Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Холщевникова, К теореме Валле-Пуссена о единственности представления функции тригонометрическим рядом, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 5, 143–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm132>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 12:53:00

УДК 517.5

Н. Н. Холщевникова

К теореме Валле-Пуссена о единственности представления функции тригонометрическим рядом

Теорема Валле-Пуссена говорит о том, что из сходимости тригонометрического ряда к конечной интегрируемой функции f всюду за исключением счетного множества E следует, что этот ряд есть ряд Фурье функции f . В работе показано, что теорема остается справедливой, если в качестве исключительного множества E взять объединение счетного числа H -множеств.

Библиография: 7 названий.

Основным результатом о единственности представления функции тригонометрическим рядом является следующая

ТЕОРЕМА 1 ВАЛЛЕ-ПУССЕНА. *Если за исключением точек счетного множества E тригонометрический ряд сходится к конечной и интегрируемой функции f , то он является рядом Фурье этой функции.*

В 1923 г. И.И. Привалов доказал, в частности, что в этой теореме вместо счетного множества E можно взять замкнутое множество единственности. Мы докажем, что в качестве исключительного множества E в этой теореме 1 Валле-Пуссена можно взять объединение замкнутого множества единственности и счетного числа H -множеств. При условии ограниченности функции f и пустого множества E теорема Валле-Пуссена превращается в доказанную ранее теорему дю Буа-Реймона–Лебега. Если в условии теоремы Валле-Пуссена потребовать дополнительно ограниченность функции f , то мы покажем, что теорема остается справедливой, если в качестве исключительного множества E взять множество единственности типа F_σ .

§1. Множества единственности для метода суммирования Римана

Будем рассматривать тригонометрические ряды

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (1)$$

с коэффициентами, стремящимися к нулю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0. \quad (2)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 94-01-00417).

Функцией Римана для тригонометрического ряда (1), (2) называется функция

$$F(x) = \frac{a_0 x^2}{4} + Ax + B - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}, \quad (3)$$

т.е. сумма дважды формально проинтегрированного ряда (1), (2).

Пусть $\Delta_h^2 F(x) = F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)$. Функция $F(x)$ называется *гладкой в точке x* , если

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^2 F(x)}{h} = 0. \quad (4)$$

Известно, что функция Римана ряда (1), (2) является всюду гладкой.

Верхней и нижней производными Шварца функции $F(x)$ называются, соответственно,

$$\overline{D}^2 F(x) = \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^2 F(x)}{h^2} \quad \text{и} \quad \underline{D}^2 F(x) = \underline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^2 F(x)}{h^2} \quad (5)$$

(в каждой точке x , в окрестности которой определена функция $F(x)$, производные $\overline{D}^2 F(x)$ и $\underline{D}^2 F(x)$ существуют, конечные или бесконечные определенного знака).

Второй производной Шварца или *второй симметрической производной* функции $F(x)$ называется

$$D^2 F(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^2 F(x)}{h^2}. \quad (6)$$

Числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *суммируется методом Римана* к s , если

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 \right] = s. \quad (7)$$

Метод Римана является регулярным методом суммирования, т.е. из сходимости числового ряда к конечному числу s следует его суммируемость методом Римана к этому числу s . Так как для функции Римана $F(x)$ ряда (1), (2) справедливо равенство

$$\frac{\Delta_{2h}^2 F(x)}{4h^2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2, \quad (8)$$

то суммируемость ряда (1), (2) в точке x методом Римана эквивалентна существованию $D^2 F(x)$.

Теперь может быть сформулирована в полной общности

ТЕОРЕМА 2 ВАЛЛЕ-ПУССЕНА. Если для тригонометрического ряда S вида (1), (2) всюду на $[0, 2\pi)$ за исключением, быть может, счетного множества E выполняется одно из условий (9)–(11):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) \text{ и } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} s_n(x) \text{ конечны на } [0, 2\pi) \setminus E \text{ и интегрируемы,} \quad (9)$$

$$\text{где } s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx;$$

$$D^2 F(x) = f(x), \quad x \in [0, 2\pi) \setminus E, \quad (10)$$

или

$$\underline{D}^2 F(x) \leq f(x) \leq \overline{D}^2 F(x), \quad x \in [0, 2\pi) \setminus E, \quad (11)$$

где $F(x)$ – функция Римана ряда (1), (2), а $f(x)$ – конечная интегрируемая функция, то $D^2 F(x)$ существует почти всюду, интегрируема, и S есть ее ряд Фурье.

В этой теореме условие (11) самое слабое.

Напомним определения.

Множество $E \subset [0, 2\pi)$ называется *множеством единственности* или *$\mathcal{U}$ -множеством* для тригонометрических рядов, если из сходимости ряда вида (1) к нулю на $[0, 2\pi) \setminus E$ следует, что все коэффициенты ряда равны нулю.

Множество $E \subset [0, 2\pi)$ называется *множеством единственности для метода суммирования Римана* или *$\mathcal{U}(R)$ -множеством*, если из суммируемости методом Римана тригонометрического ряда (1), (2) к нулю на $[0, 2\pi) \setminus E$ следует, что все коэффициенты ряда равны нулю.

Всякое $\mathcal{U}(R)$ -множество является $\mathcal{U}$ -множеством. Известно, что счетное множество и замкнутое $\mathcal{U}$ -множество являются $\mathcal{U}(R)$ -множествами. Для счетного множества этот результат следует из теоремы 2 Валле-Пуссена (с условием (10)). Для замкнутого $\mathcal{U}$ -множества это следует из того, что суммируемость методом Римана ряда (1), (2) к нулю на интервале (a, b) влечет сходимость этого ряда к нулю на (a, b) (см. [1, с. 197]). Является ли произвольное $\mathcal{U}$ -множество также и $\mathcal{U}(R)$ -множеством неизвестно.

Если тригонометрический ряд (1), (2) почти всюду, но не всюду, суммируется методом Римана к нулю, то назовем его *нуль-рядом* для метода Римана или *R -нуль-рядом*.

Ядром R -нуль-ряда назовем множество точек, где он не суммируется методом Римана к нулю.

Приведенным ядром R -нуль-ряда назовем множество точек, где $\underline{D}^2 F(x)$ или $\overline{D}^2 F(x)$ бесконечны. Тогда приведенное ядро – это множество

$$\mathcal{N} = [0, 2\pi) \setminus \{x : -\infty < \underline{D}^2 F(x) \leq \overline{D}^2 F(x) < +\infty\}. \quad (12)$$

Свертприведенным ядром назовем множество $\mathcal{N}_1$ всех тех точек x из $[0, 2\pi)$, в которых

$$D^2 F(x) = +\infty \text{ или } D^2 F(x) = -\infty.$$

Покажем, что $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}_1$ – несчетные борелевские множества типа G_δ и $F_{\sigma\delta}$, соответственно.

