Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Г. Ильинский, О почти свободном действии одномерного тора на торическом многообразии, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 5, 51–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1332>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 16:18:53

УДК 512.7+514.756.4

Д. Г. Ильинский

О почти свободном действии одномерного тора на торическом многообразии

В работе рассмотрены компактные гладкие комплексные торические многообразия с почти свободным действием одномерного тора. Оказывается, что все такие многообразия можно расклассифицировать. Более того, каждое такое многообразие гомеоморфно $\mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1$.

Библиография: 10 названий.

§ 1. Формулировка задачи

Действия окружности S^1 на симплектических многообразиях хорошо изучены. Большое внимание уделяется простейшим классам S^1 -действий: полусвободным и почти свободным действиям в смысле следующего определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Действие группы G на множестве X называется *полусвободным*, если оно свободно вне неподвижных точек, и *почти свободным*, если оно полусвободно и неподвижных точек конечное число.

В статье [1] было доказано, что связное замкнутое симплектическое S^1 -многообразие M с почти свободным действием должно быть односвязно и имеет те же гомологические группы, что и $S^2 \times \cdots \times S^2$. Тот же автор в статье [2] доказал, что при тех же условиях M имеет те же когомологическое кольцо и классы Черна, что и $S^2 \times \cdots \times S^2$.

Для компактных связных симплектических многообразий также известно [3], что симплектическое почти свободное S^1 -действие гамильтоново тогда и только тогда, когда оно имеет неподвижные точки, и что почти свободное гамильтоново S^1 -действие имеет те же эквивариантные когомологии и классы Черна, что и $S^2 \times \cdots \times S^2$. Тем не менее, проблема общей классификации таких S^1 -многообразий остается открытой. Известно, что в размерностях 2, 4 (см. [1], [4], [5]) и 6 (следует из теоремы Уолла [6]) M диффеоморфно прямому произведению двумерных сфер. Для произвольной размерности неизвестно других примеров симплектических многообразий с гамильтоновым почти свободным действием S^1 , кроме $S^2 \times \cdots \times S^2$, что позволяет сформулировать следующую гипотезу.

ГИПОТЕЗА 1. Пусть X – вещественное симплектическое многообразие с почти свободным действием окружности S^1 . Тогда X гомеоморфно $S^2 \times \cdots \times S^2$.

В настоящей статье рассматривается уже не симплектическое, а алгебраическое многообразие, а действие S^1 заменяется на действие одномерного алгебраического тора $T^1 = \mathbb{C}^*$. Комплексное проективное многообразие является вещественным симплектическим многообразием относительно мнимой части формы Фубини–Штуди, и действие $S^1 \subset T^1$ гамильтоново. Поэтому алгебраическая ситуация является частным случаем симплектической, а сформулированная ниже гипотеза – аналог гипотезы 1.

ГИПОТЕЗА 2. Пусть X – компактное гладкое комплексное алгебраическое многообразие с почти свободным действием одномерного тора T^1 . Тогда X гомеоморфно $S^2 \times \cdots \times S^2$.

Был рассмотрен частный случай гипотезы, а именно многообразие X полагалось торическим. Основным результатом работы является

ТЕОРЕМА 1.1. *Гипотеза 2 верна, если предполагать, что многообразие X торическое.*

Краткое комбинаторное описание торических многообразий будет проведено в §2. Напомним, что n -мерное аффинное торическое многообразие U связывается с конусом σ рационального векторного пространства V , натянутого на решетку N конечного ранга n , а общие торические многообразия склеиваются из аффинных торических многообразий; схема склейки задается некоторым комплексом конусов, называемым веером. Так как торическое многообразие X определяется своим веером, то можно переформулировать условия на торическое многообразие в виде условий на веер $\Delta = \Delta(X)$.

Веер Δ должен удовлетворять следующим условиям:

- (*) носитель веера $|\Delta|$ – все пространство (соответствует полноте многообразия);
- (**) каждый n -мерный конус, принадлежащий Δ , порожден базисом решетки (гладкость);
- (***) все координаты вектора v , задающего действие одномерного тора, в базисе из порождающих векторов любого конуса веера Δ равны ± 1 (действие почти свободно).

В §3 дан полный список вееров, удовлетворяющих условиям (*)–(***) с точностью до действия $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ в случае $n = 2$. Случай произвольного n рассматривается в §4.

Первым результатом работы является классификация вееров, удовлетворяющих условиям (*)–(***), а значит, и всех торических многообразий, удовлетворяющих условиям гипотезы.

ТЕОРЕМА 1.2. *Существует биекция между торическими n -мерными многообразиями, удовлетворяющими условиям гипотезы 2, и корневыми лесами с n вершинами.*

Обозначим через $X(\Delta)$ торическое многообразие, соответствующее вееру Δ . Решение задачи проводится следующим образом: мы строим веер Δ' , удовлетворяющий условиям (*)–(***), размерности $n - 1$ такой, что на уровне многообразий мы получаем локально тривиальное расслоение p многообразия $X(\Delta)$

над $X(\Delta')$ со слоем $\mathbb{P}^1$. Описание веера Δ' и локально тривиального расслоения p приведено в § 5.

Вторым результатом работы является доказательство тривиальности построенного расслоения в категории вещественных дифференцируемых многообразий и как следствие доказательство гипотезы 2 в классе торических многообразий. Этому посвящен § 6.

Автор благодарен своему научному руководителю Д. А. Тимашёву за постановку задачи и постоянное внимание к работе, Э. Б. Винбергу за идею параметризовать многообразия лесами и за изящное доказательство утверждения о строении вееров, удовлетворяющих условиям $(*)$ – $(***)$.

§ 2. Условия для веера, соответствующего торическому многообразию

2.1. Торические многообразия. Напомним некоторые факты из теории торических многообразий. Подробное описание можно посмотреть в работах [7], [8].

Пусть N – решетка конечного ранга n (т.е. изоморфная $\mathbb{Z}^n$), M – двойственная решетка, $V = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Назовем *конусом* в V множество вида

$$\sigma = \{r_1 v_1 + \dots + r_s v_s \in V : r_i \geq 0\}, \quad \text{где } v_1, \dots, v_s \in N.$$

(Будем обозначать так: $\sigma = \langle v_1, \dots, v_s \rangle_{+}$.) Каждому острому (т.е. не содержащему подпространство) конусу σ в N можно сопоставить аффинное торическое многообразие следующим образом:

$$\sigma \longleftrightarrow S_{\sigma} = \sigma^{\vee} \cap M \longleftrightarrow U_{\sigma} = \text{Spec}(\mathbb{C}[S_{\sigma}]),$$

где $\sigma^{\vee} = \{u \in V^* : (u, v) \geq 0 \ \forall v \in \sigma\}$ – двойственный конус, образующий в пересечении с M конечно порожденную полугруппу S_{σ} ; $\mathbb{C}[S_{\sigma}]$ – полугрупповая алгебра полугруппы S_{σ} , которой, в свою очередь, соответствует аффинное торическое многообразие U_{σ} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Веером в N называется конечный набор Δ острых конусов $\sigma \subset V$, удовлетворяющих условиям:

- (1) каждая грань конуса в Δ является конусом в Δ ;
- (2) пересечение двух конусов в Δ является гранью каждого из них.

Под гранью конуса подразумевается пересечение конуса с опорной гиперплоскостью, т.е. такой, относительно которой конус лежит по одну сторону. Каждому вееру Δ можно сопоставить торическое многообразие $X = X(\Delta)$, получаемое склейкой из аффинных торических многообразий, соответствующих конусам, принадлежащим вееру. Обратно, каждому торическому многообразию можно сопоставить веер. Поэтому вместо многообразий можно рассматривать веера.

Будем называть *носителем* веера Δ множество $|\Delta| = \bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma$. Веер называется *полным*, если $|\Delta| = V$.

2.2. Действие одномерного тора T^1 .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1 [9]. Пусть X – компактное симплициальное торическое многообразие. Тогда группа автоморфизмов X (обозначим ее $\text{Aut}(X)$) – аффинная алгебраическая группа, тор T , действующий на X , – максимальный тор в $\text{Aut}(X)$.

Пусть X – торическое многообразие относительно действия тора T , удовлетворяющее гипотезе. Действие тора T^1 почти свободное, поэтому отображение $\varphi: T^1 \rightarrow \text{Aut}(X)$ является вложением. Из утверждения 2.1 следует, что $\varphi(T^1)$ является подтором максимального тора $T' \subseteq \text{Aut}(X)$. Относительно действия тора T' X также является торическим многообразием. Поэтому без ограничения общности можно считать, что одномерный тор является подтором большего тора, действующего на X .

2.3. Условия на веер. Пусть торическое многообразие $X = X(\Delta)$ удовлетворяет предпосылкам гипотезы. Посмотрим, как эти условия формулируются в терминах вееров. Гладкость означает, что каждый n -мерный конус из веера порождается базисом решетки. Компактность многообразия соответствует полноте веера. Осталось переформулировать условие “почти свободности” действия одномерного тора.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2. Действие $\mathbb{C}^*$ на гладком компактном многообразии почти свободно тогда и только тогда, когда есть конечное число неподвижных точек, а веса действия $\mathbb{C}^*$ в касательных пространствах к ним суть 1 и -1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из стандартного клеточного разбиения многообразия с действием $\mathbb{C}^*$, введенного Бялиницким–Бирули (см. [10]).

Теперь найдем неподвижные точки действия $\mathbb{C}^*$ для торического случая. Данное действие тора представляется следующим образом: одномерный тор задается неделимым вектором v из решетки N . Если $x \in U_\sigma$, $x: S_\sigma \rightarrow \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{C}^*$, то $tx: u \mapsto t^{(u,v)}x(u)$. В координатах: пусть S_σ порождается $e_1, \dots, e_n$, тогда $U_\sigma = \mathbb{A}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $v = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, где $\beta_i = (e_i, v)$, $tx = (t^{\beta_1}x_1, \dots, t^{\beta_n}x_n)$.

