Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Арсеньев, Резонансные свойства матрицы рассеяния для одномерного оператора Шрёдингера с ловушечным потенциалом, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 6, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm133>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 14:39:47

УДК 517.95

А. А. Арсеньев

Резонансные свойства матрицы рассеяния для одномерного оператора Шрёдингера с ловушечным потенциалом

В статье приведено математически строгое описание резонансного рассеяния на одномерном ловушечном потенциале.

Библиография: 8 названий.

§ 1. Введение

Поясним основные обозначения. Символами $x, y, \dots$, мы будем обозначать действительные числа: $x, y, \dots \in \mathbb{R}$, символом V мы будем обозначать функцию $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ со значениями на расширенной полуоси. Тем же символом V мы будем обозначать оператор умножения на функцию V . Предположим, что функция V достаточно “хорошая”: непрерывна по Гёльдеру на $\mathbb{R}$ и убывает при $|x| \rightarrow \infty$ быстрее экспоненты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Решением задачи рассеяния для оператора Шрёдингера

$$H = -\partial_{xx}^2 + V$$

мы называем функции $u^\pm(x, \lambda)$, удовлетворяющие уравнению

$$Hu^\pm = \lambda u^\pm, \quad \lambda > 0, \quad (1.1)$$

и при $|x| \rightarrow \infty$ имеющие асимптотику

$$u^+(x, \lambda) = T^+(\lambda) \exp(ix\sqrt{\lambda}) + o(1), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (1.2)$$

$$u^+(x, \lambda) = \exp(ix\sqrt{\lambda}) + R^+(\lambda) \exp(-ix\sqrt{\lambda}) + o(1), \quad x \rightarrow -\infty, \quad (1.2')$$

$$u^-(x, \lambda) = \exp(-ix\sqrt{\lambda}) + R^-(\lambda) \exp(ix\sqrt{\lambda}) + o(1), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (1.2'')$$

$$u^-(x, \lambda) = T^-(\lambda) \exp(-ix\sqrt{\lambda}) + o(1), \quad x \rightarrow -\infty. \quad (1.2''')$$

Существование и единственность решения задачи (1.1), (1.2) хорошо известны, современное учебное изложение этого вопроса есть в [1, с. 116–160].

Коэффициенты $T^\pm(\lambda)$, $R^\pm(\lambda)$ называются *коэффициентами прохода и отражения*. *Матрицей рассеяния* называется матрица, составленная из этих коэффициентов.

Работы выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-011-1689).

В квантовомеханической интерпретации коэффициент $T^\pm(\lambda)$ характеризует вероятность прохождения частицы через барьер V , коэффициент $R^\pm(\lambda)$ характеризует вероятность отражения частицы от потенциального барьера. В квантовомеханической интерпретации естественно, что если потенциал V принимает очень большие значения на некотором отрезке $[a, b]$, то модуль коэффициента $T^\pm(\lambda)$ мал, а модуль коэффициента $R^\pm(\lambda)$ примерно равен единице.

С начала семидесятых годов в связи с математическим моделированием “туннельного диода” и “квантовых проволок” внимание физиков привлек обнаруженный в численных экспериментах и простейших расчетах факт: если потенциал V принимает большие значения на отрезках $[a, b]$, $[c, d]$ и мал в области $[b, c]$, то коэффициенты $R^\pm(\lambda)$, $T^\pm(\lambda)$ при некоторых значениях параметра λ имеют резко выраженные резонансы. Модуль коэффициента, $T^\pm(\lambda)$ в резонансе почти равен единице, а модуль коэффициента $R^\pm(\lambda)$ – нулю.

Наша работа посвящена изучению математической модели данного явления. Опишем основную идею применяемых нами методов.

Понятие “очень большое значение потенциала” мы формализуем, вводя потенциал V_∞ , который принимает бесконечно большие значения на множестве положительной меры, и монотонно возрастающую последовательность “хороших” потенциалов V_n , $V_n \rightarrow V_\infty$, $n \rightarrow \infty$. Задача сводится к исследованию поведения решения задачи (1.1), (1.2) с $V = V_n$ при $n \rightarrow \infty$.

Для этого мы должны рассмотреть задачу (1.1), (1.2) при $V = V_\infty$. Ясно, что в этой ситуации не работает традиционный способ сведения дифференциального уравнения к интегральному с помощью функции Грина оператора главной части. Поэтому мы применяем другую стратегию.

По каждому потенциалу V_n мы строим самосопряженный оператор

$$H_n = -\partial_{xx}^2 + V_n, \quad H_0 = -\partial_{xx}^2, \quad V_0 = 0,$$

и рассматриваем последовательность операторов

$$G_n(t) = \exp(-tH_n).$$

Оператор $G_n(t)$ – это интегральный оператор с ядром – функцией Грина оператора теплопроводности (в другой интерпретации – плотность вероятности перехода для процесса броуновского движения с убывающим потенциалом V_n). Из принципа максимума для уравнения теплопроводности сразу же следует, что существует предел

$$G_\infty(t) = \lim G_n(t), \quad n \rightarrow \infty,$$

и операторы $G_\infty(t)$ образуют полугруппу самосопряженных в $L^2(\mathbb{R}, dx)$ операторов. Под оператором

$$H_\infty = -\partial_{xx}^2 + V_\infty$$

мы по определению понимаем взятый со знаком минус инфинитезимальный оператор полугруппы $G_\infty(t)$. Из общей теории полугрупп следует, что так определенный оператор H_∞ самосопряжен. Подчеркнем, что для описания области определения оператора H_∞ мы не используем граничные условия.

Прием, состоящий в построении самосопряженного расширения предельного оператора как инфинитезимального оператора предельной полугруппы, является

стандартным в квантовой теории поля, начиная с работ Э. Нельсона шестидесятых годов. Учебное изложение связанных с этим вопросов и ссылки на литературу есть в [2]. Еще до работ Э. Нельсона в теории марковских процессов стандартным приемом было описание инфинитезимального оператора процесса в терминах его переходных вероятностей (чем мы, в сущности, и занимаемся). Но нам нужно не описание области определения инфинитезимального оператора (что обычно составляет предмет исследования), а конструктивный способ описания его специально выбранных собственных функций непрерывного спектра. Принцип инвариантности волновых операторов [3, с. 672] в теории рассеяния позволяет утверждать, что с точностью до естественной замены матрица рассеяния для пары H_0, H_∞ совпадает с матрицей рассеяния для пары $\exp(-tH_0), \exp(-tH_\infty)$, поэтому нам нужно найти способ описания удовлетворяющих условию излучения собственных функций непрерывного спектра оператора $\exp(-tH_\infty)$. В качестве такого способа предлагается сведение краевой задачи (1.1), (1.2) к интегральному уравнению:

$$\begin{aligned} u^\pm(x, \lambda) &= \exp(\pm ix\sqrt{\lambda}) + \varphi^\pm(x, \lambda), \\ \varphi^\pm &= (\exp(-(\lambda + i0)t) - \exp(-tH_0))^{-1} \\ &\quad \times (\exp(-tH) - \exp(-tH_0))(\exp(\pm i(\cdot)\sqrt{\lambda}) + \varphi^\pm). \end{aligned} \quad (1.3)$$

В уравнение (1.3) потенциал V входит только через $\exp(-t(H_0 + V))$, поэтому уравнение (1.3) остается “хорошим” для сколь угодно “плохих” неотрицательных потенциалов.