Справедлива следующая

ЛЕММА 1. Пусть $F(x)$ – непрерывная функция на интервале (a, b) . Тогда множество точек

$$\mathcal{E} = \{x \in (a, b) : -\infty < \underline{D}^2 F(x) \leq \overline{D}^2 F(x) < +\infty\}$$

имеет тип F_σ , а множество $\mathcal{N}_1 = E_+ \cup E_-$, где

$$E_+ = \{x : D^2 F(x) = +\infty\}, \quad E_- = \{x : D^2 F(x) = -\infty\},$$

имеет тип $F_{\sigma\delta}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $\mathcal{E} = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$, где

$$E_m = \{x \in (a, b) : -m \leq \underline{D}^2 F(x) \leq \overline{D}^2 F(x) \leq m\}.$$

Положим

$$E_{mk} = \{x \in (a, b) : |\Delta_h^2 F(x)| \leq mh^2 \text{ при } |h| \leq 1/k\}.$$

Очевидны включения

$$E_{mk} \subset E_m \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{mk} \subset E_m$$

и

$$E_m \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{m+1,k}.$$

Так как

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{mk} \subset \mathcal{E} = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{m+1,k}$$

и

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_{mk} \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{m+1,k},$$

то

$$\mathcal{E} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{mk}.$$

Множества E_{mk} замкнуты в силу непрерывности функции $F(x)$, следовательно, $\mathcal{E}$ имеет тип F_σ .

Обратимся теперь к множеству $\mathcal{N}_1$. В силу определения E_+ , $x \in E_+$ тогда и только тогда, когда для всякого $m > 0$ найдется номер k такой, что

$$\Delta_h^2 F(x) \geq mh^2 \quad \text{при } |h| \leq \frac{1}{k},$$

т. е. $E_+ = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} F_{km}$, где множества

$$F_{km} = \{x \in (a, b) : \Delta_h^2 F(x) \geq mh^2 \text{ при } |h| \leq 1/k\}$$

замкнуты. Следовательно, $E_+ \in F_{\sigma\delta}$ и, аналогично, $E_- \in F_{\sigma\delta}$. Тогда и $\mathcal{N}_1$ типа $F_{\sigma\delta}$, и лемма доказана.

Из этой леммы следует

ЛЕММА 2. Приведенное ядро $\mathcal{N}$ и сверхприведенное ядро $\mathcal{N}_1$ для R -нуль-ряда являются несчетными множествами типа G_δ и $F_{\sigma\delta}$, соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S – нуль-ряд для метода Римана и $F(x)$ – функция Римана для S . Как известно, $F(x)$ – непрерывная функция, и в силу леммы 1 сверхприведенное ядро $\mathcal{N}_1$ ряда S будет типа $F_{\sigma\delta}$, а приведенное ядро, ввиду (12), – типа G_δ .

Допустим, что $\mathcal{N}_1$ счетно. Положим

$f(x) = \overline{D}^2 F(x)$ там, где $\overline{D}^2 F(x)$ конечна, и

$f(x) = \underline{D}^2 F(x)$ там, где $\overline{D}^2 F(x) = +\infty$, а $\underline{D}^2 F(x)$ конечна.

Тогда функция $f(x)$ определена на $[0, 2\pi) \setminus \mathcal{N}_1$, для ряда S выполняются условия теоремы 2 Валле-Пуссена с условием (11), и он есть ряд Фурье функции $f(x)$. Но так как S – нуль-ряд для метода Римана, то $f(x)$ почти всюду равна нулю. Отсюда следует, что S – тождественно нулевой ряд. Полученное противоречие доказывает, что множество $\mathcal{N}_1$, а значит, и $\mathcal{N} \supset \mathcal{N}_1$ несчетны. Лемма доказана.

Формальным произведением ряда (1), который в комплексной форме записывается в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad \text{где } c_{-n} = \overline{c}_n, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad (13)$$

и тригонометрического ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inx} \quad (14)$$

называется ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n e^{inx}, \quad \text{где } K_n = \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p \gamma_{n-p}. \quad (15)$$

Известно (результаты А. Райхмана, см., например, [1, с. 194]), что если $c_n \rightarrow 0$ и ряд $\sum |\gamma_n|$ сходится, то $K_n \rightarrow 0$. При этом ряд (14) является рядом Фурье своей суммы $\lambda(x)$. Если $c_n \rightarrow 0$ и ряд $\sum |n\gamma_n|$ сходится, то ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (K_n - \lambda(x)c_n) e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n e^{inx} - \lambda(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (16)$$

сходится к нулю равномерно на $[0, 2\pi)$.

Условие $\sum |n\gamma_n| < \infty$ выполняется, в частности, если $\sum \gamma_n e^{inx}$ есть ряд Фурье функции $\lambda(x)$, имеющей три непрерывные производные.

ЛЕММА 3. Пусть S – ряд вида (1), (2), а ряд σ является формальным произведением (15) ряда S и ряда (14), удовлетворяющего условию $\sum |n\gamma_n| < \infty$. Если функция $\lambda(x) = \sum \gamma_n e^{inx}$ неотрицательна, то для функций Римана $F(x)$ и $\Phi(x)$ рядов S и σ выполняются равенства

$$\underline{D}^2 \Phi(x) = \lambda(x) \underline{D}^2 F(x) \quad \text{и} \quad \overline{D}^2 \Phi(x) = \lambda(x) \overline{D}^2 F(x), \quad (17)$$

в частности,

$$D^2 \Phi(x) = 0, \quad \text{там, где } \lambda(x) = 0. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия леммы следует, что ряд (16) сходится, а значит, и суммируется методом Римана к нулю на $[0, 2\pi)$. Из равенства (8) для функции $F(x)$ и аналогичного равенства для функции $\Phi(x)$ следует, что суммируемость методом Римана к нулю ряда (16) $\sigma - \lambda(x)S$ эквивалентна равенству

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta_{2h}^2 \Phi(x)}{4h^2} - \lambda(x) \frac{\Delta_{2h}^2 F(x)}{4h^2} \right) = 0.$$

Отсюда вытекают равенства (17) и (18). Лемма доказана.