ЛЕММА 2.3. Пусть $x \in U_\sigma$, $t \in \mathbb{C}^*$. Следующие условия эквивалентны:

- 1) $tx = x$;
- 2) $t^{\beta_i} = 1$ для всех i таких, что $x_i \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$tx = x \iff (t^{\beta_1}x_1, \dots, t^{\beta_n}x_n) = (x_1, \dots, x_n) \iff t^{\beta_i} = 1$$

для всех i таких, что $x_i \neq 0$.

Теперь найдем условия на β_i .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.4. Все $\beta_i \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть это не так и существует i такое, что $\beta_i = 0$. Тогда все точки вида $(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0)$, у которых все координаты нулевые, кроме i -й, будут неподвижными (по лемме 2.3). Но неподвижных точек по условию задачи – конечное число, получаем противоречие.

СЛЕДСТВИЕ 2.5. *Неподвижных точек в U_σ , кроме 0, нет.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2.3 следует, что если точка, имеющая хотя бы одну ненулевую координату, неподвижна относительно действия тора, то для любого $t \in \mathbb{C}^*$ $t^{\beta_i} = 1$ для i таких, что $x_i \neq 0$. Это означает, что $\beta_i = 0$ для какого-то i , что неверно в силу утверждения 2.4.

В итоге мы получаем следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.6. *Действие одномерного тора почти свободно тогда и только тогда, когда все координаты вектора v , задающего действие одномерного тора, в базисе из порождающих векторов любого n -мерного конуса веера Δ равны ± 1 .*

Таким образом, наш веер Δ должен удовлетворять следующим условиям:

- (*) $|\Delta|$ – все пространство (соответствует полноте многообразия);
- (**) каждый n -мерный конус, принадлежащий Δ , порожден базисом решетки N (гладкость);
- (***) все координаты вектора v , задающего действие одномерного тора, в базисе из порождающих векторов любого n -мерного конуса веера Δ равны ± 1 (действие почти свободно).

Случай $n = 1$ очень прост. Из полноты веера следует, что $\Delta = \sigma_0 \cup \sigma_1$, где $\sigma_0 = \langle e_1 \rangle_+$, $\sigma_1 = \langle -e_1 \rangle_+$. Склейка дает нам проективную прямую $\mathbb{P}^1$, которая является двумерной сферой, т.е. в случае $n = 1$ гипотеза верна.

Пусть теперь $n \geq 1$, веер Δ , задающий наше многообразие, удовлетворяет условиям (*)–(***), v – вектор, задающий действие одномерного тора.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.7. *Пусть n -мерные конусы σ_0 и σ_1 веера Δ соседние, т.е. имеют общую $(n-1)$ -мерную грань. По условию (**) оба конуса порождаются базисом решетки N , поэтому существуют векторы $v_1, \dots, v_{n+1}$ такие, что $\sigma_0 = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle_+$, $\sigma_1 = \langle v_{n+1}, v_2, \dots, v_n \rangle_+$.*

Пусть вектор v имеет координаты $\beta_1, \dots, \beta_n$ и $\beta'_1, \dots, \beta'_n$ в базисах σ_0 и σ_1 соответственно. Тогда $v_{n+1} = -v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$, причем $\beta'_1 = -\beta_1$, $a_i = -2\beta_1 \beta_i$ или 0 и $\beta'_i = \beta_i + a_i \beta_1$, где $i = 2, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle_+$ и $\langle v_2, \dots, v_{n+1} \rangle_+$ – базисы решетки N . Поэтому существуют целые числа $a_1, \dots, a_n, b_2, \dots, b_{n+1}$ такие, что $v_{n+1} = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$, $v_1 = b_2 v_2 + \dots + b_{n+1} v_{n+1}$.

Подставляя во второе равенство вместо v_{n+1} его выражение через первые n векторов, получаем, что $v_1 = b_{n+1} a_1 v_1 + (b_2 + b_{n+1} a_2) v_2 + \dots + (b_n + b_{n+1} a_n) v_n$. Переноса v_1 вправо, получаем линейную комбинацию векторов $v_1, \dots, v_n$. Так как эти векторы являются базисом решетки, то линейная комбинация тривиальна. Отсюда $1 - b_{n+1} a_1 = 0$, т.е. $a_1 = \pm 1$. Но если $a_1 = 1$, то конусы перекрываются и веера не получится, поэтому $a_1 = -1$.

Напомним, что по условию (***) все координаты вектора v равны ± 1 . Тогда

$$\begin{aligned} v &= \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n \\ &= -\beta_1(v_{n+1} - a_2 v_2 - \cdots - a_n v_n) + \beta_2 e_2 + \cdots + \beta_n e_n \\ &= -\beta_1 v_{n+1} + (a_2 \beta_1 + \beta_2) e_2 + \cdots + (a_n \beta_1 + \beta_n) e_n. \end{aligned}$$

Получаем, что $\beta'_1 = -\beta_1$ и $\beta'_i = \beta_i + \beta_1 a_i$ для $i = 2, \dots, n$. Следовательно, $a_i = -\beta_1(\beta_i - \beta'_i)$, т.е. $\beta_i = \beta'_i \Leftrightarrow a_i = 0$. Если $\beta_i = -\beta'_i$, то $a_i = -\beta_1(\beta_i - \beta'_i) = -2\beta_1 \beta_i$, что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ 2.8. Пусть $\sigma_0 = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle_+$, $\sigma_1 = \langle v_{n+1}, v_2, \dots, v_n \rangle_+$ – соседние конусы. Тогда $v_{n+1} = -v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$, где $a_i = \pm 2$ или 0 .

§ 3. Классификация вееров, удовлетворяющих условиям $(*)$ – $(***)$, в случае $n = 2$

Отметим следствие из утверждения 2.7 для случая $n = 2$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. Пусть конусы $\sigma_0 = \langle v_1, v_2 \rangle_+$ и $\sigma_1 = \langle v_2, v_3 \rangle_+$ соседние. Пусть вектор v имеет координаты β_1, β_2 и β'_1, β'_2 в базисах σ_0 и σ_1 соответственно. Тогда $v_3 = -v_1 + a_2 v_2$, причем $a_2 = -2\beta_1 \beta_2$ или 0 и $\beta'_1 = -\beta_1$, $\beta'_2 = \beta_2 + a_2 \beta_1$.

Вывод из утверждения 3.1: в новом базисе произведение координат вектора v записывается следующим образом:

- 1) если $a_2 = 0$, то $\beta'_1 \beta'_2 = -\beta_1(a_2 \beta_1 + \beta_2) = -a_2 \beta_1^2 - \beta_1 \beta_2 = -\beta_1 \beta_2$;
- 2) если $a_2 = -2\beta_1 \beta_2$, то $\beta'_1 \beta'_2 = -\beta_1(a_2 \beta_1 + \beta_2) = -a_2 \beta_1^2 - \beta_1 \beta_2 = 2\beta_1 \beta_2 - \beta_1 \beta_2 = \beta_1 \beta_2$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. Веер, удовлетворяющий условиям $(*)$ – $(***)$, с точностью до действия $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ имеет один из следующих наборов ребер:

- 1) $(1, 0); (0, 1); (0, -1); (-1, 0)$;
- 2) $(1, 0); (0, 1); (-2, -1); (-1, 0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Вееру с набором ребер 1) соответствует торическое многообразие $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Вееру с набором ребер 2) соответствует нетривиальное $\mathbb{P}^1$ -расслоение над $\mathbb{P}^1$, которое является поверхностью Хирцебруха $\mathbb{F}_{-2}$ (см. также [7]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем в качестве базисных векторов порождающие того конуса, внутри которого лежит вектор v (будем обозначать этот конус σ_0). Тогда координаты v равны $(1, 1)$.

Будем строить все веера, соседние конусы в которых удовлетворяют утверждению 3.1. Так как у нас есть конус σ_0 , то соседний с ним конус σ_1 (при обходе против часовой стрелки) строится двумя способами, соседний с σ_1 тоже строится двумя способами и т.д. Изобразим получающиеся конусы в виде схемы 1.

Пояснения к схеме 1: $\{+\}$ и $\{-\}$ показывают знак произведения координат v в данном базисе, стрелки обозначают переход к соседнему (при обходе

СХЕМА 1

против часовой стрелке) конусу. Посмотрим, какие из получающихся вееров нам подходят.

Если обход заканчивается на векторе $(1, 0)$ (помечено **(1)** на схеме 1), значит, веер подходит: по построению он удовлетворяет условиям $(*)$ – $(***)$ (так как мы следили за выполнением утверждения 3.1). Если мы перескакиваем через вектор $(1, 0)$ (помечено **(2)** на схеме 1), то не получается веера, так как конусы перекрываются. Рассмотрим оставшийся вариант **(3)** на схеме 2.

СХЕМА 2

Как видно из схемы 2, этот вариант не дает веера.

Таким образом, нам подходят следующие наборы ребер:

- 1) $(1, 0); (0, 1); (-1, 0); (0, -1);$
- 2) $(1, 0); (0, 1); (-1, 0); (-2, -1);$
- 3) $(1, 0); (0, 1); (-1, -2); (0, -1).$

Произвол, допущенный при построении веера, заключался в выборе базисных векторов. Поэтому веер имеет данные наборы ребер с точностью до действия $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$. Осталось заметить, что 2) и 3) $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$ -эквивалентны.

§ 4. Классификация вееров, удовлетворяющих условиям $(*)$ – $(***)$, в случае $n \geq 3$

Пусть X – n -мерное торическое многообразие, удовлетворяющее гипотезе, Δ – соответствующий веер в n -мерном пространстве V , удовлетворяющий условиям $(*)$ – $(***)$. Обозначим через v вектор, задающий действие одномерного тора. Вектор v содержится в каком-то n -мерном конусе σ_0 из нашего веера. Систему координат зададим порождающими векторами $e_1, \dots, e_n$ конуса σ_0 .

Обозначим через Δ' n -мерный веер следующего вида: n -мерные конусы Δ' порождаются векторами $\delta_1 e_1, \dots, \delta_n e_n$, где $\delta_i = \pm 1$.