Мы применяем уравнение (1.3) и стандартную технику теории возмущений ограниченных операторов для изучения поведения задачи (1.1), (1.2) при предельном переходе $V_n \rightarrow V_\infty, n \rightarrow \infty$. При таком подходе принцип максимума для уравнения теплопроводности делает все предельные переходы с идейной точки зрения абсолютно тривиальными. Но поскольку в (1.3) входит произведение операторов, выписывание всех промежуточных оценок ведет к утомительному выписыванию очень громоздких формул, содержащих оценки интегралов по неравенству Коши–Буняковского. Поэтому мы в ряде мест позволили себе привести лишь формулировку окончательных результатов. Некоторые из приведенных в работе фактов хорошо известны, однако мы формулируем их в виде лемм и теорем для удобства ссылок. Используемые нами методы аналогичны методам, примененным в [4]–[7], а теорема 5.1 аналогична результату, полученному в [6] для абстрактного случая. Новым в данной работе мы считаем два результата: теоремы 5.1, 5.2 и использование уравнения (1.3) в описании решения задачи рассеяния для одномерного оператора Шрёдингера.

Из теоремы 5.1 следует, что для достаточно четко выраженной потенциальной ловушки существуют такие точки λ , в которых коэффициенты $T^\pm(\lambda), R^\pm(\lambda)$ испытывают резкий скачок, а из теоремы 5.2 следует, что для симметричного потенциального барьера коэффициент прохождения в резонансе почти равен единице. Это утверждение и есть основной результат работы.

§ 2. Вспомогательные построения

В этом параграфе мы приведем основные определения и некоторые нужные нам утверждения, которые являются либо очевидными следствиями явно выписываемых формул, либо незначительными переформулировками известных фактов.

Приведем определение ловушечного потенциала.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Действительная неотрицательная функция $V_\infty: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ называется *ловушечным потенциалом*, если она принимает значения на расширенной полупрямой, множество

$$\omega = \{x : V_\infty(x) = \infty\} \quad (2.1)$$

не пусто и есть объединение конечного числа непересекающихся отрезков:

$$\omega = \bigcup [a_i, b_i], \quad 1 \leq i \leq N, \quad -\infty < a_i < b_i < \infty, \quad (2.2)$$

а функция $\min(n, V_\infty)$ при каждом $n < \infty$ локально удовлетворяет условию Гёльдера и при некотором $r < \infty$ с положительными константами выполнена оценка:

$$V_\infty(x) < C \exp(-dx^2), \quad |x| > r. \quad (2.3)$$

В дальнейшем символом $\{V_n\}$ мы обозначим монотонно неубывающую последовательность функций, которые локально удовлетворяют условию Гёльдера и оценке:

$$\min(n, V_\infty) \leq V_n \leq \min(n+1, V_\infty), \quad (2.4)$$

где V_∞ – ловушечный потенциал.

При достаточно большом n функцию V_n мы также будем называть ловушечным потенциалом.

На множестве C_b^2 всех дважды непрерывно дифференцируемых и ограниченных вместе с производными функций рассмотрим оператор

$$H_n: u \rightarrow H_n u = -\partial_{xx}^2 u + V_n u. \quad (2.5)$$

Тем же символом H_n при $n < \infty$ мы будем обозначать самосопряженное расширение в $L^2(\mathbb{R}, dx)$ оператора, заданного формулой (2.5) на множестве финитных функций.

Пусть

$$G_n(t) = \exp(-tH_n),$$

где $G_n(x, y, t)$ – интегральное ядро оператора $G_n(t)$,

$$G_0(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right),$$

$$g_n(x, y, t) = G_0(x, y, t) - G_n(x, y, t),$$

где $g_n(x, y, t)$ – интегральное ядро оператора $g_n(t)$.

ЛЕММА 2.1. *Справедливы оценки*

$$0 \leq G_\infty(x, y, t) \leq G_{n+1}(x, y, t) \leq G_n(x, y, t) \leq G_0(x, y, t), \quad (2.6)$$

$$0 \leq g_n(x, y, t) \leq g_{n+1}(x, y, t) \leq g_\infty(x, y, t) \leq C \exp(-\eta(x^2 + y^2)). \quad (2.7)$$

Константы в правой части (2.7) зависят только от t и по определению

$$g_\infty(x, y, t) = \lim g_n(x, y, t), \quad n \rightarrow \infty,$$

$$G_\infty(x, y, t) = \lim G_n(x, y, t), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Монотонное убывание и неотрицательность последовательности $G_n(x, y, t)$ есть следствие принципа максимума, поэтому в доказательстве нуждается лишь последняя из оценок (2.7).

Две функции Грина G_n^i , отвечающие двум потенциалам V_n^i , удовлетворяют уравнению

$$G_n^1(x, y, t) - G_n^2(x, y, t) = \int_0^t \left(\int_{-\infty}^{+\infty} G_n^1(x, z, t-\tau) (V_n^2(z) - V_n^1(z)) G_n^2(z, y, \tau) dz \right) d\tau.$$

Следовательно, если с не зависящими от n константами выполнено неравенство

$$0 \leq V_n^1(x) - V_n^2(x) < C \exp(-dx^2),$$

то с не зависящими от n константами будет выполнено неравенство

$$G_n^1(x, y, t) - G_n^2(x, y, t) \leq C \exp(-\eta(x^2 + y^2)). \quad (2.9)$$

Пусть $\varkappa(x)$ – бесконечно дифференцируемая функция, которая удовлетворяет условиям:

$$0 \leq \varkappa(x) \leq 1, \quad \varkappa(x) = 1, \quad |x| \leq r-1, \quad \varkappa(x) = 0, \quad |x| \geq r.$$

Положим

$$V_n^1(x) = V_n(x) \varkappa(x), \quad V_n^2(x) = V_n(x).$$

Тогда из (2.9) следует, что

$$0 \leq G_\infty^1(x, y, t) - G_\infty(x, y, t) \leq C \exp(-\eta(x^2 + y^2)).$$

Обозначая символом $G_r^0(x, y, t)$ функцию Грина для уравнения теплопроводности с нулевыми граничными условиями в точках $x = \pm r$, мы получаем

$$0 \leq G_0(x, y, t) - G_\infty^1(x, y, t) \leq G_0(x, y, t) - G_r^0(x, y, t) \leq C \exp(-\eta(x^2 + y^2)).$$

Складывая два последних неравенства, получаем утверждение леммы.

В дальнейшем числа a_i, b_i определены формулой (2.2).

Положим

$$b_0 = -\infty, \quad a_{N+1} = \infty.$$

Пространства $L^2((b_i, a_{i+1}), dx)$ мы будем рассматривать как подпространства $L^2(\mathbb{R}, dx)$, состоящие из равных нулю вне (b_i, a_{i+1}) функций.

