательно, применима теорема 7, согласно которой найдутся области $\Omega_0, \Omega_1 \in \mathcal{U}$ такие, что $K' \subset \Omega_0 \Subset \Omega_1 \Subset \Omega$, $K \subset \Omega_1 \setminus \overline{\Omega_0}$ и $\mu \in \overline{\text{conv}} \mathcal{H}^{\mathcal{U}}(\Omega_1; \Omega_0)$ в $C(\Omega_1)^*$. Положим

$$d_0 := \text{dist}(K', \partial\Omega_0), \quad d_1 := \text{dist}(\Omega_1, \partial\Omega) \quad (4.10)$$

и выберем число ε так, что

$$0 < \varepsilon < \min\{d_0, d_1\}. \quad (4.11)$$

Пусть $D \in \mathcal{U}(\Omega_1; \Omega_0)$. Согласно (4.10) и (4.11) для любого $w \in D(\varepsilon)$ ввиду условной инвариантности относительно сдвига системы $\mathcal{U}$ регулярная область $D_w = \{z - w : z \in D\}$ принадлежит классу $\mathcal{U}$. Следовательно, по условию (h2) и ввиду включения $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_{K_0}(\Omega)$ для некоторой постоянной C , не зависящей от D , w и μ , справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} u(z) d\omega_{D_w}(0, z) \leq \int_{\Omega} M(z) d\omega_{D_w}(0, z) + C.$$

Замена переменной $z - w$ на новую переменную здесь дает неравенство

$$\int_{\Omega} u(z + w) d\omega_D(0, z) \leq \int_{\Omega} M(z + w) d\omega_D(0, z) + C \quad (4.12)$$

для всех $D \in \mathcal{U}(\Omega_1; \Omega_0)$ и $w \in D(\varepsilon)$, где постоянная C не зависит от μ и ε из (4.11). Интегрируя обе части (4.12) по вероятностной мере $m^{(\varepsilon)}$ (см. (1.3)), по теореме Фубини о повторных интегралах получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u * m^{(\varepsilon)})(z) d\omega_D(0, z) &= \int_{D(\varepsilon)} \int_{\Omega} u(z+w) d\omega_D(0, z) dm^{(\varepsilon)}(w) \\ &\stackrel{(4.12)}{\leq} \int_{D(\varepsilon)} \int_{\Omega} M(z+w) d\omega_D(0, z) dm^{(\varepsilon)}(w) + \int_{D(\varepsilon)} C dm^{(\varepsilon)}(w) \\ &= \int_{\Omega} (M * m^{(\varepsilon)})(z) d\omega_D(0, z) + C. \end{aligned}$$

Отсюда в обозначении (1.6) имеем

$$\int_{\Omega} u^{(\varepsilon)}(z) d\omega_D(0, z) \leq \int_{\Omega} M^{(\varepsilon)}(z) d\omega_D(0, z) + C \quad \forall D \in \mathcal{U}(\Omega_1; \Omega_0), \quad (4.13)$$

где функции $u^{(\varepsilon)}$ и $M^{(\varepsilon)}$ определены и непрерывны на Ω_1 . Выше перед формулой (4.10) было отмечено, что $\mu \in \overline{\text{copv}} \mathcal{H}^{\mathcal{U}}(\Omega_1; \Omega_0)$ в $C(\Omega_1)^*$, и из (4.13) следует

$$\int_{\Omega} u^{(\varepsilon)}(z) d\mu(z) \leq \int_{\Omega} M^{(\varepsilon)}(z) d\mu(z) + C.$$

Отсюда ввиду (1.4) имеем

$$\int_{\Omega} u d\mu \leq \int_{\Omega} M^{(\varepsilon)} d\mu + C.$$

Если здесь устремить ε к нулю, то убывающая сеть $\{M^{(\varepsilon)}\}$ непрерывных функций поточечно стремится к M на Ω_1 , поскольку $M \in \text{SH}(\Omega)$. Таким образом,

$$\int_{\Omega} u d\mu \leq \int_{\Omega} M d\mu + C. \quad (4.14)$$

Но мера $\mu \in \mathcal{J}^{K'}(\Omega)$, где $K' = \overline{\Omega'}$ – замыкание области Ω' , выбиралась произвольно, а постоянная C не зависит от μ . Другими словами, неравенство (4.14) выполнено для каждой меры $\mu \in \mathcal{J}^{\overline{\Omega'}}(\Omega)$. По обобщенной формуле Пуассона–Йенсена (3.4) из неравенства (4.14) следует неравенство

$$\int_{\Omega \setminus \{0\}} V_{\mu} d\nu_u \leq \int_{\Omega} M d\mu + (C - u(0)) \quad (4.15)$$

