Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Е. Жидков, Инвариантные меры для уравнения Кортевега–де Фриза, порождаемые высшими законами сохранения, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 6, 21–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm134>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 15:41:13

УДК 517.987.4

*Посвящается моей матери
Жидковой Веронике Петровне*

П. Е. Жидков

Инвариантные меры для уравнения Кортевега–де Фриза, порождаемые высшими законами сохранения

Доказана корректность периодической по пространственной переменной задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза. Для динамических систем, порождаемых этим уравнением на подходящих фазовых пространствах, доказана инвариантность борелевских мер, ассоциированных с высшими законами сохранения.

Библиография: 26 названий.

§ 1. Введение

В последние годы появилось несколько статей, посвященных построению инвариантных мер (ИМ) на бесконечномерном фазовом пространстве (ФП) для динамических систем (ДС), порождаемых нелинейными уравнениями с частными производными математической физики, такими как нелинейное волновое уравнение или нелинейное уравнение Шрёдингера (см., например, [1]–[8]). При этом авторы опирались на то обстоятельство, что формально указанные уравнения являются гамильтоновыми, и обосновывали в бесконечномерном случае хорошо известное свойство конечномерных гамильтоновых систем, состоящее в том, что мера на ФП с плотностью $e^{-H(u)}$, где H – гамильтониан, является инвариантной; при этом существенно использовалось то обстоятельство, что “гамильтониан” (функционал энергии) $H(u)$ рассматриваемых задач квадратичен по первым производным неизвестной функции, что позволяло, записывая формально под интегралом по ФП выражение типа $\text{const} \cdot e^{-H(u)}$, получить из квадратичной по производным части гауссовскую меру, т. е. получить выражение вида

$$\int_{\Omega} e^{-H_1(u)} dw(u),$$

где w – гауссовская мера на некотором ФП (обычно на L_2), а $H_1(u)$ – непрерывный (нелинейный) функционал на ФП. Таким образом, во всех указанных работах [1]–[8] ИМ строились по функционалу энергии. В работах [1], [2], [4] (в первой из них рассматривалось нелинейное уравнение Шрёдингера, а в остальных двух – периодическое по пространственной переменной нелинейное волновое уравнение) изучались нелинейности, растущие не быстрее линейной функции при стремлении

неизвестной функции к бесконечности. Частично эти ограничения устранены в работах [3], [6], в которых допускались степенные нелинейности. В работе [7] предлагается построение ИМ для некоторой абстрактной бесконечномерной ДС, к которой (формально) сводятся многие “солитонные” уравнения; в частности, полученный результат применен для построения ИМ для нелинейного уравнения Шрёдингера и нелинейного волнового уравнения. В более ранней работе [8] построены так называемые состояния Кубо–Мартини–Швингера для некоторого абстрактного нелинейного уравнения и представлено приложение полученных результатов к абстрактному волновому уравнению. Фактически, из результатов этой работы следует инвариантность построенных мер для ДС, порождаемых указанными уравнениями.

Меры, подобные введенным в работах [1]–[8], ранее с другими целями и без доказательства их инвариантности изучались в ряде работ. Так, в [9]–[12] они изучались в связи с задачами статистической механики систем с бесконечным числом степеней свободы. К сожалению, работа [13], также посвященная построению ИМ для нелинейного волнового уравнения, содержит неточности и пробелы.

Другим физически интересным явлением, обнаруженным в результате численного моделирования на компьютере для многих “солитонных” уравнений, является явление Ферми–Пасты–Улама [14], [15]. На математическом языке оно означает устойчивость по Пуассону каждой траектории соответствующей ДС. Таким образом, если ДС обладает конечной ИМ, то теорема о возвращении Пуанкаре дает (частичное) объяснение этому явлению.

В настоящей работе строятся ИМ для ДС, порождаемых на подходящих ФП периодической по пространственной переменной задачей для обычного (интегрируемого) уравнения Кортевега–де Фриза

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (1)$$

Отметим, что автору не известны строгие результаты по построению каких-либо ИМ для этого уравнения. В настоящей работе удастся построить ИМ, ассоциированные с законами сохранения

$$I_n(u) = \int \left\{ \frac{1}{2} (u_x^{(n)})^2 + q_n(u, \dots, u_x^{(n-1)}) \right\} dx$$

для $n \geq 3$. Одной из трудностей, которые не позволяют провести построение для $n = 0, 1, 2$ является отсутствие подходящих результатов о корректности задачи Коши для уравнения (1). Автор стремился сделать изложение по возможности замкнутым, приводя некоторые известные результаты.

§ 2. Обозначения. Основные результаты

Всюду в дальнейшем через $C, C_1, C_2, C', C'', \dots$ обозначаются положительные постоянные. Всюду $x, t \in \mathbb{R}$ и все переменные вещественны. Фиксируем натуральное n и $A > 0$. Обозначим через L_2 обычное пространство Лебега периодических функций аргумента x с периодом A , со скалярным произведением

$(f, g) = \int_0^A f(x)g(x) dx$ и нормой $\|f\| = (f, f)^{1/2}$. Пусть D^∞ – множество бесконечно дифференцируемых функций аргумента x , периодических с периодом A . Обозначим через Δ замыкание в L_2 оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$ с областью определения D^∞ . Хорошо известно, что Δ – самосопряженный (неограниченный) неотрицательный оператор. Пусть W_2^n – гильбертово пространство Соболева ($n \geq 0$ целое) периодических функций аргумента $x \in \mathbb{R}$ с периодом A и со скалярным произведением

$$(u, v)_n = \int_0^A \left\{ u(x)v(x) + \frac{d^n}{dx^n} u(x) \frac{d^n}{dx^n} v(x) \right\} dx.$$

Пусть X – гильбертово пространство, а I – связное подмножество вещественной прямой. Через $C(I; X)$ обозначим банахово пространство непрерывных и ограниченных на I функций со значениями в X , с нормой $\|u(\cdot)\|_{C(I; X)} = \sup_{t \in I} \|u(t)\|_X$, где $\|\cdot\|_X$ – норма в X .

Напомним основные факты из теории гауссовских мер на гильбертовом пространстве (см. [16], [17]). Пусть H – сепарабельное вещественное гильбертово пространство, и пусть S – самосопряженный положительный ядерный оператор на нем (напомним, что если $S = S^* > 0$ – ядерный оператор, то существует счетный ортонормированный базис $\{e_k\}$, состоящий из его собственных векторов, с соответствующими собственными значениями $\lambda_k \geq 0$, $\lambda_k \rightarrow +0$ при $k \rightarrow \infty$, причем $\sum_{k=1}^\infty \lambda_k < +\infty$). Назовем множество $M \subset H$ *цилиндрическим*, если

$$M = \{f \in H \mid [(f, e_1)_H, \dots, (f, e_k)_H] \in F\} \quad (2)$$

для некоторого натурального k и борелевского множества $F \subset \mathbb{R}^k$ (здесь $(\cdot, \cdot)_H$ – скалярное произведение в H). Для множества M указанного вида (2) положим

$$w(M) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^k \prod_{i=1}^k \lambda_i^{-1/2} \int_F e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \lambda_i^{-1} z_i^2} dz_1 \dots dz_k.$$

Тогда нетрудно проверить, что множество всех цилиндрических множеств в H является алгеброй, на которой функция w нормирована ($w(H) = 1$), неотрицательна и аддитивна. Далее, поскольку S – ядерный, мера w счетно-аддитивна на алгебре цилиндрических множеств, следовательно, она может быть продолжена на минимальную сигма-алгебру $\mathcal{M}$, содержащую алгебру цилиндрических множеств, которая оказывается борелевской сигма-алгеброй в H (см. [16], [17]). Мера w , определенная на $\mathcal{M}$, называется *центрированной гауссовской мерой*, а S – ее *корреляционным оператором*. Отметим еще следующий результат (доказательство см., например, в [7]).

УТВЕРЖДЕНИЕ. Для любого шара $B_r(a) = \{f \in H \mid \|f - a\|_H < r\}$ $w(B_r(a)) > 0$, если $r > 0$ (здесь $a \in H$).

