Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. К. Мамаев, Слоения коразмерности один на плоских 3-многообразиях, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 6, 41–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm135>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 12:26:33

УДК 517.917+515.1

В. К. Мамаев

Слоения коразмерности один на плоских 3-многообразиях

В статье рассматриваются C^r -слоения ($r \geq 2$) коразмерности один на замкнутых 3-многообразиях. Описываются все замкнутые плоские 3-многообразия, которые допускают слоения без компактных слоев и все замкнутые плоские 3-многообразия, на которых любое C^r -слоение ($r \geq 2$) коразмерности один имеет компактный слой и этот слой является либо двумерным тором, либо бутылкой Клейна.

Библиография: 21 название.

Введение

Слоением коразмерности один на замкнутом n -мерном ($n \geq 2$) многообразии M^n называется разбиение многообразия M^n на попарно непересекающиеся подмножества (называемые *слоями*), которые в некоторой окрестности каждой точки образуют семейство параллельных $(n-1)$ -мерных плоскостей. Единственными двумерными замкнутыми многообразиями, допускающими слоения коразмерности один (без особенностей), являются тор и бутылка Клейна. Эти же многообразия являются единственными замкнутыми 2-многообразиями, допускающими риманову метрику нулевой кривизны. На двумерном торе существуют слоения без компактных слоев, а на бутылке Клейна любое слоение имеет компактный слой [13]. Более того, как показали независимо С. Х. Арансон [1] и Н. Маркли [15], на бутылке Клейна у любого ориентируемого слоения (возможно, с особенностями) не существует незамкнутых устойчивых по Пуассону полуслоев. Доказательство С. Х. Арансона основано на том, что бутылка Клейна двулистно накрывается тором, а также на свойствах асимптотического поведения незамкнутых устойчивых по Пуассону полуслоев на торе.

В отличие от двумерных многообразий на любом 3-многообразии существует слоение коразмерности один [6], [21]. Из теоремы С. П. Новикова [6] вытекает, что C^r -слоение ($r \geq 2$) коразмерности один на замкнутом 3-многообразии постоянной положительной кривизны имеет компактный слой.

В настоящей статье рассматриваются C^r -слоения ($r \geq 2$) коразмерности один на замкнутых плоских 3-многообразиях. Будут описаны все замкнутые плоские 3-многообразия, которые допускают слоения без компактных слоев и все замкнутые плоские 3-многообразия, на которых любое C^r -слоение ($r \geq 2$) коразмерности один имеет компактный слой (этот слой будет либо двумерным тором, либо бутылкой Клейна).

Все замкнутые плоские 3-многообразия конечнолистно накрываются трехмерным тором T^3 [3]. Поэтому в § 2 мы изучаем асимптотическое поведение слоев слоения без компактных слоев на T^3 и показываем, что асимптотически слоение на T^3

в некотором смысле близко к линейному слоению. В §3 мы рассматриваем линейные слоения на замкнутых плоских 3-многообразиях. Наконец, в §4 мы применяем упомянутый выше метод С. Х. Арансона [1] для доказательства существования компактного слоя на некоторых плоских 3-многообразиях.

В настоящее время имеется большое число теорем о существовании компактного слоя [20]. Например, в [18] доказано, что если фундаментальная группа $\pi_1(M^3)$ имеет менее, чем экспоненциальный рост и $\dim H_1(M^3, \mathbb{R}) \leq 1$, то любое трансверсально ориентируемое слоение коразмерности один на M^3 имеет компактный слой. Некоторые плоские многообразия удовлетворяют условиям из выше названных работ. Однако мы не предполагаем трансверсальной ориентируемости слоений и не накладываем дополнительных ограничений на фундаментальную группу многообразий. Так, например, замкнутое плоское 3-многообразие M_2 (см. §§ 3, 4) имеет фундаментальную группу $\pi_1(M_2)$, которая содержит конечнопорожденную абелеву подгруппу конечного индекса, и, следовательно, $\pi_1(M_2)$ имеет полиномиальный рост. Для M_2 выполняется равенство $\dim H_1(M_2, \mathbb{R}) = 1$, однако на M_2 существует аналитическое слоение коразмерности один без компактных слоев. В теоремах о существовании компактного слоя работ [7], [8] либо на многообразии, либо на слоении также налагаются специальные ограничения (например, слоение представляет собой одну компоненту Новикова, или псевдоцентр фундаментальной группы удовлетворяет некоторым условиям). В работе [14] исследуются замкнутые инвариантные семейства слоений и определяется, когда относительно компактный слой (в некотором подмножестве) является компактным.

