Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Туницкий, О гиперболических системах уравнений Монжа–Ампера, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 8, 119–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1331>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 18:05:11

УДК 517.95

Д. В. Туницкий

О гиперболических системах уравнений Монжа–Ампера

Статья посвящена разрешимости задачи Коши для строго гиперболических систем уравнений Монжа–Ампера, в частности для квазилинейных систем уравнений с двумя независимыми переменными. Доказано, что в классе погруженных многозначных решений указанная задача имеет единственное наибольшее решение. Наибольшие многозначные решения обладают следующим характеристическим свойством полноты. Для таких решений либо характеристики различных семейств, выпущенные из двух фиксированных точек начальной кривой в соответствующем направлении, пересекаются, либо множество длин характеристик каждого из семейств, выпущенных в этом же направлении из отрезка начальной кривой, соединяющего эти точки, не ограничено. Свойство полноты служит аналогом свойства непродолжаемой интегральной кривой обыкновенного дифференциального уравнения стремиться к границе области определения этого уравнения.

Библиография: 19 названий.

Условимся, что все встречающиеся ниже многообразия являются гладкими, связными, хаусдорфовыми и паракомпактными, а показатель гладкости k входных данных имеет фиксированное значение из множества $\{2, 3, \dots\} \cup \{\infty\}$.

§ 1. Многозначные решения

Системой уравнений Монжа–Ампера называется система двух нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка следующего вида:

$$\begin{aligned}a_0 + a_1 p_x + a_2 p_y + a_3 q_x + a_4 q_y + a_5(p_x q_y - p_y q_x) &= 0, \\b_0 + b_1 p_x + b_2 p_y + b_3 q_x + b_4 q_y + b_5(p_x q_y - p_y q_x) &= 0.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Здесь коэффициенты a_i , b_i при $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ зависят от x , y , p , q , где x и y – независимые переменные, а $p = p(x, y)$ и $q = q(x, y)$ – неизвестные функции. Будем считать, что все коэффициенты этого уравнения – C^k -гладкие функции, определенные во всем пространстве R^4 параметров x , y , p и q .

Очевидно, что всякая система двух квазилинейных уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными является системой уравнений Монжа–Ампера с $a_5 = b_5 = 0$.

ПРИМЕР 1.1. Обычно уравнением Монжа–Ампера называют соотношение второго порядка вида

$$A + Bz_{xx} + 2Cz_{xy} + Dz_{yy} + E(z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2) = 0,\tag{1.2}$$

где коэффициенты A, B, C, D и E зависят от x, y, z, z_x и z_y . Предположим, что они не зависят от неизвестной функции $z = z(x, y)$. Используя обозначения Монжа

$$p = z_x(x, y), \quad q = z_y(x, y),$$

уравнение (1.2) можно записать в виде системы уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} p_y - q_x &= 0, \\ A + Bp_x + C(p_y + q_x) + Dq_y + E(p_xq_y - p_yq_x) &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Ясно, что (1.3) – система уравнений Монжа–Ампера вида (1.1) с

$$\begin{aligned} a_0 &= a_1 = 0, & a_2 &= 1, & a_3 &= -1, & a_4 &= a_5 = 0, \\ b_0 &= A, & b_1 &= B, & b_2 &= b_3 = C, & b_4 &= D, & b_5 &= E. \end{aligned}$$

Предположим, что p, q – непрерывно дифференцируемые в некоторой области S плоскости xy функции, удовлетворяющие уравнению (1.1). Тем самым, выражения

$$x = x, \quad y = y, \quad p = p(x, y), \quad q = q(x, y) \quad (1.4)$$

задают в пространстве $R^4 = \{(x, y, p, q)\}$ двумерную поверхность

$$\sigma: S \rightarrow R^4. \quad (1.5)$$

В силу (1.1) и (1.4) вектор-функция $\sigma(x, y)$ удовлетворяет равенствам

$$\sigma^*\omega_1 = 0, \quad \sigma^*\omega_2 = 0. \quad (1.6)$$

Здесь σ^* – отвечающий отображению σ оператор поднятия дифференциальной формы на прообраз,

$$\begin{aligned} \omega_1 &= a_0dx \wedge dy + a_1dp \wedge dy + a_2dx \wedge dp + a_3dq \wedge dy + a_4dx \wedge dq + a_5dp \wedge dq, \\ \omega_2 &= b_0dx \wedge dy + b_1dp \wedge dy + b_2dx \wedge dp + b_3dq \wedge dy + b_4dx \wedge dq + b_5dp \wedge dq \end{aligned} \quad (1.7)$$

(ср. с [1], [2] и [3]).

Пусть S – двумерное многообразие и (1.5) – погружение. Это погружение называется *многозначным решением* уравнения (1.1), если для него выполнены уравнения (1.6)–(1.7) (см. [4]).

Мотивацией такого определения служит то, что в случае погружения (1.4)–(1.5) уравнения (1.6)–(1.7) выполнены. Кроме того, оно согласуется с принципом Э. Картана, утверждающим, что всякое дифференциальное уравнение можно свести к системе внешних дифференциальных уравнений на подходящем многообразии [3; раздел 79]. Проведенные выше рассуждения показывают, что системе уравнений (1.1) в пространстве R^4 отвечает система (1.6)–(1.7). Дополнительные обоснования можно найти в работах [4]–[6].

§ 2. Характеристические расслоения

Предположим, что внешние дифференциальные формы ω_1 и ω_2 линейно независимы. Тем самым, они порождают в каждой точке $m \in R^4$ двумерное линейное подпространство

$$\Sigma_m \subseteq \Lambda_m^2(R^4)$$

шестимерного пространства кососимметричных 2-форм. Это пространство может как содержать вырожденные 2-формы, так и не содержать таковых. Логически соответствующая ситуация исчерпывается следующими исходами [7], [8]. Пространство Σ_m либо вообще не содержит невырожденных форм, либо содержит ровно одну ненулевую вырожденную форму, либо содержит ровно две линейно независимые вырожденные формы, либо полностью состоит из вырожденных форм. В первом случае систему уравнений Монжа–Ампера (1.1) или, что то же самое, систему (1.6)–(1.7) называют *эллиптической*, во втором – *параболической*, в третьем – *гиперболической* и в четвертом – *вырожденной*.

Из определения ясно, что система (1.1) гиперболична тогда и только тогда, когда *характеристическое уравнение*

$$(\lambda\omega_1 + \mu\omega_2) \wedge (\lambda\omega_1 + \mu\omega_2) = 0$$

имеет на проективной прямой RP^1 ровно два различных решения $(\lambda_l : \mu_l)$ и $(\lambda_2 : \mu_2)$. Поскольку

$$\begin{aligned} (\lambda\omega_1 + \mu\omega_2) \wedge (\lambda\omega_1 + \mu\omega_2) &= \lambda^2\omega_1 \wedge \omega_1 + 2\lambda\mu\omega_1 \wedge \omega_2 + \mu^2\omega_2 \wedge \omega_2 \\ &= (2\gamma_0\lambda^2 + 2\gamma_1\lambda\mu + 2\gamma_2\mu^2)dx \wedge dy \wedge dp \wedge dq, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= a_0a_5 - a_1a_4 + a_2a_3, \\ \gamma_1 &= a_0b_5 + b_0a_5 - a_1b_4 - b_1a_4 + a_2b_3 + b_2a_3, \\ \gamma_2 &= b_0b_5 - b_1b_4 + b_2b_3, \end{aligned}$$

то характеристическое уравнение эквивалентно соотношению

$$\gamma_0\lambda^2 + \gamma_1\lambda\mu + \gamma_2\mu^2 = 0. \quad (2.1)$$

Тем самым, система гиперболична в том и только том случае, если дискриминант

$$\Delta = \gamma_1^2 - 4\gamma_0\gamma_2 \quad (2.2)$$

характеристического уравнения (2.1) положителен, т.е. если

$$\Delta > 0. \quad (2.3)$$

Для $j = 1, 2$ корни уравнения (2.1) вычисляются по формуле

$$(\lambda_j : \mu_j) = (2\gamma_2 : -\gamma_1 + (-1)^{3-j}\sqrt{\Delta}). \quad (2.4)$$

ПРИМЕР 2.1. Для рассмотренного в примере 1.1 уравнения Монжа–Ампера второго порядка (1.2)–(1.3)

$$\gamma_0 = -1, \quad \gamma_1 = -C + C = 0, \quad \gamma_2 = AE - BD + C^2.$$

Тем самым, в силу (2.2) условие гиперболичности (2.3) для уравнения Монжа–Ампера второго порядка принимает вид

$$\Delta = 4(AE - BD + C^2) > 0.$$

Согласно (2.4) характеристическое уравнение имеет два корня

$$(\lambda_1 : \mu_1) = (\lambda_1 : 1), \quad (\lambda_2 : \mu_2) = (\lambda_2 : 1),$$

где

$$\lambda_j = (-1)^{3-j} \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \quad (2.5)$$

для $j = 1, 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Будем предполагать все встречающиеся ниже системы Монжа–Ампера гиперболичными во всех точках пространства R^4 . Тем самым, не ограничивая общности, мы можем считать дифференциальные формы ω_1 и ω_2 невырожденными во всем пространстве R^4 .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Понятие гиперболичности можно распространить на уравнения, для которых оценка (2.3) выполнена со знаком “ $\geq$ ”. Это возможно сделать в случае, когда система уравнений Монжа–Ампера удовлетворяет условию Е. Леви (см. [5], [6], [9]).

Характеристическим расслоением H_j системы уравнений (1.1) называется подрасслоение касательного расслоения TR^4 , слой $H_j(m)$ которого в каждой точке $m \in R^4$ при $j = 1, 2$ определяется равенством

$$H_j(m) = \{\xi \in T_m R^4 \mid \xi \lrcorner (\lambda_j \omega_1 + \mu_j \omega_2) = 0\}. \quad (2.6)$$

ПРИМЕР 2.4. Можно показать, что для рассмотренного в примере 1.1 уравнения Монжа–Ампера второго порядка (1.2)–(1.3) характеристическое расслоение H_j порождается векторными полями

$$\begin{aligned} e_{j1} &= E \frac{\partial}{\partial x} - D \frac{\partial}{\partial p} + (C - \lambda_j) \frac{\partial}{\partial q}, & e_{j2} &= E \frac{\partial}{\partial y} + (C + \lambda_j) \frac{\partial}{\partial p} - B \frac{\partial}{\partial q}, \\ e_{j3} &= B \frac{\partial}{\partial x} + (C - \lambda_j) \frac{\partial}{\partial y} - B \frac{\partial}{\partial p}, & e_{j4} &= (C + \lambda_j) \frac{\partial}{\partial x} + D \frac{\partial}{\partial y} - A \frac{\partial}{\partial p}, \end{aligned}$$

где λ_j заданы посредством (2.5). Среди этих векторных полей ровно два линейно независимых поля в каждой точке m пространства R^4 .

Имеют место следующие леммы.

ЛЕММА 2.5. Пусть ω – некоторая дифференциальная m -форма, а $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – произвольные независимые линейные дифференциальные формы класса C^k в пространстве R^4 . Тогда следующие условия эквивалентны:

- (а) существуют такие дифференциальные $(m-1)$ -формы $\beta_1, \dots, \beta_n$ класса C^k , для которых справедливо представление

$$\omega = \alpha_1 \wedge \beta_1 + \dots + \alpha_n \wedge \beta_n;$$

- (б) выполняется равенство

$$\omega \wedge \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n = 0;$$

- (с) для любых векторов $\xi_1, \dots, \xi_m$ таких, что $\xi_i \lrcorner \alpha_j = 0$ для $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, выполняется соотношение

$$\omega(\xi_1, \dots, \xi_m) = 0.$$

Доказательство см. в [3; ч. I, п. 17].

ЛЕММА 2.6. Для характеристических расслоений H_1 и H_2 системы гиперболических уравнений (1.1) имеют место следующие свойства:

- (а) H_j – двумерное C^k -подрасслоение в TR^4 для $j = 1, 2$;
 (б) векторы $g_1 \in H_1(m)$ и $g_2 \in H_2(m)$ косоортogonalны относительно дифференциальной 2-формы ω_1 , т.е.

$$(g_1 \wedge g_2) \lrcorner \omega_1 = 0;$$

- (с) если для фиксированного $j = 1, 2$ векторы $g_1, g_2 \in H_j(m)$ и $g_1 \neq 0, g_2 \neq 0$, то

$$(g_1 \wedge g_2) \lrcorner \omega_1 \neq 0;$$

- (д) для всякой точки $m \in R^4$

$$H_1(m) \cap H_2(m) = 0;$$

- (е) если для фиксированного $j = 1, 2$ векторы $g_1, g_2 \in H_j(m)$ и $g_1 \neq 0, g_2 \neq 0$, то

$$(g_1 \lrcorner \omega_1) \wedge (g_2 \lrcorner \omega_1) = c(\lambda_j \omega_1 + \mu_j \omega_2),$$

где c – отличный от нуля скаляр;

- (ф) существуют два линейно независимых векторных поля

$$\xi_{j1}, \quad \xi_{j2} \tag{2.7}$$

класса C^k , порождающих характеристическое расслоение H_j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) По определению гиперболичности при $j = 1, 2$ дифференциальная 2-форма $\mu_j\omega_2 + \lambda_j\omega_1$ вырождена. В силу кососимметричности ее ранг равен двум. Тем самым, $H_j(m)$ – двумерное подпространство в $T_m R^4$ для каждой точки $m \in R^4$. Согласно представлению (2.4) λ_j и μ_j – C^k -гладкие функции. Следовательно, H_j – двумерное C^k -подрасслоение в TR^4 .