Рассмотрим следующую задачу:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad x, t \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

$$u(x + A, t) = u(x, t), \quad x, t \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

$$u(x, t_0) = u_0(x). \quad (5)$$

В работе [18] доказано, что для любых $A > 0$ и $u_0 \in D^\infty$ задача (3)–(5) имеет единственное определенное для всех x и t и бесконечно дифференцируемое по x и t решение.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Имеется значительное число результатов о корректности задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза как в случае быстроубывающих достаточно гладких начальных данных, так и в случае периодической по x задачи (см., например, [19]–[22], а также список литературы в работе [18]). В настоящей работе указаны в основном лишь те результаты, которые необходимы для построения ИМ.

Известно (см. [23], [24]), что для указанного класса решений задача (3)–(5) имеет счетный набор законов сохранения вида

$$I_n(u) = \int_0^A \left\{ \frac{1}{2} (D_x^n u)^2 + c_n u (D_x^{n-1} u)^2 + q_n(u, \dots, D_x^{n-2} u) \right\} dx,$$

где $n \geq 2$ – натуральное, $D_x^k = \frac{\partial^k}{\partial x^k}$, c_n – вещественные постоянные, а q_n – полиномы от своих аргументов (по поводу такого представления для законов сохранения см. [24]). Кроме того,

$$I_0(u) = \int_0^A u^2 dx \quad \text{и} \quad I_1(u) = \int_0^A \left\{ \frac{1}{2} u_x^2 + u^3 \right\} dx$$

также являются законами сохранения.

Пусть $n \geq 2$ – натуральное. Положим

$$J_n(u) = \int_0^A \left\{ -\frac{1}{2} u^2 + c_n u (D_x^{n-1} u)^2 + q_n(u, \dots, D_x^{n-2} u) \right\} dx.$$

Пусть w^n – центрированная гауссовская мера на W_2^{n-1} с корреляционным оператором $S = (I + \Delta^{n-1})(\Delta^n + I)^{-1}$ (здесь Δ – замыкание оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$, определенного на D^∞ , в W_2^{n-1} ; ясно, что S – ядерный оператор). Для борелевского $\Omega \subset W_2^{n-1}$ положим формально

$$\mu^n(\Omega) = \int_\Omega e^{-J_n(u)} dw^n(u).$$

Первый результат работы составляет

ТЕОРЕМА 1. Пусть n – натуральное, $n \geq 2$. Тогда для любых $A > 0$, $T > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $u_0 \in W_2^n$ существует единственное (обобщенное) решение задачи (3)–(5), $u(x, t) \in C([t_0 - T, t_0 + T]; W_2^{n-2})$, причем $u(\cdot, t) \in W_2^n$ для любого фиксированного t как функция аргумента x . Для этого решения функционалы $I_k(u(\cdot, t))$ ($k = \overline{0, n}$) определены и не зависят от t (являются законами сохранения). При любом фиксированном t отображение $h^n(u_0, t - t_0): u_0 \rightarrow u(\cdot, t)$ является гомеоморфизмом как отображение из W_2^n в W_2^n . Кроме того, $h^n(u, t + \tau) = h^n(h^n(u, t), \tau)$ для любых $u \in W_2^n$, $t, \tau \in \mathbb{R}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Определение обобщенного решения задачи (3)–(5) дано далее. Не вдаваясь в тонкости определений (в литературе имеются различные определения ДС), примем, что функция $h^n(u_0, t)$ является ДС на ФП W_2^n . Отметим только, что если на W_2^n существует конечная борелевская ИМ m , так что $m(\Omega) = m(h^n(\Omega, t))$ для любых $t \in \mathbb{R}$ и борелевского $\Omega \subset W_2^n$ (здесь $h^n(\Omega, t) = \{v \in W_2^n \mid v = h^n(u, t) \text{ для некоторого } u \in \Omega\}$), то справедлива теорема о возвращении Пуанкаре (см. [25]) (поскольку при любом фиксированном t функция $h^n(\cdot, t)$ является гомеоморфизмом, $h^n(\cdot, t)$ переводит борелевские подмножества пространства W_2^n в борелевские). Наконец, нетрудно проверить, что функционалы $I_k, k = \overline{0, n}$, определены и непрерывны на W_2^n .

Основной результат работы составляет

ТЕОРЕМА 2. *При любом $n \geq 3$ мера μ^n является корректно определенной на W_2^{n-1} неотрицательной борелевской ИМ для ДС h^{n-1} , определенной в теореме 1. Для любого достаточно большого $d > 0$ $0 < \mu^n(R_d) < +\infty$, где*

$$R_d = \{u \in W_2^{n-1} \mid I_k(u) \leq d, \quad k = \overline{0, n-1}\}.$$

Поскольку R_d является инвариантным множеством построенной ДС, оно может быть взято в качестве нового ФП, следовательно, справедлива теорема о возвращении Пуанкаре.

Везде под $\|u(\cdot, t)\|_k$ понимается норма u как функции аргумента x при фиксированном t .

§ 3. Доказательство теоремы 1

В этом и следующем параграфах все оценки проводятся для $t > t_0$. Соответствующие оценки для $t < t_0$ могут быть получены полностью аналогично. В этом и следующем параграфах $n \geq 2$ – целое.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $u_0 \in W_2^n$ для некоторого целого $n \geq 2$, и пусть для некоторого $T > 0$ существует последовательность $u_0^{(m)} \in D^\infty$, сходящаяся к u_0 сильно в W_2^n , такая, что для некоторой функции $u(x, t) \in C([t_0 - T, t_0 + T]; W_2^{n-2})$ выполнено условие

$$\|u_m(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|_{C([t_0 - T, t_0 + T]; W_2^{n-2})} \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty,$$

где $u_m(\cdot, t)$ – решение задачи (3)–(5) класса C^∞ , соответствующее $u_0 = u_0^{(m)}$. Тогда назовем функцию $u(x, t)$ (обобщенным) решением задачи (3)–(5) на отрезке времени $[t_0 - T, t_0 + T]$.

ЛЕММА 1. *Для произвольных целого неотрицательного n и $d > 0$ существует такое $R_0 > 0$, что если $u \in W_2^n$ и*

$$I_0(u) < d, \quad \dots, \quad I_n(u) < d,$$

то $\|u\|_n < R_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим закон сохранения ($n \geq 2$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}I_0(u) + I_n(u) &= \int_0^A \left\{ \frac{1}{2}(D_x^n u)^2 + \frac{1}{2}u^2 + c_n u (D_x^{n-1} u)^2 + q_n(u, \dots, D_x^{n-2} u) \right\} dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u(\cdot)\|_n^2 - \eta_n(\|u(\cdot)\|_{n-1}), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\eta_n(s)$ — монотонно возрастающая непрерывная функция на $[0, +\infty)$. Повторим эти оценки для функционалов $\frac{1}{2}I_0(u) + I_2(u), \dots, \frac{1}{2}I_0(u) + I_{n-1}(u)$. Для функционала $I_1(u)$, в силу известного неравенства

$$\|u\|_{L_p} \leq \|u\|^{1/2+1/p} (\|D_x u\| + \|u\|)^{1/2-1/p}, \quad p \geq 2,$$

имеем:

$$I_1(u) + \frac{1}{2}I_0(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_1^2 - \eta_1(\|u\|)\|u\|_1^{1/2}.$$

Из полученных оценок и из (6) последовательно получаем

$$\|u\|_1 \leq C_1(d), \dots, \|u\|_n \leq C_n(d)$$

для всех $t \in \mathbb{R}$, и лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $u_0 \in W_2^n$, и пусть $\{u_0^{(m)}\} \subset D^\infty$ — произвольная последовательность, слабо сходящаяся к u_0 в W_2^n . Тогда для любого $T > 0$ последовательность соответствующих бесконечно дифференцируемых решений $u_m(x, t)$ задачи (3)–(5) сходится в $C([t_0 - T, t_0 + T]; W_2^{n-2})$ к некоторой функции $u(x, t)$ (напомним, что всюду $n \geq 2$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, заметим, что последовательность $u_0^{(m)}$ ограничена в W_2^n и сходится сильно в W_2^{n-2} к u_0 . Для произвольных бесконечно гладких периодических решений u и v уравнения (3) и $w = u - v$ имеем:

$$w_t - 6uw_x - 6wv_x + w_{xxx} = 0,$$

откуда получаем в силу леммы 1 ($t > t_0$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|D_x^{n-2} w\|^2 &= 6 \int_0^A \{ D_x^{n-2}(v_x w) D_x^{n-2} w + D_x^{n-2}(u w_x) D_x^{n-2} w \} dx \\ &= 6 \int_0^A \left\{ v_x (D_x^{n-2} w)^2 + \sum_{k=1}^{n-2} C_{n-2}^k (D_x^{k+1} v) (D_x^{n-2-k} w) (D_x^{n-2} w) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (D_x^{n-2} w)^2 u_x + \sum_{k=1}^{n-2} C_{n-2}^k (D_x^k u) (D_x^{n-k-1} w) (D_x^{n-2} w) \right\} dx \\ &\leq C(\|u_0\|_n, \|v_0\|_n) (\|D_x^{n-2} w(\cdot, t)\|^2 + \|w\|^2). \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогично,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(\cdot, t)\|^2 \leq C_1 (\|u_0\|_n, \|v_0\|_n) \|w(\cdot, t)\|^2. \quad (8)$$