Я благодарю С. Х. Арансона и Е. В. Жужому за постановку задачи и плодотворные обсуждения.

§1. Предварительные сведения

Рассмотрим на замкнутом 3-многообразии M^3 C^r -слоение F ($r \geq 2$) коразмерности один. Для любой точки $m \in M^3$ обозначим через $\pi_1(M^3, m)$ фундаментальную группу многообразия M^3 с базисной точкой $m \in M^3$ и через $K = [\pi_1(M^3, m), \pi_1(M^3, m)]$ – коммутант группы $\pi_1(M^3, m)$. Пусть через точку $m \in M^3$ проходит слой L слоения F . Обозначим через $i_*: \pi_1(L, m) \rightarrow \pi_1(M^3, m)$ гомоморфизм, индуцированный вложением $i: L \subset M^3$. Согласно теореме 5.1 [6], если слоение F имеет тривиальную группу голономии, то гомоморфизм i_* является мономорфизмом и подгруппа $i_*[\pi_1(L, m)] \subset \pi_1(M^3, m)$ является нормальным делителем для любого слоя L и любой точки $m \in L$. В теореме 5.1 [6] также утверждается, что фактор-группа $\pi_1(M^3, m)/i_*[\pi_1(L, m)]$ абелева, поэтому $K \subset i_*[\pi_1(L, m)]$. Очевидно, слоение с тривиальной группой голономии на M^3 не имеет рибовских компонент. Таким образом, для слоения F с тривиальной группой голономии на M^3 необходимо выполняются следующие два условия:

- 1) для любого слоя L и любой точки $m \in L$ имеет место включение $K \subset i_*[\pi_1(L, m)]$;
- 2) слоение F не имеет рибовских компонент.

В работе [17] показано, что условия 1) и 2) являются достаточными для того, чтобы слоение F имело тривиальную группу голономии. В частности, если группа $\pi_1(M^3, m)$ абелева, то $K = 0$, и слоение F имеет тривиальную группу

голономии тогда и только тогда, когда F не имеет рибовских компонент.

ТЕОРЕМА 1.1 [17], [16]. *Если C^r -слоение F ($r \geq 2$) коразмерности один на трехмерном торе T^3 не имеет компактных слоев, то F имеет тривиальную группу голономии и все слои гомеоморфны либо цилиндру, либо плоскости.*

Из этой теоремы вытекает следующее следствие, которое понадобится нам в дальнейшем.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *Пусть на 3-многообразии M^3 задано C^r -слоение ($r \geq 2$) F коразмерности один, и пусть M^3 конечнолистно покрывается тором T^3 . Тогда, если слоение F не имеет компактных слоев, то покрывающее слоение $\tilde{F}$ на T^3 является слоением с тривиальной группой голономии.*

§ 2. Слоения из цилиндров и плоскостей на трехмерном торе

Будем пользоваться моделью тора T^3 в виде $T^3 = \mathbb{R}^3/\Gamma$, где $\mathbb{R}^3$ – евклидово пространство с декартовыми координатами (x, y, z) , Γ – трехмерная целочисленная решетка, изоморфная $\pi_1(T^3)$. Обозначим через T_1, T_2, T_3 двумерные торы в T^3 , прообразы которых в $\mathbb{R}^3$ (относительно накрытия $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3/\Gamma = T^3$) имеют вид: $\bar{T}_1: y = n, \bar{T}_2: x = m, \bar{T}_3: z = k$ ($n, m, k \in \mathbb{Z}$), соответственно.