Следствием леммы 3 является

ЛЕММА 4. Пусть S является R -нуль-рядом с ядром $\mathcal{E}$, приведенным ядром $\mathcal{N}$ и сверхприведенным ядром $\mathcal{N}_1$. Если $(a, b) \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$ и $(a, b) \subset [0, 2\pi)$, то найдется R -нуль-ряд σ , для которого ядром, приведенным ядром и сверхприведенным ядром служат множества $\mathcal{E} \cap (a, b)$, $\mathcal{N} \cap (a, b)$ и $\mathcal{N}_1 \cap (a, b)$, соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda(x)$ – функция, равная нулю на $[0, 2\pi) \setminus (a, b)$, положительная на (a, b) и имеющая непрерывные производные до третьего порядка включительно. Тогда $\lambda(x) = \sum \gamma_n e^{inx}$, где $\sum |n\gamma_n| < \infty$. Рассмотрим ряд σ , являющийся формальным произведением ряда S на ряд Фурье функции $\lambda(x)$. В силу леммы 3 ряд σ суммируется методом Римана к нулю на $[0, 2\pi) \setminus (a, b)$, так как там $\lambda(x) = 0$, а так как $\lambda(x) > 0$ на (a, b) и ограничена, то из равенств (17) следует, что σ есть R -нуль-ряд с ядром $\mathcal{E} \cap (a, b)$, приведенным ядром $\mathcal{N} \cap (a, b)$ и сверхприведенным ядром $\mathcal{N}_1 \cap (a, b)$. Лемма доказана.

И, наконец, завершает данный ряд лемм

ЛЕММА 5. Пусть S есть R -нуль-ряд с ядром $\mathcal{E}$ и приведенным ядром $\mathcal{N}$, а E – множество единственности типа F_σ . Тогда $\mathcal{N} \setminus E \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $\mathcal{N} \subset E$, где $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ и E_k – замкнутые множества единственности. Тогда $\mathcal{N} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\mathcal{N} \cap E_k)$ и так как $\mathcal{N}$ имеет тип G_δ , то одно из множеств $\mathcal{N} \cap E_k$ плотно в некоторой непустой порции множества $\mathcal{N}$ – множестве $\mathcal{N} \cap (a, b)$ для $(a, b) \subset [0, 2\pi)$. Так как E_k замкнуто, то

$$\mathcal{N} \cap (a, b) \subset E_k \cap (a, b).$$

В силу леммы 4 найдется R -нуль-ряд σ с ядром $\mathcal{E} \cap (a, b)$ и приведенным ядром $\mathcal{N} \cap (a, b)$. Так как E_k – замкнутое $\mathcal{U}$ -множество, то E_k является также $\mathcal{U}(R)$ -множеством. Поэтому ряд σ имеет точку ядра x , лежащую на (a, b) вне E_k . Так как E_k замкнуто, то найдется интервал $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ такой, что $x \in (\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta) \cap E_k = \emptyset$. Так как $x \in \mathcal{E} \cap (a, b) \neq \emptyset$, то в силу леммы 4 найдется R -нуль-ряд σ_1 с ядром $\mathcal{E} \cap (\alpha, \beta)$ и приведенным ядром $\mathcal{N} \cap (\alpha, \beta)$. Но $\mathcal{N} \cap (\alpha, \beta) \subset E_k \cap (\alpha, \beta) = \emptyset$. С другой стороны, в силу леммы 2 приведенное ядро R -нуль-ряда непусто. Полученное противоречие доказывает, что $\mathcal{N} \setminus E \neq \emptyset$ для всякого $\mathcal{U}$ -множества E типа F_σ . Лемма доказана.

Из леммы 5 непосредственно следует обобщение известной теоремы Бари об объединении счетного числа замкнутых множеств единственности.

ТЕОРЕМА 1. *Объединение счетного числа замкнутых множеств единственности является множеством единственности для метода Римана.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, где E_k – замкнутые множества единственности. Допустим, что E не является $\mathcal{U}(R)$ -множеством и S – соответствующий ненулевой ряд вида (1), (2), суммируемый методом Римана к нулю на $[0, 2\pi) \setminus E$. Так как мера множества E равна нулю, то S есть R -нуль-ряд.

Пусть $\mathcal{E}$ – ядро, а $\mathcal{N}$ – приведенное ядро ряда S . Тогда $\mathcal{N} \subset \mathcal{E} \subset E$, но это противоречит лемме 5. Теорема доказана.

Карлет и Дебс [2] доказали теорему, которую можно назвать

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА БАРИ. *Объединение счетного числа множеств единственности E_k , замкнутых относительно своего объединения $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, является множеством единственности.*

Из этой теоремы вытекают следующие результаты об объединении $\mathcal{U}$ -множеств, доказанные ранее в [3]:

объединение произвольного $\mathcal{U}$ -множества и $\mathcal{U}$ -множества типа F_σ и G_δ одновременно является $\mathcal{U}$ -множеством;

объединение двух непересекающихся $\mathcal{U}$ -множеств типа G_δ является $\mathcal{U}$ -множеством.

Аналогично можно обобщить и теорему 1 и получить из нее следствия, касающиеся объединения $\mathcal{U}(R)$ -множеств. Для этого нам понадобится частично перекрывающаяся с леммой 5

ЛЕММА 6. *Пусть S есть R -нуль-ряд с ядром $\mathcal{E}$ и пусть $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, где E_k являются $\mathcal{U}(R)$ -множествами, причем E_k замкнуты относительно E . Тогда $\mathcal{E} \setminus E \neq \emptyset$.*

Доказательство леммы 6 вполне аналогично доказательству леммы 5. Более слабое требование относительной замкнутости множеств E_k в E по сравнению с замкнутостью множеств E_k в лемме 5 влечет и более слабое утверждение $\mathcal{E} \setminus E \neq \emptyset$ по сравнению с утверждением $\mathcal{N} \setminus E \neq \emptyset$ леммы 5.

Из леммы 6 следует обобщающая теорему 1

ТЕОРЕМА 2. *Объединение счетного числа $\mathcal{U}(R)$ -множеств E_k , замкнутых относительно своего объединения $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, является $\mathcal{U}(R)$ -множеством.*

Доказательство теоремы 2 опирается на лемму 6 аналогично тому, как доказательство теоремы 1 опирается на лемму 5.

СЛЕДСТВИЕ. 1) *Если E_1 и E_2 являются $\mathcal{U}(R)$ -множествами типа G_δ и $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, то $E_1 \cup E_2$ тоже является $\mathcal{U}(R)$ -множеством.*

2) *Если E_1 является $\mathcal{U}(R)$ -множеством, а E_2 есть $\mathcal{U}$ -множество типа F_σ и G_δ одновременно, то $E_1 \cup E_2$ является $\mathcal{U}(R)$ -множеством.*

Доказательство 1) и 2) следует из того, что в обоих случаях E_1 и E_2 имеют тип F_σ относительно своего объединения.