Из (8) сразу получаем

$$\|w(\cdot, t)\|^2 \leq \|w(\cdot, t_0)\|^2 e^{2C_1(t-t_0)}. \quad (9)$$

Фиксируем $T > 0$. Тогда для $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ из (7)–(9) следует неравенство:

$$\|D_x^{n-2} w(\cdot, t)\|^2 \leq C_2 (\|D_x^{n-2} w(\cdot, t_0)\|^2 + \|w(\cdot, t_0)\|^2). \quad (10)$$

Для $t < t_0$ оценки, подобные (9) и (10), могут быть получены по аналогии. Из (9) и (10) получаем в силу леммы 1:

$$\|u_m(\cdot, t) - u_k(\cdot, t)\|_{n-2}^2 \leq C_3(T) \|u_0^{(m)} - u_0^{(k)}\|_{n-2}^2, \quad (11)$$

где $C_3(T) > 0$ – не зависит от $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ и номеров m и k . Из оценки (11) сразу следует утверждение леммы 2.

Из доказанной леммы 2 для любого $u_0 \in W_2^n$, где $n \geq 2$ – целое, и любого $T > 0$ сразу следуют существование и единственность обобщенного решения задачи (3)–(5).

ЛЕММА 3. *Решение $u(x, t)$ из леммы 2 принадлежит W_2^n при любом $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольную последовательность $u_0^{(m)} \rightarrow u_0$ в W_2^n , $u_0^{(m)} \in D^\infty$, и произвольное $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$. В силу леммы 1 последовательность соответствующих решений задачи (3)–(5) $u_m(\cdot, t)$ ограничена по норме W_2^n , следовательно, слабо компактна в W_2^n при любом фиксированном t . В силу единственности решения существует подпоследовательность $u_0^{(m_i)}$ такая, что $u_{m_i}(\cdot, t)$ слабо сходится к $u(\cdot, t)$ в W_2^n при $i \rightarrow \infty$ и, следовательно, $u(\cdot, t) \in W_2^n$. Лемма 3 доказана.

Пусть $u_0^{(m)} \rightarrow u_0$ сильно в W_2^n . Пусть $u_m(\cdot, t)$ – последовательность соответствующих бесконечно дифференцируемых решений задачи (3)–(5). Докажем, что $u_m(\cdot, t) \rightarrow u(\cdot, t)$ сильно в W_2^n для любого фиксированного t . Фиксируем произвольное $\tilde{t} \in \mathbb{R}$. Очевидно, достаточно доказать, что $\|u_m(\cdot, \tilde{t})\|_n \rightarrow \|u(\cdot, \tilde{t})\|_n$ при $m \rightarrow \infty$. Предположим противное. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что существует $\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m(\cdot, \tilde{t})\|_n > \|u(\cdot, \tilde{t})\|_n$. Тогда, как легко показать, $\lim_{m \rightarrow \infty} I_n(u_m(\cdot, \tilde{t})) > I_n(u(\cdot, \tilde{t}))$, поскольку все слагаемые, входящие в I_n , за исключением слагаемого $\frac{1}{2} \|D_x^n u\|^2$, слабо непрерывны в W_2^n . Фиксируем произвольную последовательность w_m^0 ($m = 1, 2, 3, \dots$) из D^∞ , сильно сходящуюся к $u(\cdot, \tilde{t})$ в W_2^n , и пусть $w_m(\cdot, t)$ – последовательность решений задачи (3)–(4) с начальным условием

$$u(x, \tilde{t}) = w_m^0(x).$$

Тогда, в силу леммы 2, последовательность $w_m(x, t_0)$ слабо сходится к u_0 , следовательно,

$$I_n(u(\cdot, \tilde{t})) = \lim_{m \rightarrow \infty} I_n(w_m^0) = \lim_{m \rightarrow \infty} I_n(w_m(x, t_0)) \geq I_n(u_0),$$

откуда $I_n(u_0) \leq I_n(u(\cdot, \tilde{t})) < \lim_{m \rightarrow \infty} I_n(u_m(\cdot, \tilde{t})) = I_n(u_0)$, т.е. получаем противоречие.

Фиксируем произвольное $t_1 \in \mathbb{R}$ и покажем, что соответствие $u_0 \rightarrow u(\cdot, t_1)$ взаимно однозначно. Рассмотрим произвольную последовательность $u_0^{(m)} \in D^\infty$, сходящуюся к u_0 сильно в W_2^n . Пусть $u_m(\cdot, t)$ – последовательность соответствующих бесконечно дифференцируемых решений задачи (3)–(5). В силу предыдущего последовательность $u_m(\cdot, t)$ сходится к решению задачи $u(\cdot, t)$ сильно в W_2^n при любом $t \in \mathbb{R}$. Рассмотрим для задачи (3), (4) в качестве начальных условий значение $u(\cdot, t_1) = v \in W_2^n$. Тогда, в силу предыдущего, $u_m(\cdot, t_0)$ – значения решений этой задачи с $v = u_m(\cdot, t_1)$ в точке $t = t_0$. Таким образом, если $u(\cdot, t) \in W_2^n$ – значение решения задачи (3)–(5) при некотором $t \neq t_0$, то, взяв это значение в качестве начального условия для задачи (3), (4), получим, что решение этой задачи при $t = t_0$ равно u_0 . Из этих же рассуждений следуют групповые свойства

$$h^n(u_0, 0) = u_0 \quad \text{и} \quad h^n(h^n(u_0, \tau), t) = h^n(u_0, t + \tau).$$

В частности, отсюда следует, что при $t \in \mathbb{R}$ отображение $h^n(\cdot, t): W_2^n \rightarrow W_2^n$ взаимно однозначно.

Докажем, что отображение $u_0 \rightarrow u(\cdot, t)$ сильно непрерывно на W_2^n при любом фиксированном t . Предположим противное. Тогда для некоторых $u_0 \in W_2^n$, $\varepsilon > 0$ и $t_2 \in \mathbb{R}$ существует последовательность $u_0^{(m)} \rightarrow u_0$ сильно в W_2^n , такая, что $\|u_m(\cdot, t_2) - u(\cdot, t_2)\|_n \geq \varepsilon$ для всех $m = 1, 2, 3, \dots$, где $u_m(x, t)$ – решение задачи (3)–(5) с $u_0 = u_0^{(m)}$. По доказанному для каждого номера m существует $v_0^{(m)} \in D^\infty$ такое, что $\|v_0^{(m)} - u_0^{(m)}\|_n < 2^{-m}$ и

$$\|v_m(\cdot, t_2) - u_m(\cdot, t_2)\|_n \leq \varepsilon 2^{-m-1},$$

где v_m – решение задачи (3)–(5) с $u_0 = v_0^{(m)}$. Тогда $v_0^{(m)} \rightarrow u_0$ сильно в W_2^n , но

$$\begin{aligned} \|v_m(\cdot, t_2) - u(\cdot, t_2)\|_n &\geq \|u_m(\cdot, t_2) - u(\cdot, t_2)\|_n - \|u_m(\cdot, t_2) - v_m(\cdot, t_2)\|_n \\ &\geq \varepsilon - \varepsilon 2^{-m-1}, \end{aligned}$$

т.е. получаем противоречие. Тем самым, теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Решение $u(x, t)$, существование и единственность которого доказаны в теореме 1, принадлежит пространству $C([t_0 - T, t_0 + T]; W_2^n)$ для любого $T > 0$. Действительно, пусть $\bar{t} \in \mathbb{R}$ и $\{t_l\}_{l=1,2,3,\dots} \subset \mathbb{R}$ – некоторая последовательность, сходящаяся к $\bar{t}$. Тогда по доказанному $u(\cdot, t_l) \rightarrow u(\cdot, \bar{t})$ сильно в W_2^{n-2} , и последовательность $\{u(\cdot, t_l)\}$ ограничена в W_2^n , следовательно, слабо компактна в W_2^n . Пусть $\{u(\cdot, t_{l_k})\}$ – произвольная ее подпоследовательность, слабо сходящаяся к $u(\cdot, \bar{t})$ в W_2^n . В силу того, что $I_n(u(\cdot, t_{l_k})) = I_n(u(\cdot, \bar{t}))$ для всех k , и в силу слабой непрерывности в W_2^n функционалов $I_0(u)$ и $J_n(u)$ получаем, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t_{l_k})\|_n = \|u(\cdot, \bar{t})\|_n$.