ЛЕММА 2.1. *Пусть на трехмерном торе T^3 задано C^r -слоение ($r \geq 2$) с тривиальной группой голономии, все слои которого гомеоморфны цилиндру. Тогда существует диффеоморфизм $\varphi: T^3 \rightarrow T^3$, гомотопный тождественному, такой, что два двумерных тора из трех T_1, T_2, T_3 трансверсальны слоению $\varphi(F)$, причем на одном из них слоение $\varphi(F)$ индуцирует слоение, топологически сопряженное иррациональной обмотке. Более того, по крайней мере две замкнутые кривые из трех $T_1 \cap T_2, T_1 \cap T_3, T_2 \cap T_3$ трансверсальны слоению $\varphi(F)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как F – слоение с тривиальной группой голономии, то для любого слоя L гомеоморфизм $i_*: \pi_1(L) \rightarrow \pi_1(T^3)$, индуцируемый вложением $i: L \subset T^3$, является мономорфизмом [6, теорема 5.1]. По условию $\pi_1(L) = \mathbb{Z}$, и поэтому имеется тор T_j , $j \in \{1, 2, 3\}$, такой, что никакая негомотопная нулю замкнутая кривая, лежащая на слое L , не гомотопна никакой замкнутой кривой, лежащей на T_j . Для определенности положим $j = 1$. Тогда согласно теореме 9 [4] существует диффеоморфизм $f_1: T^3 \rightarrow T^3$, изотопный тождественному, такой, что тор T_1 трансверсален слоению $f_1(F)$ и слоение $f_1(F)$ индуцирует на T_1 слоение G_1 , топологически эквивалентное иррациональной обмотке. Для иррациональной обмотки на торе любой меридиан тора и любая параллель являются замкнутыми трансверсальными. Поэтому существует изотопия $f_2: T_1 \rightarrow T_1$ такая, что нулевой меридиан $T_1 \cap T_2$ и нулевая параллель $T_1 \cap T_3$ являются замкнутыми трансверсальными слоения $f_2(G_1)$ [10]. Согласно [5, с. 154–156] изотопию f_2 можно продолжить до изотопии $f_2: T^3 \rightarrow T^3$. Таким образом, тор T_1 и кривые $T_1 \cap T_2, T_1 \cap T_3$ трансверсальны слоению $f_2 f_1(F)$. Отсюда следует, что слоение $f_2 f_1(F)$ трансверсально тору T_2 в окрестности кривой $T_1 \cap T_2$. В силу [9], [11] существует диффеоморфизм $f_3: T^3 \rightarrow T^3$, гомотопный тождественному, такой, что для слоения $f_3 f_2 f_1(F)$, обозначим его через F_2 , тор T_2 находится в общем положении, причем f_3 тождественен в окрестности тора T_1 . Слоение F_2 индуцирует на T_2 слоение G_2 ,

особенности которого являются центрами и гиперболическими седлами, и у G_2 нет сепаратрис, идущих из одного седла в другое седло [9], [11]. Будем считать, что G_2 имеет особенности, в противном случае тор T_2 будет трансверсален слоению F_2 , и мы перейдем к дальнейшему построению. Рассмотрим центр p_0 слоения G_2 . Так как группа голономии слоения F_2 тривиальна, то существует семейство вложенных друг в друга двумерных дисков $D_\alpha \subset T_2$ таких, что

- 1) $p_0 \in D_\alpha$;
- 2) ∂D_α является слоем, гомеоморфным окружности, слоения G_2 ;
- 3) $\bigcup_\alpha D_\alpha$ имеет границу, равную либо петле сепаратрисы L_0 некоторого седла O , либо двум петлям (фигура “восемь”) L_1, L_2 сепаратрис седла O .