Свойства (b), (c), (d) и (e) непосредственно выводятся при помощи леммы 2.5 из определения гиперболичности. Подробности можно найти в работе [5].

(f) Известно, что любое векторное расслоение над R^4 тривиально [10; гл. 4, § 2]. Тем самым, для $j = 1, 2$ на R^4 существуют два линейно независимых векторных поля (2.7), порождающих характеристическое расслоение H_j . Лемма доказана.

ЛЕММА 2.7. Пусть система уравнений (1.1) гиперболична и (1.5) – некоторое C^k -решение этого уравнения. Тогда при $j = 1, 2$ на многообразии S существует единственное одномерное C^{k-1} -подрасслоение

$$h_j \subset TS \quad (2.8)$$

такое, что для всякой точки $r \in S$

$$\sigma_*(h_j(r)) \subset H_j(\sigma(r)). \quad (2.9)$$

Доказательство см. в § 5.

По теореме Фробениуса для любой точки $r \in S$ при $j = 1, 2$ существует единственное связное максимальное интегральное многообразие

$$\gamma_{jr}: Z_{jr} \rightarrow S \quad (2.10)$$

подрасслоения (2.8), содержащее точку r [11; раздел 1.64]. Здесь Z_{jr} – соответствующее одномерное многообразие, т.е. подмногообразие (2.10) является кривой на многообразии S . Будем называть эту кривую *характеристикой* системы уравнений (1.1), лежащей на решении (1.5), проходящей через точку $r \in S$ и принадлежащей j -му семейству, $j = 1, 2$.

§ 3. Задача Коши

Зададим для системы уравнений (1.1) начальное значение – погружение класса C^k

$$l: Z \rightarrow R^4, \quad (3.1)$$

$Z = (a, b)$, где $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Это погружение называется *начальной кривой* для системы уравнений (1.1), если оно *свободно*, т.е.

$$\dot{l}(t) \notin H_j(l(t)) \quad (3.2)$$

при $j = 1, 2$ и $a < t < b$.

Будем говорить, что многозначное решение (1.5) системы уравнений (1.1) является *решением задачи Коши*, заданной начальной кривой (3.1), если найдется такой гомеоморфизм

$$L: Z \rightarrow S, \quad (3.3)$$

т.е. гомеоморфизм на свой образ, для которого

$$l = \sigma \circ L. \quad (3.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. В случае, если решение (1.5) C^k -гладко, из представления (3.4) вытекает, что (3.3) является C^k -вложением [11; раздел 1.32]. Таким образом, решением задачи Коши (1.1), (3.1) служит пара (σ, L) , состоящая из удовлетворяющего системе уравнений (1.6)–(1.7) C^k -погружения (1.5) и удовлетворяющего представлению (3.4) C^k -вложения (3.3).

Решение (σ, L) задачи (1.1), (3.1) называется *определенным*, если для каждой точки $r \in S$ пересечение

$$L(Z) \cap \gamma_{jr}(Z_{jr}) \quad (3.5)$$

при $j = 1, 2$ состоит в точности из одной точки. Ниже, при доказательстве леммы 6.4, будет установлено, что для определенного решения в точности из одной точки r состоит также и пересечение

$$\gamma_{1r}(Z_{1r}) \cap \gamma_{2r}(Z_{2r}). \quad (3.6)$$

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть система уравнений Монжа–Ампера (1.1) гиперболическая, а их коэффициенты и начальная кривая (3.1) C^k -гладки. Предположим, что (σ, L) – определенное C^k -решение задачи (1.1), (3.1). Тогда существует единственный C^k -диффеоморфизм

$$\Phi: S \rightarrow W, \quad (3.7)$$

обладающий следующими свойствами:

(а) множество W является открытым подмножеством квадрата

$$\Pi(a, b) = \{(u, v) \in R^2 \mid a < u, v < b\} \quad (3.8)$$

(бесконечного, если либо $a = -\infty$, либо $b = +\infty$) и содержит диагональ

$$\delta = \{(t, t) \in R^2 \mid a < u, v < b\}; \quad (3.9)$$

(б) при $a < t < b$ имеет место равенство

$$\Phi \circ L(t) = (t, t); \quad (3.10)$$

(с) образом характеристики (2.10) при $j = 1$ служит интервал координатной прямой $u = \text{const}$, а при $j = 2$ – интервал координатной прямой $v = \text{const}$;

- (d) вместе с каждой точкой (u, v) множество W содержит замкнутый треугольник

$$T(u, v) = \text{conv}((u, u), (u, v), (v, v)) \quad (3.11)$$

с вершинами (u, u) , (u, v) и (v, v) .

Доказательство см. в § 6.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Диффеоморфизм (3.7), отвечающий согласно теореме 3.2 определенному решению (σ, L) , будем называть *характеристическим*.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Из теоремы 3.2, (a), (d) вытекает, что множество

$$W = \Phi(S) \quad (3.12)$$

связно и односвязно, а потому стягиваемо [12; § 10]. Тем самым, всякому определенному C^k -решению (σ, L) задачи (1.1), (3.1) можно сопоставить отображения

$$\psi: W \rightarrow R^4, \quad (3.13)$$

$$G: (a, b) \ni t \mapsto (t, t) \in W, \quad (3.14)$$

где

$$\psi = \sigma \circ \Phi^{-1}, \quad (3.15)$$

Φ – отвечающий решению (σ, L) характеристический диффеоморфизм и W – стягиваемое открытое подмножество квадрата (3.8), содержащее диагональ (3.9). По свойству (с) лежащие на этом решении характеристики – это интервалы координатных прямых, а по свойствам (b) и (d) пара (ψ, G) является определенным C^k -решением задачи (1.1), (3.1), для которого при $a < t < b$

$$\psi(t, t) = l(t). \quad (3.16)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Фактически, теорема 3.2 означает, что всякое определенное многозначное решение гиперболической системы Монжа–Ампера допускает введение в целом характеристической системы координат. Характеристические координаты были использованы в работе Г. Леви [13] для построения локального классического решения нелинейного гиперболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными. Уточнение методики Г. Леви опубликовано в статье [14].

§ 4. Существование, единственность и полнота

Среди множества всех определенных решений

$$(\sigma, L) \quad (4.1)$$

задачи Коши (1.1), (3.1) особый интерес представляет решение

$$(\tilde{\sigma}, \tilde{L}), \quad (4.2)$$

где

$$\tilde{\sigma}: \tilde{S} \rightarrow R^4, \quad \tilde{L}: (a, b) \rightarrow \tilde{S},$$

наибольшее по отношению включения. Формализованное понятие такого решения дает

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Мнозначное определенное C^k -решение (4.2) задачи (1.1), (3.1) называется *непродолжаемым*, если для любого другого многозначного определенного C^k -решения (4.1) этой задачи существует такой монотонный морфизм

$$\varphi: S \rightarrow \tilde{S}, \quad (4.3)$$

что

$$\tilde{\sigma} \circ \varphi = \sigma, \quad \varphi \circ L = \tilde{L}. \quad (4.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Поскольку решения (4.1) и (4.2) C^k -гладки, то из представлений (4.4) вытекает, что (4.3) является C^k -вложением (ср. с замечанием 3.1).

Имеет место

ТЕОРЕМА 4.3 (существование). Пусть уравнение Монжа–Ампера (1.1) гиперболично, а его коэффициенты и начальная кривая (3.1) C^k -гладки. Тогда существует C^k -гладкое непродолжаемое решение (4.2) задачи Коши (1.1), (3.1).

Доказательство см. в § 7.

В категории гладких многообразий два диффеоморфных многообразия изоморфны, т.е. по существу неразличимы. В случае начальных кривых и определенных решений естественно считать неразличимыми те объекты, которые отличаются друг от друга регулярной перепараметризацией. Введем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4. Пусть для гиперболической системы (1.1) наряду с начальной кривой (3.1) задана другая начальная кривая:

$$\begin{aligned} \tilde{l}: \tilde{Z} &\rightarrow R^4, \\ \tilde{Z} &= (\tilde{a}, \tilde{b}), \quad -\infty \leq \tilde{a} < \tilde{b} \leq +\infty. \end{aligned} \quad (4.5)$$

(а) Начальные значения (3.1) и (4.5) эквивалентны, если существует такой гомеоморфизм

$$\nu: Z \rightarrow \tilde{Z}, \quad (4.6)$$

что

$$\tilde{l} \circ \nu = l. \quad (4.7)$$

(б) Предположим, что определенные многозначные решения (4.1) и (4.2) системы (1.1) принимают эквивалентные начальные значения (3.1) и (4.5) соответственно. Эти решения эквивалентны, если существует такой гомеоморфизм (4.3), что

$$\tilde{\sigma} \circ \varphi = \sigma, \quad \varphi \circ L = \tilde{L} \circ \nu. \quad (4.8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.5. Тривиальная проверка показывает, что отношения эквивалентности начальных значений и решений рефлексивны, симметричны и транзитивны. По аналогии с замечанием 4.2 в данном случае из представления (4.7) вытекает, что (4.6) является C^k -диффеоморфизмом, а из первого представления (4.8) вытекает, что (4.3) является C^k -диффеоморфизмом.

Имеет место

ТЕОРЕМА 4.6 (единственность). Пусть уравнение Монжа–Ампера (1.1) гиперболично, а его коэффициенты и начальные кривые (3.1) и (4.5) C^k -гладки. Предположим, что (4.2) – непродолжаемое решение системы Монжа–Ампера (1.1), принимающее начальное значение (3.1), и (4.1) – непродолжаемое решение этого же уравнения, принимающее начальное значение (4.5). Тогда если начальные значения (3.1) и (4.5) эквивалентны, то решения (4.1) и (4.2) также эквивалентны.

Доказательство см. в §8.

Пусть (4.1) – определенное решение гиперболической системы (1.1), принимающее начальное значение (3.1), и (3.7) – отвечающий ему характеристический диффеоморфизм. Положим

$$\rho_1(u, v) = \left| \int_u^v \left\| \psi_* \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) (u, t) \right\| dt \right|, \quad (4.9)$$

$$\rho_2(u, v) = \left| \int_u^v \left\| \psi_* \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) (t, v) \right\| dt \right|, \quad (4.10)$$

где ψ вычисляется согласно (3.15), а $\|\cdot\|$ – стандартная евклидова норма в R^4 . Функция $\rho_j(u, v)$ определена на множестве (3.12) при $j = 1, 2$. Геометрический смысл ее значения – это длина в R^4 образа интервала характеристики j -го семейства, соединяющего точку $(u, v) \in W$ с диагональю (3.9), т.е. с начальной кривой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.7. Многозначное определенное C^k -решение (4.1) задачи (1.1), (3.1) называется *полным*, если для всякой точки

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \Phi(a, b), \quad (4.11)$$

либо

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) \in W, \quad (4.12)$$

либо для всякого $j \in \{1, 2\}$ и любого положительного числа N внутри W найдется такая точка

$$(u_j, v_j) \in \mathring{T}(\tilde{u}, \tilde{v}), \quad (4.13)$$

где $\mathring{T}(\tilde{u}, \tilde{v})$ – внутренность треугольника $T(\tilde{u}, \tilde{v})$, для которой

$$\rho_j(u_j, v_j) \geq N. \quad (4.14)$$

Иными словами, определенное решение является полным, если оно обладает следующим свойством. Либо характеристики различных семейств, выпущенные из двух фиксированных точек начальной кривой в соответствующем направлении, пересекаются, либо множество длин лучей характеристик каждого из семейств, выпущенных в этом же направлении из отрезка начальной кривой, соединяющего эти точки, не ограничено.

Имеет место

ТЕОРЕМА 4.8 (полнота). Пусть система Монжа–Ампера (1.1) гиперболическая, а ее коэффициенты и начальная кривая (3.1) C^k -гладки. Предположим, что (4.1) – определенное C^k -решение задачи (1.1), (3.1). Это решение полно тогда и только тогда, когда оно непродолжаемо.

Доказательство см. в §9.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.9. Непродолжаемые решения гиперболических систем Монжа–Ампера служат аналогом непродолжаемых решений обыкновенных дифференциальных уравнений [15; §3]. При этом свойство полноты является аналогом свойства непродолжаемых решений обыкновенных дифференциальных уравнений стремиться к границе области определения этих уравнений [15; §22], [16; гл. 2, §3].

§ 5. Свойства характеристических расслоений

Прежде чем приступить к непосредственному доказательству леммы 2.7, установим ряд вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 5.1. Пусть G_1 и G_2 – C^k -гладкие векторные расслоения и

$$F: G_1 \rightarrow G_2$$

– C^k -биморфизм. Если

$$G_3 \subset G_2$$

– t -мерное C^k -подрасслоение, то

$$F^{-1}(G_3) = \{\xi \in G_1 \mid F(\xi) \in G_3\}$$

является t -мерным C^k -подрасслоением расслоения G_1 , для которого

$$F(F^{-1}(G_3)) = G_3.$$

Доказательство см. в [10; гл. 4, §2].