§ 4. Аппроксимация уравнения Кортевега–де Фриза

Пусть $\{e_m\}_{m=0,1,2,\dots}$ – ортонормированный базис в W_2^n , состоящий из собственных функций оператора Δ , а $\{\lambda_m\}$ – соответствующая неубывающая последовательность его собственных значений ($\lambda_0 = 0$). Пусть P_m – ортогональный проектор в W_2^n на подпространство $L_m = \text{span}\{e_0, \dots, e_{2m}\}$, натянутое на векторы $e_0, \dots, e_{2m}$, а $P_m^\perp$ – проектор на подпространство $L_m^\perp$, ортогональное L_m в W_2^n . Очевидно, можно взять

$$\begin{aligned} e_0(x) &\equiv \frac{1}{\sqrt{A}}, \\ e_{2k-1}(x) &= \sqrt{\frac{2}{A(1 + \lambda_{2k-1}^n)}} \sin \frac{2\pi kx}{A}, \\ e_{2k}(x) &= \sqrt{\frac{2}{A(1 + \lambda_{2k}^n)}} \cos \frac{2\pi kx}{A}. \end{aligned}$$

Рассмотрим следующую задачу:

$$u_t^m - 6P_m[u^m u_x^m] + u_{xxx}^m = 0, \quad x \in (0, A), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (12)$$

$$u^m(x, t_0) = P_m u_0(x). \quad (13)$$

Ясно, что для любого $u_0 \in W_2^n$ эта задача имеет единственное решение $u^m(x, t) \in C'([t_0 - T, t_0 + T]; L_m)$ для некоторого $T > 0$ (топология в L_m порождается нормой пространства W_2^n). Поскольку, как нетрудно проверить, $\frac{d}{dt} I_0(u^m) = \frac{d}{dt} I_1(u^m) = 0$, имеем:

$$\|u^m(\cdot, t)\| = \|u^m(\cdot, t_0)\|$$

для всех t , и, следовательно, решение задачи (12), (13) при любом $u_0 \in W_2^n$ определено для всех $t \in \mathbb{R}$. (Здесь используется известный факт, состоящий в том, что в конечномерном линейном пространстве любые две нормы эквивалентны.)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $n \geq 2$ – целое, $u_0 \in W_2^n$, и пусть последовательность $u_0^{m_k}$ такова, что $m_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$, $u_0^{m_k} \in L_{m_k}$, $u_0^{m_k} \rightarrow u_0$ сильно в W_2^n при $k \rightarrow \infty$. Тогда для любого $t \in \mathbb{R}$ $u^{m_k}(\cdot, t) \rightarrow u(\cdot, t)$ при $k \rightarrow \infty$ сильно в W_2^n , где $u(\cdot, t)$ – решение задачи (3)–(5), а $u^{m_k}(\cdot, t)$ – решение уравнения (12) с $m = m_k$ и с начальным условием

$$u^{m_k}(\cdot, t_0) = u_0^{m_k}.$$

Доказательству данного предложения предпошлем ряд лемм.

ЛЕММА 4. *Существуют такие непрерывные на множестве $(R, s) \in [0, +\infty) \times [0, +\infty)$ монотонно неубывающие по второму аргументу функции $\gamma_n(R, s)$, $\gamma_n(R, 0) \equiv 0$, что*

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} I_n(u^{m_k}(\cdot, t)) \\ & \leq \gamma_n\left(R, \max_{\substack{0 \leq i, j \leq n-1 \\ i+j \neq 2n-2}} \|P_{m_k}^\perp [D_x^i u^{m_k}(\cdot, t) D_x^j u^{m_k}(\cdot, t)]\| + \|P_{m_k}^\perp (u^{m_k} u_x^{m_k})\|_1\right) \end{aligned}$$

для всех $t \in \mathbb{R}$, всех $n = 3, 4, 5, \dots$, всех $k = 1, 2, 3, \dots$ и всех $u_0 \in W_2^{n-1}$ таких, что $\|u_0\|_{n-1} \leq R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Lg = 6gg_x - g_{xxx}$. Поскольку при подстановке Lu^{m_k} вместо $u_t^{m_k}$ в выражение для $\frac{d}{dt} I_n(u^{m_k}(\cdot, t))$ получается нуль (см. [24]), для $u_0 \in W_2^{n-1}$ имеем

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} I_n(u^{m_k}(\cdot, t)) \\ & = \int_0^A \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} (D_x^n u^{m_k})^2 + c_n u^{m_k} (D_x^{n-1} u^{m_k})^2 \right. \\ & \quad \left. + q_n(u^{m_k}, \dots, D_x^{n-2} u^{m_k}) \right\} \Big|_{u_t^{m_k} = 6P_{m_k}^\perp(u^{m_k} u_x^{m_k})} dx \\ & = \int_0^A \left\{ 6(-1)^n D_x^{2n} u^{m_k} P_{m_k}^\perp(u^{m_k} u_x^{m_k}) + 6c_n P_{m_k}^\perp(u^{m_k} u_x^{m_k}) (D_x^{n-1} u^{m_k})^2 \right. \\ & \quad + (-1)^{n-1} 12c_n D_x^{n-1} (u^{m_k} D_x^{n-1} u^{m_k}) P_{m_k}^\perp(u^{m_k} u_x^{m_k}) \\ & \quad \left. + 6 \sum_{i=0}^{n-2} \frac{\partial q_n(u^{m_k}, \dots, D_x^{n-2} u^{m_k})}{\partial (D_x^i u^{m_k})} D_x^i P_{m_k}^\perp(u^{m_k} u_x^{m_k}) \right\} dx \\ & = \int_0^A \left\{ 6c_n P_{m_k}^\perp(u^{m_k} u_x^{m_k}) (D_x^{n-1} u^{m_k})^2 \right. \\ & \quad + 12c_n (u^{m_k} D_x^{n-1} u^{m_k}) P_{m_k}^\perp \left[D_x \sum_{i=0}^{n-2} C_{n-2}^i D_x^{n-2-i} u^{m_k} D_x^{i+1} u^{m_k} \right] \\ & \quad \left. + 6 \sum_{i=0}^{n-2} \frac{\partial q_n(u^{m_k}, \dots, D_x^{n-2} u^{m_k})}{\partial (D_x^i u^{m_k})} P_{m_k}^\perp [D_x^i (u^{m_k} u_x^{m_k})] \right\} dx \\ & = \int_0^A \left\{ 6c_n P_{m_k}^\perp(u^{m_k} u_x^{m_k}) (D_x^{n-1} u^{m_k})^2 \right. \\ & \quad + 12c_n P_{m_k}^\perp(u^{m_k} D_x^{n-1} u^{m_k}) \left[D_x \sum_{i=0}^{n-3} C_{n-2}^i D_x^{n-2-i} u^{m_k} D_x^{i+1} u^{m_k} \right] \\ & \quad \left. + 6 \sum_{i=0}^{n-2} \frac{\partial q_n(u^{m_k}, \dots, D_x^{n-2} u^{m_k})}{\partial (D_x^i u^{m_k})} P_{m_k}^\perp [D_x^i (u^{m_k} u_x^{m_k})] \right\} dx, \end{aligned}$$

откуда следует утверждение леммы 4.