Покажем, что ни одна из петель L_0, L_1, L_2 не может быть негомотопной нулю. Действительно, если, например, L_0 негомотопна нулю, то L_0 должна быть гомотопна кривой $T_1 \cap T_0$. Тогда L_0 и кривая $T_1 \cap T_2$ ограничивают на T_2 кольцо K . Слой слоения G_2 , войдя в кольцо K через трансверсаль $T_1 \cap T_2$, не может выйти из кольца K (в силу ориентируемости слоения G_2). Тогда слой, вошедший в K и отличный от сепаратрисы седла, в своем предельном множестве должен содержать замкнутый слой или контур, состоящий из петель сепаратрис и седел. Это противоречит тривиальности групп голономии слоения F . Таким образом, каждая из петель L_0, L_1, L_2 гомотопна нулю на T_2 . Поэтому каждая из петель L_0, L_1, L_2 ограничивает на слое, на котором она лежит, диск D_0, D_1, D_2 , соответственно. Так как тор T_1 трансверсален слоению F_2 , и на T_1 слоение F_2 индуцирует слоение, топологически эквивалентное иррациональной обмотке, то ни один из дисков D_0, D_1, D_2 не пересекается с T_1 . Из лемм 5, 6 [4] вытекает, что существует изотопия тора T_2 в тор T'_2 , тождественная в некоторой окрестности тора T_1 , такая, что T'_2 находится в общем положении и имеет на две точки касания меньше, чем точек касания T_2 с F_2 . Продолжая этот процесс, мы получим тор $\tilde{T}_2$, изотопный T_2 и трансверсальный слоению F_2 . Изотопию $\tilde{T}_2 \rightarrow T_2$ продолжим до изотопии $f_4: T^3 \rightarrow T^3$. По построению, изотопия f_4 тождественна в окрестности тора T_1 , и слоение $f_4(F_2) = f_4 f_3 f_2 f_1(F)$ трансверсально тору T_2 , следовательно, слоение $f_4(F)$ трансверсально торами T_1, T_2 и кривым $T_1 \cap T_2, T_1 \cap T_3$. Положим $\varphi = f_4 f_3 f_2 f_1$.

Назовем слоение на T^3 *стандартным*, если оно трансверсально двумерным торами T_1, T_2 , кривым $T_1 \cap T_2, T_1 \cap T_3$ и индуцирует на T_1 слоение, топологически эквивалентное иррациональной обмотке.

Трансверсальное слоению F подмногообразие $N \subset M^3$ называется *глобальной секущей*, если каждый слой слоения F пересекает N .

ЛЕММА 2.2. Пусть F – стандартное слоение с тривиальной группой голономии из цилиндров, заданное на T^3 , и пусть $\overline{F}$ – накрывающее для F слоение на $\mathbb{R}^3$. Тогда двумерные плоскости $\overline{T}_1^{(n)}: y = n, \overline{T}_2^{(m)}: x = m$, и прямые $\overline{T}_1^{(n)} \cap \overline{T}_2^{(m)}$, $n, m \in \mathbb{Z}$, являются глобальными секущими слоения $\overline{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 5.1 [6] вытекает, что все слои слоения $\overline{F}$ гомеоморфны плоскости и никакой слой не пересекает дважды любую трансверсаль слоения $\overline{F}$. Так как слоение F стандартное, то слоение $\overline{F}$ трансверсально плоскостям $\overline{T}_1^{(n)}, \overline{T}_2^{(m)}$ и прямым $\overline{T}_1^{(n)} \cap \overline{T}_2^{(m)}$, $n, m \in \mathbb{Z}$. Покажем, что любой слой слоения $\overline{F}$ пересекает эти плоскости и прямые.

Рассмотрим слой L_0 , который пересекает прямую $\overline{T}_1^{(0)} \cap \overline{T}_2^{(0)}$ (очевидно, такой слой существует). Тогда слой $\overline{L}_0$ пересекает $\overline{T}_1^{(0)} \cap \overline{T}_2^{(1)}$, т.е. и все прямые $\overline{T}_1^{(n)} \cap \overline{T}_2^{(m)}$, $n, m \in \mathbb{Z}$. Отсюда вытекает, что $\overline{L}_0$ пересекает все плоскости $\overline{T}_1^{(n)}$, $\overline{T}_2^{(m)}$. Предположим, что существует слой $\overline{L}_*$, который не пересекает ни одну из плоскостей $\overline{T}_1^{(n)}$, $\overline{T}_2^{(m)}$ и ни одну из прямых $\overline{T}_1^{(n)} \cap \overline{T}_2^{(m)}$, $n, m \in \mathbb{Z}$. Так как слой $\overline{L}_0$ гомеоморфен плоскости, то $\overline{L}_*$ должен лежать в односвязной компактной области пространства $\mathbb{R}^3$. Но тогда, в силу некомпактности слоя $\overline{L}_*$, существует замкнутая трансверсаль слоения $\overline{F}$, проходящая через $\overline{L}_*$ [6, лемма 1.2], что противоречит предложению 4.2 [11].