Для всякого многозначного решения (1.5) рассмотрим векторное расслоение

$$\sigma^* \tau: \sigma^*(TR^4) \rightarrow S, \quad (5.1)$$

индуцированное отображением σ из касательного расслоения

$$\tau: TR^4 \rightarrow R^4, \quad (5.2)$$

и пусть

$$F: \sigma^*(TR^4) \rightarrow TR^4 \quad (5.3)$$

– соответствующий естественный биморфизм векторных расслоений (5.1), (5.2), накрывающий σ [10; гл. 4, § 2].

Биморфизм (5.3) позволяет поднять дифференциальные формы (1.7) с R^4 до $\sigma^*(TR^4)$ -дифференциальных форм

$$F^*\omega_1 \text{ и } F^*\omega_2 \quad (5.4)$$

на S таких, что для $\xi, \eta \in \sigma^*(TR^4)$ и $k = 1, 2$

$$(\xi \wedge \eta) \lrcorner F^*\omega_k = F(\xi \wedge \eta) \lrcorner \omega_k. \quad (5.5)$$

По аналогии с (2.6) при $j = 1, 2$ положим

$$H'_j(r) = \{\xi \in \sigma^*(TR^4) \mid \xi \lrcorner F^*(\mu_j\omega_2 + \lambda_j\omega_1) = 0\}. \quad (5.6)$$

ЛЕММА 5.2. *Для всякого многозначного C^k -решения (1.5) множество*

$$H'_j = \bigcup_{r \in S} H'_j(r) \quad (5.7)$$

является двумерным C^k -подрасслоением расслоения (5.1), для которого при $j = 1, 2$

$$F(H'_j(r)) = H_j(\sigma(r)). \quad (5.8)$$

Доказательство осуществляется на основании определений (2.6), (5.6) и леммы 5.1, если положить $G_1 = \sigma^*(TR^4)$, $G_2 = TR^4$, $G_3 = H_j$.

СЛЕДСТВИЕ 5.3. *Если для фиксированного $j = 1, 2$ векторы $g_1, g_2 \in H'_j$ и $g_1 \neq 0$, $g_2 \neq 0$, то*

- (a) $(g_1 \wedge g_2) \lrcorner F^*\omega_1 \neq 0$,
- (b) $(g_1 \lrcorner F^*\omega_1) \wedge (g_1 \lrcorner F^*\omega_2) = c(\mu_j F^*\omega_2 + \lambda_j F^*\omega_1)$, где c – отличный от нуля скаляр.

Доказательство следует из определения (5.6), равенства (5.8) и утверждений (с), (е) леммы 2.6.

ЛЕММА 5.4. *Для всякого многозначного C^k -решения (1.5) существует единственный C^{k-1} -мономорфизм*

$$T^*\sigma: TS \rightarrow \sigma^*(TR^4)$$

векторных расслоений над S , для которого

$$F \circ T^*\sigma = \sigma_*.$$

Доказательство см. в [17; гл. 3, § 3].

СЛЕДСТВИЕ 5.5. *Всякое многозначное C^k -решение (1.5) однозначно определяет двумерное векторное C^{k-1} -подрасслоение*

$$N = T^*\sigma(TS) \subset \sigma^*(TR^4),$$

которое аннулирует $\sigma^*(TR^4)$ -дифференциальные формы $F^*\omega_1$ и $F^*\omega_2$:

$$F^*\omega_2|_N = 0, \quad F^*\omega_1|_N = 0. \quad (5.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что N – двумерное векторное подрасслоение в $\sigma^*(TR^4)$, вытекает из леммы 5.4 и известных свойств векторных расслоений [10; гл. 4, § 2]. Согласно (1.6), лемме 5.4 и определению (5.5) для $\xi, \eta \in TS$ имеем

$$0 = (\xi \wedge \eta) \lrcorner \sigma^*\omega_2 = \sigma_*(\xi \wedge \eta) \lrcorner \omega_2 = F \circ T^*\sigma(\xi \wedge \eta) \lrcorner \omega_2 = T^*\sigma(\xi \wedge \eta) \lrcorner F^*\omega_2,$$

поэтому в силу конструкции N получаем первое из равенств (5.9). Второе равенство устанавливается аналогично. Следствие доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.7. Для подрасслоений (5.7) и подрасслоения N из следствия 5.5 положим

$$h'_j(r) = N(r) \cap H'_j(r) \quad (5.10)$$

при $j = 1, 2$ и $r \in S$. По следствию 5.3, (b) и равенствам (5.9)

$$N(r) \neq H'_j(r). \quad (5.11)$$

По следствию 5.3, (b) и равенствам (5.9) для векторов $g_1, g_2 \in H'_j(r)$

$$(g_1 \lrcorner F^*\omega_1)|_N \wedge (g_2 \lrcorner F^*\omega_1)|_N = 0,$$

т.е. $\sigma^*(TR^4)$ -ковекторы $(g_1 \lrcorner F^*\omega_1)|_N$ и $(g_2 \lrcorner F^*\omega_1)|_N$ линейно зависимы. Тем самым, существуют такие числа a и b , что

$$((ag_1 + bq_2) \lrcorner F^*\omega_1)|_N = 0.$$

Из последнего соотношения и равенств (5.9) заключаем, что

$$ag_1 + bq_2 \in N(r).$$

В силу (5.11) это означает, что пространство (5.10) одномерно, и потому

$$h'_j = \bigcup_{r \in S} h'_j(r)$$

является одномерным C^{k-1} -подрасслоением в расслоении (5.1), а также и в N , и в H'_j . Следовательно, согласно (5.8)

$$F(h'_j(r)) \subset H_j(\sigma(r)). \quad (5.12)$$

По лемме 5.4 и следствию 5.5 отображение

$$\nu: TS \ni \xi \mapsto T^*\sigma(\xi) \in N \quad (5.13)$$

– это C^{k-1} -биморфизм векторных расслоений над S . По лемме 5.1

$$h_j = \nu^{-1}(h'_j)$$

является одномерным C^{k-1} -подрасслоением в расслоении TS , для которого в силу включения (5.12) и леммы 5.4

$$\sigma^*(h_j(r)) = F \circ T^*\sigma(\nu^{-1}(h'_j)(r)) = F(h'_j(r)) \subset H_j(\sigma(r)).$$

Таким образом, для h_j выполнено включение (2.8).

Предположим, что

$$\tilde{h}_j \subset TS$$

– некоторое одномерное подрасслоение, удовлетворяющее включению (2.7). Тогда по лемме 7.4 для $r \in S$

$$\sigma^*(\tilde{h}_j(r)) = F \circ T^*\sigma(\tilde{h}_j(r)) = F \circ \nu(\tilde{h}_j(r)) \subset H_j(\sigma(r)),$$

т.е. $\nu(\tilde{h}_j(r)) \subset H'_j(\sigma(r))$. Поскольку $\nu(\tilde{h}_j(r)) \subset N(r)$, то согласно (5.10)

$$\nu(\tilde{h}_j(r)) = h'_j(r) = \nu(h_j(r)),$$

и $\tilde{h}_j(r) = h_j(r)$ в силу биморфности (5.13). Лемма 2.7 доказана.

§ 6. Характеристический диффеоморфизм

Для определенного решения (σ, L) задачи Коши (1.1), (3.1) пересечение (3.5) состоит ровно из одной точки, что позволяет при $j = 1, 2$ задать проекцию

$$\pi_j: S \ni r \mapsto L^{-1}(L(Z) \cap \gamma_{jr}(Z_{jr})) \in Z. \quad (6.1)$$

Для доказательства теоремы 3.2 требуется установить ряд свойств, которыми эта проекция обладает.

Согласно лемме 2.7 определенному решению (σ, L) отвечает C^{k-1} -подрасслоение (2.8). Любая точка r_0 многообразия S обладает окрестностью V , над которой это подрасслоение тривиализуется. Иными словами, на V существует C^{k-1} -векторное поле

$$X: V \rightarrow TS, \quad (6.2)$$

порождающее ограничение подрасслоения (2.8) на V , т.е. при $r \in V$

$$h_j(r) = X(r)R^1. \quad (6.3)$$

Рассмотрим на V непродолжаемую интегральную кривую

$$\begin{aligned} X_t(r): (a(r), b(r)) &\rightarrow V, \\ \dot{X}_t(r) &= X(X_t(r)), \end{aligned} \quad (6.4)$$

векторного поля X , проходящую через точку $r \in V$,

$$X_0(r) = r. \quad (6.5)$$

Следуя [11; раздел 1.48], положим для всякого вещественного t

$$\mathcal{D}_t = \{r \in V \mid a(r) < t < b(r)\}. \quad (6.6)$$

Известно, что отображение

$$X_t: \mathcal{D}_t \rightarrow \mathcal{D}_{-t} \quad (6.7)$$

является C^{k-1} -диффеоморфизмом, отображающим открытое подмножество $\mathcal{D}_t$ на открытое подмножество $\mathcal{D}_{-t}$.

ЛЕММА 6.1. *Для любого $r \in V$ и $a(r) < t < b(r)$ диффеоморфизм (6.7) переводит вектор $X(r)$ в вектор $X(X_t(r))$:*

$$(X_t)_*(X(r)) = X(X_t(r)). \quad (6.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По правилу дифференцирования композиции отображений и в силу уравнения (6.4)

$$\left. \frac{d}{dw} \right|_{w=0} X_t(X_w(r)) = (X_t)_*(X(r)).$$

Поскольку

$$X_t(X_w(r)) = X_{t+w}(r),$$

то

$$\left. \frac{d}{dw} \right|_{w=0} X_t(X_w(r)) = \left. \frac{d}{dw} \right|_{w=0} X_{t+w}(r) = X(X_t(r)).$$

Сопоставляя полученные равенства, выводим (6.8). Лемма доказана.

ЛЕММА 6.2. *Пусть (σ, L) – определенное C^k -решение задачи Коши (1.1), (3.1). Тогда для фиксированного индекса $j \in \{1, 2\}$ и всякой точки $r \in S$ найдется окрестность этой точки U и C^{k-1} -диффеоморфизм*

$$\varphi: W \rightarrow U, \quad (6.9)$$

где W – некоторый открытый прямоугольник,

$$W = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u_1 < u < u_2, \ v_1 < v < v_2\}, \quad (6.10)$$

$v_1 < 0 < v_2$, удовлетворяющие следующим свойствам:

(а) при фиксированном u отображение

$$\varphi(u, \cdot): (v_1, v_2) \rightarrow S$$

служит интегральным многообразием подрасслоения (2.8);

(b) кривая

$$\varphi(\cdot, 0): (u_1, u_2) \rightarrow S$$

совпадает на интервале (u_1, u_2) с вложением (3.3)

$$\varphi(\cdot, 0) = L|(u_1, u_2);$$

(c) для проекции (6.1) имеет место равенство

$$\pi_j \circ \varphi(u, v) = u.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольную точку $r_0 \in S$ и рассмотрим соответствующее этой точке интегральное многообразие (2.10)

$$\gamma_{jr_0}: Z_{jr_0} \rightarrow S \quad (6.11)$$

подрасслоения (2.8). Многообразие Z_{jr_0} одномерно и, следовательно, диффеоморфно либо окружности, либо открытому интервалу вещественной прямой [10; гл. 1, § 2]. В случае, когда это многообразие диффеоморфно окружности, выбросим из него одну точку, отличную от точек $\gamma_{jr_0}^{-1}(r_0)$ и $\gamma_{jr_0}^{-1}(L \circ \pi_j(r_0))$. Таким образом, не ограничивая общности, можно считать, что в подмногообразии (6.11)

$$Z_{jr_0} = (\alpha, \beta)$$

– открытый интервал.

Обозначим через c_1 и c_2 числа из этого интервала, отвечающие точкам r_0 и $L \circ \pi_j(r_0)$:

$$\gamma_{jr_0}(c_1) = r_0, \quad \gamma_{jr_0}(c_2) = L \circ \pi_j(r_0),$$

и выберем числа b_1 и b_2 так, чтобы $\alpha < b_1 < c_1$, $c_2 < b_2 < \beta$. Ограничение отображения (6.11) на отрезок $[b_1, b_2]$ является гомеоморфизмом на свой образ [18; с. 195–196], а потому ограничение отображения (6.11) на интервал (b_1, b_2) является вложением. Следовательно, по теореме о трубчатой окрестности подмножество

$$\gamma_{jr_0}((b_1, b_2)) \subseteq S$$

имеет в S окрестность V , которая диффеоморфна R^2 . Подрасслоение (2.6) тривиализуется над окрестностью V [10; гл. 4, § 2], т.е. на V существует C^{k-1} -векторное поле (6.2), обладающее свойством (6.3). Тем самым, векторное поле (6.2) не имеет стационарных точек, и в силу теории Пуанкаре–Бендиксона все интегральные кривые (6.4) непериодичны [16; гл. 7, § 3]. Непериодичность означает, что для интегральной кривой, проходящей через точку r_0 , найдется единственное число $t = t(r_0)$ такое, что

$$X_t(L \circ \pi_j(r_0)) = r_0. \quad (6.12)$$

Для определенности будем считать, что $t > 0$.