Очевидно, Δ' удовлетворяет условиям $(*)$ – $(***)$. Заметим также, что

$$X(\Delta') = \mathbb{P}^1 \times \dots \times \mathbb{P}^1.$$

Мы хотим доказать, что строение произвольного n -мерного веера Δ , удовлетворяющего условиям $(*)$ – $(***)$, не слишком сильно отличается от Δ' . А именно верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.1. *Веер Δ чисто топологически устроен так же, как и Δ' . А именно выполнено следующее:*

- 1) *в веер Δ входит ровно $2n$ ребер: $e_1, \dots, e_n$ и еще n ребер, обозначаемых $e_{-1}, \dots, e_{-n}$;*
- 2) *n -мерные конусы имеют вид $\langle e_{\pm 1}, \dots, e_{\pm n} \rangle_+$ с любой комбинацией $+$ и $-$.*

Прежде чем доказывать теорему, введем дополнительную конструкцию. Пусть σ – n -мерный конус веера Δ , порожденный базисом $u_1, \dots, u_n$ решетки N .

Пусть $H^{u_{i_1}, \dots, u_{i_k}}, i_1 < i_2 < \dots < i_k$, – подпространство в V , порожденное базисными векторами, отличными от $u_{i_1}, \dots, u_{i_k}$, т.е.

$$H^{u_{i_1}, \dots, u_{i_k}} = \langle u_1, \dots, u_{i_1-1}, u_{i_1+1}, \dots, u_{i_k-1}, u_{i_k+1}, \dots, u_n \rangle.$$

Рассмотрим конусы, содержащие $u_{i_1}, \dots, u_{i_k}$, и спроектируем их на $H^{u_{i_1}, \dots, u_{i_k}}$. Получим веер $\Delta^{u_{i_1}, \dots, u_{i_k}}$ в пространстве $H^{u_{i_1}, \dots, u_{i_k}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Укажем, какой алгебро-геометрический смысл несет данная проекция. Конусу $\tau = \langle u_{i_1}, \dots, u_{i_k} \rangle_+ \in \Delta$ соответствует T -орбита $U \subseteq X$. Внутренность конуса, содержащего τ , отвечает орбите, лежащей в замыкании $\bar{U}$ орбиты U . Множество конусов, содержащих τ в качестве грани, соответствует множеству T -орбит $W \subseteq X$ таких, что пересечение $\bar{W} \cap \bar{U}$ непусто.

Рассмотрим вектор $w \in \tau$. Ему соответствует однопараметрическая подгруппа $\gamma(t)$. Тогда построенной проекции будет отвечать стягивание вдоль однопараметрической подгруппы: $x \mapsto \lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t)x$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.2. *Веер $\Delta^{u_{i_1}, \dots, u_{i_k}}$ удовлетворяет условиям $(*)$ – $(***)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $(*)$ Пусть $w \in H^{u_{i_1}, \dots, u_{i_k}}$. Так как $|\Delta| = V$, то существует $w_1 \in |\Delta|$ такой, что проекция w_1 на $H^{u_{i_1}, \dots, u_{i_k}}$ совпадает с w , а w_1 лежит в конусе, содержащем $u_{i_1}, \dots, u_{i_k}$, из веера Δ , что и требовалось доказать.

(**) Если σ' – конус в $\Delta^{u_{i_1}, \dots, u_{i_k}}$, то его прообраз σ из веера Δ порождается базисом решетки, следовательно, и σ' порождается базисом соответствующей решетки.

(***) Вектор v' , задающий действие одномерного тора на торическом многообразии $\tilde{X} = X(\Delta^{u_{i_1}, \dots, u_{i_k}})$, является проекцией вектора v на пространство $H^{u_{i_1}, \dots, u_{i_k}}$ и поэтому условие выполняется.

Введем обозначение: $H^{i_1, \dots, i_k} = H^{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}}$, $\Delta^{i_1, \dots, i_k} = \Delta^{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}}$, где $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, а в качестве конуса σ взят конус σ_0 .

Так как $|\Delta| = V$, то существуют конусы, соседние с конусом σ_0 . Обозначим через σ_i n -мерный конус, соседний с σ_0 и не содержащий e_i . Тогда σ_i порождается векторами $e_1, \dots, e_{i-1}, e_{-i}, e_{i+1}, \dots, e_n$ и еще одним вектором, который мы обозначим e_{-i} . Тогда по утверждению 2.7 у вектора e_{-i} i -я координата равна -1 . Рассмотрим $\Delta^{1, \dots, i-1, i+1, \dots, j-1, j+1, \dots, n}$ – веер в 2-мерном пространстве, по утверждению 4.2 удовлетворяющий свойствам (*)–(***) . По утверждению 3.2 набор ребер этого веера составляют проекции векторов e_i, e_{-i}, e_j, e_{-j} . Из утверждения 3.1 следует, что j -я координата вектора e_{-i} , равна -2 или 0 при любых $j \neq i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Пусть S^{n-1} – $(n-1)$ -мерная единичная сфера. С каждым конусом σ веера Δ можно связать симплекс Σ_σ на сфере S^{n-1} , взяв пересечение конуса со сферой. Будем обозначать через Σ_v (v – вектор из V) точку на сфере S^{n-1} , соответствующую лучу $\mathbb{R}_+v$. Объединение симплексов $\bigcup_{\sigma \in \Delta} \Sigma_\sigma$ задает симплициальное разбиение Σ_Δ сферы S^{n-1} .

Пусть $\sigma = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle_+$, $\tau = \langle v_{n+1}, v_2, \dots, v_n \rangle_+$ – соседние конусы веера Δ . Определим отображение $\bar{\Psi} = \bar{\Psi}_{\tau, \sigma}: \sigma \rightarrow \tau$ следующим образом:

- 1) $\bar{\Psi}(v_i) = v_i$ при $2 \leq i \leq n$;
- 2) $\bar{\Psi}(v_1) = v_{n+1}$;
- 3) $\bar{\Psi}$ линейно (т.е. $\bar{\Psi}(v_1 + v_2) = \bar{\Psi}(v_1) + \bar{\Psi}(v_2)$, $\bar{\Psi}(\lambda v_1) = \lambda \bar{\Psi}(v_1)$ при $\lambda \in \mathbb{R}_+$).

Теперь определим отображение $\Psi = \Psi_{\tau, \sigma}: \Sigma_\sigma \rightarrow \Sigma_\tau$ следующим образом: $\Psi(\Sigma_v) = \Sigma_{\bar{\Psi}(v)}$. Заметим, что отображение определено корректно, так как $\bar{\Psi}$ линейно.

Построим отображение $\Phi: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$, переводящее симплициальное разбиение Σ_Δ в $\Sigma_{\bar{\Delta}}$, индуктивным образом. На симплексе Σ_{σ_0} отображение Φ определим как тождественное. Пусть теперь Φ определено на симплексе Σ_σ , $\Phi(\Sigma_\sigma) = \Sigma_{\sigma'}$, где $\sigma \in \Delta$, $\sigma' \in \bar{\Delta}$. Продолжим Φ на соседний с Σ_σ симплекс Σ_τ , где τ – соседний с σ конус. Пусть τ' – такой соседний с σ' конус, что $\Phi(\Sigma_{\sigma \cap \tau}) = \Sigma_{\sigma' \cap \tau'}$. Для $x \in \tau$ положим $\Phi(x) = \Psi_{\tau', \sigma'}(\Phi(\Psi_{\sigma, \tau}(x)))$. Таким образом, продолжая отображение на соседние конусы, мы продолжаем его на весь веер.

Докажем, что построение отображения Φ корректно, т.е. не зависит от выбора соседних конусов. А именно пусть $\sigma_0, \dots, \sigma_k$ и $\pi_0, \dots, \pi_l$ – две последовательности конусов (для определенности будем считать $l \geq k$), где σ_i и σ_{i+1} (π_i и π_{i+1}) – соседние конусы для $i = 0, \dots, l-1$, $\sigma_0 = \pi_0$, $\sigma_k = \pi_l$. Отображение Φ можно продолжать с Σ_{σ_0} на Σ_{σ_k} двумя способами. Требуется, чтобы результат продолжения был одинаков.

Пусть $x_0 \in \Sigma_{\sigma_0}$, $x_k \in \Sigma_{\sigma_k}$ – две точки. Соединим точки x_0 и x_k двумя кривыми так, что одна кривая проходит через симплексы $\Sigma_{\sigma_0}, \dots, \Sigma_{\sigma_k}$, другая – через симплексы $\Sigma_{\pi_0}, \dots, \Sigma_{\pi_l}$, причем эти кривые можно провести так, чтобы они не проходили через грани коразмерности 2. Далее, эти кривые гомотопны и можно считать, что при гомотопии промежуточные кривые не проходят через грани коразмерности 3. Рассмотрим продолжение Φ по цепочке симплексов вдоль каждой из гомотопных кривых. Докажем, что при переходе через грань коразмерности 2 в процессе гомотопии $\Phi(x_k)$ не меняется.

Пусть $\tau_1 = \langle w_1, \dots, w_n \rangle_+$, $\tau_2 = \langle w_{n+1}, w_{n+2}, w_3, \dots, w_n \rangle_-$ – два n -мерных конуса, пересекающихся по грани τ коразмерности 2. Проецируя веер Δ вдоль этой грани, получаем 2-мерный веер. По утверждению 3.2 веер состоит из четырех конусов размерности 2. Поэтому существует ровно четыре n -мерных конуса, содержащих τ . Так как к каждому из конусов τ_1, τ_2 существует по два соседних, содержащих τ , то получаем, что конусы $\tau_3 = \langle w_1, w_{n+2}, w_3, \dots, w_n \rangle_+$, $\tau_4 = \langle w_{n+1}, w_2, \dots, w_n \rangle_+$, содержащие грань τ , – конусы, соседние и с τ_1 , и с τ_2 .

Пусть отображение Φ определено на симплексе Σ_{τ_1} , $\Phi(\Sigma_{\tau_1}) = \Sigma_{\tau'_1}$, $\tau'_1 \in \Delta'$. Так как τ – грань конуса τ_1 , то Φ определено и на симплексе Σ_τ и $\Phi(\Sigma_\tau) = \Sigma_{\tau'}$, где τ' – грань конуса τ'_1 . Так как существует ровно четыре n -мерных конуса, содержащих τ' , то можно определить конусы $\tau'_2, \tau'_3, \tau'_4$ из условий: $\Phi(\Sigma_{\tau_1 \cap \tau_3}) = \Sigma_{\tau'_1 \cap \tau'_3}$, $\Phi(\Sigma_{\tau_1 \cap \tau_4}) = \Sigma_{\tau'_1 \cap \tau'_4}$. Оставшийся n -мерный конус, содержащий τ' , – это τ'_2 .