ЛЕММА 2.3. Пусть F – стандартное слоение с тривиальной группой голономии из цилиндров или плоскостей, заданное на T^3 , и пусть $\overline{F}$ – накрывающее для F слоение на $\mathbb{R}^3$. Тогда существует единственная пара чисел (λ, μ) такая, что для любой точки (x, y, z) слоя $\overline{L}$ слоения $\overline{F}$ выполняется соотношение:

$$z = \lambda x + \mu y + d(x, y, z),$$

где числа λ , μ и функция $d(x, y, z)$ удовлетворяют условиям:

- 1) числа λ , μ не зависят от выбора слоя $\overline{L}$;
- 2) $(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} d(x, y, z) \rightarrow 0$ при $x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty$;
- 3) слоение F состоит из плоскостей тогда и только тогда, когда $\mu \neq 0$, $\lambda \neq 0$ и числа λ , μ рационально независимы;
- 4) слоение F состоит из цилиндров только тогда, когда числа λ , μ рационально зависимы и, по крайней мере, одно из них иррациональное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для слоения F из плоскостей утверждения 1)–3) доказаны в [2]. Для слоения F из цилиндров утверждения 1)–3) доказываются полностью аналогично. Докажем утверждение 4). Слоение F индуцирует на окружности $T_1 \cap T_2$ коммутативную группу G диффеоморфизмов окружности с двумя образующими, и орбиты точек под действием G соответствуют точкам пересечения слоев с $T_1 \cap T_2$. Так как слоение на T_1 топологически эквивалентно иррациональной обмотке, то имеется диффеоморфизм группы G с иррациональным числом вращения. Поэтому, согласно теореме 3.3 [12], существует гомеоморфизм $h: T_1 \cap T_2 \rightarrow T_1 \cap T_2$, который сопрягает группу G с группой поворотов. Так как слоение F состоит из цилиндров, то любая точка под действием некоторого нетождественного элемента группы G переходит в себя. Отсюда и из того, что $h^{-1}Gh \subset \text{SO}(2)$ вытекает утверждение 4).

ЛЕММА 2.4. Пусть F – слоение на T^3 с тривиальной группой голономии из цилиндров или плоскостей, и пусть $\overline{F}$ – накрывающее для F слоение на $\mathbb{R}^3$. Тогда существует тройка чисел (α, β, γ) такая, что $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$, и для любой точки (x, y, z) , лежащей на слое $\overline{L}$ слоения $\overline{F}$, выполняется соотношение:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + d(x, y, z) = 0,$$

где числа α, β, γ и функция $d(x, y, z)$ удовлетворяют следующим условиям:

- 1) числа α, β, γ и функция $d(x, y, z)$ определяются с точностью до умножения на одну и ту же ненулевую константу, однако числа $\alpha/\nu, \beta/\nu, \gamma/\nu$ (где ν – одно из чисел α, β, γ , отличное от нуля) не зависят от слоя $\bar{L}$;
- 2) $(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \cdot d(x, y, z) \rightarrow 0, x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty$;
- 3) слоение F состоит из плоскостей тогда и только тогда, когда $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0$ и числа $\beta/\alpha, \gamma/\alpha$ рационально независимы;
- 4) слоение F состоит из цилиндров тогда и только тогда, когда, по крайней мере, одно из чисел α, β, γ иррационально (и, следовательно, не равно нулю), а два другие, деленные на это иррациональное число, образуют рационально зависимые числа, не все равные нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2.1 существует диффеоморфизм $\varphi: T^3 \rightarrow T^3$, гомотопный тождественному, переводящий слоение F в стандартное слоение F' . Так как φ гомотопен тождественному, то любой накрывающий его гомеоморфизм $\bar{\varphi}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ записывается в виде:

$$x' = x + \psi_1(x, y, z), \quad y' = y + \psi_2(x, y, z), \quad z' = z + \psi_3(x, y, z),$$

где ψ_1, ψ_2, ψ_3 – периодические по каждому аргументу функции с периодом единица. Обозначим через $\bar{F}'$ накрывающее для F' слоение на $\mathbb{R}^3$.