Множества (6.6) обладают свойством монотонности:

$$\mathcal{D}_{t_1} \subseteq \mathcal{D}_{t_2} \quad \text{при} \quad |t_1| \geq |t_2|, \quad t_1 t_2 \geq 0,$$

и непрерывности:

$$\mathcal{D}_v = \bigcup_b \mathcal{D}_b, \quad \text{где} \quad |b| > |v|, \quad bv > 0$$

[11; раздел 1.48(f)]. Поскольку согласно (6.12)

$$L \circ \pi_j(r_0) \in \mathcal{D}_t,$$

то эти свойства позволяют выбрать числа v_1 и v_2 , $v_1 < 0 < v_2$, так, чтобы

$$L \circ \pi_j(r_0) \in \mathcal{D}_{v_1} \cap \mathcal{D}_{v_2}.$$

Непрерывность вложения (3.3) позволяет выбрать числа u_1 и u_2 , $u_1 < \pi_j(r_0) < u_2$, так, чтобы и

$$L((u_1, u_2)) \subset \mathcal{D}_{v_1} \cap \mathcal{D}_{v_2}.$$

Фиксируем выбранные указанным образом числа u_1 , u_2 , v_1 , v_2 и отвечающий им прямоугольник (6.10).

Построение прямоугольника (6.10) гарантирует, что для точек $(u, v) \in W$ определено отображение

$$\varphi(u, v) = X_v(L(u)), \quad (6.13)$$

для которого $r_0 \in \varphi(W)$. Это отображение C^{k-1} -гладко как композиция C^{k-1} -гладких отображений и инъективно в силу неперIODичности интегральных кривых векторного поля (6.2).

По правилу дифференцирования композиции отображений

$$\varphi_*(u, v) \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) = (X_v)_*(L(u))(\dot{L}(u)), \quad (6.14)$$

а согласно (6.4)

$$\varphi_*(u, v) \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial v} X_v(L(u)) = X(X_v(L(u))), \quad (6.15)$$

откуда по лемме 6.1 выводим:

$$\varphi_*(u, v) \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) = (X_v)_*(L(u))(X(L(u))). \quad (6.16)$$

Свойство свободности (3.2) начальной кривой (3.1) и равенство (3.4) обеспечивают линейную независимость векторов $\dot{L}(u)$ и $X(L(u))$ при $u_1 < u < u_2$. Отображение X_v является диффеоморфизмом, и потому векторы (6.14) и (6.16) также линейно независимы при $u_1 < u < u_2$ и $v_1 < v < v_2$. Это означает, что (6.13) – диффеоморфизм.

(а) Свойство (а) равносильно равенству (6.15).

(б) Свойство (б) вытекает из определений (6.13) и (6.5).

(с) Свойство (с) вытекает из определения (6.1) и свойств (а) и (б). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 6.3. Проекция (6.1) при $j = 1, 2$ является C^{k-1} -гладким отображением таким, что для касательного вектора $\xi \in T_r S$

$$d\pi_j(\xi) = 0 \quad (6.17)$$

тогда и только тогда, когда ξ лежит в пространстве $h_j(r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольную точку $r \in S$ и выберем ее окрестность U и C^{k-1} -диффеоморфизм (6.9) в соответствии с леммой 6.2. По свойству (с) проекция (6.1) C^{k-1} -гладка и

$$d(\pi_j \circ \varphi) = d\pi_j \circ \varphi_* = du,$$

а по свойству (а) $\xi \in T_r S$ тогда и только тогда лежит в пространстве $h_j(r)$, когда $\varphi_*(\xi)$ коллинеарен $\partial/\partial v$, т.е. когда выполнено условие (6.17). Следствие доказано.

ЛЕММА 6.4. Пусть выполнены все условия теоремы 3.2. Тогда отображение

$$\Phi: S \ni r \mapsto (u, v) = (\pi_1(r), \pi_2(r)) \in R^2, \quad (6.18)$$

где π_1 и π_2 – проекции (6.1), является C^{k-1} -диффеоморфизмом, для которого выполнены свойства (а), (b), (с) и (d) теоремы 3.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию решение (σ, L) является определенным. Поэтому согласно построению (6.1) отображение (6.18) C^{k-1} -гладко в силу следствия 6.3.

Выберем ненулевые вектора $\xi_1, \xi_2 \in T_r S$ так, чтобы при $j = 1, 2$

$$\xi_j \in h_j(r).$$

Поскольку (1.5) – погружение, то по леммам 2.7 и 2.6, (d) эти векторы линейно независимы, т.е. образуют базис пространства $T_r S$. По определению (6.18)

$$\Phi_*(r)(\xi_j) = \xi_j \lrcorner d\pi_1(r) \frac{\partial}{\partial u} + \xi_j \lrcorner d\pi_2(r) \frac{\partial}{\partial v},$$

откуда по следствию 6.3

$$\Phi_*(r)(\xi_1) = \xi_1 \lrcorner d\pi_2(r) \frac{\partial}{\partial v} \neq 0, \quad \Phi_*(r)(\xi_2) = \xi_2 \lrcorner d\pi_1(r) \frac{\partial}{\partial u} \neq 0.$$

Полученные соотношения означают, что векторы $\Phi_*(r)(\xi_1)$ и $\Phi_*(r)(\xi_2)$ линейно независимы. Следовательно, отображение (6.18) для всякого $r \in S$ переводит базис пространства $T_r S$ в базис пространства $T_{\Phi(r)} R^2$ и потому является локальным диффеоморфизмом.

(а) Образ $W = \Phi(S)$ отображения (6.18) – это открытое подмножество в R^2 , которое в силу определения (6.1) лежит внутри квадрата (3.8), а подмногообразие (3.3) отображается на диагональ (3.9).

(b) По определениям (6.18) и (6.1) имеет место (3.10).

(с) По следствию 6.3 образ $\Phi \circ \gamma_{jr}(Z_{jr})$ характеристики (2.10) при отображении (6.18) лежит на координатной прямой $u = \pi_1(r)$ для $j = 1$ и на прямой $u = \pi_2(r)$ для $j = 2$. Следовательно, $\Phi \circ \gamma_{jr}$ – вещественнозначная функция на Z_{jr} . Поскольку (6.18) – локальный диффеоморфизм, то $(\Phi \circ \gamma_{jr})_*$ – мономорфизм и функция $\Phi \circ \gamma_{jr}$ не имеет критических точек. Отвечающее характеристике (2.10) многообразие Z_{jr} одномерно при любом $r \in S$ и, следовательно, диффеоморфно либо окружности, либо открытому интервалу вещественной прямой [10; гл. 1, § 2]. Отсутствие у функции $\Phi \circ \gamma_{jr}$ критических точек означает, что Z_{jr} диффеоморфно интервалу. Поэтому мономорфность $(\Phi \circ \gamma_{jr})_*$ равносильна строгой монотонности функции $\Phi \circ \gamma_{jr}$ и, следовательно, образ $\Phi \circ \gamma_{jr}(Z_{jr})$ является интервалом соответствующей координатной прямой.

Для всякого $r \in S$ координатные прямые $u = \pi_1(r)$ и $v = \pi_2(r)$ пересекаются ровно в одной точке. Тем самым, в силу строгой монотонности функций $\Phi \circ \gamma_{1r}$ и $\Phi \circ \gamma_{2r}$ пересечение (3.5) также состоит ровно из одной точки, что равносильно инъективности отображения (6.18). Иными словами, локальный диффеоморфизм (6.18) является диффеоморфизмом.

(d) Определенность решения (σ, S) и свойства (а), (b) и (с) гарантируют, что всякая точка (u, v) множества $W = \Phi(S)$ может быть соединена с диагональю (3.9) отрезками координатных прямых, целиком содержащимися в W . Это равносильно тому, что треугольник (3.11) лежит внутри W . Лемма доказана.

По лемме 6.4 отвечающее определенному C^k -решению (σ, L) отображение (3.13), (3.15) C^{k-1} -гладко. Имеет место

ЛЕММА 6.5. Пусть (3.13), (3.15) – это C^{k-1} -отображение, отвечающее определенному C^k -решению (σ, L) согласно лемме 6.4. Тогда для этого отображения справедливы включения

$$\psi_* \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) \in H_1, \quad (6.19)$$

$$\psi_* \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \in H_2. \quad (6.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу свойства (с) из леммы 6.4 и по определению характеристик (2.10) для отображения (3.15) на множестве W справедливы включения (6.19)–(6.20). Лемма доказана.

Рассмотрим на R^4 векторные поля (2.7), удовлетворяющие лемме 2.6, (f). Имеет место

ЛЕММА 6.6. Включение (6.19) равносильно уравнению

$$\psi_* \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) \lrcorner (\xi_{1g} \lrcorner \omega_1) = 0, \quad (6.21)$$

где $g = 1, 2$, включение (6.20) равносильно уравнению

$$\psi_* \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \lrcorner (\xi_{2g} \lrcorner \omega_1) = 0. \quad (6.22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы является следствием определения (2.6) и леммы 2.6, (a), (b).

Запишем уравнения (6.21)–(6.22) покомпонентно. Положим

$$\psi^1 = \psi^* x, \quad \psi^2 = \psi^* y, \quad \psi^3 = \psi^* p, \quad \psi^4 = \psi^* q. \quad (6.23)$$

Тогда из (6.21) и (6.22) выводим

$$\sum_{g=1}^4 \eta_g^{1w}(\psi) \psi_u^g(u, v) = 0, \quad (6.24)$$

$$\sum_{g=1}^4 \eta_g^{2w}(\psi) \psi_v^g(u, v) = 0, \quad (6.25)$$

где $w = 0, 1$, η_g^{nw} – это g -я компонента линейной дифференциальной формы $\xi_{ng} \lrcorner \omega_1$ и $n = 1, 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.7. Полученная система уравнений (6.24)–(6.25) аналогична системе уравнений, которую Г. Леви использовал в работе [13] для построения локального классического решения нелинейного гиперболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными.

По лемме 2.6, (d), (f) векторные поля ξ_{11} , ξ_{12} , ξ_{13} и ξ_{14} линейно независимы в каждой точке $t \in R^4$. Следовательно, в силу невырожденности формы ω_1 квадратная матрица (N_g^{w+n}) , где

$$N_g^{n+w} = \eta_g^{nw}, \quad (6.26)$$

размера 4×4 также невырождена. Поэтому справедлива

ЛЕММА 6.8. *Всякое C^1 -отображение (3.13), компоненты (6.23) которого удовлетворяют системе четырех уравнений (6.24)–(6.25), имеет в W непрерывную смешанную производную ψ_{uv} .*

Доказательство см. в [14; секция 4].

Лемма 6.8 и невырожденность матрицы (6.26) позволяют провести следующее построение. Продифференцируем уравнения (6.24) по v , уравнения (6.25) по u и разрешим полученные уравнения относительно ψ_{uv}^1 , ψ_{uv}^2 , ψ_{uv}^3 и ψ_{uv}^4 . В результате получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 6.9. *Пусть (3.13) – произвольное C^1 -отображение, компоненты (6.23) которого удовлетворяют системе четырех уравнений (6.24)–(6.25). Предположим, что множество W содержит диагональ (3.9), на которой отображение (3.13) принимает начальное значение (3.16). Тогда компоненты этого отображения удовлетворяют системе уравнений*

$$\psi_{uv}^g = \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \Psi_{\alpha, \beta}^g(\psi) \psi_u^\alpha \psi_v^\beta. \quad (6.27)$$

Здесь $g = 1, 2, 3, 4$ и $\Psi_{\alpha, \beta}^g$ являются известными полиномами от коэффициентов матрицы (6.26), их первых производных и коэффициентов матрицы, обратной к (6.26). На диагонали (3.9)

$$\psi_u(t, t) = \mu_1(t), \quad (6.28)$$

$$\psi_v(t, t) = \mu_2(t), \quad (6.29)$$

где μ_1 и μ_2 являются известными полиномами от композиции коэффициентов обратной к (6.26) матрицы с начальной кривой (3.1) и первых производных компонент

$$l^*(x) = x_0(t), \quad l^*(y) = y_0(t), \quad l^*(p) = p_0(t), \quad l^*(q) = q_0(t)$$

начальной кривой (3.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вывод уравнений (6.27) при $g = 1, 2, 3, 4$ описан в предшествующем лемме абзаце. Продифференцируем начальное значение (3.16):

$$\psi_u(t, t) + \psi_v(t, t) = \dot{l}(t). \quad (6.30)$$

Выразив отсюда $\psi_v(t, t)$ и подставив результат в (6.25), получим систему (6.24)–(6.25) четырех независимых линейных алгебраических уравнений относительно $\psi_u(t, t)$, решая которую находим (6.28). Из (6.30) и (6.28) выводим (6.29)

с

$$\mu_2(t) = \dot{l}(t) - \mu_1(t).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 6.10. Пусть множество W обладает свойствами (а) и (д) из теоремы 3.2. Тогда всякое C^1 -отображение (3.13), компоненты (6.23) которого удовлетворяют системе четырех уравнений (6.24)–(6.25) и принимают начальное значение (3.16), C^k -гладко.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 6.8 отображение (3.13) обладает непрерывными смешанными производными ψ_{uv} , для которых согласно лемме 6.9 выполнены уравнения (6.27), и принимает начальные значения (3.16) и (6.28)–(6.29). Положим

$$\psi_1 = \psi_u, \quad \psi_2 = \psi_v. \quad (6.31)$$

Для компонент этих отображений при $g = 1, 2, 3, 4$ имеем

$$\psi_{1v}^g = \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \Psi_{\alpha, \beta}^g \psi_1^\alpha \psi_2^\beta, \quad (6.32)$$

$$\psi_{2u}^g = \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \Psi_{\alpha, \beta}^g \psi_1^\alpha \psi_2^\beta, \quad (6.33)$$

$$\psi_1(t, t) = \mu_1(t), \quad \psi_2(t, t) = \mu_2(t). \quad (6.34)$$

Тем самым, получаем задачу Коши (6.32), (6.34) относительно ψ_1 и ψ_2 , входные данные которой C^{k-1} -гладки. Отсюда вытекает C^{k-1} -гладкость отображений (6.31). Доказательство этого факта аналогично доказательству существования производных высших порядков по параметрам и начальным значениям для решений обыкновенных дифференциальных уравнений [16; гл. 5, § 4]. Лемма доказана.