ТЕОРЕМА 2.1. *Интегральные операторы $G_\infty(t)$ с ядром $G_\infty(x, y, t)$ в $L^2(\mathbb{R}, dx)$ образуют полугруппу самосопряженных операторов. Каждое из пространств $L^2((b_i, a_{i+1}), dx)$ приводит полугруппу $G_\infty(t)$, и в каждом из них она принадлежит классу C_0 . Инфинитезимальный оператор полугруппы $G_\infty(t)$ самосопряжен в $L^2(C\omega, dx)$ и в каждом из пространств $L^2((b_i, a_{i+1}), dx)$. На финитных в $C\omega$ функциях он вычисляется по формуле*

$$\partial_t G_\infty(t) \varphi|_{t=0} = \partial_{xx}^2 \varphi - V_\infty \varphi. \quad (2.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из оценки (2.6) и симметрии функции Грина $G_n(x, y, t)$ следует, что интегральный оператор $G_\infty(t)$ самосопряжен в каждом из пространств $L^2((b_i, a_{i+1}), dx)$. Функция $G_n(x, y, t)$ может быть вычислена по формуле

$$G_n(x, y, t) = G_0(x, y, t)E\left(\exp\left(-t \int_0^1 V_n(2\sqrt{t}(x(\tau) - \tau x(1)) + x + (y - x)\tau) d\tau\right)\right),$$

где символом $E(\dots)$ мы обозначили интеграл по мере Винера от функционала $x(\tau) \rightarrow F(x(\tau))$ броуновской траектории $\tau \rightarrow x(\tau)$, $0 \leq \tau \leq 1$.

Так как с вероятностью единица броуновская траектория непрерывна, функция $G_\infty(x, y, t)$ равна нулю, если точки x, y принадлежат разным компонентам связности множества $C\omega$, или если одна из них принадлежит внутренности ω . Отсюда следует, что оператор $G_\infty(t)$ приводит каждое из пространств $L^2((b_i, a_{i+1}), dx)$. Полугрупповое тождество для оператора $G_\infty(t)$ следует из полугруппового тождества для $G_n(t)$, формула (2.10) для инфинитезимального оператора следует из того факта, что в дополнении к любой окрестности множества ω функция $G_\infty(x, y, t)$ есть решение уравнения теплопроводности с потенциалом V_∞ .

Положим по определению

$$H_\infty = -\partial_t G_\infty(t)|_{t=0}.$$

Так как любая финитная в $C\omega$ функция принадлежит области определения оператора H_∞ , полугруппа $C_\infty(t)$ есть полугруппа самосопряженных операторов класса C_0 в $L^2(C\omega, dx)$ и в $L^2((b_i, a_{i+1}), dx)$, а оператор H_∞ самосопряжен в $L^2(C\omega, dx)$ и в каждом из пространств $L^2((b_i, a_{i+1}), dx)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2.2. При любом $a > 0$ и $n < \infty$ интегральные операторы $G_n(t)$ образуют полугруппу класса C_0 в $L^1(\mathbb{R}, \exp(-a|x|) dx)$. Интегральные операторы $G_\infty(t)$ образуют полугруппу класса C_0 в $L^1(C\omega, \exp(-a|x|) dx)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что оператор $G_0(t)$ ограничен в $L^1(\mathbb{R}, \exp(-a|x|) dx)$ при любом $a > 0$.

В дальнейшем мы будем считать, что параметр a выбран достаточно большим.

В следующих ниже рассуждениях параметр n может принимать любые значения, включая $n = \infty$.

ТЕОРЕМА 2.3. Если функция u из $L^\infty(\mathbb{R}, dx)$ при каком-нибудь $t > 0$ есть решение уравнения

$$\exp(-\lambda t)u = G_n(t)u, \quad |\operatorname{Im} \lambda| \leq \frac{\pi}{t}, \quad (2.11)$$

то функция u удовлетворяет этому уравнению при всех $t > 0$ и поэтому удовлетворяет уравнению

$$H_n u = \lambda u, \quad (2.12)$$

где при $n < \infty$ под H_n понимается инфинитезимальный оператор полугруппы $G_n(t)$ в $L^1(\mathbb{R}, \exp(-a|x|) dx)$, а при $n = \infty$ понимается инфинитезимальный оператор полугруппы $G_\infty(t)$ в $L^1(C\omega, \exp(-a|x|) dx)$.

Это утверждение есть переформулировка для рассматриваемого нами случая известного факта теории полугрупп класса A [8, теорема 16.7.2].

Положим

$$\begin{aligned} (\exp(-\lambda t) - G_0(t))^{-1} &= \exp(\lambda t)(E + K(\lambda)), \\ \lambda &\notin [0, \infty) \pmod{2\pi it}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

При преобразовании Фурье оператор $G_0(t)$ переходит в оператор умножения на $\exp(-k^2 t)$.

Перенос в формуле обращения контур интегрирования на гиперболу $\text{Im } k^2 = -\sigma < 0$, мы получаем, что оператор $K(\lambda)$ в (2.13) можно представить в виде

$$K(\lambda) = -\frac{1}{t}R(\lambda, H_0) + A(\lambda), \quad (2.14)$$

где $R(\lambda, H_0)$ интегральный оператор с ядром

$$R(\lambda, H_0)(x, y) = -\frac{i}{2\sqrt{\lambda}} \exp(i|x - y|\sqrt{\lambda}), \quad 0 < \arg(\sqrt{\lambda}) < \pi,$$

и

$$A(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \int \exp(-\mu t) (\exp(-\lambda t) - \exp(-\mu t))^{-1} R(\mu, H_0) d\mu. \quad (2.15)$$

Интеграл в (2.15) берется по параболу

$$\text{Re } \mu = \frac{1}{4}\sigma^{-2}(\text{Im } \mu)^2 - \sigma^2,$$

и σ выбрано настолько малым, что круг $|\lambda - \lambda_0 - 2\pi i| < \delta$ лежит выше параболы, а круг $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ лежит между ветвей параболы.

Из (2.14) и (2.15) следует

ТЕОРЕМА 2.4. *Каково бы ни было $\lambda_0 > 0$, существует такое $\delta > 0$, что в круге $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ оператор $K(\lambda)$ аналитичен по λ как оператор из $L^1(\mathbb{R}, \exp(a|x|) dx)$ в $L^1(\mathbb{R}, \exp(-a|x|) dx)$, и в круге $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ справедливо равенство*

$$(\exp(-\lambda t) - G_0(t)) \exp(\lambda t)(E + K(\lambda))\psi = \psi, \quad \psi \in L^1(\mathbb{R}, \exp(a|x|) dx). \quad (2.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В нем нуждается лишь формула (2.16) при $\text{Im } \lambda \leq 0$, а она получается аналитическим продолжением из области $\text{Im } \lambda > 0$ с учетом того факта, что оператор $(\exp(-\lambda t) - G_0(t))$ аналитичен по λ в $L^1(\mathbb{R}, \exp(-a|x|) dx)$.

Предположим, что g — интегральный оператор, ядро которого удовлетворяет оценке (2.7), $u \in L^1(\mathbb{R}, \exp(-a|x|) dx)$.