Введем следующие обозначения: $\Psi_{ij} = \Psi_{\tau_i, \tau_j}$, $\Psi'_{ij} = \Psi_{\tau'_i, \tau'_j}$, $\bar{\Psi}_{ij} = \bar{\Psi}_{\tau_i, \tau_j}$, $\bar{\Psi}'_{ij} = \bar{\Psi}_{\tau'_i, \tau'_j}$. Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 4.3. *Выполнены следующие равенства:*

$$\Psi_{23}\Psi_{31} = \Psi_{24}\Psi_{41}, \quad \Psi'_{23}\Psi'_{31} = \Psi'_{24}\Psi'_{41}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем одно из равенств, второе доказывается аналогично. Заметим, что первое равенство следует из того, что $\bar{\Psi}_{23}\bar{\Psi}_{31} = \bar{\Psi}_{24}\bar{\Psi}_{41}$. Так как все отображения линейны, то достаточно проверить выполнение равенства для порождающих векторов конуса τ_1 . При этом на порождающих конуса τ все отображения действуют тождественно, поэтому достаточно проверить только выполнение равенства для v_1 и v_2 . По определению $\bar{\Psi}_{ij}$ имеем

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{23}\bar{\Psi}_{31}(w_1) &= \bar{\Psi}_{23}(w_1) = w_{n+1}, & \bar{\Psi}_{24}\bar{\Psi}_{41}(w_1) &= \bar{\Psi}_{24}(w_{n+1}) = w_{n+1}, \\ \bar{\Psi}_{23}\bar{\Psi}_{31}(w_2) &= \bar{\Psi}_{23}(w_{n+2}) = w_{n+2}, & \bar{\Psi}_{24}\bar{\Psi}_{41}(w_2) &= \bar{\Psi}_{24}(w_2) = w_{n+2}. \end{aligned}$$

Вернемся к доказательству корректности определения отображения Φ . Пусть кривая γ соединяет точки $x \in \Sigma_{\tau_1}$ и $y \in \Sigma_{\tau_2}$ и проходит через симплекс Σ_{τ_3} . Надо доказать, что если мы продеформируем кривую γ в кривую γ' , которая тоже соединяет точки $x \in \Sigma_{\tau_1}$ и $y \in \Sigma_{\tau_2}$, но проходит уже через симплекс Σ_{τ_4} , то $\Phi(y)$ не изменится.

Пусть $\Phi_3(y)$ и $\Phi_4(y)$ – значения отображения Φ в точке y , если продолжать отображение через симплексы Σ_{τ_3} и Σ_{τ_4} соответственно.

Имеем

$$\begin{aligned}\Phi_3(y) &= \Psi'_{23}(\Phi(\Psi_{32}(y))) = \Psi'_{23}\Psi'_{31}(\Phi(\Psi_{13}\Psi_{32}(y))) = \Psi'_{24}\Psi'_{41}(\Phi(\Psi_{14}\Psi_{42}(y))) \\ &= \Psi'_{24}(\Phi(\Psi_{42}(y))) = \Phi_4(y).\end{aligned}$$

Отсюда значение $\Phi(y)$ при деформации кривой не меняется. А значит, отображение однозначно продолжается на всю сферу.

Таким образом, получаем отображение Φ , являющееся накрытием. Но сфера односвязна, поэтому это накрытие – гомеоморфизм, т.е. симплициальные комплексы биективно отображаются друг на друга, а значит, их структуры совпадают. Поэтому требуемое утверждение верно.

СЛЕДСТВИЕ 4.4. *Когомологии многообразия X совпадают с когомологиями многообразия $\mathbb{P}^1 \times \dots \times \mathbb{P}^1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 4.1 следует, что неподвижных точек у многообразия X ровно столько, сколько у $\mathbb{P}^1 \times \dots \times \mathbb{P}^1$, а веса действия одномерного тора в касательных пространствах к неподвижным точкам совпадают. Отсюда сразу следует требуемое (см. [10]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.5. *Существует i такое, что $e_{-i} = -e_i$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство будем проводить индукцией по размерности веера Δ .

База индукции. При $n = 2$ утверждение верно в силу утверждения 3.2.

Шаг индукции. В силу предположения индукции для каждого веера Δ^i существует такое j , $j \in \{1, \dots, n\}$, $j \neq i$, что $e_{-j}^i = -e_j^i$ ($e_{\pm j}^i$ – проекция вектора $e_{\pm j}$ на плоскость H^i). Тогда возможно два случая.

1. Существуют индексы i_1, i_2 такие, что соответствующие индексы j_1 и j_2 совпадают.

Тогда $e_j^{i_1} = -e_j^{i_1}$, $e_j^{i_2} = -e_j^{i_2}$, где $j = j_1 = j_2$. Так как проекции векторов на различные гиперплоскости одинаковы, то сами векторы одинаковы, т.е. выполнено равенство $e_{-j} = -e_j$.

2. Таких индексов не существует. Тогда индексы образуют подстановку из S_n (каждому $i \in \{1, \dots, n\}$ сопоставляется $j \in \{1, \dots, n\}$, причем все j различны). Перенумеруем векторы так, чтобы подстановка имела следующий вид: $(1, 2, \dots, k_1)(k_1 + 1, \dots, k_2) \dots (k_{l-1} + 1, \dots, k_l)$, где $k_l = n$.

Запишем координаты векторов $e_{-1}, \dots, e_{-n}$ в виде строк матрицы. Тогда эта матрица состоит из блоков с размерами $K_1 \times K_1, \dots, K_l \times K_l$, где $K_1 = k_1$, $K_j = k_j - k_{j-1}$ при $j \geq 2$:

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & M_{l-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & M_l \end{pmatrix},$$

где блок M_i выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & m_{1,K_i} \\ m_{2,K_i} & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & m_{K_i,K_i} & -1 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы должен быть равен ± 1 (так как векторы $e_{-1}, \dots, e_{-n}$ являются базисом решетки), с другой стороны, он равен произведению определителей блоков, т.е. $\pm 1 = \prod_{j=1}^l (-1)^{K_j} [1 - m_{1,K_j} \dots m_{K_j,K_j}]$. По уже доказанному все m_{jK_s} , где $j = 1, \dots, K_s$, $s = 1, \dots, l$, равны 0, -2 . Отсюда делаем вывод, что существуют i, i' такие, что $m_{iK_{i'}} = 0$, а тогда $e_{-j'} = -e_{j'}$, где $j' = k_{i'} + i$.

Перенумеруем векторы так, чтобы $e_{-n} = -e_n$. Так как веер Δ^n удовлетворяет условиям $(*)$ – $(***)$, то среди векторов, порождающих его ребра, найдется вектор $u_i = -e_i^n$. Поменяв местами векторы e_i и e_{n-1} , получим, что $e_{-(n-1)} = -e_{n-1} + ke_n$. Продолжая дальше, получаем, что существует такая перенумерация векторов, что $e_{-i} = -e_i + d_{i,i+1}e_{i+1} + \dots + d_{in}e_n$. Запишем координаты векторов e_{-i} в виде строк матрицы D :

$$\begin{pmatrix} -1 & d_{12} & \dots & d_{1,n-1} & d_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & d_{2,n-1} & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

ТЕОРЕМА 4.6. *Веер Δ , удовлетворяющий условиям $(*)$ – $(***)$, устроен следующим образом: у него $2n$ ребер $e_1, \dots, e_n, e_{-1}, \dots, e_{-n}$, причем у вектора e_{-i} первые $i-1$ координат нулевые, i -я координата равна -1 , остальные -0 или -2 ; n -мерные конусы этого веера выглядят следующим образом: их порождающие ребра $-e_{\delta_{11}}, \dots, e_{\delta_{nn}}$, где $\delta_k = \pm 1, k = 1, \dots, n$. Другими словами, веер Δ однозначно задается матрицей D , которая составлена из координат векторов e_{-j} , $j = 1, \dots, n$, записанных по строкам.*

Доказательство теоремы следует из приведенных выше рассуждений.

ОБОЗНАЧЕНИЕ. Матрицу D , соответствующую вееру Δ , обозначим $D(\Delta)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В построении матрицы D допущен некоторый произвол, связанный с перестановкой базисных векторов (т.е. верхнетреугольность может достигаться разными способами). Выберем одну из таких матриц: дальнейшие рассуждения не зависят от того, как именно построена матрица D .

4.1. Классификация вееров. Рассмотрим следующее отношение $\prec$ на множестве $\{1, \dots, n\}$, построенное по матрице $D(\Delta)$: $i \prec j$ тогда и только тогда, когда $d_{ij} = -2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Частичный порядок $\prec'$ на множестве $\{1, \dots, n\}$ будем называть *древесным*, если выполнено следующее условие:

$$\text{если } i, j \prec' k, \text{ то } i \prec' j \text{ или } j \prec' i.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.7. *Отношение $\prec$ является древесным порядком.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что отношение $\prec$ антирефлексивно и антисимметрично. Заметим также, что осталось доказать следующее условие:

$$\text{пусть } j \prec k \text{ и } i < j, \text{ тогда } i \prec k \Leftrightarrow i \prec j.$$

Доказательство этого условия проведем сначала в случае $n = 3$, а потом перейдем к произвольному n .

Частный случай. Пусть $n = 3$. Доказательство будем вести от противного. Предположим, что отношение $\prec$ не удовлетворяет данному условию. Тогда возможны два варианта.

1) $2 \prec 3, 1 \prec 2, 1 \not\prec 3$. Тогда $d_{23} = -2, d_{12} = -2, d_{13} = 0$. Для конуса σ , порождаемого векторами $e_{-1} = (-1, -2, 0), e_{-2} = (0, -1, -2), e_{-3} = (0, 0, -1)$, выполняется условие (**), т.е. существует такой набор знаков s_1, s_2, s_3 , что $s_1 e_{-1} + s_2 e_{-2} + s_3 e_{-3} = (1, 1, 1)$. Для того чтобы две первые координаты равнялись единице, необходимо взять $s_1 = -1$ и $s_2 = 1$. Но тогда последняя координата равна $-2 + s_3(-1) \neq 1$, если $s_3 = \pm 1$. Получаем, что условие (**) для веера Δ не выполнено – противоречие.