Теперь мы обратимся к вопросу единственности представления функции тригонометрическим рядом. Обобщением теоремы дю Буа–Реймона–Лебега является следующая

ТЕОРЕМА 3. Пусть тригонометрический ряд S вида (1), (2) суммируется методом Римана к конечной интегрируемой функции $f(x)$ на множестве $[0, 2\pi) \setminus E$, где E есть $\mathcal{U}$ -множество типа F_σ . Если функция f существенно ограничена, то S есть ряд Фурье $S(f)$ функции f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $S \neq S(f)$ и рассмотрим ряд $S - S(f)$. Покажем, что этот ряд будет R -нуль-рядом. Действительно, ряд Фурье интегрируемой функции почти всюду к ней суммируется методом Римана и, значит, $S - S(f)$ почти всюду суммируется к нулю, но так как $S \neq S(f)$, то $S - S(f)$ не может всюду суммироваться к нулю. Следовательно, $S - S(f)$ является нуль-рядом для метода Римана. Пусть $F(x)$ и $\Phi(x)$ — функции Римана рядов S и $S(f)$. Так как f существенно ограничена, то $\underline{D}^2 \Phi(x)$ и $\overline{D}^2 \Phi(x)$ ограничены на $[0, 2\pi)$. Тогда $\underline{D}^2(F(x) - \Phi(x))$ и $\overline{D}^2(F(x) - \Phi(x))$ конечны на $[0, 2\pi) \setminus E$. Следовательно, приведенное ядро $\mathcal{N}$ нашего R -нуль-ряда $S - S(f)$ содержится в E . Но это противоречит лемме 5. Следовательно, наше предположение неверно, и $S = S(f)$. Теорема доказана.

В данном направлении может быть указана также

ТЕОРЕМА 4. Пусть тригонометрический ряд S вида (1), (2) суммируется методом Римана к конечной интегрируемой функции $f(x)$ на множестве $[0, 2\pi) \setminus E$, где E есть $\mathcal{U}$ -множество типа F_σ . Если функция $f(x)$ является точной производной, то S есть ряд Фурье $S(f)$ функции f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно, $S(f)$ суммируется методом Римана к $f(x)$ в каждой точке, где ее первообразная имеет производную, равную $f(x)$ (см. [1, с. 190, 191]). Таким образом, в нашем случае ряд $S(f)$ суммируется методом Римана к $f(x)$ на $[0, 2\pi)$. Следовательно, $S - S(f)$ суммируется методом Римана к нулю на $[0, 2\pi) \setminus E$. Но множество E в силу теоремы 1 является $\mathcal{U}(R)$ -множеством. Следовательно, $S = S(f)$. Теорема доказана.

Дальше мы освободимся от дополнительных ограничений на функцию f , но при более узком классе исключительных множеств E .

§ 2. Обобщение теоремы Валле-Пуссена

При доказательстве теоремы Валле-Пуссена важную роль играет

ТЕОРЕМА А (см. [1, с. 785]). Пусть $f(x)$ суммируема на (a, b) и конечна всюду, кроме, быть может, точек некоторого счетного множества E . Если $F(x)$ непрерывна на (a, b) и гладкая в точках E , то при выполнении неравенств

$$\underline{D}^2 F(x) \leq f(x) \leq \overline{D}^2 F(x)$$

всюду вне E , имеем

$$F(x) = \int_a^x dy \int_a^y f(t) dt + Ax + B$$

всюду на (a, b) , где A и B постоянны.

Доказательство же самой теоремы А существенно опирается на свойства выпуклых функций, которые устанавливает

ТЕОРЕМА В (см. [1, с. 783]). Если $F(x)$ непрерывна на (a, b) и если $\overline{D}^2 F(x) \geq 0$ всюду на (a, b) , кроме, быть может, некоторого счетного множества E , в точках которого она гладкая, то $F(x)$ выпукла на (a, b) . Аналогично, если $\underline{D}^2 F(x) \leq 0$, кроме точек E , то $F(x)$ вогнута. Наконец, если $D^2 F(x) = 0$, кроме точек E , и гладкая в точках E , то $F(x)$ линейна на (a, b) .

Отметим, что в теореме В и в дальнейших леммах и теоремах условия $\overline{D}^2 F(x) \geq 0$ или $\overline{D}^2 F(x) > -\infty$ ($\underline{D}^2 F(x) \geq 0$ или $\underline{D}^2 F(x) > -\infty$) включают случай $\overline{D}^2 F(x) = +\infty$ ($\underline{D}^2 F(x) = +\infty$, соответственно).

Нельзя ли в теореме В исключить счетное множество, которое, как известно, является множеством единственности, заменить, например, замкнутым множеством единственности? При тех же самых условиях на функцию $F(x)$, что в теореме В, нельзя. Это показывает следующий

ПРИМЕР. Рассмотрим канторовское троичное множество E , построенное на отрезке $[0, 2\pi]$. Как известно, E является замкнутым множеством единственности. Пусть $K(x)$ — канторовская ступенчатая функция, т.е. возрастающая непрерывная функция, построенная на смежных к E интервалах, но не всюду, такая, что $K(0) = 0$, $K(\pi) = 1/2$, $K(2\pi) = 1$. Положим

$$f(x) = \begin{cases} K(x), & x \in [0, \pi], \\ K(2\pi - x), & x \in (\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

Первообразная $F(x)$ функции $f(x)$ является непрерывной, всюду гладкой функцией, при этом

$$D^2 F(x) = 0 \quad \text{для } x \in [0, 2\pi) \setminus E.$$

Однако $F(x)$ не является линейной функцией, так как ее производная не является постоянной.

Но как известно, замкнутое множество единственности E является $\mathcal{U}(R)$ -множеством. Поэтому, если $F(x)$ — функция Римана ряда S вида (1), (2) и

$$D^2 F(x) = 0 \quad \text{для } x \in [0, 2\pi) \setminus E,$$

то $F(x) = Ax + B$.

Нерешенным остается

ВОПРОС. Если $F(x)$ — функция Римана ряда S вида (1), (2) и $\overline{D}^2 F(x) \geq 0$ на $(a, b) \setminus E$, где E — замкнутое множество единственности, будет ли $F(x)$ выпукла на (a, b) ?

Мы можем доказать, что ответ на вопрос положителен только для специальных замкнутых $\mathcal{U}$ -множеств.

Напомним определения.