для каждой меры $\mu \in \mathcal{J}^{\overline{\Omega'}}(\Omega)$, где V_{μ} – потенциал (3.3) меры μ и постоянная $C' := C - u(0)$ не зависит от μ . Но неравенство (4.15) – это в точности (4.1) с постоянной C' вместо C . Кроме того, верхний индекс в $\mathcal{J}^{\overline{\Omega'}}(\Omega)$ можно заменить на Ω' , что следует из достаточного произвола в выборе $\Omega' \supset K_0$ в начале текущего параграфа. Тем самым свойство (J) в условиях (h1) или (h2) доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для вывода утверждения (J) нигде не используется представление функции M через субгармоническое ядро, а применяется только свойство (i) субгармонического веса из определения 4.

§ 5. Доказательство основной теоремы

Цель этого параграфа – показать, что условие (J) из начала § 4 влечет за собой существование гармонической миноранты h для функции (2.14). После § 4 это даст заключение основной теоремы.

Итак, пусть условие (J) выполнено. По обобщенной формуле Пуассона–Йенсена (3.4) и предложению 3.3 из условия (J) следует, что

(J') для постоянной $C' = C + M(0)$ неравенство

$$\int_{\Omega \setminus \{0\}} V d\nu_u \leq \int_{\Omega \setminus \{0\}} V d\nu_M + C' \quad (5.1)$$

выполнено для каждого потенциала Йенсена $V \in \mathcal{P}_J^{\Omega'}(\Omega)$ (см. определение перед формулой (3.8)).

Пусть теперь $\mu \in \mathcal{AS}^{\Omega'}(\Omega) \cap \mathcal{M}_{ac}^+(\Omega)$ – мера Аренса–Зингера с потенциалом V_μ (см. (3.3)). По предложению 3.3 потенциал Аренса–Зингера V_μ принадлежит классу $\mathcal{P}_{\mathcal{AS}}^{\Omega'}(\Omega)$. Кроме того, по определению 8 функция $V_\mu^+(\zeta) := \max\{V(\zeta), 0\}$, $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, – это потенциал Йенсена, принадлежащий классу $\mathcal{P}_J^{\Omega'}(\Omega)$. Следовательно, условие (J') влечет за собой неравенства

$$\int_{\Omega \setminus \{0\}} V_\mu d\nu_u \leq \int_{\Omega \setminus \{0\}} V_\mu^+ d\nu_u \leq \int_{\Omega \setminus \{0\}} V_\mu^+ d\nu_M + C' \quad (5.2)$$

для всех мер Аренса–Зингера $\mu \in \mathcal{AS}^{\Omega'}(\Omega)$. Теперь потребуется оценка сверху последнего интеграла

$$I_\mu := \int_{\Omega \setminus \{0\}} V_\mu^+ d\nu_M \stackrel{(ii)}{=} \int_B V_\mu^+ d\nu_M. \quad (5.3)$$

Согласно представлению (3.6) предложения 3.1 для потенциала V_μ имеем

$$\begin{aligned} I_\mu &= \int_B \left(\int_\Omega (k(\zeta, z) - k(\zeta, 0)) d\mu(z) \right)^+ d\nu_M(\zeta) \\ &\leq \int_B \int_\Omega (k(\zeta, z) - k(\zeta, 0))^+ d\mu(z) d\nu_M(\zeta) \\ &= \int_B \int_\Omega ((k(\zeta, z) - k(\zeta, 0)) + (k(\zeta, 0) - k(\zeta, z))^+) d\mu(z) d\nu_M(\zeta). \end{aligned}$$