Из лемм 2.1, 2.3 следует существование тройки чисел α, β, γ и функции $d'(x, y, z)$ таких, что для любой точки x', y', z' , лежащей на слое $\bar{L}'$ слоения $\bar{F}'$, выполняется соотношение:

$$\alpha x' + \beta y' + \gamma z' + d'(x', y', z') = 0,$$

где числа α, β, γ и функция d' удовлетворяют утверждениям 1)–4). Тогда для любой точки (x, y, z) , лежащей на слое $\bar{L} = \varphi^{-1}(\bar{L}')$ слоения $\bar{F}$, выполняется соотношение:

$$\alpha(x + \psi_1) + \beta(y + \psi_2) + \gamma(z + \psi_3) + d'(x + \psi_1, y + \psi_2, z + \psi_3) = 0.$$

Тогда $\alpha x + \beta y + \gamma z + d(x, y, z) = 0$, где $d(x, y, z) = d'(x + \psi_1, y + \psi_2, z + \psi_3) + \alpha\psi_1 + \beta\psi_2 + \gamma\psi_3$. Так как функции ψ_1, ψ_2, ψ_3 периодические по каждому аргументу, то они ограничены и, следовательно:

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} d(x, y, z) &= (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} (\alpha\psi_1 + \beta\psi_2 + \gamma\psi_3) \\ &+ (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{-1/2} d'(x', y', z') \cdot (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2} (x^2 + y^2 + z^2) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty$ (поэтому $x'^2 + y'^2 + z'^2 \rightarrow \infty$).

§ 3. Линейные и вполне геодезические слоения на плоских замкнутых 3-многообразиях

Пусть M^3 – риманово 3-многообразие, $N \subset M^3$ – его подмногообразие. Напомним, что N называется *вполне геодезическим*, если для любой точки $t \in N$ и любой геодезической L_t , которая касается подмногообразия N в точке t , имеем $L_t \subset N$ (см. [3, гл. 3, § 3.3]).

Пусть на M^3 задано C^r -слоение F ($r \geq 2$) коразмерности один. Слоение F называется *вполне геодезическим*, если каждый слой слоения F является вполне геодезическим подмногообразием.

Риманово многообразие называется *плоским* (или *локально евклидовым*), если кривизна и кручение соответствующей римановой связности тождественно равны нулю (подробности см. [3]).

Простейшим примером плоского многообразия является евклидово пространство $\mathbb{R}^3$. Универсальное накрытие $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow T^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ индуцирует на T^3 метрику, в которой T^3 является плоским римановым многообразием. Согласно [3], любое замкнутое плоское трехмерное многообразие конечнолистно покрывается тором T^3 и может быть представлено в виде фактор-пространства $\mathbb{R}^3/\Gamma$, где Γ – вполне разрывная группа движений пространства $\mathbb{R}^3$. Более того, имеется ровно десять плоских замкнутых попарно не гомеоморфных 3-многообразий таких, что любое плоское замкнутое 3-многообразие аффинно диффеоморфно одному из этих десяти многообразий [3, теоремы 3.5.5, 3.5.9]. Мы перечислим десять соответствующих подгрупп движений пространства $\mathbb{R}^3$, приведя их образующие. Будем считать, что в $\mathbb{R}^3$ задана декартова система координат (x, y, z) . Положим $M_i = \mathbb{R}^3/\Gamma_i$ $i = 1, \dots, 10$.