ЛЕММА 6.11. Пусть (3.13), (3.15) – это C^{k-1} -отображение, отвечающее определенному C^k -решению (σ, L) задачи Коши (1.1), (3.1) согласно лемме 6.4. Тогда это отображение C^k -гладко.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 6.5 для этого отображения выполняются включения (6.19)–(6.20), которые по лемме 6.6 равносильны системе уравнений (6.21)–(6.22). Покомпонентная запись уравнений этой системы имеет вид (6.24)–(6.25), откуда по лемме 6.10 заключаем, что отображение (3.13), (3.15) C^{k-1} -гладко. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2. Существование. По лемме 6.4 отображение (6.18) является C^{k-1} -диффеоморфизмом, для которого выполнены свойства (а)–(д) из теоремы 3.2. Рассмотрим отвечающее решению (σ, S) C^{k-1} -погружение (3.13), (3.15). По лемме 6.11 это погружение C^k -гладко и, следовательно, (6.18) также является C^k -гладким [11; разделы 1.32 и 1.35].

Единственность. Пусть существует еще один диффеоморфизм $\tilde{\Phi}$, удовлетворяющий теореме 3.2. По определению проекции (6.1) и свойству (b) для любого $r \in S$ при $a < t < b$ и $j = 1, 2$ имеем

$$\tilde{\Phi} \circ L(\pi_j(r)) = (\pi_j(r), \pi_j(r)).$$

Следовательно, по теореме 3.2, (с)

$$u \circ \tilde{\Phi}(r) = u \circ \tilde{\Phi}(L(\pi_1(r))) = \pi_1(r), \quad v \circ \tilde{\Phi}(r) = v \circ \tilde{\Phi}(L(\pi_2(r))) = \pi_2(r),$$

т.е. $\tilde{\Phi}$ совпадает с диффеоморфизмом (6.18). Теорема доказана.

§ 7. Доказательство существования

Прежде чем приступить к непосредственному доказательству теоремы существования 4.3, установим ряд вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 7.1. Пусть (3.13) – это C^k -погружение, для которого справедливы включения (6.19)–(6.20). Тогда это погружение является многозначным C^k -решением уравнения (1.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.6, (b) и определению характеристического расслоения (2.6) это погружение удовлетворяет на множестве W уравнениям (1.6). Лемма доказана.

ЛЕММА 7.2. Пусть множество W удовлетворяет утверждениям (а) и (d) теоремы 3.2. Предположим, что компоненты (6.23) C^k -отображения (3.13) удовлетворяют системе (6.24)–(6.25) и принимают начальное значение (3.16). Тогда пара (ψ, G) отображений (3.13)–(3.14) является определенным C^k -решением задачи Коши (1.1), (3.1), характеристическим диффеоморфизмом которого служит тождественное отображение id_W .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнения (6.24)–(6.25) служат покомпонентной записью равенств (6.21) и (6.22). Тем самым, по лемме 6.6 для отображения (3.13) выполнены включения (6.19) и (6.20).

Компоненты первых производных (6.31) отображения (3.13) удовлетворяют системам уравнений (6.32) и (6.33). Каждую из этих систем можно рассматривать как систему линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных ψ_1 и ψ_2 соответственно. Из равенства

$$\psi_* \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) (t, t) = i(t),$$

условия свободности (3.2) начальной кривой и включений (6.19)–(6.20) вытекает, что каждая из производных (6.31) отлична от нуля во всех точках диагонали (3.9):

$$\psi_* \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) \neq 0, \quad \psi_* \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \neq 0. \quad (7.1)$$

Поскольку по условию множество W обладает свойствами (а) и (d) из теоремы 3.2, то отсюда по теореме единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений, примененной к системам (6.32) и (6.33), получаем, что оценки (7.1) справедливы на всем множестве W . По лемме 2.6, (d) характеристические подрасслоения H_1 и H_2 дизъюнкты, и потому из включений (6.19)–(6.20) и оценок (7.1) заключаем, что $\psi_* \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)$ и $\psi_* \left(\frac{\partial}{\partial v} \right)$ линейно независимы, т.е. отображение (3.13) является погружением.

Таким образом, отображение (3.13) является погружением, для которого выполняются включения (6.19)–(6.20). По лемме 7.1 это погружение является многозначным решением уравнения (1.1). Отображение id_W обладает свойствами (а)–(d) из теоремы 3.2, а потому служит характеристическим диффеоморфизмом решения (ψ, G) . Лемма доказана.

ЛЕММА 7.3. Пусть множества W_1 и W_2 обладают свойствами (а) и (d) из теоремы 3.2. Тогда пересечение и объединение

$$W_1 \cap W_2, \quad W_1 \cup W_2$$

этих множеств также обладают свойствами (а) и (d) из теоремы 3.2.

Доказательство очевидно.

ЛЕММА 7.4. Пусть множества W_1 и W_2 обладают свойствами (а) и (d) из теоремы 3.2 и заданы C^k -отображения

$$\psi_1: W_1 \rightarrow R^4, \quad (7.2)$$

$$\psi_2: W_2 \rightarrow R^4, \quad (7.3)$$

которые являются решениями системы уравнений (6.24)–(6.25) и принимают начальное значение (3.16). Тогда

$$\psi_1|_{W_1 \cap W_2} = \psi_2|_{W_1 \cap W_2}. \quad (7.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 7.3 множество $W_1 \cap W_2$ обладает свойствами (а) и (d) из теоремы 3.2, откуда в силу теоремы единственности для задачи (6.24)–(6.25), (3.16) (см. [14; с. 843]) вытекает равенство (7.4). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 7.5. Пусть выполнены все условия леммы 7.4. Тогда на множестве

$$W = W_1 \cup W_2$$

существует C^k -отображение

$$\psi: W \rightarrow R^4, \quad (7.5)$$

которое является решением системы уравнений (6.24)–(6.25), принимает начальное значение (3.16) и удовлетворяет равенствам

$$\psi|_{W_1} = \psi_1, \quad \psi|_{W_2} = \psi_2. \quad (7.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 7.4 отображения (7.2) и (7.3) на пересечении $W_1 \cap W_2$ совпадают. Следовательно, выражения (7.6) корректно определяют C^k -отображение (7.5), которое является решением системы уравнений (6.24)–(6.25), принимающим начальное значение (3.16). Следствие доказано.

ЛЕММА 7.6. Существуют множество W , обладающее свойствами (а) и (d) из теоремы 3.2, и C^k -отображение (7.5), которое является решением системы уравнений (6.24)–(6.25) и принимает начальное значение (3.16).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование множества W , обладающего свойствами (а) и (d) из теоремы 3.2, и C^1 -отображения (7.5), которое является решением системы уравнений (6.24)–(6.25) и принимает начальное значение (3.16), является содержанием известной теоремы существования (см. [14; с. 840]). Поскольку уравнения (6.24)–(6.25) и начальное значение (3.16) C^k -гладки, то по лемме 6.10 отображение (7.5) C^k -гладко. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.3. Рассмотрим систему подмножеств плоскости R^2

$$\{W_\zeta \mid \zeta \in \Xi\}, \quad (7.7)$$

которой принадлежат те и только те множества W_ζ , для которых выполнены свойства (а) и (b) из теоремы 3.2 и на которых определены C^k -отображения

$$\psi_\zeta: W_\zeta \rightarrow R^4, \quad (7.8)$$

удовлетворяющие системе уравнений (6.24)–(6.25) и начальному условию (3.16). Положим

$$\tilde{S} = \bigcup_{\zeta \in \Xi} W_\zeta. \quad (7.9)$$

По лемме 7.6 множество (7.9) непусто. По лемме 7.3 оно обладает свойствами (а) и (b) из теоремы 3.2. По следствию 7.5 на нем определено такое C^k -отображение

$$\tilde{\sigma}: \tilde{S} \rightarrow R^4, \quad (7.10)$$

для которого выполняются равенства

$$\tilde{\sigma}|_{W_\zeta} = \psi_\zeta, \quad (7.11)$$

$\zeta \in \Xi$, система уравнений (6.24)–(6.25) и начальное условие (3.16). Покажем, что пара отображений (4.2), где

$$\tilde{L}: (a, b) \ni t \mapsto (t, t) \in \tilde{S}, \quad (7.12)$$

– это непродолжаемое решение задачи Коши (1.1), (3.1).

По лемме 7.2 пара (4.2) отображений (7.10) и (7.12) является определенным C^k -решением задачи Коши (1.1), (3.1). Предположим, что пара (4.2) отображений (1.5) и (3.3) также является определенным C^k -решением задачи Коши (1.1), (3.1). Тогда по теореме 3.2 для этого решения существует единственный C^k -диффеоморфизм Φ (см. (3.7)), обладающий свойствами (а)–(d) (характеристический диффеоморфизм, отвечающий определенному решению (4.1)).

В соответствии с замечанием 3.4 решению (4.1) можно сопоставить на множестве (3.12) пару C^k -отображений (3.13)–(3.15) так, что справедливо равенство (3.16). В силу лемм 6.5 и 6.6 компоненты (6.23) отображения (3.13) удовлетворяют системе уравнений (6.24)–(6.25). Поэтому множество (3.13) содержится в системе подмножеств (7.7). Следовательно, оно является подмножеством множества (7.9) и отображение (3.13), (3.15) при некотором $\zeta \in \Xi$ совпадает с отображением (7.8). Отсюда согласно (7.11) заключаем, что (3.13) служит ограничением отображения (7.10) на множество (3.12):

$$\tilde{\sigma}|_W = \psi. \quad (7.13)$$

Зададим монеоморфизм (4.3) посредством выражения $\varphi = \Phi$. Согласно (7.13) и (3.16) для φ и решений (4.1), (4.2) справедливо первое из равенств (4.4). А согласно теореме 3.2, (b) и определению 7.12 справедливо и второе из равенств (4.4). Теорема доказана.

§ 8. Доказательство единственности

Прежде чем приступить к непосредственному доказательству теоремы единственности 4.6, установим ряд вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 8.1. Пусть для уравнения (1.1) заданы начальные значения (3.1) и (4.5), которые эквивалентны, и пусть эта эквивалентность осуществляется диффеоморфизмом (4.6). Предположим, что (σ, L) – определенное C^k -решение задачи Коши (1.1), (3.1), а (3.7) – отвечающий этому решению характеристический диффеоморфизм. Тогда пара отображений (μ, F) , где

$$\mu = \sigma \circ \Phi^{-1} \circ (N|W)^{-1}, \quad N: \Pi(a, b) \ni (u, v) \mapsto (\nu(u), \nu(v)) \in \Pi(\tilde{a}, \tilde{b}),$$

$$F: \tilde{Z} \ni t \mapsto (t, t) \in \Pi(\tilde{a}, \tilde{b}),$$

является определенным C^k -решением задачи Коши (1.1), (4.5). Это решение эквивалентно решению (σ, S) : $\mu \circ \varphi = \sigma$ и $\varphi \circ L(t) = F \circ \nu(t)$, где

$$\varphi = N \circ \Phi. \quad (8.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что погружение μ является многозначным C^k -решением уравнения (1.1). При $a < t < b$

$$\mu \circ F(t) = \sigma \circ \Phi^{-1} \circ (N|W)^{-1}(t, t) = \sigma \circ \Phi^{-1}(\nu^{-1}(t), \nu^{-1}(t)),$$

откуда по теореме 3.2, (b) и определению 4.4, (a)

$$\mu \circ F(t) = \sigma \circ \Phi^{-1}(\Phi \circ L(\nu^{-1}(t))) = \sigma \circ L(\nu^{-1}(t)) = l(\nu^{-1}(t)) = \tilde{l}(t).$$

Тем самым установлено, что (μ, F) – это решение задачи Коши (1.1), (4.5). Отображение N переводит координатные прямые в координатные прямые, следовательно, в силу свойств характеристического диффеоморфизма Φ (теорема 3.2, (c), (d)) это решение является определенным.