ТЕОРЕМА 2.5. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *функция*

$$I(x, \lambda) = -\exp(\lambda t)(E + K(\lambda))gu(x)$$

в области $\{\lambda : \text{Re } \lambda > 0, 0 < \text{Im } \lambda \leq \pi/t\}$ принадлежит $L^\infty(\mathbb{R}, dx)$ и при $|x| \rightarrow \infty$ убывает быстрее любой степени $1/|x|$;

2) в области $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > 0, -\pi/t \leq \lambda \leq 0\}$ функция $I(x, \lambda)$ удовлетворяет оценке

$$|I(x, \lambda)| \leq C \exp\left(\frac{\sqrt{\pi}}{t}|x|\right);$$

3) при $\lambda > 0$ функция $I(x, \lambda)$ ограничена по x и при $|x| \rightarrow \infty$ имеет асимптотику

$$\begin{aligned} I(x, \lambda) = & -\frac{1}{2t\sqrt{\lambda}} \exp(\lambda t + i|x|\sqrt{\lambda}) \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\mp i y \sqrt{\lambda}) g(y) dy + o(1), \quad x \rightarrow \pm\infty, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где $o(1)$ убывает быстрее любой степени $1/|x|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы есть очевидное следствие формул (2.14) и (2.15).

Положим

$$\begin{aligned} F_n(\lambda) &= (\exp(-\lambda t) - G_0(t))^{-1} (G_n(t) - G_0(t)) \\ &= -\exp(\lambda t) (E + K(\lambda)) g_n(t), \quad 0 < \operatorname{Im} \lambda \leq \frac{\pi}{t}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2.6. В ядерной топологии пространства

$$L^2(\mathbb{R}, \exp(-a|x|) dx) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \exp(-a|x|) dx)$$

оператор $F_n(\lambda)$ аналитичен по λ для $\operatorname{Re} \lambda > 0$, $|\operatorname{Im} \lambda| \leq \pi/t$. При $n \rightarrow \infty$ оператор $F_n(\lambda)$ сходится в ядерной топологии к оператору $F_\infty(\lambda)$ равномерно по λ на компактах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть B – оператор умножения на $\exp(-b|x|)$, $b > 0$. Справедливо равенство

$$\begin{aligned} g_n(t) &= G_0(t) - G_n(t) \\ &= \left(g_n\left(\frac{t}{2}\right) B^{-1}\right) \left(B G_0\left(\frac{t}{2}\right)\right) + \left(G_n\left(\frac{t}{2}\right) B\right) \left(B^{-1} g_n\left(\frac{t}{2}\right)\right). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Если параметр b выбран достаточно большим, то каждый из операторов (...) в (2.18) принадлежит классу Гильберта–Шмидта в $L^2(\mathbb{R}, \exp(-a|x|) dx)$.

Операторы

$$K(\lambda) g_n\left(\frac{t}{2}\right) B^{-1}, \quad K(\lambda) G_n\left(\frac{t}{2}\right) B$$

принадлежат классу Гильберта–Шмидта, аналитичны по λ в области $\operatorname{Im} \lambda > 0$ и имеют аналитическое продолжение в область $\operatorname{Im} \lambda \leq 0$. Сходимость операторов $F_n(\lambda)$ при $n \rightarrow \infty$ очевидна.

§ 3. Исследование основного интегрального уравнения

В $L^2(\mathbb{R}, \exp(-a|x|) dx)$ рассмотрим уравнение

$$\mu\psi = F_n(\lambda)\psi, \quad \lambda \in (0, \infty). \quad (3.1)$$

Введем билинейную форму

$$\langle f | \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x) dx. \quad (3.2)$$

ТЕОРЕМА 3.1. *Решение уравнения (3.1) удовлетворяет равенству*

$$\begin{aligned} & |\langle g_n\psi | \exp(i(\cdot)\sqrt{\lambda}) \rangle|^2 + |\langle g_n\psi | \exp(-i(\cdot)\sqrt{\lambda}) \rangle|^2 \\ &= -4t\sqrt{\lambda} \exp(-\lambda t) (\operatorname{Im} \mu) \langle g_n\psi | \psi \rangle. \end{aligned} \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.1) следует, что

$$\begin{aligned} \mu \langle g_n\bar{\psi} | \psi \rangle - \bar{\mu} \langle g_n\psi | \bar{\psi} \rangle &= 2i(\operatorname{Im} \mu) \langle g_n\bar{\psi} | \psi \rangle \\ &= -i \frac{\exp(\lambda t)}{2t\sqrt{\lambda}} (|\langle g_n\psi | \exp(i(\cdot)\sqrt{\lambda}) \rangle|^2 \\ &\quad + |\langle g_n\psi | \exp(-i(\cdot)\sqrt{\lambda}) \rangle|^2). \end{aligned}$$

Последнее равенство есть следствие формулы Сохоцкого, примененной к резольвенте оператора $G_0(t)$.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *При $\lambda \in (0, \infty)$ решение уравнения*

$$\psi = F_n(\lambda)\psi, \quad \psi \in L^2(\mathbb{R}, \exp(-a|x|) dx), \quad (3.4)$$

удовлетворяет равенству

$$|\langle g_n\psi | \exp(i(\cdot)\sqrt{\lambda}) \rangle|^2 + |\langle g_n\psi | \exp(-i(\cdot)\sqrt{\lambda}) \rangle|^2 = 0. \quad (3.5)$$

ТЕОРЕМА 3.2. *При $0 \leq \operatorname{Im} \lambda \leq \pi/t$, $\lambda \neq 0$, решение уравнения (3.4) удовлетворяет уравнению (2.12).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если функция $\psi \in L^2(\mathbb{R}, \exp(-a|x|) dx)$, то функция $g_n\psi \in L^1(\mathbb{R}, \exp(a|x|) dx)$, и мы можем умножить обе части (3.3) на $\exp(\lambda t)(E + K(\lambda))$, а потом воспользоваться теоремой 2.4. Получим, что решение уравнения (3.4) удовлетворяет уравнению (2.11) и поэтому уравнению (2.12).

Положим

$$\omega_2 = \bigcup (b_i, a_{i+1}), \quad 1 \leq i < N, \quad \omega_1 = (-\infty, a_1) \cup (b_N, \infty).$$

Заметим, что в $L^2(\omega_2, dx)$ оператор $G_\infty(t)$ вполне непрерывен, поэтому спектр сужения оператора H_∞ дискретен. Мы обозначим его через $\{\lambda_j\}$.