ЛЕММА 5. Для любого целого $n \geq 2$ и любого $I = [t_0 - T, t_0 + T]$ существует непрерывная монотонно неубывающая на $[0, +\infty)$ функция $\beta_n(s)$ такая, что для любого $u_0 \in W_2^n$ величины $\|u^m(\cdot, t)\|_n$ равномерно по $t \in I$ и $m = 1, 2, 3, \dots$ ограничены величиной $\beta_n(\|u_0\|_n)$ (здесь $u^m(\cdot, t)$ – решение задачи (12), (13)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО с учетом леммы 4 следует из неравенств ($t > t_0$):

$$\begin{aligned} \max_{t \in I} \sigma_n(\|u^m(\cdot, t)\|_{n-1}) &\geq 2|I_n(u^m(\cdot, t)) - I_n(u^m(\cdot, t_0))| \\ &\geq |\|D_x^n u^m(\cdot, t)\|^2 - \|D_x^n u^m(\cdot, t_0)\|^2| \\ &\quad - \theta_n(\|u^m(\cdot, t)\|_{n-1}) - \theta_n(\|u^m(\cdot, t_0)\|_{n-1}), \end{aligned}$$

где $\sigma_n(s)$ и $\theta_n(s)$ – неубывающие на $[0, +\infty)$ функции ($n \geq 2$). Действительно, фиксируем произвольное $R > 0$ и пусть $\|u_0\|_n \leq R$. Тогда, учитывая, что, как и выше, $\|u^m(\cdot, t)\|_1 \leq C(R)$ для всех t , последовательно получаем:

$$\|u^m(\cdot, t)\|_2 \leq C_2(R), \dots, \|u^m(\cdot, t)\|_n \leq C_n(R),$$

и лемма 5 доказана.

ЛЕММА 6. Для любых целого $n \geq 2$, $u_0 \in W_2^n$ и $T > 0$ выполнено

$$\|u^{m_k}(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|_{n-1} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty$$

равномерно по $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $u_0 \in D^\infty$. Используя леммы 1 и 5 и теорему 1, получаем:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^A \|D_x^{n-1}(u^{m_k}(\cdot, t) - u(\cdot, t))\|^2 dx \\ &= 3 \int_0^A D_x^{n-1}(u^{m_k}(\cdot, t) - u(\cdot, t)) D_x^n [(u^{m_k}(\cdot, t))^2 - (u(\cdot, t))^2] dx \\ &\quad + 3 \int_0^A P_{m_k}^\perp [D_x^{n-1}(u(\cdot, t))] D_x^n [(u^{m_k}(\cdot, t))^2] dx \\ &\leq C_1(\|u_0\|_n) \|P_{m_k}^\perp(u(\cdot, t))\|_n \\ &\quad + C_2(\|u^{m_k}(\cdot, t_0)\|_n, \|u(\cdot, t_0)\|_n) \|u^{m_k}(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|_{n-1}^2, \end{aligned}$$

где $\|P_{m_k}^\perp(u(\cdot, t))\|_n \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ для любого t и $\|P_{m_k}^\perp(u(\cdot, t))\|_n \leq C$ для всех t . Аналогично,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^{m_k}(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|^2 &\leq C_1(\|u_0\|_n) \|P_{m_k}^\perp(u(\cdot, t))\|_n \\ &\quad + C_2(\|u_0\|_n) \|u^{m_k}(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|_{n-1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|u^{m_k}(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|_{n-1}^2 &\leq \|u^{m_k}(\cdot, t_0) - u(\cdot, t_0)\|_{n-1}^2 \\ &\quad + C_3 \int_{t_0}^t \|u^{m_k}(\cdot, s) - u(\cdot, s)\|_{n-1}^2 ds + a_{m_k}, \end{aligned}$$

где $a_{m_k} \rightarrow +0$ при $k \rightarrow \infty$. Для произвольного $u_0 \in W_2^n$, очевидно, последнее неравенство остается в силе, и лемма 6 доказана.

ЛЕММА 7. При любом $u_0 \in W_2^n$ и любом $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [I_n(u^{m_k}(\cdot, t)) - I_n(u^{m_k}(\cdot, t_0))] = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу лемм 4 и 5, поскольку

$$\begin{aligned} & |I_n(u^{m_k}(\cdot, t)) - I_n(u^{m_k}(\cdot, t_0))| \\ & \leq \left| \int_{t_0}^t \gamma_n \left(R, \max_{\substack{0 \leq i, j \leq n-1 \\ i+j \neq 2n-2}} \|P_{m_k}^\perp [D_x^i u^{m_k}(\cdot, s) D_x^j u^{m_k}(\cdot, s)]\| + \|P_{m_k}^\perp (u^{m_k} u_x^{m_k})\|_1 \right) ds \right| \end{aligned}$$

и $\|u^{m_k}(\cdot, s)\|_{n-1}$ равномерно по $s \in [t_0, t]$ и $k = 1, 2, 3, \dots$ ограничены, достаточно доказать, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|P_{m_k}^\perp [D_x^i u^{m_k}(\cdot, s) D_x^j u^{m_k}(\cdot, s)]\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|P_{m_k}^\perp (u^{m_k} u_x^{m_k})\|_1 = 0$$

для всех $s \in [t_0, t]$ при $0 \leq i, j \leq n-1, i+j \neq 2n-2$. Имеем:

$$\begin{aligned} & \|P_{m_k}^\perp [D_x^i u^{m_k}(\cdot, s) D_x^j u^{m_k}(\cdot, s)]\| \\ & \leq \|P_{m_k}^\perp [D_x^i u^{m_k}(\cdot, s) D_x^j u^{m_k}(\cdot, s) - D_x^i u(\cdot, s) D_x^j u(\cdot, s)]\| \\ & \quad + \|P_{m_k}^\perp [D_x^i u(\cdot, s) D_x^j u(\cdot, s)]\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $k \rightarrow \infty$ в силу леммы 6 и теоремы 1. Аналогично,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|P_{m_k}^\perp (u^{m_k}(\cdot, t) u_x^{m_k}(\cdot, t))\|_1 = 0$$

для любого t , и лемма 7 доказана.

Далее, так же, как при доказательстве теоремы 1, можно доказать, что

$$\|u^{m_k}(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|_n \rightarrow 0$$

при любом t и $k \rightarrow \infty$, если $u_0 \in W_2^n$, и предложение 1 доказано.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $n \geq 3$ — целое. Тогда при любом $u_0 \in W_2^{n-1}$ и любом t

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [I_n(u^m(\cdot, t)) - I_n(u^m(\cdot, t_0))] = 0.$$

Доказательство повторяет доказательство леммы 7 с учетом доказанного предложения 1.

Для дальнейшего нам необходимы еще три предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любых $n \geq 2$, $u_0 \in W_2^n$, $\varepsilon > 0$ и $t \in \mathbb{R}$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\|u^m(\cdot, t) - u_1^m(\cdot, t)\|_n < \varepsilon$$

для любого $m = 1, 2, 3, \dots$ и любого решения $u_1^m(\cdot, t)$ задачи (12), (13) такого, что

$$\|u^m(\cdot, t_0) - u_1^m(\cdot, t_0)\|_n < \delta$$

(здесь $u^m(x, t)$ – решение задачи (12), (13)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ найдутся m и $u_1 \in L_m$ такие, что

$$\|u_1^m(\cdot, t) - u^m(\cdot, t)\|_n \geq \varepsilon \quad \text{и} \quad \|u_1^m(\cdot, t_0) - u^m(\cdot, t_0)\|_n < \delta$$

(здесь u_1^m – решение задачи (12), (13) с $u_0 = u_1$). Тогда существуют последовательности m_k и $u_1^{m_k} \in L_{m_k}$, $\|u_1^{m_k} - P_{m_k} u_0\|_n \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, такие, что

$$\|u_1^{m_k}(\cdot, t) - u^{m_k}(\cdot, t)\|_n \geq \varepsilon,$$

где $u_1^{m_k}$ – решение задачи (12), (13) с $u_0 = u_1^{m_k}$ и $m = m_k$. Ясно, что последовательность m_k неограничена и, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $m_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$. Но тогда, в силу предложения 1, $u_1^{m_k}(\cdot, t) \rightarrow u(\cdot, t)$ и $u^{m_k}(\cdot, t) \rightarrow u(\cdot, t)$ в W_2^n при $k \rightarrow \infty$, т.е. получаем противоречие. Предложение 2 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $n \geq 3$ – целое. Тогда для любого $t \in \mathbb{R}$ существует монотонно неубывающая непрерывная на $[0, +\infty)$ функция $\eta_n(s)$ такая, что

$$|I_n(u^m(\cdot, t)) - I_n(u^m(\cdot, t_0))| \leq \eta_n(\|u^m(\cdot, t_0)\|_{n-1})$$

для всех $m = 1, 2, 3, \dots$, $u_0 \in W_2^{n-1}$.