Зададим гомеоморфизм (4.6) посредством выражения (8.1). Согласно определению (3.12) множества W

$$\mu \circ \varphi = \sigma \circ \Phi^{-1} \circ (N|W)^{-1} \circ N \circ \Phi = \sigma,$$

т.е. первое из равенств (4.8) выполнено. По теореме 3.2, (b)

$$\varphi \circ L(t) = N \circ \Phi \circ L(t) = N(t, t) = (\nu(t), \nu(t)) = F \circ \nu(t),$$

т.е. второе из равенств (4.8) также выполнено. Лемма доказана.

Рассмотрим многозначные C^k -решения (1.5) и (7.10) уравнения (1.1). По лемме 2.6 на решении (1.5) определено одномерное векторное C^{k-1} -подрасслоение (2.8), а на решении (7.10) – подрасслоение

$$\tilde{h}_j \subset T\tilde{S}. \quad (8.2)$$

Подрасслоение (2.8) определяется включением (2.9), а подрасслоение (8.2) – включением

$$\tilde{\sigma}_*(\tilde{h}_j(\tilde{r})) \subset H_j(\tilde{\sigma}(\tilde{r})), \quad (8.3)$$

где $\tilde{r} \in \tilde{S}$ и $j = 1, 2$. Интегральные многообразия подрасслоения (2.8) – это характеристики (2.10) решения (1.5), а интегральные многообразия подрасслоения (8.2) – это характеристики

$$\gamma_{j\tilde{r}}: \tilde{Z}_{j\tilde{r}} \rightarrow \tilde{S} \quad (8.4)$$

решения (7.10). Имеет место

ЛЕММА 8.2. Пусть для многозначных решений (1.5) и (7.10) существует такое вложение (4.3), что

$$\tilde{s} \circ \varphi = \sigma. \quad (8.5)$$

Тогда для подрасслоений (2.8) и (8.2) при $j = 1, 2$ и $r \in S$ справедливы равенства

$$\varphi_*(h_j(r)) = \tilde{h}_j(\varphi(r)), \quad (8.6)$$

а для характеристик (2.8) и (8.4) – включения

$$\varphi \circ \gamma_{jr}(Z_{jr}) \subset \tilde{\gamma}_{j\varphi(r)}(\tilde{Z}_{j\varphi(r)}). \quad (8.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение (2.7) и соотношение (8.5) обеспечивают выполнение включения

$$\tilde{\sigma}_*(\varphi_*(h_j(r))) \subset H_j(\tilde{\sigma}(\varphi(r))). \quad (8.8)$$

По лемме 2.6 включение (8.3) однозначно определяет подрасслоение (8.2), поэтому из (8.8) вытекает (8.6).

Выберем произвольную точку $w \in Z_{jr}$. Для касательного пространства $T_w Z_{jr}$ по определению характеристики (2.10) имеем

$$(\varphi \circ \gamma_{jr})_*(T_w Z_{jr}) = \varphi_*((\gamma_{jr})_*(T_w Z_{jr})) = \varphi_*(h_j(\gamma_{jr}(w))),$$

откуда в силу (8.6) получаем

$$(\varphi \circ \gamma_{jr})_*(T_w Z_{jr}) = \tilde{h}_j(\varphi(\gamma_{jr}(w))).$$

Следовательно, подмногообразие $\varphi \circ \gamma_{jr}$ является интегральным многообразием подрасслоения (8.2). Оно, очевидно, содержит точку $\varphi(r)$, а поскольку $\tilde{\gamma}_{j\varphi(r)}$ – это наибольшее интегральное многообразие подрасслоения (8.2), содержащее точку $\varphi(r)$, то справедливо включение (8.7). Лемма доказана.

ЛЕММА 8.3. Пусть (4.1) и (4.2) – два непродолжаемых решения задачи Коши (1.1), (3.1). Тогда они эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению 4.1 для непродолжаемого решения (4.2) найдется такое вложение (4.3), для которого справедливы равенства (4.4). Аналогичным образом, для непродолжаемого решения (4.1) найдется вложение

$$\tilde{\varphi}: \tilde{S} \rightarrow S$$

такое, что справедливы равенства

$$\sigma \circ \tilde{\varphi} = \tilde{\sigma}, \quad \tilde{\varphi} \circ \tilde{L} = L.$$

Следовательно, для вложений $\tilde{\varphi} \circ \varphi$ и $\varphi \circ \tilde{\varphi}$ имеем

$$\tilde{\sigma} \circ (\varphi \circ \tilde{\varphi}) = \tilde{\sigma}, \quad (\varphi \circ \tilde{\varphi}) \circ \tilde{L} = \tilde{L}, \quad \sigma \circ (\tilde{\varphi} \circ \varphi) = \sigma, \quad (\tilde{\varphi} \circ \varphi) \circ L = L. \quad (8.9)$$

Положим

$$f = \tilde{\varphi} \circ \varphi: S \rightarrow S.$$

Отображение (3.3) является вложением, поэтому из (8.9) вытекает

$$f|L(Z) = \text{id}_{L(Z)}. \quad (8.10)$$

Выберем произвольную точку $r \in S$. По условию решение (4.1) является определенным, т.е. при $j = 1, 2$ пересечение (3.5) состоит в точности из одной точки r_j , лежащей в $L(Z)$, а пересечение (3.6) состоит в точности из одной точки r :

$$r = \gamma_{1r_1}(Z_{1r_1}) \cap \gamma_{2r_2}(Z_{2r_2}). \quad (8.11)$$

Отсюда по лемме 8.2 (см. (8.7))

$$f(r) = \gamma_{1f(r_1)}(Z_{1f(r_1)}) \cap \gamma_{2f(r_2)}(Z_{2f(r_2)}),$$

что в силу (8.10) обеспечивает справедливость выражения

$$f(r) = \gamma_{1r_1}(Z_{1r_1}) \cap \gamma_{2r_2}(Z_{2r_2}),$$

сопоставляя которое с (8.11) заключаем, что

$$f(r) = \tilde{\varphi} \circ \varphi(r) = r.$$

Аналогичным образом для всякого $\tilde{r} \in \tilde{S}$ устанавливается, что

$$\varphi \circ \tilde{\varphi}(\tilde{r}) = \tilde{r}.$$

Таким образом, вложения φ и $\tilde{\varphi}$ являются взаимно обратными отображениями, т.е. диффеоморфизмами, и, следовательно, решения (4.1) и (4.2) эквивалентны. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.6. По лемме 8.1 для непродолжаемого решения (4.2) задачи Коши (1.1), (3.1) найдется эквивалентное ему определенное решение (μ, F) ,

$$\mu: U \rightarrow R^4, \quad F: \tilde{Z} \rightarrow U,$$

задачи Коши (1.1), (4.5). Иными словами, существует такой диффеоморфизм

$$\varphi: \tilde{S} \rightarrow U,$$

что

$$\mu \circ \varphi = \tilde{\sigma}, \quad \varphi \circ \tilde{L} = F \circ \nu, \quad (8.12)$$

где ν – диффеоморфизм (4.6).

Рассмотрим произвольное определенное C^k -решение (α, X) ,

$$\alpha: V \rightarrow R^4, \quad X: \tilde{Z} \rightarrow V,$$

задачи (1.1), (4.5). По лемме 8.1 для этого решения найдется эквивалентное ему определенное решение (β, Y) ,

$$\beta: W \rightarrow R^4, \quad Y: Z \rightarrow W,$$

задачи Коши (1.1), (3.1). Иными словами, существует такой диффеоморфизм

$$\psi: W \rightarrow V,$$

что

$$\alpha \circ \psi = \beta, \quad \psi \circ Y = X \circ \nu. \quad (8.13)$$

Поскольку (4.2) является непродолжаемым решением задачи (1.1), (3.1), то для решения (β, Y) найдется такое вложение

$$\gamma: W \rightarrow \tilde{S},$$

что

$$\tilde{\sigma} \circ \gamma = \beta, \quad \gamma \circ Y = \tilde{L}. \quad (8.14)$$

Зададим вложение

$$\rho = \varphi \circ \gamma \circ \psi^{-1}: V \rightarrow U.$$

В силу (8.12)–(8.14) имеем

$$\mu \circ \rho = \mu \circ \varphi \circ \gamma \circ \psi^{-1} = \tilde{\sigma} \circ \gamma \circ \psi^{-1} = \beta \circ \psi^{-1} = \alpha,$$

$$\rho \circ X = \varphi \circ \gamma \circ \psi^{-1} \circ X = \varphi \circ \gamma \circ Y \circ \nu^{-1} = \varphi \circ \tilde{L} \circ \nu^{-1} = F \circ \nu \circ \nu^{-1} = F.$$

Полученные соотношения означают, что определенное решение (μ, F) является непродолжаемым.

Таким образом, установлено, что эквивалентное непродолжаемому решению (4.2) задачи Коши (1.1), (3.1) определенное решение (μ, F) задачи Коши (1.1), (4.5) также непродолжаемо. Следовательно, по лемме 8.3 решение (μ, F) эквивалентно непродолжаемому решению (4.1) задачи Коши (1.1), (4.5). Поскольку в силу замечания 4.5 отношение эквивалентности решений транзитивно, то отсюда вытекает, что решения (4.1) и (4.2) также эквивалентны. Теорема доказана.

§ 9. Доказательство полноты

Прежде чем приступить к непосредственному доказательству теоремы полноты 4.8, установим ряд вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 9.1. Пусть (4.1) и (4.2) – определенные решения задачи Коши (1.1), (3.1), а отображения (3.7) и

$$\tilde{\Phi}: \tilde{S} \rightarrow \tilde{W} \quad (9.1)$$

– отвечающие этим решениям характеристические диффеоморфизмы. Предположим, что существует такое вложение (4.3), для которого выполнены соотношения (4.4). Тогда

$$\tilde{\Phi} \circ \varphi = \Phi. \quad (9.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим диффеоморфизм

$$f = \tilde{\Phi} \circ \varphi: S \rightarrow f(S). \quad (9.3)$$

По теореме 3.2, (b) для характеристического диффеоморфизма (9.1)

$$\tilde{\Phi} \circ \tilde{L}(t) = (t, t)$$

при $a < t < b$, поэтому согласно (4.4) имеем

$$f \circ L(t) = \tilde{\Phi} \circ \varphi \circ L(t) = \tilde{\Phi} \circ \tilde{L}(t) = (t, t).$$

Следовательно, диффеоморфизм (9.3) обладает свойствами (a) и (b) из теоремы 3.2. По теореме 3.2 для характеристического диффеоморфизма (9.1) имеют место свойства (c) и (d), а по лемме 8.2 вложение (4.3) отображает характеристики решения (4.1) в соответствующие характеристики решения (4.2). Отсюда вытекает, что диффеоморфизм (9.3) обладает и свойствами (c) и (d) из теоремы 3.2. Поэтому согласно этой теореме он совпадает с Φ , т.е. справедливо равенство (9.2). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 9.2. Пусть (4.1) и (4.2) – определенные решения задачи Коши (1.1), (3.1) и отображения (3.7) и (9.1) – отвечающие этим решениям характеристические диффеоморфизмы. Предположим, что решение (4.2) является непродолжаемым. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (a) $\Phi(S) \subseteq \tilde{\Phi}(\tilde{S})$;
- (b) решение (4.1) тогда и только тогда непродолжаемо, когда

$$\Phi(S) = \tilde{\Phi}(\tilde{S}). \quad (9.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (a) По определению 4.1 и замечанию 4.2 существует такое вложение (4.3), что выполнены соотношения (4.4). По лемме 9.1 для характеристических диффеоморфизмов (3.7) и (9.1) имеет место соотношение (9.2). Следовательно,

$$\Phi(S) = \tilde{\Phi} \circ \varphi(S) \subseteq \tilde{\Phi}(\tilde{S}).$$

(b) Предположим, что решение (4.1) непродолжаемо. Тогда из доказанного утверждения (a) вытекает равенство (9.4).

Обратно, предположим, что для решения (4.1) выполнено равенство (9.4). По лемме 9.1

$$\tilde{\Phi}(\tilde{S}) = \Phi(S) = \tilde{\Phi} \circ \varphi(S). \quad (9.5)$$

По условию отображение (9.1) – диффеоморфизм и, следовательно, из (9.5) вытекает, что $\tilde{S} = \varphi(S)$, т.е. вложение (4.3) является диффеоморфизмом. Таким образом, решения (4.1) и (4.2) эквивалентны, откуда в силу определений 4.1 и 4.4, (b) ясно, что (4.1) – непродолжаемое решение. Следствие доказано.