ТЕОРЕМА 3.3. *При $0 < \operatorname{Im} \lambda \leq \pi/t$ уравнение (3.4) имеет только тривиальное решение. При $\lambda \in (0, \infty)$ уравнение (3.4) имеет нетривиальное решение лишь при $n = \infty$, $\lambda \in \{\lambda_j\}$, и это решение есть собственная функция дискретного спектра оператора H_∞ , продолженная нулем на дополнение к $\omega 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $0 < \operatorname{Im} \lambda \leq \pi/t$, то решение уравнения (3.4) принадлежит $L^2(\mathbb{R}, dx)$ и удовлетворяет равенству (2.11), поэтому оно равно нулю. Если $\lambda \in (0, \infty)$, то решение уравнения (3.4) удовлетворяет уравнению (2.12) и в силу теоремы 2.5 и следствия 3.1 при $|x| \rightarrow \infty$ убывает быстрее любой степени $1/|x|$, поэтому оно равно нулю на $\omega 1$ при $n = \infty$ и равно нулю всюду, если $n < \infty$. Если $n = \infty$ и $\lambda \notin \{\lambda_j\}$, то решение уравнения (3.4) равно нулю, так как оно должно удовлетворять уравнению (2.11), а если $n = \infty$, $\lambda \in \{\lambda_j\}$, то оно либо нуль, либо совпадает с собственной функцией оператора H_∞ , продолженной нулем на дополнение к $\omega 2$. Теперь предположим, что $\psi(x, \lambda_j)$ – собственная функция оператора H_∞ , продолженная нулем на дополнение к $\omega 2$. Тогда она при всех $t > 0$ и $n = \infty$ удовлетворяет уравнению (2.11), а поэтому и уравнению

$$(\exp(-\lambda_j t) - G_0(t))\psi(\cdot, \lambda_j) = -g_\infty(t)\psi(\cdot, \lambda_j).$$

Применив теорему 2.4, мы получим, что $\psi(x, \lambda_j)$ удовлетворяет уравнению (3.4).

Из теорем 3.3 и 2.6 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *При $n < \infty$ операторная функция*

$$\lambda \rightarrow (E - F_n(\lambda))^{-1} \tag{3.6}$$

аналитична по λ в окрестности каждой точки $\lambda \in (0, \infty)$ как оператор в $L^2(\mathbb{R}, \exp(-a|x|) dx)$. При $n = \infty$ операторная функция (3.6) аналитична по λ в окрестности каждой точки $\lambda \in (0, \infty) \setminus \{\lambda_j\}$, и каждая точка λ_j есть полюс операторной функции (3.6). Операторная функция

$$\mu \rightarrow (\mu E - F_\infty(\lambda_j))^{-1}$$

в точке $\mu = 1$ имеет полюс.

Начиная с этого места, мы предположим, что λ_j – фиксированное простое собственное значение оператора H_∞ в $L^2(\omega 2, dx)$. Тогда в $L^2(\mathbb{R}, \exp(-a|x|) dx)$ размерность пространства решений уравнения

$$\psi = F_\infty(\lambda_j)\psi \tag{3.7}$$

равна единице, нормированное нетривиальное решение уравнения (3.7) совпадает с собственной функцией оператора H_∞ на $\omega 2$ и равно нулю на $\omega 1$. Обозначим это решение через $\psi(x, \lambda_j)$.

ТЕОРЕМА 3.4. Точка $\mu = 1$ есть алгебраически простое собственное значение оператора $F_\infty(\lambda_j)$, т. е.

- а) она есть полюс первого порядка для резольвенты $R(\mu, F_\infty(\lambda_j))$;
- б) размерность области значений проектора

$$P(\lambda_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|1-\mu|=\delta} R(\mu, F_\infty(\lambda_j)) d\mu \quad (3.8)$$

при $0 < \delta < \delta_0$ и δ_0 достаточно малом равна единице.

Заметим, что в рассматриваемом нами случае геометрически простого собственного значения, утверждения а) и б) эквивалентны [3, с. 60, задачи 5.12 и 5.13]. Доказательство теоремы 3.4 приведено в [4, теорема 8].

Рассмотрим проектор

$$P_{j,n}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|1-\mu|=\delta} R(\mu, F_n(\lambda_j)) d\mu. \quad (3.9)$$

Так как при $n \rightarrow \infty$ оператор $F_n(\lambda) \rightarrow F_\infty(\lambda)$ равномерно по λ на компактах, то очевидна

ЛЕММА 3.1. Существуют такие $\varepsilon > 0$ и $n_0 < \infty$, что при $n > n_0$ и $|\lambda - \lambda_j| < \varepsilon$ размерность области значений проектора (3.9) равна единице.

Из леммы 3.1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.3. При $n > n_0$ и $|\lambda - \lambda_j| < \varepsilon$ у оператора $F_n(\lambda)$ в круге $|1 - \mu| < \delta_0$ есть точно одно собственное значение $\mu_n(\lambda)$. Алгебраическая кратность собственного значения $\mu_n(\lambda)$ равна единице, поэтому функция $\mu \rightarrow R(\mu, F_n(\lambda))$ в точке $\mu_n(\lambda)$ имеет полюс первого порядка. Функция $\mu_n(\lambda)$ аналитична по λ в круге $|\lambda - \lambda_j| < \varepsilon$.

Последнее утверждение есть следствие формулы

$$\mu_n(\lambda) = \text{tr}(P_{n,j}(\lambda) F_n(\lambda)).$$

Из этой же формулы следует, что

$$\mu_n(\lambda) \rightarrow \mu_\infty(\lambda), \quad n \rightarrow \infty,$$

равномерно по λ в круге $|\lambda - \lambda_j| < \varepsilon$.

Пусть $\psi(\cdot \mid \lambda, n)$ — собственная функция оператора $F_n(\lambda)$, которая отвечает собственному значению $\mu_n(\lambda)$:

$$\mu_n(\lambda) \psi(\cdot \mid \lambda, n) = F_n(\lambda) \psi(\cdot \mid \lambda, n). \quad (3.10)$$

Заметим, что ее можно выбрать так, что она будет аналитична по λ , непрерывна по n и будет удовлетворять соотношению: $\psi(x \mid \lambda_j, \infty) = \psi(x, \lambda_j)$, где $\psi(x, \lambda_j)$ — собственная функция оператора H_∞ , продолженная нулем на дополнение к ω_2 .

ЛЕММА 3.2. *Справедлива формула*

$$\left. \frac{\partial \mu_\infty(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_j} = \frac{t \exp(-\lambda_j t)}{\langle \psi(\cdot, \lambda_j) | (\exp(-\lambda_j t) - G_0(t)) \psi(\cdot, \lambda_j) \rangle},$$

где $\psi(x, \lambda_j)$ нормирована на единицу относительно формы (3.1).

Доказательство этой леммы приведено в [4, лемма 4].

Из леммы 3.2 следует, что

$$\left. \frac{\partial \mu_\infty(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_j} \neq 0,$$

поэтому справедлива

ЛЕММА 3.3. *Можно так выбрать $\varepsilon > 0$ и $n_0 < \infty$, что при $n > n_0$ и $|\lambda - \lambda_j| < \varepsilon$ уравнение*

$$1 - \mu_n(\lambda) = 0$$

будет иметь точно один корень, который в дальнейшем мы будем обозначать через $\lambda_{j,n}$. Этот корень таков, что

$$\operatorname{Im} \lambda_{j,n} < 0, \quad n < \infty; \quad \lambda_{j,n} \rightarrow \lambda_j, \quad n \rightarrow \infty,$$

$$\left. \frac{\partial \mu_n(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_{j,n}} \neq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все утверждения леммы очевидны, за исключением первого неравенства, а оно следует из того факта, что при $0 < \operatorname{Im} \lambda \leq \pi/t$ и $n < \infty$ уравнение (3.1) нетривиальных решений не имеет.