Отсюда, используя теорему Фубини о повторных интегралах, получаем

$$\begin{aligned} I_\mu &\leq \int_\Omega \left(\int_B (k(\zeta, z) - k(\zeta, 0)) d\nu_M(\zeta) \right. \\ &\quad \left. + \int_B (k(\zeta, 0) - k(\zeta, z))^+ d\nu_M(\zeta) \right) d\mu(z) \\ &\stackrel{(1.9)}{=} \int_\Omega \left(\int_B (k(\zeta, z) - k(\zeta, 0)) d\nu_M(\zeta) + Q_k^{\nu_M}(z) \right) d\mu(z). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Согласно условию (ii) из определения 4 и представлению (2.2) функция M может быть записана в виде

$$M(z) = \int_B k(\zeta, z) d\nu_M(\zeta) + H(z) = U_k^{\nu_M}(z) + H(z), \quad z \in \Omega,$$

где $H \in \text{Har}(\Omega)$. Отсюда следует равенство

$$(M(z) - M(0)) - (H(z) - H(0)) = \int_B (k(\zeta, z) - k(\zeta, 0)) d\nu_M(\zeta). \quad (5.5)$$

Подставляя левую часть (5.5) вместо внутреннего интеграла в правой части (5.4), для $Q := Q_k^{\nu_M} \geq 0$, где $Q \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ по предложению 1.1, получаем

$$I_\mu \leq \int_\Omega ((M(z) - M(0)) - (H(z) - H(0)) + Q(z)) d\mu(z).$$

По определению 5 мер Аренса–Зингера с учетом (3.2) правая часть здесь равна

$$\begin{aligned} \int_\Omega ((M(z) + Q(z)) - H(z)) d\mu(z) - M(0) + H(0) \\ \stackrel{(1.11)}{=} \int_\Omega (M(z) + Q(z)) d\mu(z) - M(0), \end{aligned}$$

так как $H \in \text{Har}(\Omega)$. Таким образом, по определению (5.3)

$$\int_{\Omega \setminus \{0\}} V_\mu^+ d\nu_M = I_\mu \leq \int_\Omega (M(z) + Q(z)) d\mu(z) - M(0).$$

Отсюда, используя (5.2), получаем

$$\int_{\Omega \setminus \{0\}} V_\mu d\nu_u \leq \int_{\Omega \setminus \{0\}} V_\mu^+ d\nu_M + C' \leq \int_\Omega (M(z) + Q(z)) d\mu(z) + (C' - M(0)),$$

где постоянная $C'' := C' - M(0)$ не зависит от $\mu \in \mathcal{AS}'(\Omega) \cap \mathcal{M}_{\text{ac}}^+(\Omega)$. Это означает выполнение второго неравенства в (3.20) для каждой меры Аренса–Зингера $\mu \in \mathcal{AS}'(\Omega) \cap \mathcal{M}_{\text{ac}}^+(\Omega)$ с функцией $M + Q \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ вместо M и постоянной C'' в роли C . Таким образом, по теореме 6 для любой функции $\sigma \in C(\Omega)$, удовлетворяющей ограничению (1.5), найдется функция $h \in \text{Har}(\Omega)$ такая, что

$$u(z) + h(z) \leq (M + Q)^{(\sigma)}(z) = (M^{(\sigma)} + Q^{(\sigma)})(z) \quad \forall z \in \Omega.$$

Другими словами, функция h – гармоническая миноранта для функции (2.14).

Это завершает доказательство основной теоремы.

В заключение автор выражает искреннюю признательность рецензенту за полезные замечания.

Список литературы

- [1] B. N. Khabibullin, *Zero (sub)sets for spaces of holomorphic functions and (sub)harmonic minorants*, [arXiv: math.CV/0412359](https://arxiv.org/abs/math.CV/0412359).
- [2] М. М. Джрбашян, “О каноническом представлении мероморфных в единичном круге”, *Докл. АН АрмССР*, **3**:1 (1945), 3–9.
- [3] М. М. Джрбашян, “Теория факторизации функций, мероморфных в круге”, *Матем. сб.*, **79(121)**:4(8) (1969), 517–615; англ. пер.: М. М. Dzhrbashyan, “Theory of factorization of functions meromorphic in the disk”, *Math. USSR-Sb.*, **8**:4 (1969), 493–592.