Доказательство следует из лемм 4 и 5.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $n \geq 3$ – целое, и пусть $K \subset W_2^{n-1}$ – компакт. Тогда для любого $t \in \mathbb{R}$ $I_n(u^m(\cdot, t)) - I_n(u^m(\cdot, t_0)) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ равномерно по $u_0 \in K$ (здесь $u^m(\cdot, t_0) = P_m u_0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что для любых $\varepsilon > 0$ и $\bar{u} \in K$ существуют $r > 0$ и номер m_0 такие, что

$$|I_n(u^m(\cdot, t)) - I_n(u^m(\cdot, t_0))| < \varepsilon$$

для всех $u_0 \in B_r(\bar{u}) = \{u \in W_2^{n-1} \mid \|u - \bar{u}\|_{n-1} < r\}$ и всех $m \geq m_0$. В силу леммы 7 имеем для любого $r > 0$ и $u_0 \in B_r(\bar{u})$:

$$\begin{aligned} & |I_n(u^m(\cdot, t)) - I_n(u^m(\cdot, t_0))| \\ & \leq \left| \int_{t_0}^t \gamma_n \left(R, \max_{\substack{0 \leq i, j \leq n-1 \\ i+j \neq 2n-2}} \|P_m^\perp [D_x^i u^m(\cdot, s) D_x^j u^m(\cdot, s)]\| \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \|P_m^\perp [u^m(\cdot, s) u_x^m(\cdot, s)]\|_1 \right) ds \right|. \end{aligned}$$

Оценим интеграл в правой части этого неравенства. Имеем:

$$\begin{aligned} & \|P_m^\perp [D_x^i u^m(\cdot, s) D_x^j u^m(\cdot, s)]\| \\ & \leq \|D_x^i u^m(\cdot, s) D_x^j u^m(\cdot, s) - D_x^i \bar{u}^m(\cdot, s) D_x^j \bar{u}^m(\cdot, s)\| \\ & \quad + \|D_x^i \bar{u}^m(\cdot, s) D_x^j \bar{u}^m(\cdot, s) - D_x^i \bar{u}(\cdot, s) D_x^j \bar{u}(\cdot, s)\| + \|P_m^\perp [D_x^i \bar{u}(\cdot, s) D_x^j \bar{u}(\cdot, s)]\|, \end{aligned}$$

где $\bar{u}^m(\cdot, s)$ и $\bar{u}(\cdot, s)$ – решения задач (12), (13) и (3)–(5), соответственно, с $u_0 = \bar{u}$.

В силу предложения 1, теоремы 1 и лемм 1 и 5 второе и третье слагаемые в правой части этого неравенства стремятся к нулю при $m \rightarrow \infty$ и не зависят от u_0 . Далее, в силу предложения 2 для произвольных $\varepsilon > 0$ и $t \in \mathbb{R}$ существует $r > 0$ такое, что первое слагаемое меньше ε при всех $u_0 \in B_r(\bar{u})$ и всех m . Оценивая подобным образом слагаемое $\|P_m^\perp (u^m u_x^m)\|_1$, получим, что для любых $\varepsilon > 0$ и s существуют $r_0 > 0$ и номер m_0 такие, что

$$\begin{aligned} \psi(m, r) = \sup_{u_0 \in B_r(\bar{u})} \gamma_n \left(R, \max_{\substack{0 \leq i, j \leq n-1 \\ i+j \neq 2n-2}} \|P_m^\perp [D_x^i u^m(\cdot, s) D_x^j u^m(\cdot, s)]\| \right. \\ \left. + \|P_m^\perp (u^m(\cdot, s) u_x^m(\cdot, s))\|_1 \right) < \varepsilon \end{aligned}$$

для всех $0 < r < r_0$ и $m \geq m_0$, если $u_0 \in B_r(\bar{u})$. Кроме того, функция $\psi(m, r)$ ограничена при всех $0 < r < 1$ и $m = 1, 2, 3, \dots$ в силу леммы 5. Отсюда (используя, например, теорему Егорова [26]), получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют $r > 0$ и номер m_0 такие, что

$$|I_n(u^m(\cdot, t)) - I_n(u^m(\cdot, t_0))| < \varepsilon \quad (14)$$

для всех $m \geq m_0$, если $\|u_0 - \bar{u}\|_{n-1} < r$.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и сопоставим каждой точке компакта K шар, обладающий указанным выше свойством. Пусть $B_{r_1}(u_1), \dots, B_{r_l}(u_l)$ – конечное покрытие компакта K этими шарами, и пусть $m_1, \dots, m_l$ – номера такие, что при любом i выполнено (14), если $m \geq m_i$ и $u_0 \in B_{r_i}(u_i)$. Тогда, очевидно, (14) имеет место для всех $u_0 \in K$ при $m \geq \max_i m_i$, и предложение 4 доказано.

§ 5. Доказательство теоремы 2

Сведения из общей теории меры, используемые в дальнейшем, содержатся, например, в [26]. Фиксируем некоторое целое $n \geq 3$. В этом параграфе используются результаты из §§ 3 и 4 (в частности, теорема 1). Здесь $\{e_k\}$ – ортонормированный базис в W_2^{n-1} . Положим $\omega_i = (1 + \lambda_i^n)^{-1}(1 + \lambda_i^{n-1})$, где $i = 0, 1, 2, \dots$.

На подпространствах $L_k \subset W_2^{n-1}$ рассмотрим гауссовские меры w_k , определенные по правилу

$$w_k(\Omega) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^{2k+1} \prod_{i=0}^{2k} \omega_i^{-1/2} \int_F e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2k} \omega_i^{-1} z_i^2} dz_0 \dots dz_{2k},$$

где $\Omega = \{u \in L_k \mid [(u, e_0)_{n-1}, \dots, (u, e_{2k})_{n-1}] \in F\}$ и $F \subset \mathbb{R}^{2k+1}$ – борелевское множество. Очевидно, что w_k – борелевская мера на L_k . Положим для произвольного борелевского $\Omega \subset W_2^{n-1}$ $w_k(\Omega) = w_k(\Omega \cap L_k)$. Тогда получим последовательность борелевских мер $\{w_k\}$ на W_2^{n-1} . Действительно, чтобы убедиться в этом, достаточно доказать следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Если $\Omega \subset W_2^{n-1}$ – борелевское множество, то $\Omega \cap L_k$ – борелевское как подмножество пространства L_k (в топологии, заданной нормой в W_2^{n-1}).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что множество всех подмножеств L_k вида $\Omega \cap L_k$, где $\Omega \subset W_2^{n-1}$ – борелевское, образуют сигма-алгебру в L_k , содержащую все открытые подмножества из L_k , поскольку если $\Omega \subset W_2^{n-1}$ открыто, то $\Omega \cap L_k$ открыто в L_k , и наоборот, для любого открытого $B \subset L_k$ существует открытое подмножество $\Omega \subset W_2^{n-1}$ такое, что $\Omega \cap L_k = B$. Остается убедиться в том, что полученная сигма-алгебра $\mathcal{H}$ множеств из L_k является минимальной, содержащей открытые множества. Предположим противное. Пусть $\mathcal{K}_1$ – борелевская сигма-алгебра в L_k и пусть $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{H}$ и $\mathcal{K}_1 \neq \mathcal{H}$. Рассмотрим множество $\mathcal{M}_1$ всех борелевских множеств из W_2^{n-1} таких, что для любого $A \subset \mathcal{M}_1$ $A \cap L_k \subset \mathcal{K}_1$. Очевидно, что $\mathcal{M}_1$ – сигма-алгебра, содержащаяся в борелевской сигма-алгебре и не совпадающая с ней. Кроме того, $\mathcal{M}_1$ содержит все открытые подмножества W_2^{n-1} . Тем самым получаем противоречие и требуемое предложение доказано.