ЛЕММА 3.4. *Проектор (3.9) может быть вычислен по формуле*

$$P_{j,n} \varphi = C_n^{-1}(\lambda) \psi(\cdot | \lambda, n) \langle \varphi | (\exp(-\lambda t) - G_0(t)) \psi(\cdot | \lambda, n) \rangle,$$

где

$$C_n(\lambda) = \langle \psi(\cdot | \lambda, n) | (\exp(-\lambda t) - G_0(t)) \psi(\cdot | \lambda, n) \rangle. \quad (3.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\beta(\cdot | \lambda, n) = (\exp(-\lambda t) - G_0(t)) \psi(\cdot | \lambda, n).$$

Из (3.10) следует, что справедлива оценка

$$|\beta(x | \lambda, n)| < C \exp(-\eta x^2).$$

Из этой оценки и теоремы 2.4 следует равенство

$$\mu_n(\lambda) \beta = -g_n (\exp(-\lambda t) - G_0(t))^{-1} \beta,$$

поэтому β есть собственная функция оператора, сопряженного к $F_n(\lambda)$ относительно формы (3.2), а отсюда и вытекает формула для проектора (3.9).

Следствием наших рассуждений является

ТЕОРЕМА 3.5. Если $\psi(x, \lambda_j)$ – простая собственная функция оператора H_∞ , то существуют такие $\varepsilon > 0$ и $n_0 < \infty$, что при $n > n_0$ и $|\lambda - \lambda_j| < \varepsilon$ в $L^2(\mathbb{R}, \exp(-a|x|) dx)$ справедливо равенство

$$(E - F_n(\lambda))^{-1} = (1 - \mu_n(\lambda))^{-1} P_{j,n}(\lambda) + S_n(\lambda),$$

где проектор $P_{j,n}(\lambda)$ описан леммой 3.4. Операторы $P_{j,n}(\lambda)$ и $S_n(\lambda)$ аналитичны по λ в круге $|\lambda - \lambda_j| < \varepsilon$ и равномерно по λ :

$$S_n(\lambda) \rightarrow S_\infty(\lambda), \quad P_{j,n}(\lambda) \rightarrow P_{j,\infty}(\lambda), \quad \mu_n(\lambda) \rightarrow \mu_\infty(\lambda).$$

§4. Задача рассеяния

Определение решения задачи рассеяния было дано в §1.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть при некотором $t > 0$ функция $\varphi_n^+(x, \lambda)$ есть принадлежащее $L^2(\mathbb{R}, \exp(-a|x|) dx)$ решение уравнения:

$$\varphi_n^+(\cdot, \lambda) = F_n(\lambda) (\exp(i(\cdot)\sqrt{\lambda}) + \varphi_n^+(\cdot, \lambda)), \quad 0 < \lambda < \infty. \quad (4.1)$$

Тогда функция

$$u_n^+(x, \lambda) = \exp(ix\sqrt{\lambda}) + \varphi_n^+(x, \lambda) \quad (4.2)$$

есть решение задачи рассеяния.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим обе части (4.1) на $(\exp(-\lambda t) - G_0(t))$. В силу теоремы 2.4 получим, что определенная равенством (4.2) функция $u_n^+(x, \lambda)$ удовлетворяет равенству (2.11) и поэтому в силу теоремы 2.3 удовлетворяет уравнению (1.1). Из равенства (4.1) и теоремы 2.5 следует, что функция $\varphi_n^+(x, \lambda)$ при $|x| \rightarrow \infty$ имеет асимптотику

$$\begin{aligned} \varphi_n^+(x, \lambda) &= -\frac{i}{2t\sqrt{\lambda}} \exp(\lambda t + i|x|\sqrt{\lambda}) \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\mp iy\sqrt{\lambda}) (g_n u_n^+)(y, \lambda) dy + o(1), \quad x \rightarrow \pm\infty, \end{aligned} \quad (4.3)$$

поэтому определенная равенством (4.2) функция $u_n^+(x, \lambda)$ действительно является решением задачи рассеяния, причем из (4.3) следует, что коэффициенты прохождения и отражения могут быть выражены по формулам

$$\begin{aligned} T_n^+(\lambda) &= 1 - \frac{i \exp(\lambda t)}{2t\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-iy\sqrt{\lambda}) (g_n u_n^+)(y, \lambda) dy, \\ R_n^+(\lambda) &= -\frac{i \exp(\lambda t)}{2t\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iy\sqrt{\lambda}) (g_n u_n^+)(y, \lambda) dy. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Аналогичные формулы справедливы и для решения $u_n^-(x, \lambda)$

$$\begin{aligned} u_n^-(x, \lambda) &= \exp(-ix\sqrt{\lambda}) + \varphi_n^-(x, \lambda), \\ \varphi_n^-(\cdot, \lambda) &= F_n(\lambda) (\exp(-i(\cdot)\sqrt{\lambda}) + \varphi_n^-(\cdot, \sqrt{\lambda})), \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$R_n^-(\lambda) = -\frac{i \exp(\lambda t)}{2t\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-iy\sqrt{\lambda}) (g_n u_n^-)(y, \lambda) dy. \quad (4.6)$$

Напомним (см. [1]), что из общей теории следует равенство $T_n^+(\lambda) = T_n^-(\lambda)$.

Из теоремы 2.6 и определения (4.2) следует, что равномерно по λ на компактах в $(0, \infty) \setminus \{\lambda_j\}$ в метрике $L^2(\mathbb{R}, \exp(-a|x|) dx)$

$$u_n^\pm(x, \lambda) \rightarrow u_\infty^\pm(x, \lambda), \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.7)$$

а воспользовавшись уравнением (2.11) и леммой 2.1, мы получим, что (4.7) справедливо в каждой точке x равномерно по λ .

ЛЕММА 4.1. *Сходимость в (4.7) осуществляется в $C^1([a, b])$, где $[a, b]$ – любой отрезок, принадлежащий дополнению множества ω , причем функции $u_\infty^\pm(x, \lambda)$ равны нулю, если $x \in \omega_2$, $\lambda \notin \{\lambda_j\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последнее утверждение есть очевидное следствие уравнения (2.11), которому удовлетворяют функции $u_\infty^\pm(x, \lambda)$ при $n = \infty$, а для доказательства первого утверждения достаточно взять принадлежащий дополнению множества ω отрезок $[c, d]$, $c < a$, $b < d$, и заметить, что при достаточно большом n функции $u_n^\pm(x, \lambda)$ есть решение задачи

$$\begin{aligned} -\partial_{xx}^2 u_n^\pm(x, \lambda) + V_\infty(x) u_n^\pm(x, \lambda) &= 0, \quad c < x < d, \\ u_n^\pm(c + 0, \lambda) &= u_n^\pm(c, \lambda), \\ u_n^\pm(d - 0, \lambda) &= u_n^\pm(d, \lambda), \end{aligned}$$

поэтому из сходимости функций $u_n^\pm(x, \lambda)$ в точках c, d следует их сходимость в метрике $C^1([a, b])$.