2) $2 \prec 3, 1 \not\prec 2, 1 \prec 3$. Строим противоречие аналогичным образом: $d_{23} = -2, d_{12} = 0, d_{13} = -2$. Рассмотрев конус σ , получим, что существует такой набор знаков s_1, s_2, s_3 , что $s_1 e_{-1} + s_2 e_{-2} + s_3 e_{-3} = (1, 1, 1)$. Тогда $s_1 = -1, s_2 = -1$, следовательно, последняя координата равна $4 + s_3(-1) \neq 1$ при $s_3 = \pm 1$ – противоречие.

Общий случай. Пусть Δ – n -мерный веер. Пусть индексы i, j, k удовлетворяют предпосылке утверждения, т.е. $j \prec k$ и $i < j$. Рассмотрим веер $\Delta' = \Delta^{1, \dots, i-1, i+1, \dots, j-1, j+1, \dots, k-1, k+1, \dots, n}$ ($j < k$, так как $j \prec k$).

Тогда веер Δ' будет удовлетворять условиям (*)–(**), а его матрица $D(\Delta')$ является главным минором порядка 3 матрицы D (этот минор является пересечением строк и столбцов матрицы D с номерами i, j и k). Поэтому отношение $\prec'$, построенное по матрице D' , будет являться ограничением отношения $\prec$ на индексы i, j, k . Поэтому $i \prec j \Leftrightarrow i \prec k$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Рассмотрим порядок $\prec$ на множестве $\{1, \dots, n\}$. Ему можно сопоставить ориентированный граф с n занумерованными вершинами следующим образом: ребро с началом в i -й и с концом в j -й вершинах существует тогда и только тогда, когда $i \prec j$. Такой граф называется *диаграммой Хассе порядка $\prec$* .

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.8. *Диаграмма Хассе древесного порядка $\prec$ является корневым лесом.*

ЗАМЕЧАНИЕ 5. *Корневым лесом* называется лес, состоящий из корневых деревьев, т.е. деревьев, в каждом из которых зафиксирована вершина, называемая *корнем*. На каждом корневом дереве (и, следовательно, на всем лесе) вводится естественная ориентация от корня к листьям.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дан древесный порядок $\prec$. Рассмотрим диаграмму Хассе этого порядка. Докажем, что в одну вершину указывает не больше

одного ребра. Предположим противное, а именно, что в одну вершину указывают хотя бы два ребра. Это означает, что существуют $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ такие, что $i, j \prec k$. Тогда $i \prec j$ или $j \prec i$, что противоречит определению диаграммы Хассе.

Отсюда следует, что в каждом дереве диаграммы Хассе порядка $\prec$ существует ровно одна вершина, в которую ни одно ребро не указывает. Она и является корнем данного дерева.

Пусть теперь дан корневой лес G . Занумеруем вершины числами от 1 до n так, чтобы ребра вели от меньших номеров к большим. Теперь рассмотрим древесный порядок $\prec$, построенный по данной нумерации вершин.

Построим по порядку $\prec$ веер Δ следующим образом: рассмотрим векторы $e_{-1}, \dots, e_{-n}$, где у вектора e_{-i} первые $i - 1$ координат нулевые, i -я координата равна -1 , j -я координата (где $j > i$) равна -2 , если $i \prec j$, и 0 иначе. Этими векторами в совокупности с векторами $e_1, \dots, e_n$ можно породить набор конусов, устроенных следующим образом: n -мерные конусы в качестве ребер содержат $e_{\delta_1 1}, \dots, e_{\delta_n n}$, где $\delta_k = \pm 1$, $k = 1, \dots, n$. Конусы образуют веер Δ .

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Требуемую нумерацию вершин корневого леса G можно провести разными способами, но получившиеся веера отличаются лишь перестановкой базисных векторов, т.е. это тот же произвол, что и произвол при выборе матрицы D .

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.9. Веер Δ удовлетворяет условиям $(*)$ – $(***)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первые два условия выполнены по построению веера Δ .

Будем доказывать условие $(***)$ по индукции по размерности n веера Δ .

База индукции. Пусть $n = 3$. Рассмотрим возможные древесные порядки на множестве $\{1, 2, 3\}$.

Пусть $\sigma \in \Delta$ – 3-мерный конус веера Δ , порождаемый векторами $e_{\delta_1 1}, e_{\delta_2 2}, e_{\delta_3 3}$, где $\delta_k = \pm 1$, $k = 1, 2, 3$. Укажем для этого конуса требуемый набор знаков s_i (т.е. такой, что $s_1 e_{\delta_1 1} + s_2 e_{\delta_2 2} + s_3 e_{\delta_3 3} = (1, 1, 1)$). Очевидно, что необходимо взять $s_1 = \delta_1$. Далее рассмотрим следующие случаи.

1) $\delta_1 = 1$. Тогда $s_2 = \delta_2$. Если $2 \prec 3$ и $\delta_2 = -1$, то $s_3 = -\delta_3$, иначе $s_3 = \delta_3$.

2) $\delta_1 = -1$. Тогда $s_2 = -\delta_2$, если $1 \prec 2$, и $s_2 = \delta_2$, если $1 \not\prec 2$. При этом если $\delta_2 = 1$, то $s_3 = -\delta_3$ при $1 \prec 3$ и $s_3 = \delta_3$ при $1 \not\prec 3$. Если $\delta_2 = -1$, то $s_3 = k\delta_3$, где k – четность количества чисел, меньших, чем 3, в порядке $\prec$.

В каждом из случаев несложно проверить, что требуемое выполнено.

Шаг индукции. Пусть теперь $\prec$ – древесный порядок на множестве $\{1, \dots, n\}$. Тогда порядок $\prec'$ на множестве $\{1, \dots, n - 1\}$, получаемый ограничением $\prec$, тоже будет древесным, значит, для веера Δ' , соответствующего порядку $\prec'$, выполнено условие $(***)$. Несложно также заметить, что $\Delta' = \Delta^n$ (см. обозначения в начале §4).

Пусть $\sigma \in \Delta$ – n -мерный конус с порождающими векторами $e_{\delta_1 1}, \dots, e_{\delta_n n}$, где $\delta_k = \pm 1$, $k = 1, \dots, n$. Рассмотрим конус $\sigma' = \langle e'_{\delta_1 1}, \dots, e'_{\delta_{(n-1)n-1}} \rangle_+$, где $e'_{\delta_i i}$ – проекция вектора $e_{\delta_i i}$ на гиперплоскость H^n . Это конус веера Δ' , и для него выполнено условие $(***)$, следовательно, существует набор знаков $s_1, \dots, s_{n-1}$ такой, что $s_1 e'_{\delta_1 1} + \dots + s_{n-1} e'_{\delta_{(n-1)n-1}} = (1, \dots, 1)$. Пусть

$j = \max_k (k \prec n, \delta_k = -1)$, $k = 1, \dots, n$, и положим $s_n = s_j \delta_n$. Рассмотрим вектор $v = s_1 e_{\delta_1 1} + \dots + s_n e_{\delta_n n}$. Первые $n-1$ координат вектора v равны 1. Проверим, что последняя координата тоже равна 1. Пусть $a_1, \dots, a_n$ ($b_1, \dots, b_n$) – набор j -х (n -х) координат векторов $e_{\delta_1 1}, \dots, e_{\delta_n n}$ соответственно. Из условия древности порядка $\prec$ следует, что если $i < j$, то $i \prec n \Leftrightarrow i \prec j$, т.е. $a_i = b_i$.

Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n s_i b_i &= \sum_{i=1}^j s_i b_i + s_n b_n = \sum_{i=1}^{j-1} s_i b_i + s_j b_j + (s_j \delta_n) b_n \\ &= \left(\sum_{i=1}^j s_i a_i - s_j a_j \right) + s_j (-2 + 1) = 1 - s_j a_j - s_j = 1. \end{aligned}$$

Отсюда $v = (1, \dots, 1)$ и условие (***) для веера Δ выполнено.

ТЕОРЕМА 4.10. *Существует биекция между торическими n -мерными многообразиями, удовлетворяющим условиям гипотезы, и корневыми лесами с n вершинами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из утверждений 4.7–4.9 следует, что существует биекция между корневыми лесами с n вершинами и n -мерными веерами Δ , удовлетворяющими условиям (*)–(***), с точностью до нумерации вершин и действия $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Это полностью доказывает теорему.

§ 5. Структура $\mathbb{P}^1$ -расслоения на торическом многообразии

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.1. *Пусть веер Δ удовлетворяет условиям (*)–(***). Тогда Δ можно спроецировать вдоль векторов $e_{\pm n}$ (напомним, что $e_n = -e_{-n}$), получив веер Δ' ; Δ' удовлетворяет условиям (*)–(***), а отображение проекции на уровне многообразий задает структуру локально тривиального расслоения $X(\Delta)$ над $X(\Delta')$ со слоем $\mathbb{P}^1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим сначала следующее утверждение для конусов, очевидное из свойств спаривания.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.2. *Пусть $\sigma = \langle v_1, \dots, v_n \rangle_+$ – n -мерный конус, n -мерный конус $\sigma^\vee = \langle u_1, \dots, u_n \rangle_+$ является двойственным к конусу σ , причем u_j , $j = 1, \dots, n$, – двойственный базис к v_i , $i = 1, \dots, n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\sigma' = \langle v_1, \dots, v_{n-1}, -v_n \rangle_+$, то двойственный к нему конус $(\sigma')^\vee = \langle u_1, \dots, u_{n-1}, -u_n \rangle_+$.

В веере Δ каждый конус содержит либо e_n , либо e_{-n} , поэтому его можно спроецировать на гиперплоскость, порождающуюся векторами $e_1, \dots, e_{n-1}$. При этой проекции конусы, наборы ребер которых различаются лишь по последнему вектору, попадают в один. Поэтому Δ' удовлетворяет условиям (*)–(***)).

Отображение вееров порождает отображение многообразия $X = X(\Delta)$ в многообразие $X' = X(\Delta')$. Посмотрим, как выглядит это отображение в координатах.