- [4] М. М. Джрбашян, “Теория факторизации и граничных свойств функций, мероморфных в круге”, *УМН*, **28**:4(172) (1973), 3–14; англ. пер.: М. М. Dzhrbashyan, “The theory of factorization and boundary properties of functions meromorphic in a disc”, *Russian Math. Surveys*, **28**:4 (1973), 1–12.
- [5] P. Colwell, *Blaschke product. Bounded analytic functions*, Univ. Michigan Press, Ann Arbor, MI, 1985.
- [6] C. Horowitz, “Zeros of functions in the Bergman spaces”, *Duke Math.*, **41** (1974), 693–710.
- [7] E. Beller, “Factorization for non-Nevanlinna classes of analytic functions”, *Israel J. Math.*, **27**:3–4 (1977), 320–330.
- [8] E. Beller, C. Horowitz, “Zero sets and random zero sets in certain function spaces”, *J. Anal. Math.*, **64** (1994), 203–217.
- [9] B. Korenblum, “An extension of the Nevanlinna theory”, *Acta Math.*, **135** (1975), 187–219.
- [10] Ф. А. Шамоян, “О нулях аналитических в круге функций, растущих вблизи границы”, *Изв. АН АрмССР. Сер. матем.*, **18**:1 (1983), 15–27; англ. пер.: F. A. Shamoyan, “Zeros of functions analytic in a disk, that increase near the boundary”, *J. Contemp. Math. Anal.*, **18**:1 (1983), 13–25.
- [11] М. М. Джрбашян, “Факторизация функций, мероморфных в конечной плоскости”, *Изв. АН АрмССР. Сер. матем.*, **5**:6 (1970), 453–485.
- [12] А. А. Гольдберг, Б. Я. Левин, И. В. Островский, “Целые и мероморфные функции”, *Итоги науки и техники. Современ. проблемы матем. Фундам. напр.*, **85**, ВИНИТИ, М., 1991, 5–185; англ. пер.: A. A. Gol'dberg, B. Ya. Levin, I. V. Ostrovskii, “Entire and meromorphic functions”, *Complex analysis I. Encyclopaedia Math. Sci.*, **85**, 1995, 1–193.
- [13] Я. В. Васильків, Ю. С. Процик, “Канонічний інтеграл Вейерштрасса для субгармонічних функцій нескінченного порядку”, *Вісник Харківського національного університету Сер. матем., прикл. матем., мех.*, **542**:51 (2002), 118–130.
- [14] A. A. Kondratyuk, Ya. V. Vasyl'kiv, “Growth majorants and quotient representations of meromorphic functions”, *Comput. Methods Funct. Theory*, **1**:2 (2001), 595–606.
- [15] B. N. Khabibullin, “The representation of a meromorphic function as the quotient of entire functions and Paley problem in $\mathbb{C}^n$: survey of some results”, *Mat. Fiz. Anal. Geom.*, **9**:2 (2002), 146–167.
- [16] B. N. Khabibullin, “Dual approach to certain questions for the weighted spaces of holomorphic functions”, *Entire functions in modern analysis* (Tel-Aviv, 1997), **15**, 2001, 207–219.
- [17] Б. Н. Хабибуллин, “Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. I”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:4 (2001), 205–224; англ. пер.: B. N. Khabibullin, “Dual representation of superlinear functionals and its applications in function theory. I”, *Izv. Math.*, **65**:4 (2001), 835–852.
- [18] Б. Н. Хабибуллин, “Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. II”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:5 (2001), 167–190; англ. пер.: B. N. Khabibullin, “Dual representation of superlinear functionals and its applications in function theory. II”, *Izv. Math.*, **65**:5 (2001), 1017–1039.
- [19] Б. Н. Хабибуллин, “Целые функции-миноранты: опыт применения оценок Мадаева–Островского–Содина”, *Матем. физика, анализ, геометрия*, **11**:4 (2004), 518–536.
- [20] Б. Н. Хабибуллин, “Нулевые подмножества, представление мероморфных функций и характеристики Неванлинны в круге”, *Матем. сб.*, **197**:2 (2006), 117–136; англ. пер.: B. N. Khabibullin, “Zero subsets, representation of meromorphic functions, and Nevanlinna characteristics in a disc”, *Sb. Math.*, **197**:2 (2006), 259–279.