Множество $E \subset [0, 2\pi)$ называется H -множеством, если существуют последовательность целых чисел $\{n_k\}$ и два числа α и δ , $0 \leq \alpha < 1$ и $0 \leq \delta < 1$, такие, что

$$0 \leq \left\{ n_k \frac{x}{2\pi} - \alpha \right\} \leq \delta \quad \text{для } x \in E, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

где $\{t\}$ — дробная часть числа t .

Эти множества введены и исследовались А. Райхманом. Обобщением понятия H -множества является введенное И. И. Пятацким-Шапиро понятие $H^{(s)}$ -множества.

Последовательности целых чисел $\{n_k^{(1)}\}, \{n_k^{(2)}\}, \dots, \{n_k^{(s)}\}$ называют *независимыми*, если для любого вектора $(x_1, x_2, \dots, x_s)$ с целочисленными координатами x_i и с $\sum_{i=1}^s x_i^2 > 0$ выполняется условие

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |n_k^{(1)} x_1 + n_k^{(2)} x_2 + \dots + n_k^{(s)} x_s| = +\infty.$$

Множество $E \subset [0, 2\pi)$ называется *множеством типа $H^{(s)}$* , если найдутся s независимых последовательностей $\{n_k^{(1)}\}, \{n_k^{(2)}\}, \dots, \{n_k^{(s)}\}$ и параллелепипед Δ , лежащий в единичном кубе s -мерного евклидова пространства, такие, что

$$\left(\left\{ n_k^{(1)} \frac{x}{2\pi} \right\}, \left\{ n_k^{(2)} \frac{x}{2\pi} \right\}, \dots, \left\{ n_k^{(s)} \frac{x}{2\pi} \right\} \right) \notin \Delta \quad \text{для } x \in E, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

При $s = 1$ множество типа $H^{(s)}$ есть обычное H -множество.

Пятацкий-Шапиро [4] доказал для любого $s \geq 2$ существование $H^{(s)}$ -множества, не содержащегося в объединении счетного числа $H^{(s-1)}$ -множеств.

Замыкания H - и $H^{(s)}$ -множеств, как видно из определений, сами являются H - и $H^{(s)}$ -множествами, соответственно. Райхман доказал, что H -множества, а Пятацкий-Шапиро, что $H^{(s)}$ -множества, являются множествами единственности.

Далее мы докажем ряд утверждений, в которых исключительными множествами будут выступать $H^{(s)}$ -множества и счетные объединения таких множеств.

ЛЕММА 7. Пусть $F(x)$ — функция Римана ряда S вида (1), (2). Если $\overline{D}^2 F(x) \geq 0$ для $x \in [0, 2\pi) \setminus E$, где E есть $H^{(s)}$ -множество, то функция $F(x)$ выпуклая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно (см. [1, с. 813–815], что для множества E типа $H^{(s)}$ можно построить последовательность функций

$$\lambda_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k^{(n)} e^{ikx},$$

обладающую свойствами:

- 1) $\lambda_n(x) = 0$ для $x \in E$, $\lambda_n(x) \geq 0$ на $[0, 2\pi)$;
- 2) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k \alpha_k^{(n)}| < \infty$;
- 3) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k^{(n)}| < C$, где C — постоянное число;
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_k^{(n)} = 0$ для $k \neq 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_0^{(n)} = 1$.

Рассмотрим формальные произведения рядов Фурье функций $\lambda_n(x)$ и ряда S – ряды $\sigma_n = \sum_m K_m^{(n)} e^{imx}$ (см. [15]). Пусть $F(x)$ – функция Римана ряда S , а $F_n(x)$ – функции Римана рядов σ_n . Ввиду свойства 1), из леммы 3 следует, что

$$\overline{D}^2 F_n(x) = \lambda_n(x) \overline{D}^2 F(x) \geq 0 \quad \text{при } x \in [0, 2\pi) \setminus E$$

и

$$D^2 F_n(x) = 0 \quad \text{на } E.$$

То есть $\overline{D}^2 F_n(x) \geq 0$ всюду на $[0, 2\pi)$ и, следовательно, $F_n(x)$ – выпуклые функции. В силу леммы Райхмана (см. [1, с. 812]) из свойств 2)–4) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_m^{(n)} = c_m = \frac{a_m - ib_m}{2} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (19)$$

Заметим также, что

$$|K_m^{(n)}| = \left| \sum_{r=-\infty}^{\infty} \alpha_r^{(n)} c_{m-r} \right| \leq \max_m |c_m| \cdot \sum_r |\alpha_r^{(n)}| \leq \text{const}. \quad (20)$$

Функции Римана рядов σ_n и S имеют вид

$$F_n(x) = \frac{K_0^{(n)}}{2} x^2 - \sum_{m \neq 0} \frac{K_m^{(n)} e^{imx}}{m^2} + A_n x + B_n$$

и

$$F(x) = \frac{c_0 x^2}{2} - \sum_{m \neq 0} \frac{c_m e^{imx}}{m^2} + Ax + B.$$

Пусть $F_n^0(x) = F_n(x) - A_n x - B_n$, $F^0(x) = F(x) - Ax - B$. Тогда ввиду (19) и (20)

$$|F^0(x) - F_n^0(x)| = \left| \frac{c_0 - K_0^{(n)}}{2} x^2 + \sum_{m \neq 0} \frac{K_m^{(n)} - c_m}{m^2} e^{imx} \right|$$

стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Функции $F_n^0(x)$ выпуклы, так как отличаются от выпуклых функций $F_n(x)$ на линейные слагаемые, поэтому функция $F^0(x)$ выпукла как предел последовательности выпуклых функций $F_n^0(x)$. Тогда $F(x)$ тоже выпукла, так как отличается от $F^0(x)$ на линейную функцию. Лемма доказана.

ЛЕММА 8. Пусть

$$F(x) = \frac{a_0 x^2}{4} + Ax + B - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2},$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Если $\overline{D}^2 F(x) \geq 0$ при $x \in (a, b) \setminus E$, где E есть $H^{(s)}$ -множество, то $F(x)$ выпукла на (a, b) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, можем считать, что $(a, b) \subset [0, 2\pi)$. Пусть $0 < \varepsilon < (b - a)/2$. Возьмем функцию $\lambda(x)$, равную нулю на $[0, 2\pi) \setminus (a, b)$, равную единице на $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$, положительную на (a, b) и имеющую три непрерывные производные. Пусть ряд σ есть формальное произведение ряда Фурье функции $\lambda(x)$ и ряда

$$S = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

а $\Phi(x)$ — функция Римана ряда σ . Тогда $F(x)$ является функцией Римана ряда S и ввиду леммы 3 и свойств функции $\lambda(x)$

$$\overline{D}^2 \Phi(x) = \lambda(x) \overline{D}^2 F(x) \geq 0 \quad \text{на } [0, 2\pi).$$

Следовательно, $\Phi(x)$ — выпуклая функция. Заметим, что на $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$ функция $F(x)$ отличается от $\Phi(x)$ разве лишь на линейную функцию. Действительно, так как ряд $\sigma - \lambda(x) \cdot S$ сходится к нулю всюду (см. (16)), а на $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$ это означает, что $\sigma - S$ сходится к нулю, а, значит, и суммируется к нулю методом Римана, то функция Римана ряда $\sigma - S$, равная $\Phi(x) - F(x)$, линейна на $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$. Следовательно, $F(x)$ выпукла на $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$ и в силу произвольности ε на (a, b) . Лемма доказана.