Введем следующие обозначения: пусть $Q = \{q_1, \dots, q_{n-1}\}$ – набор из $n - 1$ плюсов и минусов, а $\sigma_Q - (n - 1)$ -мерный конус веера Δ' , порождающие ребра которого – $\{e'_{q_1}, \dots, e'_{q_{n-1}(n-1)}\}$. Эти векторы являются проекциями ребер $e_{q_1}, \dots, e_{q_{n-1}(n-1)}$ веера Δ . Обозначим через $\sigma_{Q,\pm}$ два конуса, являющиеся образом конуса σ_Q и получающиеся добавлением к векторам $e_{q_1}, \dots, e_{q_{n-1}(n-1)}$ вектора $e_{\pm n}$ соответственно. По утверждению 5.2 у двойственных конусов $\sigma_{Q,+}^\vee$ и $\sigma_{Q,-}^\vee$ все порождающие векторы одинаковы, кроме последнего, а последние векторы $e_n^\vee$ и $e_{-n}^\vee$ противоположны.

В результате проекции конусов $\sigma_{Q,+}$ и $\sigma_{Q,-}$ мы получим конус σ_Q . Из вышеизложенного следует, что порождающие векторы двойственного конуса $\sigma_Q^\vee$ – это первые $n - 1$ векторов, порождающих $\sigma_{Q,+}^\vee$. Поэтому если мы склеим пару аффинных торических многообразий $U_{Q,+}$ и $U_{Q,-}$, соответствующих конусам $\sigma_{Q,+}$, $\sigma_{Q,-}$, то получим прямое произведение аффинного торического многообразия U_Q (т.е. $\mathbb{A}^{n-1}$), соответствующего σ_Q , с проективной прямой $\mathbb{P}^1$, получаемой при склейке аффинных прямых, отвечающих противоположным векторам $e_n^\vee$ и $e_{-n}^\vee$. Склеив все пары таких многообразий (т.е. те, в конусах которых различны только последние векторы), получим локально тривиальное расслоение p многообразия $X(\Delta)$ над $X(\Delta')$ со слоем $\mathbb{P}^1$.

В качестве следствия мы получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5.3. *Многообразие X , удовлетворяющее условию гипотезы, расщлаивается со слоем $\mathbb{P}^1$ на многообразие X' меньшей размерности, также удовлетворяющее условию гипотезы.*

Таким образом, тривиализуя получившееся расслоение и используя предположение индукции, мы получаем, что $X(\Delta)$ гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{P}^1 \times \dots \times \mathbb{P}^1$, тем самым решая задачу.

5.1. Локально тривиальные расслоения. Пусть p – расслоение X над Y со слоем F , Y покрыто картами Y_i и $p^{-1}(Y_i) \cong Y_i \times F$. Структура локально тривиального расслоения задает отображения склейки g_{ij} следующим образом: есть два изоморфизма $p^{-1}(Y_i \cap Y_j) \cong (Y_i \cap Y_j) \times F$ (один задается картой Y_i , другой – картой Y_j). Они задают гомеоморфизм

$$G_{ij}: (Y_i \cap Y_j) \times F \rightarrow (Y_i \cap Y_j) \times F,$$

устроенный так: $(y, z) \mapsto (y, g_{ij}(y)z)$, где $y \in (Y_i \cap Y_j)$, $z \in F$, – проекция на F при тривиализации над Y_j , g_{ij} – гомеоморфизм F (зависящий от y) и $g_{ij}(y)z$ – проекция на F при тривиализации над Y_i . Отображения g_{ij} обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} g_{ij}g_{jk} &= g_{ik}, \\ g_{ji} &= g_{ij}^{-1}. \end{aligned}$$

Замена локальной тривиализации – это замена при помощи отображений $G_i: Y_i \times F \rightarrow Y_i \times F$ изоморфизма $p^{-1}(Y_i) \cong Y_i \times F$, где точка (y, z) отображается в $(y, g_i(y)z)$, g_i – гомеоморфизм F (зависящий от y). При замене локальной

тривиализации отображения склейки изменяются по следующему закону:

$$g_{ij} \mapsto g'_{ij} = g_i g_{ij} g_j^{-1}.$$

Тривиальность расслоения означает, что существует такая замена локальной тривиализации, что $g_{ij} \mapsto g'_{ij} = 1$.

5.2. Описание функций перехода.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. В нашем случае слой расслоения – $\mathbb{P}^1$, функции перехода и отображения замены локальной тривиализации – матрицы из PSL_2 . Эти матрицы удовлетворяют следующим условиям: это невырожденные матрицы, элементы которых – вещественно-дифференцируемые функции от локальных координат в карте базы расслоения (в частности, матрица отображения замены локальной тривиализации должна невырожденно продолжаться на нули этих локальных координат).

В нашем случае карты базы расслоения $X(\Delta')$ – это аффинные торические многообразия U_Q , где Q пробегает все наборы из $n-1$ плюсов и минусов. Пусть $I = \{+, +, \dots, +\}$, $x_1, x_2, \dots, x_n$ – координаты в $U_{I,+}$, соответствующие векторам $e_1^\vee, e_2^\vee, \dots, e_n^\vee$, порождающим конус $\sigma_{I,+}^\vee$. Тогда локальные координаты в $U_{Q,+}$ (где Q – произвольный набор $\pm$) выражаются через x_i следующим образом:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1^{b_{11}}, & y_2 &= x_1^{b_{12}} x_2^{b_{22}}, & \dots, \\ y_i &= x_1^{b_{1i}} x_2^{b_{2i}} \dots x_i^{b_{ii}}, & \dots, & & y_n &= x_1^{b_{1n}} x_2^{b_{2n}} \dots x_{n-1}^{b_{n-1n}} x_n, \end{aligned}$$

где b_{ij} – i -я координата вектора $e_{q_j j}^\vee$.

Отображения склейки g_{QI} задается матрицей из PSL_2 следующего вида:

$$\begin{pmatrix} x_1^{b_{1n}} x_2^{b_{2n}} \dots x_{n-1}^{b_{n-1n}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

так как это есть преобразование последней координаты многообразий $U_{I,+}$ и $U_{Q,+}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Для тривиальности расслоения достаточно подобрать такую замену локальной тривиализации, чтобы для любого набора Q $g_{QI} \mapsto g'_{QI} = 1$ (это следует из свойств отображений: $g_{QI} g_{IQ'} = g_{QQ'}$, поэтому если $g_{QI} = g_{IQ'} = 1$, то $g_{QQ'} = 1$).

§ 6. Тривиализация расслоения

6.1. Идея построения тривиализации. Обозначим через $L = \{i_1, \dots, i_m\}$ множество индексов k таких, что $k \prec n$. Считаем $i_1 < \dots < i_m$.

Пусть Q – произвольный набор из плюсов и минусов длины $n-1$. Обозначим через Q_L поднабор набора Q , состоящий из знаков, стоящих на местах i , таких, что $i \in L$.

Пусть U_Q – карта, соответствующая набору Q , $y_1, \dots, y_{n-1}$ – локальные координаты в этой карте.

Пусть матрица $P(Q, k)$, где $k = 1, \dots, m$, удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $P(Q, k)$ – матрица из PSL_2 , элементы которой зависят только от переменных y_{i_j} , где $j \leq k$;
- 2) $P(Q, k)$ удовлетворяет условиям, налагаемым на матрицы замены тривиализации над картой U_Q ;
- 3) пусть наборы Q, Q' различаются лишь в j -м знаке, а все знаки после j -го – плюсы, пусть $i_k \in L$, тогда
 - если $i_k < j$, то $P(Q, k) = P(Q', k)$;
 - если $i_k = j$, то $g_{Q'Q}P(Q, k) = P(Q', k)$;
 - если $i_k > j, j \in L$, то $g_{Q'Q}P(Q, k) = P(Q', k)g_{Q'Q}$;
 - если $i_k > j, j \notin L$, то $P(Q, k) = P(Q', k)$.

ЛЕММА 6.1. Пусть наборы Q, Q' различаются лишь в j -м знаке, а все знаки после j -го – плюсы. Если $j \notin L$, то $g_{Q'Q} = E$.

Эту лемму мы докажем ниже.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.2. Следующая замена тривиализации над картой U_Q

$$g_Q = (P(Q, m) \cdots P(Q, 1))^{-1}$$

(замена проводится в каждой карте) тривиализует все функции перехода.

Идея доказательства состоит в том, что замена локальной тривиализации происходит за m шагов, так что на k -м шаге тривиализуются функции перехода $g_{QQ'}$, где Q' отличается от Q в i_{m+1-k} -м знаке, после которого все знаки $+$, а остальные функции перехода сохраняются.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1-й этап. Пусть наборы Q, Q' различаются лишь в j -м знаке, а все знаки после j -го – плюсы. Докажем, что $g_{Q'Q}g_Q^{-1} = g_{Q'}^{-1}$, т.е. $g_{QQ'}$ тривиализуется данными преобразованиями координат.

Рассмотрим два случая:

- 1) $j \in L$. Пусть тогда $j = i_k$:

$$\begin{aligned} g_{Q'Q}g_Q^{-1} &= g_{Q'Q}P(Q, m) \cdots P(Q, 1) \\ &= P(Q', m)g_{Q'Q}P(Q, m-1) \cdots P(Q, 1) = \cdots \\ &= P(Q', m) \cdots P(Q', k+1)g_{Q'Q}P(Q, k) \cdots P(Q, 1) \\ &= P(Q', m) \cdots P(Q', k+1)P(Q', k) \cdots P(Q', 1) \\ &= P(Q', m) \cdots P(Q', 1) = g_{Q'}^{-1}; \end{aligned}$$

- 2) $j \notin L$:

$$\begin{aligned} g_{Q'Q}g_Q^{-1} &= g_{Q'Q}P(Q, m) \cdots P(Q, 1) \\ &= P(Q', m)P(Q', m-1) \cdots P(Q', 1) = g_{Q'}^{-1}. \end{aligned}$$

2-й этап. Докажем, что тривиализуются все функции перехода g_{QI} , где Q – произвольный набор, $I = \{+, \dots, +\}$.