§ 5. Поведение коэффициентов рассеяния и прохождения в окрестности резонанса

ЛЕММА 5.1. *Равномерно по λ на компактах в $(0, \infty) \setminus \{\lambda_j\}$*

$$T_n^\pm(\lambda) \rightarrow 0, \quad |R_n^\pm(\lambda)| \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty. \quad (5.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно [1], для любой точки x справедливо равенство

$$-2i\sqrt{\lambda} |T_n^\pm(\lambda)|^2 = u_n^\pm(x, \lambda) \partial_x \overline{u_n^\pm(x, \lambda)} - \overline{u_n^\pm(x, \lambda)} \partial_x u_n^\pm(x, \lambda).$$

Возьмем в этом равенстве точку x из внутренней области множества ω_2 и воспользуемся леммами 4.1 и 4.2. Получим первое из соотношений (5.1). Второе следует из унитарности матрицы рассеяния (см. [1]).

ЛЕММА 5.2. *Если $\varepsilon > 0$ и $n_0 < \infty$ выбраны в соответствии с теоремой 3.5, то при $n > n_0$ и $|\lambda - \lambda_j| < \varepsilon$ решение задачи рассеяния представимо в виде:*

$$u_n^\pm(\cdot, \lambda) = \frac{w_n^\pm(\lambda) \psi(\cdot, \lambda, n)}{C_n(\lambda)(1 - \mu_n(\lambda))} + u_{\text{reg}}(\cdot, \lambda, n), \quad (5.2)$$

где

$$w_n^\pm(\lambda) = -\langle \psi(\cdot, \lambda, n) | g_n \exp(\pm i(\cdot) \sqrt{\lambda}) \rangle, \quad (5.3)$$

$$u_{\text{reg}}(\cdot, \lambda, n) = \exp(\pm i(\cdot) \sqrt{\lambda}) + S_n(\lambda) F_n(\lambda) \exp(\pm i(\cdot) \sqrt{\lambda}). \quad (5.4)$$

Доказательство этого утверждения получается прямой выкладкой на основе формул (4.1), (4.2) и теоремы 3.5.

Используя формулы (5.2), (4.4), (4.6), мы получаем следующую лемму.

ЛЕММА 5.3. *При выполнении условий леммы 5.2 справедливы формулы*

$$T_n^\pm(\lambda) = -\frac{i \exp(\lambda t) w_n^+(\lambda) w_n^-(\lambda)}{2t\sqrt{\lambda} C_n(\lambda)(1 - \mu_n(\lambda))} + T_{\text{reg}}^\pm(\lambda, n), \quad (5.5)$$

где

$$T_{\text{reg}}^+(\lambda, n) = 1 - \frac{i \exp(\lambda t)}{2t\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iy\sqrt{\lambda}) (g_n u_{\text{reg}}^+(\cdot, \lambda, n))(y) dy; \quad (5.6)$$

$$R_n^\pm(\lambda) = -\frac{i \exp(\lambda t) w_n^\pm(\lambda)^2}{2t\sqrt{\lambda} C_n(\lambda)(1 - \mu_n(\lambda))} + R_{\text{reg}}^\pm(\lambda, n), \quad (5.7)$$

где

$$R_{\text{reg}}^\pm(\lambda, n) = -\frac{i \exp(\lambda t)}{2t\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\pm iy\sqrt{\lambda}) (g_n u_{\text{reg}}^\pm(\cdot, \lambda, n))(y) dy. \quad (5.8)$$

Из теоремы 3.5 и формул (5.4), (5.5), (5.8) следует

ЛЕММА 5.4. *При $\lambda \notin \{\lambda_j\}$ существуют пределы*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n^\pm(\lambda) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n^\pm(\lambda) = R_\infty^\pm(\lambda), \quad (5.9)$$

и равномерно по λ в круге $|\lambda - \lambda_j| < \varepsilon$ существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{\text{reg}}^\pm(\lambda, n) = T_{\text{reg}}^\pm(\lambda, \infty), \quad (5.10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{\text{reg}}^\pm(\lambda, n) = R_{\text{reg}}^\pm(\lambda, \infty). \quad (5.11)$$

ЛЕММА 5.5. *Справедливы равенства*

$$T_{\text{reg}}^\pm(\lambda_j, \infty) = 0, \quad (5.12)$$

$$R_{\text{reg}}^\pm(\lambda_j, \infty) = \lim_{|\lambda - \lambda_j| \rightarrow 0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^\pm(\lambda) \right). \quad (5.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\lambda \notin \{\lambda_j\}$

$$T_\infty^\pm(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n^\pm(\lambda) = 0 = -\frac{i \exp(\lambda t) w_\infty^+(\lambda) w_\infty^-(\lambda)}{2t\sqrt{\lambda} C_\infty(\lambda)(1 - \mu_\infty(\lambda))} + T_{\text{reg}}^\pm(\lambda, \infty).$$

В силу следствия 3.3 функция

$$\lambda \rightarrow C_\infty(\lambda)(1 - \mu_\infty(\lambda))$$

аналитична и в точке λ_j имеет нуль первого порядка.

Функции

$$\lambda \rightarrow w_\infty^\pm(\lambda)$$

аналитичны и в силу следствия 3.1 в точке λ_j равны нулю. Поэтому

$$T_{\text{reg}}^\pm(\lambda_j, \infty) = \lim_{|\lambda - \lambda_j| \rightarrow 0} T_{\text{reg}}^\pm(\lambda, \infty) = 0.$$

Аналогично, при $\lambda \notin \{\lambda_j\}$

$$R_\infty^\pm(\lambda) = -\frac{i \exp(\lambda t) w_\infty^\pm(\lambda)^2}{2t\sqrt{\lambda} C_\infty(\lambda)(1 - \mu_\infty(\lambda))} + R_{\text{reg}}^\pm(\lambda, \infty),$$

и в силу изложенных выше причин

$$\lim_{|\lambda - \lambda_j| \rightarrow +0} R_\infty^\pm(\lambda) = \lim_{|\lambda - \lambda_j| \rightarrow +0} R_{\text{reg}}^\pm(\lambda, \infty). \quad (5.14)$$

ЛЕММА 5.6. *Справедливо равенство*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|w_n^+(\operatorname{Re} \lambda_{j,n})|^2 + |w_n^-(\operatorname{Re} \lambda_{j,n})|^2}{\operatorname{Im} \lambda_{j,n}} = -4\sqrt{\lambda_j} t^2 \exp(-2\lambda_j t). \quad (5.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 3.1 следует, что

$$\begin{aligned} & \frac{|w_n^+(\operatorname{Re} \lambda_{j,n})|^2 + |w_n^-(\operatorname{Re} \lambda_{j,n})|^2}{\operatorname{Im} \lambda_{j,n}} \\ &= -4t\sqrt{\operatorname{Re} \lambda_{j,n}} \exp(-\operatorname{Re} \lambda_{j,n} t) \\ & \quad \times \langle g_n \psi(\cdot, \operatorname{Re} \lambda_{j,n}, n) \mid \overline{\psi(\cdot, \operatorname{Re} \lambda_{j,n}, n)} \rangle \frac{\operatorname{Im} \mu_n(\operatorname{Re} \lambda_{j,n})}{\operatorname{Im} \lambda_{j,n}}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Но

$$\begin{aligned} \mu_n(\operatorname{Re} \lambda_{j,n}) - 1 &= \mu_n(\operatorname{Re} \lambda_{j,n}) - \mu_n(\lambda_{j,n}) \\ &= -\frac{i\partial \mu_n(\operatorname{Re} \lambda_{j,n})}{\partial \lambda} \operatorname{Im} \lambda_{j,n} + O((\operatorname{Im} \lambda_{j,n})^2), \end{aligned} \quad (5.17)$$

и, учитывая лемму 3.2, мы из (5.16) получаем формулу (5.15).