ЛЕММА 9. Пусть $F(x)$ — функция Римана ряда S вида (1), (2). Если $\underline{D}^2 F(x) > 0$ при $x \in [0, 2\pi) \setminus E$, где $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ и E_k являются $H^{(s_k)}$ -множествами для некоторых натуральных s_k , то $F(x)$ — выпуклая функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $\{x : \underline{D}^2 F(x) < 0\} \neq \emptyset$. Заметим, что

$$\{x : \underline{D}^2 F(x) > 0\} \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m \subset \{x : \underline{D}^2 F(x) \geq 0\},$$

где $F_m = \{x : \Delta_h^2 F(x) \geq 0 \text{ при } |h| < 1/m\}$ — замкнутые множества в силу непрерывности $F(x)$. Переходя к дополнениям этих множеств, получим

$$\{x : \underline{D}^2 F(x) < 0\} \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} G_m \subset \{x : \underline{D}^2 F(x) \leq 0\},$$

где $G_m = [0, 2\pi) \setminus F_m$ — открытые множества.

Положим

$$G = \bigcup \{(\alpha, \beta) : \{x : \underline{D}^2 F(x) < 0\} \cap (\alpha, \beta) = \emptyset\}$$

и $\mathcal{E} = \bigcap_{m=1}^{\infty} G_m \setminus G$. Тогда $\mathcal{E}$ типа G_δ , так как G — открытое множество. Из условия леммы следует, что

$$\mathcal{E} \subset E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Так как замыкание $H^{(s_k)}$ -множества является $H^{(s_k)}$ -множеством, то, не ограничивая общности, будем считать, что множества E_k замкнуты. Так как $\mathcal{E}$ — множество

типа G_δ , то найдутся номер k и интервал (a, b) такие, что $\emptyset \neq (a, b) \cap E_k \cap \mathcal{E}$ плотно в $(a, b) \cap \mathcal{E}$ и в силу замкнутости E_k

$$(a, b) \cap \mathcal{E} \subset (a, b) \cap E_k.$$

Тогда $\underline{D}^2 F(x) \geq 0$ на смежных к E_k в (a, b) интервалах, где $E_k \in H^{(s_k)}$. В силу леммы 8 отсюда следует, что функция $F(x)$ выпукла на (a, b) . Но тогда $\underline{D}^2 F(x) \geq 0$ на (a, b) и, следовательно, $(a, b) \subset G$. Это противоречит тому, что $\mathcal{E} \cap (a, b) \neq \emptyset$. Следовательно, предположение о том, что $\{x : \underline{D}^2 F(x) < 0\} \neq \emptyset$ приводит к противоречию. Значит, $\underline{D}^2 F(x) \geq 0$ на $[0, 2\pi)$ и $F(x)$ выпукла на $[0, 2\pi)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 10. Пусть $F(x)$ — функция Римана ряда S вида (1), (2). Если $\underline{D}^2 F(x) \geq 0$ при $x \in (a, b) \setminus E$, где $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, $E_k \in H^{(s_k)}$, то $F(x)$ выпукла на (a, b) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $(a, b) = (0, 2\pi)$ и $\underline{D}^2 F(x) \geq 0$ на $(0, 2\pi) \setminus E$. Так как $F(x)$ является пределом функций $F_n(x) = F(x) + (1/n)x^2$, а $\underline{D}^2 F_n(x) = \underline{D}^2 F(x) + (2/n) > 0$ на $(0, 2\pi) \setminus E$, то в силу леммы 9 функции $F_n(x)$ выпуклы на $(0, 2\pi)$, а следовательно, и $F(x)$ выпукла на $(0, 2\pi)$.

Случай $\underline{D}^2 F(x) \geq 0$ на $(a, b) \setminus E$ сводится к предыдущему умножением на функцию $\lambda(x)$ так же, как в лемме 8. Лемма доказана.

Частичным обобщением леммы (3.9) из [5, с. 514] является

ЛЕММА 11. Пусть $F(x)$ — функция Римана тригонометрического ряда вида (1), (2) и

$$\underline{D}^2 F(x) \geq f(x) \quad \text{на} \quad (a, b) \setminus E,$$

где $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, E_k являются $H^{(s_k)}$ -множествами для некоторых s_k , а $f(x)$ — интегрируемая на (a, b) функция такая, что $f(x) \neq -\infty$, $x \in (a, b)$. Тогда функция

$$G(x) = F(x) - \int_a^x dy \int_a^y f(t) dt$$

выпукла на (a, b) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $(a, b) = (0, 2\pi)$. Известно, что для интегрируемой функции $f(x)$ существует последовательность минорантных функций $u_n(x)$ таких, что $u_n(x)$ абсолютно непрерывны,

$$\left| u_n(x) - \int_0^x f(t) dt \right| < \frac{1}{n}, \quad x \in (0, 2\pi), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

и $\overline{D}u_n(x) \leq f(x)$ там, где $f(x)$ конечна, $\overline{D}u_n(x) \neq +\infty$. Здесь

$$\overline{D}u(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

— верхнее производное число функции $u(x)$.

$$\text{Положим } U_n(x) = \int_0^x u_n(t) dt.$$

Нетрудно видеть (см., например, [1, с. 785]), что

$$\overline{D}^2 U_n(x) \leq \overline{D} u_n(x).$$

Тогда

$$\overline{D}^2 U_n(x) \leq \overline{D} u_n(x) \leq f(x) \leq \underline{D}^2 F(x) \quad \text{на } (0, 2\pi) \setminus E.$$

Отсюда следует, что

$$\underline{D}^2 F(x) \geq \overline{D}^2 U_n(x), \quad x \in (0, 2\pi) \setminus E,$$

причем $\overline{D}^2 U_n(x) \neq +\infty$, а $\underline{D}^2 F(x) \neq -\infty$ на $(0, 2\pi) \setminus E$. Но тогда

$$\underline{D}^2 (F(x) - U_n(x)) \geq \underline{D}^2 F(x) - \overline{D}^2 U_n(x) \geq 0, \quad x \in (0, 2\pi) \setminus E$$

(так как $\underline{D}^2 F(x)$ и $\overline{D}^2 U_n(x)$ не могут быть бесконечностями одного знака).