Обозначим через Q_- множество индексов, на местах которых в Q стоит минус. Заметим, что множество Q_- однозначно определяется набором Q и наоборот. Пусть элементы множества Q_- – это $j_1, \dots, j_l$, причем $j_1 < j_2 < \dots < j_l$. Рассмотрим последовательность наборов $Q_0, \dots, Q_l$, где $(Q_0)_- = \emptyset$, $(Q_i)_- = \{j_1, \dots, j_i\}$ для $1 \leq i \leq l$. Тогда

- 1) $Q_0 = I$, $Q_l = Q$;
- 2) два соседних набора Q_i и Q_{i+1} различаются лишь в j_{i+1} -м знаке, а все последующие знаки – плюсы.

Отсюда $g_{QI} = g_{Q_l Q_0} = g_{Q_l Q_{l-1}} \cdots g_{Q_1 Q_0}$, где справа написана композиция функций, которые мы тривиализовали, поэтому мы тривиализовали и функцию g_{QI} .

6.2. Построение матриц $P(Q, k)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.3. Пусть наборы Q, Q' различаются лишь в j -м знаке, а все знаки после j -го – плюсы. Обозначим локальные координаты в карте $U_{Q,+}$ через $y_1, \dots, y_{n-1}, y_n$, а в $U_{Q',+}$ – через $y'_1, \dots, y'_{n-1}, y'_n$. Пусть $i \in L \cup \{n\}$:

- 1) $i < j$, тогда $y'_i = y_i$;
- 2) $i = j$, тогда $y'_i = y_i^{-1}$;
- 3) $i > j$, если $j \in L$, то $y'_i = y_i y_j^{-2}$, иначе $y'_i = y_i$.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Так как функция перехода отвечает за преобразование n -й координаты, то мы получаем, что если $j \in L$, то матрица перехода

$$g_{Q'Q} = \begin{pmatrix} y_j^{-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

иначе матрица перехода тривиальна.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Из последнего утверждения следует лемма 6.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что если $y'_i = y_i y_j^{-2}$ и $y'_j = y_j^{-1}$, то $y_i = y'_i (y'_j)^{-2}$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что j -й знак набора Q – плюс.

Переформулируем условия нашего утверждения на языке конусов: локальные координаты карт $U_{Q,+}$ и $U_{Q',+}$ соответствуют векторам конусов $\sigma_{Q,+}$ и $\sigma_{Q',+}$. Поэтому наше утверждение следует из утверждения 6.4.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.4. Пусть

$$\begin{aligned} \sigma &= \langle v_1, \dots, v_{j-1}, e_j, \dots, e_n \rangle_+, \\ \sigma' &= \langle v_1, \dots, v_{j-1}, e_{-j}, e_{j+1}, \dots, e_n \rangle_+ \end{aligned}$$

– два соседних n -мерных конуса вера Δ (здесь $v_i = e_i$ или e_{-i});

$$\sigma^\vee = \langle w_1, \dots, w_n \rangle_+, \quad (\sigma')^\vee = \langle u_1, \dots, u_n \rangle_+$$

– двойственные к ним конусы (при этом w_i и u_i – двойственные базисы к базисам конусов σ и σ' соответственно). Тогда если $i \in L \cup \{n\}$, то

- 1) при $i < j$ $u_i = w_i$;
- 2) при $i = j$ $u_i = -w_i$;
- 3) при $i > j$
 - если $j \in L$, то $u_i = w_i - 2w_j$;
 - если $j \notin L$, то $u_i = w_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем вспомогательную лемму 6.5.

Пусть R_j – множество индексов i таких, что $j \prec i$, L_j – множество индексов i таких, что $i \in L$ и $j < i$.

ЛЕММА 6.5. Если $j \in L$, то $L_j \subset R_j$, а если $j \notin L$, то $L_j \cap R_j = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $i \in L_j \cap R_j$. Тогда $i \prec n$, $j \prec i$ и, следовательно, $j \prec n$ и $j \in L$, из чего следует второе утверждение. С другой стороны, если $j, i \in L_j$, то из того, что $j \prec n$, $i \prec n$, следует, что $j \prec i$, т.е. $i \in R_j$.

Пусть $R_j = \{j_1, \dots, j_l\}$. Тогда $e_{-j} = -e_j - 2e_{j_1} - \dots - 2e_{j_l}$.

Заметим, что при замене $e_j \mapsto e_j - 2e_k$, где $k = 1, \dots, n$, $k \neq j$, в двойственном базисе происходит замена $u_k \mapsto w_k + 2w_j$.

Соответственно, при замене $e_j \mapsto -e_j$ в двойственном базисе происходит замена $w_j \mapsto -w_j$. Отсюда, производя последовательные замены $e_j \mapsto -e_j \mapsto -e_j - 2e_{j_1} \mapsto \dots \mapsto -e_j - 2e_{j_1} - \dots - 2e_{j_l} = e_{-j}$, нетрудно заметить, что двойственный базис изменяется именно так, как написано в утверждении. А именно, если $j \in L$, то $i = j_k$ для некоторого k и после замены $e_j \mapsto e_{-j}$ w_i перейдет в $w_i + 2(-w_j) = u_i$, а если $j \notin L$, то w_i не изменится.

6.3. Функции. Как и раньше, $L = \{i_1, \dots, i_m\}$ – множество индексов i_k таких, что $i_k \prec n$.

Пусть Q – набор из плюсов и минусов длины $n - 1$. Пусть U_Q – карта в базе расслоения, соответствующая набору Q , $y_1, \dots, y_{n-1}$ – локальные координаты в этой карте. Пусть $r_k = |y_{i_k}|$. Зададим функции $f(Q, k)$, $k = 0, \dots, m$, следующим образом:

$$f(Q, 0) = 1,$$

$$f(Q, k+1) = \begin{cases} \frac{r_{k+1}^2}{f(Q, k)} + f(Q, k), & i_{k+1} \notin Q_-, \\ \frac{1}{f(Q, k)} + r_{k+1}^2 f(Q, k), & i_{k+1} \in Q_-. \end{cases}$$

Напомним, что Q_- – это множество индексов, на местах которых в Q стоит минус.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.6. Для любых значений переменных r_k , $k = 1, \dots, m$, выполнены неравенства $0 < f(Q, k) < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проведем индукцией по k .

База индукции. Пусть $k = 1$, тогда $f(Q, 1) = 1 + r_1^2$ – утверждение выполнено.

Шаг индукции. Пусть неравенство выполнено для $k = j$, т.е. $0 < f(Q, j) < \infty$ для всех значений переменных. Тогда $0 < 1/f(Q, j) < \infty$, $0 \leq r_{j+1}^2 < \infty$ и из определения $f(Q, j+1)$ получим, что $0 < f(Q, j+1) < \infty$.

Введем следующие функции от переменных $r_1, \dots, r_k$:

$$\begin{aligned} F_1(Q, k) &= \frac{f(Q, k-1)^2}{r_k^2 + f(Q, k-1)^2}, \\ F_2(Q, k) &= \frac{r_k}{r_k^2 + f(Q, k-1)^2}, \\ F_3(Q, k) &= \frac{r_k f(Q, k-1)^2}{1 + r_k^2 f(Q, k-1)^2}, \\ F_4(Q, k) &= \frac{1}{1 + r_k^2 f(Q, k-1)^2}. \end{aligned}$$

Отметим свойства функций, вытекающие из утверждения 6.6.

СЛЕДСТВИЕ 6.7. Имеем $F_p(Q, k) > 0$ при $r_k > 0$, $p = 1, 2, 3, 4$;

$$F_p(Q, k)|_{r_k=0} = \begin{cases} 1, & p = 1, 4, \\ 0, & p = 2, 3. \end{cases}$$

Теперь докажем основное свойство этих функций.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.8. Пусть $Q'_- = Q_- \cup \{j\}$, где $j > \max\{i : i \in Q_-\}$, $k = 1, \dots, m$. Тогда

- 1) если $i_k < j$, то $f(Q', k) = f(Q, k)$;
- 2) если $i_k \geq j$, $j = i_l \in L$, то $f(Q', k) = r_l^{-2} f(Q, k)$;
- 3) если $i_k > j$, $j \notin L$, то $f(Q', k) = f(Q, k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Рассмотрим карты U_Q и $U_{Q'}$. Наборы Q и Q' различаются лишь в j -м индексе, а все следующие индексы – плюсы. Поэтому по утверждению 6.3 если $i_k < j$, то $y_{i_k} = y'_{i_k}$ и $r_k = r'_k$. Но это же верно и для всех r_l , где $l < k$. Поэтому $f(Q, k) = f(Q', k)$.

2) По утверждению 6.3 в этом случае $y'_j = y_j^{-1}$, $y'_{i_k} = y_{i_k} y_j^{-2}$, а значит, то же самое выполнено для модулей этих переменных: $r'_j = r_j^{-1}$, $r'_{i_k} = r_{i_k} r_j^{-2}$.

Докажем требуемое индукцией по $k - l$.

База индукции. Если $k = l$, что равносильно $i_k = j$, то

$$\begin{aligned} r_l^{-2} f(Q, k) &= \left(\frac{r_k^2}{f(Q, k-1)} + f(Q, k-1) \right) r_k^{-2} = \frac{1}{f(Q, k-1)} + r_k^{-2} f(Q, k-1) \\ &= \frac{1}{f(Q', k-1)} + (r'_k)^2 f(Q', k-1) = f(Q', k). \end{aligned}$$

Шаг индукции. Пусть $r_l^{-2} f(Q, k) = f(Q', k)$. Тогда

$$\begin{aligned} r_l^{-2} f(Q, k+1) &= \left(\frac{r_{k+1}^2}{f(Q, k)} + f(Q, k) \right) r_l^{-2} = \frac{r_{k+1}^2 r_l^{-4}}{f(Q, k) r_l^{-2}} + f(Q, k) r_l^{-2} \\ &= \frac{(r'_{k+1})^2}{f(Q', k)} + f(Q', k) = f(Q', k+1). \end{aligned}$$

3) По утверждению 6.3 если $j \notin L$, то $\forall l, l \leq k$, имеем $y'_{i_l} = y_{i_l} \Leftrightarrow r'_l = r_l \Rightarrow f(Q, k) = f(Q', k)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.9. Пусть $Q'_- = Q_- \cup \{j\}$, где $j > \max\{i : i \in Q_-\}$, $k = 1, \dots, m$, $p = 1, 2, 3, 4$. Тогда

- 1) если $i_k < j$, то $F_p(Q', k) = F_p(Q, k)$;
- 2) если $i_k = j$, то $F_3(Q', k) = r_k F_1(Q, k)$ и $F_4(Q', k) = r_k F_2(Q, k)$;
- 3) если $i_k > j$, $j = i_l \in L$, то $F_1(Q', k) = F_1(Q, k)$ и $F_2(Q', k) = r_l^2 F_2(Q, k)$;
- 4) если $i_k > j$, $j \notin L$, то $F_p(Q', k) = F_p(Q, k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункты 1) и 4) напрямую следуют из определения F_p и утверждений 6.3, 6.8.