Поставим для системы четырех уравнений (6.24)–(6.25) задачу Гурса на координатных прямых:

$$\psi(u, 0) = a_1(u), \quad \psi(0, v) = a_2(v), \quad (9.6)$$

где a_1 и a_2 – непрерывно дифференцируемые на отрезках $[0, b]$, $b > 0$, и $[0, c]$, $c > 0$, вектор-функции. Предположим, что выполнены условия согласования уравнений (6.24)–(6.25) с начальными значениями (9.6):

$$\sum_{\gamma=1}^4 \eta_g^{1w}(a_1(u)) \dot{a}_{1u}^g(u) = 0, \quad \sum_{\gamma=1}^4 \eta_g^{2w}(a_2(v)) \dot{a}_{2v}^g(v) = 0, \quad a_1(0) = a_2(0), \quad (9.7)$$

$w = 0, 1$. Имеет место следующий известный факт.

ЛЕММА 9.3. Пусть коэффициенты уравнений (6.24)–(6.25) непрерывно дифференцируемы в пространстве R^4 и выполнены условия согласования (9.7). Тогда найдется такое положительное число β , что в каждом из двух прямоугольников

$$\{(u, v) \in R^4 \mid 0 \leq u \leq b, \ 0 \leq v \leq \beta\}, \quad (9.8)$$

$$\{(u, v) \in R^4 \mid 0 \leq u \leq \beta, \ 0 \leq v \leq c\} \quad (9.9)$$

существует непрерывно дифференцируемое решение $\psi(u, v)$ системы уравнений (6.24)–(6.26), принимающее начальные значения (9.6).

Доказательство осуществляется стандартным образом, посредством комбинации метода Хартмана–Уинтера [14; с. 843–844] с методом мажорантных оценок [19; гл. 1, § 8].

Для всякой точки (u_0, v_0) из квадрата (3.8) положим

$$\overset{\circ}{T}(u_0, v_0) = \text{int } T(u_0, v_0). \quad (9.10)$$

ЛЕММА 9.4. Пусть (4.1) – определенное C^k -решение задачи Коши (1.1), (3.1), а (3.7) – отвечающий ему характеристический диффеоморфизм, и пусть погружение (3.13) задано посредством выражения (3.15). Предположим, что

точка (u_0, v_0) из квадрата (3.8) такова, что открытый треугольник $\mathring{T}(u_0, v_0)$ содержится в W ,

$$\mathring{T}(u_0, v_0) \subseteq W,$$

и существуют положительное число C и индекс $j \in \{1, 2\}$, для которых

$$\rho_j(u, v) \leq C \quad (9.11)$$

при $(u, v) \in \mathring{T}(u_0, v_0)$, где ρ_j задано посредством (4.9)–(4.10). Тогда образ множества $T(u_0, v_0)$ относительно погружения (3.13), (3.15)

$$\psi(\mathring{T}(u_0, v_0))$$

ограничен в R^4 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $(u_0, v_0) \in \Pi(a, b)$, и потому отрезок Q прямой $u = v$ с границами (u_0, u_0) и (v_0, v_0) лежит внутри диагонали (3.9). Следовательно, найдется такое $N > 0$, что

$$\|\psi(u, u)\| \leq N \quad (9.12)$$

при $(u, u) \in Q$. Для определенности будем считать, что оценка (9.11) выполнена при $j = 1$. Тогда при $(u, v) \in \mathring{T}(u, v)$ имеем

$$\begin{aligned} \|\psi(u, v)\| &= \left\| \psi(u, u) + \int_u^v \psi_v(u, t) dt \right\| \leq \|\psi(u, u)\| + \left| \int_u^v \|\psi_v(u, t)\| dt \right| \\ &= \|\psi(u, u)\| + \rho_1(u, v) \leq N + C. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 9.5. Пусть выполнены все условия леммы 9.4. Тогда образы множества $\mathring{T}(u_0, v_0)$ относительно первых производных погружения (3.13), (3.15)

$$\psi_u(\mathring{T}(u_0, v_0)), \quad (9.13)$$

$$\psi_v(\mathring{T}(u_0, v_0)) \quad (9.14)$$

ограничены в R^4 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для определенности будем считать, что оценка (9.11) выполнена при $j = 1$. По леммам 6.5, 6.6 и 6.9 компоненты (6.23) погружения (3.13), (3.15) удовлетворяют системе уравнений (6.27) и принимают начальные значения (6.28)–(6.29). Поэтому, аналогично выводу оценки (9.12), можно выбрать такое положительное число N , чтобы при $(u, u) \in Q$

$$\|\psi_u(u, u)\| \leq N, \quad (9.15)$$

где Q – отрезок диагонали (3.9) с границами (u_0, u_0) и (v_0, v_0) .

Рассмотрим подынтегральные функции в правых частях выражений (4.9) и (4.10) соответственно,

$$\begin{aligned} f_1(u, v) &= \left\| \psi_* \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) (u, v) \right\| = \sqrt{(\psi_v^1)^2 + (\psi_v^2)^2 + (\psi_v^3)^2 + (\psi_v^4)^2}, \\ f_2(u, v) &= \left\| \psi_* \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) (u, v) \right\| = \sqrt{(\psi_u^1)^2 + (\psi_u^2)^2 + (\psi_u^3)^2 + (\psi_u^4)^2}, \end{aligned}$$

и продифференцируем вторую из них по v . В результате, учитывая (6.27), получим

$$f_{2u} = \frac{1}{f_2} \sum_{g=1}^4 \psi_u^g \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \Psi_{\alpha\beta}^g \psi_u^\alpha \psi_v^\beta.$$

Полученное соотношение можно записать в виде

$$f_{2u} = f_1 f_2 F(\psi, \psi_u, \psi_v), \quad (9.16)$$

где

$$F = \sum_{g=1}^4 \frac{\psi_u^g}{f_2} \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \Psi_{\alpha, \beta}^g \frac{\psi_u^\alpha \psi_v^\beta}{f_2 f_1}.$$

По лемме 9.4 и определению функций f_1 и f_2 найдется положительное число K , для которого

$$|F(\psi, \psi_u, \psi_v)| \leq K \quad (9.17)$$

при $(u, v) \in \mathring{T}(u_0, v_0)$.

Соотношение (9.16) представляет собой обыкновенное линейное дифференциальное уравнение первого порядка, решая которое относительно f_2 находим

$$f_2(u, v) = f_2(u, u) \exp \int_u^v f_1 F(u, t) dt.$$

Согласно оценкам (9.15), (9.17) и определению (4.9) выводим

$$|f_2(u, v)| \leq N \exp \left(K \left| \int_u^v f_1(u, t) dt \right| \right) = N \exp(K \rho_1(u, v)),$$

откуда в силу оценки (9.11) получаем, что при $(u, v) \in \mathring{T}(u_0, v_0)$

$$|f_2(u, v)| \leq N \exp(CK). \quad (9.18)$$

Таким образом, множество (9.14) ограничено в R^4 .

Определение (4.9) и неравенство (9.18) обеспечивают оценку

$$\rho_2(u, v) \leq |u_0 - v_0| N \exp(CK).$$

Опираясь на эту оценку, по аналогии с доказательством ограниченности множества (9.14) доказывается ограниченность множества (9.13). Лемма доказана.

По леммам 6.5, 6.6 и 6.9 компоненты (6.23) погружения (3.13), (3.15) удовлетворяют системе уравнений (6.27) и принимают начальные значения (6.28)–(6.29). Интегрируя систему уравнений (6.27) по u , с учетом (6.29) находим

$$\psi_v^g(u, v) = \mu_2(v) + \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \int_v^u \Psi_{\alpha\beta}^g(\psi) \psi_u^\alpha \psi_v^\beta(t, v) dt, \quad (9.19)$$

где $g = 1, 2, 3, 4$, а интегрируя по v , с учетом (6.28) находим

$$\psi_u^g(u, v) = \mu_1(u) + \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \int_v^u \Psi_{\alpha\beta}^g(\psi) \psi_u^\alpha \psi_v^\beta(u, t) dt.$$

ЛЕММА 9.6. Пусть выполнены все условия леммы 9.4. Тогда отображения ψ , ψ_u и ψ_v равномерно непрерывны на множестве $\mathring{T}(u_0, v_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равномерная непрерывность ψ вытекает из леммы 9.5 и формулы конечных приращений.

Для определенности будем считать, что

$$v_0 > u_0. \quad (9.20)$$

По лемме 6.9 функции μ_1 и μ_2 непрерывны на интервале (a, b) , а потому равномерно непрерывны на отрезке $[u_0, v_0]$. Это равносильно тому, что функция

$$w(\varepsilon) = \sup_{|t' - t''| < \varepsilon, u_0 \leq t' \leq v_0, u_0 \leq t'' \leq v_0} (\|\mu_1(t'') - \mu_1(t')\| + \|\mu_2(t'') - \mu_2(t')\|)$$

стремится к нулю при стремлении к нулю ε :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} w(\varepsilon) = 0.$$

Из (9.19) выводим

$$\begin{aligned} |\psi_v^g(u, v') - \psi_v^g(u, v'')| &\leq w(\varepsilon) + \left| \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \int_{v''}^{v'} \Psi_{\alpha\beta}^g(\psi) \psi_u^\alpha \psi_v^\beta(t, v'') dt \right. \\ &\quad + \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \int_{v'}^u [\Psi_{\alpha\beta}^g(\psi) \psi_u^\alpha]_{(t, v')}^{(t, v'')} \psi_v^\beta(t, v'') dt \\ &\quad \left. + \sum_{\alpha, \beta=1}^4 \int_{v'}^u (\Psi_{\alpha\beta}^g(\psi) \psi_u^\alpha)(t, v') [\psi_v^\beta]_{(t, v')}^{(t, v'')} dt \right|, \end{aligned}$$

где $(u, v'), (u, v'') \in \mathring{T}(u_0, v_0)$ и использовано обозначение

$$[f]_{(Y)}^{(X)} = f(X) - f(Y).$$

Поэтому согласно леммам 9.4 и 9.5 найдутся такие положительные число N и функция $\tilde{w}(\varepsilon)$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \tilde{w}(\varepsilon) = 0,$$

что для всякой точки $(u, v) \in \mathring{T}(u_0, v_0)$ и функции

$$\zeta(\varepsilon, u, v) = \sup_{|t-v|<\varepsilon, (u,t) \in \mathring{T}(u_0, v_0)} \|\psi_v(u, v) - \psi_v(u, t)\|$$

при $(u, t) \in \mathring{T}(u_0, v_0)$ справедлива оценка

$$\zeta(\varepsilon, u, v) \leq \tilde{w}(\varepsilon) + N \left| \int_t^u \zeta(\varepsilon, \tau, v) d\tau \right|.$$

Полученная оценка в силу неравенства Гронуолла обеспечивает выполнение соотношения

$$\zeta(\varepsilon, u, v) \leq \tilde{w}(\varepsilon) \exp(N|u - v|) \leq \tilde{w}(\varepsilon) \exp(N|u_0 - v_0|).$$

Следовательно, производная ψ_v равномерно непрерывна по v в треугольнике $\mathring{T}(u_0, v_0)$. По леммам 9.4 и 9.5 и в силу (6.27) смешанная производная ψ_{uv} ограничена в треугольнике $\mathring{T}(u_0, v_0)$. Поэтому производная ψ_v равномерно непрерывна и по u . Таким образом, равномерная непрерывность производной ψ_v в треугольнике $\mathring{T}(u_0, v_0)$ установлена. Равномерная непрерывность производной ψ_u устанавливается аналогично. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 9.7. Пусть выполнены все условия леммы 9.4. Тогда в замкнутом треугольнике $T(u_0, v_0)$ существует единственное непрерывно дифференцируемое отображение $\tilde{\psi}$, которое совпадает в треугольнике (9.10) с погружением (3.13), (3.15),

$$\tilde{\psi}|_{\mathring{T}(u_0, v_0)} = \psi, \quad (9.21)$$

и удовлетворяет системе четырех уравнений (6.24)–(6.25).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 9.6 погружение ψ равномерно непрерывно в $\mathring{T}(u_0, v_0)$ вместе со своими первыми производными. Поэтому единственным отображением, удовлетворяющим на $\mathring{T}(u_0, v_0)$ равенству (9.21), является отображение $\tilde{\psi}$, полученное из ψ продолжением на $T(u_0, v_0)$ по непрерывности. Непрерывность в треугольнике $T(u_0, v_0)$ производных $\tilde{\psi}_u$ и $\tilde{\psi}_v$ вытекает из леммы 9.6 и формулы конечных приращений. Для компонент (6.23) погружения ψ выполнение уравнений системы (6.24)–(6.25) в треугольнике $\mathring{T}(u_0, v_0)$ обеспечено леммами 6.5 и 6.6. Поэтому в силу (9.21) компоненты отображения $\tilde{\psi}$ по непрерывности удовлетворяют этим уравнениям в замкнутом треугольнике $T(u_0, v_0)$. Следствие доказано.

ЛЕММА 9.8. Пусть выполнены все условия леммы 9.4. Тогда внутри квадрата (3.8) найдется точка

$$(u_1, v_1), \quad (9.22)$$

которая обладает следующими свойствами. Треугольник

$$T(u_0, v_0) \subset \mathring{T}(u_1, v_1), \quad (9.23)$$

и в треугольнике $T(u_1, v_1)$ определено C^k -отображение

$$\tilde{\psi}: T(u_1, v_1) \rightarrow R^4, \quad (9.24)$$

которое удовлетворяет системе четырех уравнений (6.24)–(6.25), принимает начальное значение (3.16) и совпадает в треугольнике $\mathring{T}(u_0, v_0)$ с погружением (3.13), (3.15):

$$\tilde{\psi}|_{\mathring{T}(u_0, v_0)} = \psi. \quad (9.25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для определенности будем считать, что имеет место неравенство (9.20).