Заметим, что $U_n(x)$ является функцией Римана ряда Фурье функции $u'_n(x)$. Следовательно, $F(x) - U_n(x)$ — функция Римана ряда вида (1), (2). Отсюда и из леммы 10 следует, что функция $F(x) - U_n(x)$ выпукла на $(0, 2\pi)$. При $n \rightarrow \infty$ последовательность функций $F(x) - U_n(x)$ сходится к

$$G(x) = F(x) - \int_0^x dy \int_0^y f(t) dt,$$

поэтому $G(x)$ тоже выпукла на $(0, 2\pi)$.

Рассмотрим теперь произвольный интервал $(a, b) \subset (0, 2\pi)$. Для каждого натурального n определим функцию $\lambda_n(x)$, равную нулю на $[0, 2\pi) \setminus (a, b)$, равную единице на $(a + 1/n, b - 1/n)$, неотрицательную на (a, b) и имеющую три непрерывные производные. Пусть ряд σ_n есть формальное произведение ряда Фурье функции $\lambda_n(x)$ и ряда S , а $\Phi_n(x)$ — функция Римана ряда σ_n . Положим, далее,

$$f_n(x) = \begin{cases} \lambda_n(x)f(x), & x \in (a, b), \\ 0, & x \in [0, 2\pi) \setminus (a, b). \end{cases}$$

В силу леммы 3 и условия теоремы

$$\underline{D}^2 \Phi_n(x) = \lambda_n(x) \underline{D}^2 F(x) \geq f_n(x), \quad x \in (0, 2\pi) \setminus E.$$

Тогда по доказанному для интервала $(0, 2\pi)$ отсюда следует, что функция

$$\Phi_n(x) - \int_0^x dy \int_0^y f_n(t) dt = \Phi_n(x) - \int_a^x dy \int_a^y f_n(t) dt$$

выпукла на $(0, 2\pi)$.

Как легко видеть, для $x \in (a, b)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x dy \int_a^y f_n(t) dt = \int_a^x dy \int_a^y f(t) dt.$$

Так как ряд $\sigma_n - \lambda_n(x) \cdot S$ сходится к нулю на $[0, 2\pi)$ (см. (16)), а на интервале $(a+1/n, b-1/n)$ это означает, что ряд $\sigma_n - S$ сходится к нулю, то разность функций Римана $\Phi_n(x) - F(x)$ линейна на $(a+1/n, b-1/n)$. Следовательно, функция

$$G_n(x) = F(x) - \int_a^x dy \int_a^y f_n(t) dt$$

выпукла на $(a+1/n, b-1/n)$. Зафиксируем натуральное N . Тогда функция

$$F(x) - \int_a^x dy \int_a^y f(t) dt$$

выпукла на $(a+1/N, b-1/N)$ как предел выпуклых функций $G_n(x)$, и в силу произвольности N выпукла на (a, b) . Лемма доказана.

С помощью леммы 11 может быть доказана напоминающая теорему А

ТЕОРЕМА 5. Пусть $F(x)$ — функция Римана ряда S вида (1), (2). Если

$$D^2 F(x) = f(x), \quad x \in (a, b) \setminus E,$$

где $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, E_k являются $H^{(s_k)}$ -множествами, а $f(x)$ — интегрируемая функция, конечная на $(a, b) \setminus E$, то

$$F(x) = \int_a^x dy \int_a^y f(t) dt + Ax + B.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства $\underline{D}^2 F(x) \geq f(x)$, $x \in (a, b) \setminus E$, в силу леммы 11 следует, что функция

$$G(x) = F(x) - \int_a^x dy \int_a^y f(t) dt$$

выпукла на (a, b) .

Полагая $F_1(x) = -F(x)$, $f_1(x) = -f(x)$, неравенство

$$\overline{D}^2 F(x) \leq f(x), \quad x \in (a, b) \setminus E,$$

можно переписать в виде

$$\overline{D}^2 (-F_1(x)) \leq -f_1(x), \quad x \in (a, b) \setminus E,$$

или

$$\underline{D}^2 F_1(x) \geq f_1(x), \quad x \in (a, b) \setminus E.$$

Отсюда в силу леммы 11 следует, что функция

$$G_1(x) = F_1(x) - \int_a^x dy \int_a^y f_1(t) dt = -\left(F(x) - \int_a^x dy \int_a^y f(t) dt\right) = -G(x)$$

выпукла, а $G(x)$ вогнута. Следовательно, $G(x)$ линейна, т.е.

$$F(x) = \int_a^x dy \int_a^y f(t) dt + Ax + B.$$

Теорема доказана.

Теперь может быть доказана являющаяся обобщением теоремы 2 Валле-Пуссена (с условием (10)).

ТЕОРЕМА 6. Пусть S – ряд вида (1), (2), $F(x)$ – функция Римана ряда S , f – конечная интегрируемая функция на $[0, 2\pi) \setminus E$, $E \subset [0, 2\pi)$, $E = E_0 \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, где E_0 – замкнутое множество единственности, а E_k являются $H^{(s_k)}$ -множествами для некоторых s_k ($k = 1, 2, 3, \dots$). Если для ряда S выполняется условие

$$D^2 F(x) = f(x) \quad \text{для } x \in [0, 2\pi) \setminus E, \quad (21)$$

то S есть ряд Фурье функции $f(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (a_i, b_i) – смежные интервалы к множеству E_0 . Тогда на каждом таком интервале условие (21) выполняется для $x \in (a_i, b_i) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. В силу теоремы 5

$$F(x) = \int_{a_i}^x dy \int_{a_i}^y f(t) dt + A_i x + B_i \quad \text{для } x \in (a_i, b_i).$$

Сравним $F(x)$ с функцией Римана $\Phi(x)$ ряда Фурье $S(f)$ функции $f(x)$. Известно, что

$$\Phi(x) = \int_0^x dy \int_0^y f(t) dt + Ax + B.$$

Следовательно, $F(x) - \Phi(x)$ линейна на интервалах (a_i, b_i) ,

$$D^2(F(x) - \Phi(x)) = 0 \quad \text{для } x \in (a_i, b_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Это означает, что ряд $S - S(f)$ суммируется методом Римана к нулю на $(0, 2\pi) \setminus E_0$. Но множество E_0 как замкнутое $\mathcal{U}$ -множество является также $\mathcal{U}(R)$ -множеством. Следовательно, $S = S(f)$. Теорема доказана.