ЛЕММА 8. *Последовательность борелевских мер в W_2^{n-1} w_k слабо сходится к мере w^n .*

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Напомним, что по определению последовательность борелевских мер $\{\nu_k\}_{k=1,2,3,\dots}$ в сепарабельном метрическом пространстве $\mathfrak{R}$ слабо сходится к борелевской мере ν , если

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathfrak{R}} \varphi(r) d\nu_m(r) = \int_{\mathfrak{R}} \varphi(r) d\nu(r)$$

для любого непрерывного ограниченного вещественного функционала φ на $\mathfrak{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 8. Как легко можно доказать (см. [3], [7]), используя теорему Прохорова о слабой компактности множества мер [16], последовательность мер $\{w_k\}$ слабо компактна. Кроме того, для любого цилиндрического множества M имеем: $w_k(M) = w^n(M)$ для всех достаточно больших номеров k .

Предположим, что последовательность w_k не сходится слабо к w^n . Тогда существует подпоследовательность w_{k_m} , слабо сходящаяся к некоторой мере $w' \neq w^n$. В силу единственности продолжения меры с алгебры на минимальную ее содержащую сигма-алгебру существует цилиндрическое множество M такое, что $w'(M) \neq w^n(M)$. По известной теореме $w'(M) = \lim_{i \rightarrow \infty} w'(M_i)$, где $\{M_i\}$ – некоторая последовательность открытых цилиндрических множеств вида (2) с одним и тем же k , содержащих M , и такая, что $M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_i \supset \dots$ и $M = \bigcap_i M_i$. Тогда, очевидно, $w'(M_i) \neq w^n(M_i)$ для достаточно больших номеров i . Поэтому можно считать множество M открытым. Для произвольного $\varepsilon > 0$ рассмотрим непрерывный функционал $\varphi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon(z_0 e_0 + \dots + z_{2r} e_{2r})$, где

$$M = \{u \in W_2^{n-1} \mid [(u, e_0)_{n-1}, \dots, (u, e_{2r})_{n-1}] \in F\}$$

и $F \subset \mathbb{R}^{2r+1}$ – открытое, такой, что $\varphi_\varepsilon(u) = 1$, если $u \in M$ и $\text{dist}(u; \partial M) \geq \varepsilon$, $0 \leq \varphi_\varepsilon(u) \leq 1$ для всех u и $\varphi_\varepsilon(u) = 0$ при $u \notin M$. Ясно, что

$$\begin{aligned} & \int_{W_2^{n-1}} \varphi_\varepsilon(u) dw_k(u) \\ &= \int_F \varphi_\varepsilon(z_0 e_0 + \dots + z_{2r} e_{2r}) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^{2r+1} \prod_{i=0}^{2r} \omega_i^{-1/2} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2r} \omega_i^{-1} z_i^2} dz_0 \dots dz_{2r} \\ &= \int_{W_2^{n-1}} \varphi_\varepsilon(u) dw^n(u) \end{aligned}$$

при $k \geq r$. Далее,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{W_2^{n-1}} \varphi_\varepsilon(u) dw^n(u) = w^n(M).$$

Но, с другой стороны, найдется $\varepsilon > 0$ столь малое, что выражения

$$\int_{W_2^{n-1}} \varphi_\varepsilon(u) dw^n(u) \quad \text{и} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{W_2^{n-1}} \varphi_\varepsilon(u) dw_{k_m}(u) = \int_{W_2^{n-1}} \varphi_\varepsilon(u) dw'(u)$$

отличаются, соответственно, от $w^n(M)$ и $w'(M)$ менее чем на $|w'(M) - w^n(M)|/3$, что противоречит доказанному выше. Тем самым, лемма 8 доказана.

Положим $\mu_k(\Omega) = \int_{\Omega} e^{-J_n(u)} dw_k(u)$. Поскольку функционал J_n непрерывен на W_2^{n-1} , меры μ_k и μ^n корректно определены на W_2^{n-1} . Пусть $h_m(u, t)$ – ДС, порождаемая системой (12), (13), так что функция $h_m(\cdot, t)$ при любом фиксированном t отображает L_m в L_m и каждой $u_0 \in L_m$ сопоставляет решение $u^m(\cdot, t - t_0)$ задачи (12), (13) в момент времени $t - t_0$. Очевидно, что $h_m(\cdot, t)$ при фиксированном t отображает также W_2^{n-1} в L_m по правилу $h_m(u, t) = h_m(P_m u, t)$.

ЛЕММА 9 [26], [7]. 1) $\liminf_{k \rightarrow \infty} \mu_k(\Omega) \geq \mu^n(\Omega)$ для любого открытого ограниченного множества $\Omega \subset W_2^{n-1}$;

2) $\limsup_{k \rightarrow \infty} \mu_k(K) \leq \mu^n(K)$ для любого замкнутого ограниченного множества $K \subset W_2^{n-1}$.

ЛЕММА 10. Пусть $t \in \mathbb{R}$ и $\Omega \subset W_2^{n-1}$ – замкнутое ограниченное множество. Тогда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\mu_m(h_m(\Omega, t)) - \mu_m(\Omega)) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем систему (12), (13) в координатах

$$z(t) = (z_0(t), \dots, z_{2m}(t)),$$

где $u^m(x, t) = z_0(t)e_0(x) + \dots + z_{2m}(t)e_{2m}(x)$, получим

$$\dot{z}(t) = J \nabla_z H(z(t)), \quad (15)$$

$$z_i(t_0) = (u_0, e_i)_{n-1}, \quad i = \overline{0, 2m}, \quad (16)$$

где $H(z) = I_1(z_0 e_0 + \dots + z_{2m} e_{2m})$ и $J^* = -J$ – кососимметрическая $(2m+1) \times (2m+1)$ -матрица, $(J)_{2k-1, 2k} = -\frac{2\pi k}{A} \left(1 + \left(\frac{2\pi k}{A}\right)^{2n-2}\right) = -(J)_{2k, 2k-1}$ ($k = \overline{1, m}$), $(J)_{k, l} = 0$ для остальных значений индексов $k, l = \overline{0, 2m}$.

Докажем, что модуль определителя $D = \left| \det \left(\frac{\partial z_i(t)}{\partial z_{0,j}} \right)_{i,j=\overline{0, 2m}} \right| = 1$ для всех t .

В самом деле, согласно результатам из [25, гл. VI] мера Лебега

$$\sigma_m(\Omega) = \int_{\Omega} dz_0 \dots dz_{2m}$$

является ИМ для ДС на L_m , порождаемой задачей (15), (16). Поэтому

$$\sigma_m(h_m(\Omega, t)) = \int_{h_m(\Omega, t)} dz_0 \dots dz_{2m} = \int_{\Omega} D dz_0 \dots dz_{2m} = \int_{\Omega} dz_0 \dots dz_{2m}$$

для произвольного борелевского множества $\Omega \subset \mathbb{R}^{2m+1}$. Отсюда, в силу непрерывности функции D , сразу следует, что $D \equiv 1$.