По следствию 9.7 продолжение погружения (3.13), (3.15) на замкнутый треугольник $T(u_0, v_0)$ служит непрерывно дифференцируемым решением системы четырех уравнений (6.24)–(6.25), принимающим в силу (9.21) начальное значение (3.16). Будем для него использовать то же обозначение ψ , что и для (3.13), (3.15).

Согласно леммам 6.5, 6.6 непрерывно дифференцируемое решение системы (6.24)–(6.25), принимающее начальное значение (3.16), определено в окрестности W диагонали (3.9). Тем самым, найдутся такие положительное число ε и непрерывно дифференцируемые отображения

$$\tilde{\psi}_1: T(u_0 - \varepsilon, v_0) \rightarrow R^4, \quad \tilde{\psi}_2: T(u_0, v_0 + \varepsilon) \rightarrow R^4,$$

что треугольники $T(u_0 - \varepsilon, v_0)$ и $T(u_0, v_0 + \varepsilon)$ лежат внутри W , а отображения $\tilde{\psi}_1$ и $\tilde{\psi}_2$ являются решениями системы (6.24)–(6.25), принимающими начальное значение (3.16).

По лемме 9.3 указанное ε можно выбрать таким образом, что прямоугольники

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \{(u, v) \mid u_0 - \varepsilon \leq u \leq u_0, \ u_0 \leq v \leq v_0\}, \\ \Pi_2 &= \{(u, v) \mid u_0 \leq u \leq v_0, \ v_0 \leq v \leq v_0 + \varepsilon\}, \\ \Pi_3 &= \{(u, v) \mid u_0 - \varepsilon \leq u \leq v_0, \ v_0 \leq v \leq v_0 + \varepsilon\} \end{aligned}$$

содержатся внутри квадрата (3.8) и существуют непрерывно дифференцируемые отображения

$$\tilde{\psi}_3: \Pi_1 \rightarrow R^4, \quad \tilde{\psi}_4: \Pi_2 \rightarrow R^4, \quad \tilde{\psi}_5: \Pi_3 \rightarrow R^4,$$

которые являются решениями системы (6.24)–(6.25), принимающими начальные значения

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_3(u, u_0) &= \tilde{\psi}_1(u, u_0), & \tilde{\psi}_3(u_0, v) &= \psi(u_0, v), & \tilde{\psi}_4(v_0, v) &= \tilde{\psi}_2(v_0, v), \\ \tilde{\psi}_4(u, v_0) &= \psi(u, v_0), & \tilde{\psi}_5(u, v_0) &= \tilde{\psi}_3(u, v_0), & \tilde{\psi}_5(u_0, v) &= \tilde{\psi}_4(u_0, v). \end{aligned} \quad (9.26)$$

Зададим точку (9.22) и отображение (9.24) посредством выражений

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 - \varepsilon, & v_1 &= v_0 + \varepsilon; \\ \tilde{\psi}|_{T(u_0, v_0)} &= \psi, & \tilde{\psi}|_{T(u_0 - \varepsilon, u_0)} &= \tilde{\psi}_1, & \tilde{\psi}|_{T(v_0, v_0 + \varepsilon)} &= \tilde{\psi}_2, \\ \tilde{\psi}|_{\Pi_1} &= \tilde{\psi}_3, & \tilde{\psi}|_{\Pi_2} &= \tilde{\psi}_4, & \tilde{\psi}|_{\Pi_3} &= \tilde{\psi}_5. \end{aligned} \quad (9.27)$$

Заданное таким образом отображение (9.24) непрерывно в силу постановки задач Гурса (9.26) и по построению удовлетворяет равенству (9.25). Для точки (9.22) справедливо включение (9.23). Чтобы установить непрерывную дифференцируемость (9.24), достаточно показать, что

$$\tilde{\psi}_{1v} = \tilde{\psi}_{3v} \quad (9.28)$$

на отрезке $v = u_0$, $u_0 - \varepsilon \leq u \leq u_0$,

$$\tilde{\psi}_{3u} = \psi_u \quad (9.29)$$

на отрезке $u = u_0$, $u_0 \leq v \leq v_0$,

$$\tilde{\psi}_{3v} = \tilde{\psi}_{5v} \quad (9.30)$$

на отрезке $v = v_0$, $u_0 - \varepsilon \leq u \leq u_0$,

$$\tilde{\psi}_{4v} = \tilde{\psi}_{2u} \quad (9.31)$$

на отрезке $u = v_0$, $v_0 \leq v \leq v_0 + \varepsilon$,

$$\tilde{\psi}_{4v} = \psi_v \quad (9.32)$$

на отрезке $v = v_0$, $u_0 \leq u \leq v_0$,

$$\tilde{\psi}_{5u} = \tilde{\psi}_{4u} \quad (9.33)$$

на отрезке $u = u_0$, $v_0 \leq v \leq v_0 + \varepsilon$. Аналогично доказательству леммы 6.10 устанавливается, что каждое из отображений $\psi_2(u) = \tilde{\psi}_{1v}(u, u_0)$ и $\psi_2(u) = \tilde{\psi}_{3v}(u, u_0)$ на отрезке $v = u_0$, $u_0 - \varepsilon \leq u \leq u_0$ удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений (6.33), где согласно (9.26)

$$\psi_1(u) = \tilde{\psi}_{3u}(u, u_0) = \tilde{\psi}_{1u}(u, u_0),$$

и принимает начальное значение

$$\psi_2(u_0) = \psi(u_0, u_0).$$

Следовательно, по теореме единственности имеет место равенство (9.28). Равенства (9.29)–(9.33) доказываются аналогично.

Таким образом, построенное в соответствии с (9.27) отображение (9.24) непрерывно дифференцируемо, является решением системы (6.24)–(6.25) и принимает начальное значение (3.16), а потому C^k -гладко в силу леммы 6.10. Лемма доказана.

ЛЕММА 9.9. Пусть выполнены все условия леммы 9.4, и, кроме того, пусть (5.1) является непродолжаемым решением. В этом случае включение

$$(u_0, v_0) \in W \quad (9.34)$$

равносильно существованию положительного числа C и индекса j из $\{1, 2\}$ таких, что в треугольнике (9.10) выполнена оценка (9.11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено включение (9.34). В этом случае по теореме 3.2, (d) треугольник $T(u_0, v_0)$ содержится в W , а потому погружение (3.13), (3.15) и его первые производные равномерно ограничены. Следовательно, согласно определениям (4.9)–(4.10) найдется такое положительное C , что оценка (9.11) выполнена как при $j = 1$, так и при $j = 2$.

Обратно, пусть найдутся такие положительное число C и индекс $j \in \{1, 2\}$, что в треугольнике $\mathring{T}(u_0, v_0)$ выполнена оценка (9.11). В соответствии с замечанием 3.4 погружение (3.13), (3.15) принимает начальное значение (3.16), а его компоненты (6.23) по леммам 6.5, 6.6 удовлетворяют системе уравнений (6.24)–(6.25). По лемме 9.8 внутри квадрата (3.8) найдется такая точка (9.22), обладающая свойством (9.23), что в треугольнике $T(u_1, v_1)$ определено C^k -отображение (9.24), которое удовлетворяет системе четырех уравнений (6.24)–(6.25), принимает начальное значения (3.16) и обладает свойством (9.25). Следовательно, по лемме 7.3 множество

$$\widetilde{W} = W \cup \mathring{T}(u_1, v_1) \quad (9.35)$$

обладает свойствами (a) и (d) из теоремы 3.2, и по следствию 7.5 на нем определено C^k -решение системы уравнений (6.24)–(6.25), принимающее начальное значение (3.16). Отсюда по лемме 7.2 заключаем, что на множестве (9.35) существует определенное C^k -решение задачи Коши (1.1), (3.1), характеристическим диффеоморфизмом которого служит тождественное отображение $\text{id}_{\widetilde{W}}$. По следствию 9.2 $\widetilde{W} \subseteq W$, а потому в силу (9.23) и $(u_0, v_0) \in W$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.8. Рассмотрим отвечающие определенному решению (4.1) характеристический диффеоморфизм (3.7) и погружение (3.13), (3.15).

Необходимость. Пусть решение (4.1) непродолжаемо. Выберем произвольную точку (4.11), для которой не выполнено свойство (4.12) определения 4.7. Для определенности будем считать, что $\tilde{u} < \tilde{v}$. Построим пересечение $W \cap Q$, где Q – отрезок $u = \tilde{u}$, $\tilde{u} \leq v \leq \tilde{v}$. Это пересечение связно и содержит точку $(\tilde{u}, \tilde{u})$ по теореме 3.2, (d). В силу открытости W это означает, что $W \cap Q$ – непустой полуинтервал, т.е. найдется такое число v_0 , $\tilde{u} < v_0 < \tilde{v}$, что

$$W \cap Q = \{(u, v) \in R^2 \mid u = \tilde{u}, \tilde{u} \leq v < v_0\}.$$

По построению

$$(\tilde{u}, v_0) \notin W. \quad (9.36)$$

По теореме 3.2 $\mathring{T}(\tilde{u}, v_0) \subseteq W$. Тем самым, если для точки $(\tilde{u}, \tilde{v})$ с $\tilde{v} = v_0$ не выполнены свойства (4.13), (4.14) определения 4.7, то для точки (u_0, v_0) с $u_0 = \tilde{u}$ выполнены все условия леммы 9.4. По лемме 9.9 отсюда вытекает включение $(\tilde{u}, v_0) \in W$, которое противоречит (9.36).

Достаточность. Пусть решение (4.1) полно. Рассмотрим непродолжаемое решение (4.2) задачи Коши (1.1), (3.1) и отвечающий ему характеристический

диффеоморфизм (9.1). Предположим, что точка

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \widetilde{W}.$$

Тогда по лемме 9.9 существуют положительное число C и индекс $j = 1, 2$ такие, что в треугольнике (9.10) с $u_0 = \tilde{u}$ и $v_0 = \tilde{v}$ выполнена оценка (9.11). Поэтому согласно определению 4.7 справедливо включение (4.12), т.е.

$$\widetilde{W} \subseteq W.$$

Отсюда по следствию 9.2, (а) получаем

$$\tilde{\Phi}(\tilde{S}) = \widetilde{W} = W = \Pi(S),$$

и по следствию 9.2, (b) решение (4.1) является непродолжаемым. Теорема доказана.

Список литературы

- [1] В. В. Лычагин, “Контактная геометрия и нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка”, *УМН*, **34**:1(205) (1979), 137–165.
- [2] В. В. Лычагин, “Нелинейные дифференциальные уравнения и контактная геометрия”, *Докл. АН СССР*, **238**:2 (1978), 273–276.
- [3] Э. Картан, *Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения*, МГУ, М., 1962.
- [4] А. М. Виноградов, “Многозначные решения и принцип классификации нелинейных дифференциальных уравнений”, *Докл. АН СССР*, **210**:1 (1973), 11–14.
- [5] Д. В. Туницкий, “Многозначные решения гиперболических уравнений Монжа–Ампера”, *Дифференц. уравнения*, **29**:12 (1993), 2178–2189.
- [6] D. V. Tunitsky, “Hyperbolicity and multivalued solutions of Monge–Ampère equations”, *The interplay between differential geometry and differential equations*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **167**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, 245–260.
- [7] С. Й. Билчев, “Системы из двух дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка (локальная теория)”, *Изв. вузов. Матем.*, 1970, № 1(94), 14–21.
- [8] А. М. Васильев, *Теория дифференциально-геометрических структур*, МГУ, М., 1986.
- [9] Д. В. Туницкий, “Задача Коши для гиперболических уравнений Монжа–Ампера”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **57**:4 (1993), 174–191.
- [10] М. Хирш, *Дифференциальная топология*, Мир, М., 1979.
- [11] Ф. Уорнер, *Основы теории гладких многообразий и групп Ли*, Мир, М., 1987.
- [12] И. Я. Бакельман, А. Л. Вернер, Б. Е. Кантор, *Введение в дифференциальную геометрию в “целом”*, Наука, М., 1973.
- [13] Lewy H., “Über das Anfangswertproblem einer hyperbolischen nichtlinearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen”, *Math. Ann.*, **98** (1928), 179–191.
- [14] P. Hartman, A. Wintner, “On hyperbolic partial differential equations”, *Amer. J. Math.*, **74** (1952), 834–864.
- [15] Л. С. Понтрягин, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Наука, М., 1982.

- [16] Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1970.
- [17] С. Ленг, *Введение в теорию дифференцируемых многообразий*, Мир, М., 1967.
- [18] П. С. Александров, *Введение в теорию множеств и общую топологию*, Наука, М., 1977.
- [19] Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко, *Системы квазилинейных уравнений*, Наука, М., 1978.

Д. В. Туницкий (D. V. Tunitskii)

Институт проблем управления РАН, г. Москва

E-mail: dtunitsky@yahoo.com

Поступила в редакцию

16.06.2005