Из теоремы 6 следует обобщение теоремы 1 Валле-Пуссена

ТЕОРЕМА 7. Если тригонометрический ряд сходится к конечной интегрируемой функции всюду на $[0, 2\pi)$ за исключением точек множества $E = E_0 \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, где E_0 – замкнутое множество единственности, а E_k являются $H^{(s_k)}$ -множествами для некоторых s_k ($k = 1, 2, 3, \dots$), то он является рядом Фурье этой функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из сходимости тригонометрического ряда почти всюду к конечным значениям следует в силу теоремы Кантора–Лебега, что коэффициенты ряда стремятся к нулю. Тогда для данного ряда выполняется условие (21) теоремы 6 и, следовательно, он является рядом Фурье своей суммы. Теорема доказана.

Поведение приведенного ядра R -нуль-ряда уточняет

ЛЕММА 12. Пусть S – нуль-ряд для метода Римана, $F(x)$ – функция Римана ряда S , $E \subset [0, 2\pi)$, $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, где E_k являются $H^{(s_k)}$ -множествами. Пусть $\mathcal{N}_- = \{x : \underline{D}^2 F(x) = -\infty\} \neq \emptyset$. Тогда и $\mathcal{N}_- \setminus E \neq \emptyset$.

Аналогичное утверждение справедливо для $\mathcal{N}_+ = \{x : \overline{D}^2 F(x) = +\infty\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как S является R -нуль-рядом, то $D^2F(x) = 0$ почти всюду. Допустим, что $\mathcal{N}_- \setminus E = \emptyset$. Положим $f(x) = \underline{D}^2F(x)$. Тогда

$$\underline{D}^2F(x) = f(x) > -\infty \quad \text{для } x \in [0, 2\pi) \setminus E.$$

В силу леммы 11 функция

$$F(x) - \int_0^x dy \int_0^y f(t) dt = F(x)$$

выпукла на $[0, 2\pi)$ и, следовательно, $\underline{D}^2F(x) \geq 0$ на $[0, 2\pi)$, что противоречит условию $\mathcal{N}_- \neq \emptyset$. Поэтому $\mathcal{N}_- \setminus E \neq \emptyset$. Случай множества $\mathcal{N}_+$ сводится к предыдущему рассмотрением ряда $-S$. Лемма доказана.

Известна следующая (см. [5, с. 515])

ТЕОРЕМА БАНАХА–ШТЕЙНГАУЗА. Если тригонометрический ряд S сходится всюду к конечной функции $f(x)$, причем $f(x) \geq g(x)$, где $g(x)$ интегрируема, то $f(x)$ тоже интегрируема и S есть ряд Фурье своей суммы.

Теорема остается справедливой, если сходимость и неравенство выполняются всюду за исключением счетного множества точек. К этому кругу вопросов относится также

ТЕОРЕМА В. А. СКВОРЦОВА [6]. Если тригонометрический ряд (1), (2) суммируем методом Римана вне замкнутого H -множества к конечной функции $f(x)$, и если $f(x) \geq g(x)$, где $g(x)$ интегрируема на $[0, 2\pi)$, то $f(x)$ интегрируема на $[0, 2\pi)$, и ряд есть ряд Фурье функции $f(x)$.

Обобщением этих теорем является

ТЕОРЕМА 8. Пусть S – ряд вида (1), (2), $F(x)$ – функция Римана ряда S , $D^2F(x) = f(x)$ конечна на $[0, 2\pi) \setminus E$ и

$$D^2F(x) \geq g(x) \quad \text{на } [0, 2\pi) \setminus E, \quad (22)$$

где $g(x)$ – интегрируемая функция, а $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, где E_k являются $H^{(s_k)}$ -множествами. Тогда S является рядом Фурье.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 11 из (22) следует, что функция

$$G(x) = F(x) - \int_0^x dy \int_0^y g(t) dt$$

выпукла на $(0, 2\pi)$, значит, $\underline{D}^2G(x) \geq 0$ на $(0, 2\pi)$. Можем считать, что $g(x)$ – 2π -периодическая функция. Тогда неравенство $\underline{D}^2G(x) \geq 0$ выполняется на $(-\varepsilon, 0) \cup (0, 2\pi) \cup (2\pi, 2\pi + \varepsilon)$ для $0 < \varepsilon < 2\pi$. Но в точках $x = 0$ и $x = 2\pi$ функция $G(x)$ гладкая, так как $F(x)$ – гладкая функция и $\int_0^x dy \int_0^y g(t) dt$ тоже гладкая функция. Отсюда следует, что $G(x)$ выпукла на $(-\varepsilon, 2\pi + \varepsilon)$ и $D^2G(x)$ почти всюду существует и интегрируема на $(0, 2\pi)$. Тогда $D^2F(x)$ тоже интегрируема на $(0, 2\pi)$. Отсюда в силу теоремы 6 следует, что S есть ряд Фурье функции $f(x)$. Теорема доказана.

В частности, из теоремы 8 следует, что если сумма тригонометрического ряда конечна и неотрицательна вне множества типа H_σ , то она является интегрируемой функцией, и ряд есть ряд Фурье своей суммы.

Теоремы 1, 3 и 7 анонсированы в [7].

Список литературы

1. *Барн Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
2. *Carlet C., Debs G.* Un résultat sur les ensembles d'unicité du tore // Semin. d'Init. à l'Analyse, G. Choquet-m. Rogalski-Y. Saint Raymond, 24-ème année, 1984-85.
3. *Холщевникова Н. Н.* О сумме меньше континуума замкнутых U -множеств // Вестник МГУ. Сер. матем., мех. 1981. №1. С. 51-55.
4. *Пятецкий-Шапиро И. И.* К проблеме единственности разложения функций в тригонометрический ряд // Ученые записки МГУ. Математика. 1952. Вып. 155. Т. 5. С. 54-72.
5. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.
6. *Скворцов В. А.* О тригонометрических рядах, сходящихся к неотрицательным функциям // Вестник МГУ. Сер. матем., мех. 1962. №5. С. 3-10.
7. *Холщевникова Н. Н.* К теореме Валле-Пуссена о единственности представления // Международная конференция "Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ" (апрель-май 1995 г.). Тезисы докладов. М.: Изд-во ПАИМС, 1995. С. 288.

Московский государственный
технологический университет "Станкин"

Поступила в редакцию
05.10.1995