- [21] Б. Н. Хабибуллин, *Полнота систем экспонент и множества неединственности*, 14, РИЦ БашГУ, Уфа, 2006.
- [22] В. N. Khabibullin, “Zero (sub)sets for weighted spaces of holomorphic functions”, *Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ*, Тезисы докладов (Москва, 2005), 2005, 307.
- [23] В. N. Khabibullin, “On the representation of meromorphic functions”, *Analysis and related topics* (Lviv, 2005), Lviv Ivan Franko National Univ., Lviv, 2005, 48.
- [24] У. Хейман, П. Кеннеди, *Субгармонические функции*, Мир, М., 1980; пер. с англ.: W. K. Hayman, P. B. Kennedy, *Subharmonic functions*, vol. I, London Math. Soc. Monogr., 9, Academic Press, London, New York, 1976.
- [25] Т. J. Ransford, *Potential theory in the complex plane*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [26] Л. Шварц, *Анализ*, т. 1, Мир, М., 1972; пер. с франц.: L. Schwartz, *Analyse mathématique*, Hermann, Paris, 1967.
- [27] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория*, ИЛ, М., 1962; пер. с англ.: N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear operators. I. General theory*, Interscience Publ., New York, London, 1958.
- [28] Т. W. Gamelin, *Uniform algebras and Jensen measures*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1978.
- [29] Б. Н. Хабибуллин, “Критерии (суб-)гармоничности и продолжение (суб-)гармонических функций”, *Сиб. матем. ж.*, 44:4 (2003), 905–925; англ. пер.: В. N. Khabibullin, “Criteria for (sub-)harmonicity and the continuation of (sub-)harmonic functions”, *Siberian Math. J.*, 44:4 (2003), 713–728.
- [30] С. А. Григорян, “Обобщенные аналитические функции”, *УМН*, 49:2 (1994), 3–42; англ. пер.: S. A. Grigoryan, “Generalized analytic functions”, *Russian Math. Surveys*, 49:2 (1994), 1–40.
- [31] M. Klimek, *Pluripotential theory*, Clarendon Press, Oxford, 1991.
- [32] А. Г. Нафтаевич, “Об интерполировании функций, мероморфных в единичном круге”, *Докл. АН СССР*, 88:2 (1953), 205–208.
- [33] А. Г. Нафтаевич, “Об интерполировании функций, мероморфных в единичном круге”, *Литовский матем. сб.*, 1:1–2 (1961), 159–180.
- [34] M. Tsuji, “Canonical product for a meromorphic function in a unit circle”, *J. Math. Soc. Japan*, 8:1 (1956), 7–21.
- [35] G. Bomash, “A Blaschke-type product and random zero sets for Bergman spaces”, *Ark. Math.*, 30 (1992), 45–60.
- [36] M. Tsuji, *Potential theory in modern function theory*, Maruzen Co., Tokyo, 1959.
- [37] S. Axler, P. Bourdon, W. Ramey, *Harmonic function theory*, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [38] Б. Н. Хабибуллин, “О типе целых и мероморфных функций”, *Матем. сб.*, 183:11 (1992), 35–44; англ. пер.: В. N. Khabibullin, “On the type of entire and meromorphic functions”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, 77:2 (1994), 293–301.
- [39] Т. J. Ransford, “Jensen measures”, *Approximation, complex analysis and potential theory* (Montréal, QC, 2000), Kluwer, Dordrecht, 2001, 221–237.
- [40] P. Koosis, *Leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin*, CRM, Montréal, 1996.
- [41] Ü. Kuran, “On measures associated to superharmonic functions”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 36:1 (1972), 179–186.
- [42] C. Sundberg, “Measures induced by analytic functions and a problem of Walter Rudin”, *J. Amer. Math. Soc.*, 16:1 (2003), 69–90.
- [43] Н. С. Ландкоф, *Основы современной теории потенциала*, Наука, М., 1966; англ. пер.: N. S. Landkof, *Foundations of modern potential theory*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, 1972.

- [44] B. J. Cole, T. J. Ransford, “Jensen measures and harmonic measures”, *J. Reine Angew. Math.*, **541** (2001), 29–53.
- [45] B. J. Cole, T. J. Ransford, “Subharmonicity without upper semicontinuity”, *J. Funct. Anal.*, **147** (1997), 420–442.
- [46] Н. Бурбаки, *Топологические векторные пространства*, ИЛ, М., 1959; N. Bourbaki, *Elements of mathematics. Topological vector spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

Б. Н. Хабибуллин (B. N. Khabibullin)

Башкирский государственный университет, г. Уфа;

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г. Уфа

E-mail: khabib-bulat@mail.ru

Поступила в редакцию

18.10.2005 и 30.10.2006