Докажем п. 2):

$$\begin{aligned} r_k F_1(Q, k) &= r_k \frac{f(Q, k-1)^2}{r_k^2 + f(Q, k-1)^2} = \frac{r_k f(Q, k-1)^2}{r_k^2 + f(Q, k-1)^2} = \frac{r_k^{-1} f(Q', k-1)^2}{1 + r_k^{-2} f(Q', k-1)^2} \\ &= \frac{r'_k f(Q', k-1)^2}{1 + (r'_k)^2 f(Q', k-1)^2} = F_3(Q', k); \\ r_k F_2(Q, k) &= r_k \frac{r_k}{r_k^2 + f(Q, k-1)^2} = \frac{r_k^2}{r_k^2 + f(Q, k-1)^2} = \frac{1}{1 + r_k^{-2} f(Q', k-1)^2} \\ &= \frac{1}{1 + (r'_k)^2 f(Q', k-1)^2} = F_4(Q', k). \end{aligned}$$

Докажем п. 3):

$$\begin{aligned} F_1(Q, k) &= \frac{f(Q, k-1)^2}{r_k^2 + f(Q, k-1)^2} = \frac{f(Q, k-1)^2}{r_k^2 + f(Q, k-1)^2} \frac{r_l^{-4}}{r_l^{-4}} \\ &= \frac{f(Q, k-1)^2 r_l^{-4}}{r_k^2 r_l^{-4} + f(Q, k-1)^2 r_l^{-4}} = \frac{f(Q', k-1)^2}{(r'_k)^2 + f(Q', k-1)^2} = F_1(Q', k); \\ r_l^2 F_2(Q, k) &= r_l^2 \frac{r_k}{r_k^2 + f(Q, k-1)^2} = \frac{r_k r_l^{-2}}{r_k^2 r_l^{-4} + f(Q, k-1)^2 r_l^{-4}} \\ &= \frac{r'_k}{(r'_k)^2 + f(Q', k-1)^2} = F_2(Q', k). \end{aligned}$$

6.4. Матрицы. Все обозначения предыдущего пункта сохраняются. Определим матрицу $P(Q, k)$ следующим образом (Q – набор из плюсов и минусов, i_k – k -й элемент множества L):

$$P(Q, k) = \begin{cases} \begin{pmatrix} -1 & r_k e^{i\varphi_k} \\ F_2(Q, k) e^{-i\varphi_k} & F_1(Q, k) \end{pmatrix}, & i_k \notin Q_-, \\ \begin{pmatrix} -r_k e^{i\varphi_k} & 1 \\ F_4(Q, k) & F_3(Q, k) e^{-i\varphi_k} \end{pmatrix}, & i_k \in Q_-, \end{cases}$$

где $\varphi_k = \text{Arg}(y_{i_k})$.

Нам осталось проверить все свойства матрицы $P(Q, k)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.10. 1) Матрица $P(Q, k)$ – матрица из PSL_2 , элементы которой зависят только от переменных y_{i_l} , где $l \leq k$.

2) Матрица $P(Q, k)$ удовлетворяет условиям, налагаемым на матрицы замены тривиализации над картой U_Q .

3) Пусть наборы Q, Q' различаются лишь в j -м знаке, а все знаки после j -го – плюсы. Тогда

- если $i_k < j$, то $P(Q, k) = P(Q', k)$;
- если $i_k = j$, то $g_{Q'Q}P(Q, k) = P(Q', k)$;
- если $i_k > j, j \in L$, то $g_{Q'Q}P(Q, k) = P(Q', k)g_{Q'Q}$;
- если $i_k > j, j \notin L$, то $P(Q, k) = P(Q', k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Утверждение верно по определению матрицы $P(Q, k)$.

2) То, что элементы матрицы – вещественно-дифференцируемые функции от $y_{i_l}, l \leq k$, очевидно. Определитель матрицы равен

$$\begin{aligned} -F_1(Q, k) - r_k F_2(Q, k) &= -\frac{f(Q, k-1)^2}{r_k^2 + f(Q, k-1)^2} - \frac{r_k^2}{r_k^2 + f(Q, k-1)^2} \\ &= -\frac{r_k^2 + f(Q, k-1)^2}{r_k^2 + f(Q, k-1)^2} = -1, & i_k \notin Q_-, \\ -r_k F_3(Q, k) - F_4(Q, k) &= -\frac{r_k^2 f(Q, k-1)^2 + 1}{r_k^2 f(Q, k-1)^2 + 1} = -1, & i_k \in Q_-. \end{aligned}$$

В любом из случаев матрица невырождена и по следствию 6.7 невырожденно продолжается при $y_{i_l} \rightarrow 0$, где $l \leq k$.

3) Без ограничения общности можно считать, что $Q'_- = Q_- \cup \{j\}$, так как во всех равенствах можно заменить Q на Q' и получить то же самое равенство (это следует из того, что $g_{Q'Q} = g_{QQ'}^{-1}$).

Если $i_k < j$, то $F_p(Q, k) = F_p(Q', k)$ для любого $p = 1, 2, 3, 4$ по утверждениям 6.3, 6.9 и, значит, $P(Q, k) = P(Q', k)$. Аналогичный случай – если $i_k > j, j \notin L$.

Если $i_k = j$, то по утверждению 6.3

$$g_{Q'Q} = \begin{pmatrix} y_j^{-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{aligned} g_{Q'Q}P(Q, k) &= \begin{pmatrix} y_j^{-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times P(Q, k) \\ &= \begin{pmatrix} r_k^{-1}e^{-i\varphi_k} & 0 \\ 0 & r_k e^{i\varphi_k} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & r_k e^{i\varphi_k} \\ F_2(Q, k)e^{-i\varphi_k} & F_1(Q, k) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -r_k^{-1}e^{-i\varphi_k} & 1 \\ r_k F_2(Q, k) & r_k F_1(Q, k)e^{i\varphi_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_k^{-1}e^{-i\varphi_k} & 1 \\ F_4(Q', k) & F_3(Q', k)e^{i\varphi_k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -r'_k e^{i\varphi'_k} & 1 \\ F_4(Q', k) & F_3(Q', k)e^{-i\varphi'_k} \end{pmatrix} = P(Q', k). \end{aligned}$$

Если $i_k > j, j = i_l \in L$, то

$$g_{Q'Q}P(Q, k)g_{Q'Q}^{-1} = \begin{pmatrix} y_j^{-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times P(Q, k) \times \begin{pmatrix} y_j^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} y_j^{-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & r_k e^{i\varphi_k} \\ F_2(Q, k) e^{-i\varphi_k} & F_1(Q, k) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_j^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & r_k e^{i\varphi_k} y_j^{-2} \\ F_2(Q, k) e^{-i\varphi_k} y_j^2 & F_1(Q, k) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & r_k e^{i\varphi_k} r_l^{-2} e^{-2i\varphi_l} \\ F_2(Q, k) e^{-i\varphi_k} r_l^2 e^{2i\varphi_l} & F_1(Q, k) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & r'_k e^{i\varphi'_k} \\ (r_l^2 F_2(Q, k)) e^{-i\varphi'_k} & F_1(Q', k) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & r'_k e^{i\varphi'_k} \\ F_2(Q', k) e^{-i\varphi'_k} & F_1(Q', k) \end{pmatrix} = P(Q', k),
\end{aligned}$$

т.е. $g_{Q'Q} P(Q, k) g_{Q'Q}^{-1} = P(Q', k)$, откуда следует требуемое равенство.

Список литературы

- [1] A. Hattori, “Circle actions on symplectic manifolds”, *Lecture Notes in Math.*, **1375** (1989), 89–97.
- [2] A. Hattori, “Symplectic manifolds with semi-free Hamiltonian S^1 -actions”, *Tokyo J. Math.*, **15**:2 (1992), 281–296.
- [3] S. Tolman, J. Weitsman, “On semifree symplectic circle actions with isolated fixed points”, *Topology*, **39**:2 (2000), 299–309.
- [4] M. Audin, “Hamiltoniens périodiques sur les variétés symplectiques compactes de dimension 4”, *Géométrie symplectique et mécanique*, Colloq. Int. Sémin. Sud-Rhodan. Géom. V (La Grande Motte/Fr. 1988), *Lecture Notes in Math.*, **1416**, Springer, 1990, 1–25.
- [5] K. Ahara, A. Hattori, “4-dimensional symplectic S^1 -manifolds admitting moment map”, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **38**:2 (1991), 251–298.
- [6] C. T. C. Wall, “Classification problems in differential topology. V: On certain 6-manifolds”, *Invent. Math.*, **1** (1966), 355–374.
- [7] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, The 1989 William H. Roever lectures in geometry, *Ann. of Math. Stud.*, **131**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.
- [8] В. Данилов, “Геометрия торических многообразий”, *УМН*, **33**:2 (1978), 85–154.
- [9] D. A. Cox, “The homogenous coordinate ring of a toric variety”, *J. Algebraic Geom.*, **4**:1 (1995), 17–50.
- [10] J. B. Carrell, “Torus actions and cohomology”, *Algebraic quotients. Torus actions and cohomology. The adjoint representation and the adjoint action*, *Encyclopaedia Math. Sci.*, **131**, Springer, Berlin, 2002, 83–158.

Д. Г. Ильинский (D. G. Il'inskiĭ)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: nograhov@mail.ru

Поступила в редакцию

09.11.2004 и 06.08.2005