Фиксируем произвольное ограниченное замкнутое множество $\Omega \subset W_2^{n-1}$. В силу предыдущего получаем:

$$\mu_m(h_m(\Omega, t)) = \int_{\Omega} e^{I_n(P_m u) - I_n(h_m(u, t))} d\mu_m(u).$$

Далее,

$$|\mu_m(\Omega) - \mu_m(h_m(\Omega, t))| \leq \int_{\Omega} |1 - e^{I_n(P_m u) - I_n(h_m(u, t))}| d\mu_m(u),$$

откуда, согласно предложению 3, получаем, что подынтегральное выражение в правой части этого неравенства – равномерно по m и u ограниченная в Ω функция. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и компакт $K \subset W_2^{n-1}$ такой, что $\mu(\Omega \setminus K) < \varepsilon$, который существует согласно предыдущему и в силу теоремы Прохорова [16]. Далее, по предложению 4

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [\mu_m(K \cap \Omega) - \mu_m(h_m(K \cap \Omega, t))] = 0,$$

поэтому

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} [\mu_m(\Omega) - \mu_m(h_m(\Omega, t))] \leq C_1 \varepsilon,$$

откуда, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, следует утверждение леммы 10. Лемма 10 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любого ограниченного открытого множества $\Omega \subset W_2^{n-1}$ и любого $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |\mu_m(\Omega) - \mu_m(h_m(\Omega, t))| = 0.$$

ЛЕММА 11. Пусть $\Omega \subset W_2^{n-1}$ – открытое ограниченное множество и $t \in \mathbb{R}$. Тогда $\mu^n(\Omega) = \mu^n(h^{n-1}(\Omega, t))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1 и лемме 1 $h^{n-1}(\Omega, t)$ – также ограниченное открытое множество в W_2^{n-1} . Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. По известной теореме найдется компакт $K \subset \Omega$ такой, что $\mu^n(\Omega \setminus K) < \varepsilon$. Пусть $K_1 = h^{n-1}(K, t)$. Тогда K_1 – также компакт и $K_1 \subset h^{n-1}(\Omega, t) = \Omega_1$. Пусть $\alpha = \min\{\text{dist}(K, \partial\Omega); \text{dist}(K_1, \partial\Omega_1)\}$, где $\text{dist}(A, B) = \inf_{u \in A, v \in B} \|u - v\|_{n-1}$ и ∂A – граница множества $A \subset W_2^{n-1}$. Очевидно, $\alpha > 0$. По предложению 2 для любого $u \in K$ существует шар $B_r(u) = \{v \in W_2^{n-1} \mid \|u - v\|_{n-1} < r\}$ с положительным радиусом r такой, что

$$\text{dist}(h_m(u, t); h_m(v, t)) < \frac{\alpha}{3}$$

для всех $v \in B_r(u)$ и всех m . Пусть $B_1, \dots, B_l$ – конечное покрытие компакта K указанными шарами. Пусть $\Omega_\beta = \{v \in \Omega_1 \mid \text{dist}(v, \partial\Omega_1) \geq \beta\}$, где $\beta > 0$, и $D = \bigcup_{i=1}^l B_i$.

Поскольку, в силу предложения 1, $h_m(u, t) \rightarrow h^{n-1}(u, t)$ в W_2^{n-1} при $m \rightarrow \infty$ для любого $u \in W_2^{n-1}$, получаем, что

$$h_m(D, t) \subset \Omega_{\alpha/4}$$

для всех достаточно больших m . Далее, согласно леммам 9 и 10 и следствию 2,

$$\mu^n(\Omega) \leq \mu^n(D) + \varepsilon \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \mu_m(D) + \varepsilon = \liminf_{m \rightarrow \infty} \mu_m(h_m(D, t)) + \varepsilon \leq \mu^n(\Omega_1) + \varepsilon.$$

Поэтому, ввиду произвольности $\varepsilon > 0$, получаем:

$$\mu^n(\Omega) \leq \mu^n(\Omega_1).$$

Аналогично, $\mu^n(\Omega_1) \leq \mu^n(\Omega)$. Следовательно,

$$\mu^n(\Omega) = \mu^n(\Omega_1),$$

и лемма 11 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть сначала $\Omega \subset W_2^{n-1}$ – открытое неограниченное множество. Положим

$$\Omega^k = \{u \in \Omega \mid \|h^{n-1}(u, t)\|_{n-1} + \|u\|_{n-1} < k\},$$

где $k > 0$. Тогда $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega^k$, и каждое множество Ω^k ограничено, причем $h^{n-1}(\Omega, t) = \bigcup_{k=1}^{\infty} h^{n-1}(\Omega^k, t)$ и $\mu^n(\Omega^k) = \mu^n(h^{n-1}(\Omega^k, t))$. Поэтому

$$\mu^n(h^{n-1}(\Omega, t)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu^n(h^{n-1}(\Omega^k, t)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu^n(\Omega^k) = \mu^n(\Omega).$$

Пусть $A \subset W_2^{n-1}$ – произвольное борелевское множество. Поскольку при любом фиксированном t отображение $h^{n-1}(\cdot, t)$ пространства W_2^{n-1} в себя является гомеоморфизмом, $h^{n-1}(A, t)$ – также борелевское подмножество пространства W_2^{n-1} . Равенство $\mu^n(A) = \mu^n(h^{n-1}(A, t))$ получим, приближая это множество снаружи открытыми множествами. Последнее утверждение теоремы 2 следует из леммы 1, непрерывности функционалов $I_0, \dots, I_{n-1}$ на W_2^{n-1} и их ограниченности на любом ограниченном множестве из W_2^{n-1} . Тем самым, теорема 2 полностью доказана.

Список литературы

1. Жидков П. Е. Об инвариантной мере для нелинейного уравнения Шрёдингера // ДАН СССР. 1991. Т. 317. № 3. С. 543–546.
2. Zhidkov P. E. An invariant measure for a nonlinear wave equation // Nonlinear Anal. 1994. V. 22. P. 319–325.
3. Жидков П. Е. Инвариантная мера для нелинейного уравнения Шрёдингера // Сообщ. ОИЯИ. Р5-94-199. Дубна: ОИЯИ, 1994.
4. McKean H. P., Vaninsky K. L. Statistical mechanics of nonlinear wave equations // Trends and Perspectives in Appl. Math / ed. L. Sirovich. New York: Springer-Verlag, 1994. P. 239–264.
5. Casati G., Guarneri I., Valz-Griz F. Preliminaries to the ergodic theory of infinite-dimensional systems: a model of radiant cavity // J. Statist. Phys. 1983. V. 30. № 1. P. 195–218.
6. Bourgain J. Periodic nonlinear Schrödinger equation and invariant measures // Comm. Math. Phys. 1994. V. 166. P. 1–26.
7. Zhidkov P. E. On invariant measures for some infinite-dimensional dynamical systems // Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. 1995. V. 62. № 3. P. 267–287.
8. Арсеньев А. А. Об инвариантных мерах для классических динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством // Матем. сб. 1983. Т. 121. С. 297–309.
9. Чуешов И. Д. Равновесные статистические решения для динамических систем с бесконечным числом степеней свободы // Матем. сб. 1986. Т. 130. С. 394–403.
10. Чуешов И. Д. О структуре равновесных решений для класса динамических систем, связанных со скобками Пуассона // ТМФ. 1988. Т. 75. С. 445–450.
11. Песков Н. В. О состоянии Кубо–Мартина–Швингера системы синус-Гордон // ТМФ. 1985. Т. 64. № 1. С. 32–40.
12. Lebowitz J. L., Rose H. A., Speer E. R. Statistical mechanics of the nonlinear Schrödinger equation // J. Statist. Phys. 1988. V. 50. P. 657–687.
13. Friedlander L. An invariant measure for the equation $u_{tt} - u_{xx} + u^3 = 0$ // Comm. Math. Phys. 1985. V. 98. P. 1–16.

14. Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. Введение в нелинейную физику. М.: Наука, 1988.
15. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988.
16. Далецкий Ю. Л., Фомин С. В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. М.: Наука, 1983.
17. Скороход А. В. Интегрирование в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1975.
18. Жидков П. Е. О задаче Коши для обобщенного уравнения Кортевега–де Фриза с периодическими начальными данными // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 5. С. 823–829.
19. Kato T. On the Korteweg–de Vries equation // Manuscripta Math. 1979. V. 28. № 1–3. P. 88–99.
20. Kato T. On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg–de Vries equation // Stud. Math. Appl. 1983. V. 8. P. 93–128.
21. Кружков С. Н., Фаминский А. В. Обобщенные решения задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза // Матем. сб. 1983. Т. 120. № 3. С. 396–425.
22. Фаминский А. В. Задача Коши для уравнения Кортевега–де Фриза и его обобщений // Труды сем. им. И. Г. Петровского. № 13. М.: Изд-во МГУ, 1988. С. 56–105.
23. Захаров В. Е., Манакон С. В., Новиков С. П., Потаевский Л. П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
24. Kruskal M. D., Miura R. M., Gardner C. S., Zabusky N. Z. Korteweg–de Vries equation and generalizations. V. Uniqueness and nonexistence of polynomial conservation laws // J. Math. Phys. 1970. V. 11. № 3. P. 952–960.
25. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.–Л.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1949.
26. Халмош П. Теория меры. М.: ИЛ, 1953.

Объединенный институт
ядерных исследований,
Дубна
E-mail: zhidkov@thsun1.jinr.dubna.su

Поступила в редакцию
04.07.1995