Заметим, что из (5.17) следует

ЛЕММА 5.7. *Справедливо соотношение*

$$\frac{\operatorname{Im} \lambda_{j,n} \exp(\operatorname{Re} \lambda_{j,n} t)}{2t\sqrt{\operatorname{Re} \lambda_{j,n}} C_n(\operatorname{Re} \lambda_{j,n})(1 - \mu_n(\operatorname{Re} \lambda_{j,n}))} \rightarrow \frac{i \exp(2\lambda_j t)}{2t^2 \sqrt{\lambda_j}}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (5.18)$$

ПОЛОЖИМ

$$\text{v. p. } R_\infty^\pm(\lambda_j) = \lim_{|\lambda - \lambda_j| \rightarrow +0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^\pm(\lambda) \right).$$

ТЕОРЕМА 5.1. *Справедливо равенство*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (|R_n^+(\operatorname{Re} \lambda_{j,n}) - \text{v. p. } R_\infty^+(\lambda_j)| + |R_n^-(\operatorname{Re} \lambda_{j,n}) - \text{v. p. } R_\infty^-(\lambda_j)|) = 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (5.7) следует, что справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \left| |R_n^+(\operatorname{Re} \lambda_{j,n}) - \text{v. p. } R_\infty^+(\lambda_j)| + |R_n^-(\operatorname{Re} \lambda_{j,n}) - \text{v. p. } R_\infty^-(\lambda_j)| - \exp(\operatorname{Re} \lambda_{j,n} t) \right. \\ & \quad \times \left. \frac{1}{2t\sqrt{\operatorname{Re} \lambda_{j,n}} |C_n(\operatorname{Re} \lambda_{j,n})(1 - \mu_n(\operatorname{Re} \lambda_{j,n}))|} \right| \\ & \leq |R_{\text{reg}}^+(\operatorname{Re} \lambda_{j,n}, n) - \text{v. p. } R_\infty^+(\lambda_j)| + |R_{\text{reg}}^-(\operatorname{Re} \lambda_{j,n}, n) - \text{v. p. } R_\infty^-(\lambda_j)|. \end{aligned}$$

Функции $R_{\text{reg}}^\pm(\lambda, n)$ непрерывны по λ равномерно по n , поэтому, используя (5.13) и соотношения (5.15), (5.18), мы получаем утверждение теоремы.

Отметим, что формально теорема 5.1 есть следствие доказанной в [6] теоремы 1, хотя условия, налагаемые в [6], в нашем случае не выполнены.

ТЕОРЕМА 5.2. Если последовательность V_n состоит из четных функций:

$$V_n(-x) = V_n(x), \quad (5.19)$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |T_n^\pm(\operatorname{Re} \lambda_{j,n})| = 1. \quad (5.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если выполнено равенство (5.19), то

$$|w_n^-(\lambda)| = |w_n^+(\lambda)|,$$

поэтому

$$\begin{aligned} |T_n^\pm(\operatorname{Re} \lambda_{j,n}) - T_{\text{reg}}^\pm(\operatorname{Re} \lambda_{j,n})| &= (|w_n^+(\operatorname{Re} \lambda_{j,n})|^2 + |w_n^-(\operatorname{Re} \lambda_{j,n})|^2) \\ &\quad \times 4t\sqrt{\operatorname{Re} \lambda_{j,n}} |C_n(\operatorname{Re} \lambda_{j,n})(1 - \mu_n(\operatorname{Re} \lambda_{j,n}))|, \end{aligned} \quad (5.21)$$

и равенство (5.20) получается из (5.21) предельным переходом на основе (5.15) и леммы 5.4.

В случае несимметричного барьера соотношение (5.20) может быть и не выполнено, но можно показать, что если пределы существуют, то

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (|R_n^+(\operatorname{Re} \lambda_{j,n}) - \text{v. p. } R_\infty^+(\lambda_j)| |R_n^-(\operatorname{Re} \lambda_{j,n}) - \text{v. p. } R_\infty^-(\lambda_j)|) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} |T_n^\pm(\operatorname{Re} \lambda_{j,n})|^2. \end{aligned}$$

Для оценки решения задачи рассеяния вблизи резонанса рассмотрим интеграл

$$I(\lambda, n) = \int_{\omega_2} |u_n^+(x, \lambda)|^2 dx + \int_{\omega_2} |u_n^-(x, \lambda)|^2 dx.$$

Положим

$$\begin{aligned} d(n) &= \frac{1}{4} \operatorname{dist}(\{x : V_\infty(x) \leq n\}, \{x : V_\infty(x) = \infty\}), \\ \theta(n) &= \frac{\sqrt{n}}{d(n)} \exp(-d(n)\sqrt{n}). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 5.3. Справедливо неравенство

$$I(\operatorname{Re} \lambda_{j,n}, n) \geq \frac{\operatorname{const}}{|\operatorname{Im} \lambda_{j,n}|},$$

а если последовательность $\sigma(n)$ удовлетворяет условиям:

$$\sigma(n) > |\lambda_j - \operatorname{Re} \lambda_{j,n}|, \quad \sigma(n) \rightarrow 0, \quad \frac{\sigma(n)}{\theta(n)} \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty,$$

то

$$\int_{|\lambda - \lambda_j| < \sigma(n)} I(\lambda, n) d\lambda \geq \operatorname{const} > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение есть следствие неравенства Бесселя и формул (5.2) и (5.18), а второе утверждение доказано в [7] для случая размерности пространства больше двух, обобщение на рассматриваемый случай тривиально.

Заметим, что, следуя проведенным в [7] рассуждениям, можно показать, что

$$|\lambda - \lambda_{j,n}| < \operatorname{const} \theta(n).$$

Более того, в рассматриваемом нами случае “толстых стенок” величина $d(n)$ в приведенных выше оценках может быть заменена на константу, однако доказательство этого факта мы отложим до другой публикации.

Список литературы

1. *Додд Р., Эйбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988.
2. *Саймон Б.* Модель $P(\varphi)_2$ евклидовой квантовой теории поля. М.: Мир, 1976.
3. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
4. *Арсеньев А. А.* О резонансных свойствах амплитуды рассеяния для резонатора Гельмгольца // Матем. моделирование. 1994. Т. 6. № 6. С. 47–66.
5. *Арсеньев А. А.* О резонансных свойствах амплитуды рассеяния для уравнения Шрёдингера с ловушечным потенциалом // ТМФ. 1995. Т. 104. № 2. С. 214–232.
6. *Арсеньев А. А.* Резонансы матрицы рассеяния и квазиуровни // ТМФ. 1996. Т. 106. № 1. С. 16–23.
7. *Арсеньев А. А.* Сингулярные потенциалы и резонансы. М.: Изд-во МГУ, 1974.
8. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
09.12.1994