- 1) Γ_1 порождена сдвигами $t_1: (x, y, z) \mapsto (x+1, y, z)$, $t_2: (x, y, z) \mapsto (x, y+1, z)$, $t_3: (x, y, z) \mapsto (x, y, z+1)$;
- 2) Γ_2 порождена сдвигами t_1, t_2, t_3 и движением $\alpha: (x, y, z) \mapsto (x+1/2, -y, -z)$;
- 3) Γ_3 порождена сдвигами $t_1: (x, y, z) \mapsto (x+1, y, z)$, $t_2: (x, y, z) \mapsto (x, y+1, z)$, $g_3: (x, y, z) \mapsto (x, y-1/2, z+\sqrt{3}/2)$ и движением $\beta: (x, y, z) \mapsto (x+1/3, -y/2-(\sqrt{3}/2)z, (\sqrt{3}/2)y-z/2)$;
- 4) Γ_4 порождена сдвигами t_1, t_2, t_3 и движением $\gamma: (x, y, z) \mapsto (x+1/4, -z, y)$;
- 5) Γ_5 порождена сдвигами $t_1, t_2, g_5: (x, y, z) \mapsto (x, y+1/2, z+\sqrt{3}/2)$ и движением $\tau: (x, y, z) \mapsto (x+1/6, y/2-z\sqrt{3}/2, (\sqrt{3}/2)y+z/2)$;
- 6) Γ_6 порождена сдвигами t_1, t_2, t_3 и движениями α , $\nu: (x, y, z) \mapsto (-x, y+1/2, -z+1/2)$, $\mu: (x, y, z) \mapsto (-x+1/2, -y+1/2, z+1/2)$;
- 7) Γ_7 порождена сдвигами t_1, t_2, t_3 и движением $\varepsilon: (x, y, z) \mapsto (x+1/2, y, -z)$;
- 8) Γ_8 порождена сдвигами $t_1, t_2, g_8: (x, y, z) \mapsto (x+1/2, y+1/2, z+1)$ и движением ε ;
- 9) Γ_9 порождена сдвигами t_1, t_2, t_3 и движениями α , $q: (x, y, z) \mapsto (x, y+1/2, -z)$;
- 10) Γ_{10} порождена сдвигами t_1, t_2, t_3 и движениями α , $\delta: (x, y, z) \mapsto (x, y+1/2, -z+1/2)$.

Слоение в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ называется *линейным*, если все слои

задаются уравнением $ax + by + cz + \text{const} = 0$.

Обозначим через $\pi_i: \mathbb{R}^3 \rightarrow M_i = \mathbb{R}^3/\Gamma_i$, $i = 1, \dots, 10$, естественную проекцию, которая является универсальным неразветвленным накрытием. Любое слоение F_i на M_i имеет накрывающее относительно π_i слоение $\overline{F}_i$ на $\mathbb{R}^3$. Назовем слоение F_i на M_i *линейным*, если накрывающее для него слоение $\overline{F}_i$ на $\mathbb{R}^3$ является линейным ($i = 1, \dots, 10$).

ЛЕММА 3.1. *Вполне геодезическое слоение коразмерности один на плоском замкнутом 3-многообразии является линейным.*

Доказательство вытекает из того, что накрывающее слоение на $\mathbb{R}^3$ вполне геодезическое и, следовательно, является линейным.

Очевидно, линейное слоение является слоением с тривиальной группой голономии.

Исследуем возможные линейные слоения на плоских замкнутых 3-многообразиях.

ТЕОРЕМА 3.1. 1) *Среди замкнутых плоских 3-многообразий тор $M_1 = T^3$ – единственное многообразие, на котором существует линейное слоение из плоскостей. На торе также существуют линейные слоения из цилиндров и двумерных торов (с другими слоями линейных слоений на T^3 нет).*

2) *На плоских замкнутых 3-многообразиях M_2, M_7, M_8 существуют линейные слоения без компактных слоев, а также слоения из компактных слоев.*¹

3) *На плоских замкнутых 3-многообразиях M_3 – M_6, M_9, M_{10} существуют линейные слоения только из компактных слоев.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение 1). Согласно [19] слоение из плоскостей существует только на торе T^3 (среди замкнутых 3-многообразий). В силу [16] на T^3 любое слоение с тривиальной группой голономии является слоением либо из плоскостей, либо из цилиндров, либо из двумерных торов. Реализацию всех этих возможностей см., например, в [6].

Докажем утверждение 2). Семейство плоскостей $by + cz + t = 0$, где $b, c \in \mathbb{R}$ фиксированы, t – параметр, принадлежащий $\mathbb{R}$, инвариантно относительно действия группы Γ_2 , следовательно, это семейство определяет линейное слоение $F_2(b, c)$ на многообразии $M_2 = \mathbb{R}^3/\Gamma_2$. Любая плоскость $by + cz + t = 0$ инвариантна относительно сдвига t_1 . Поэтому при рационально независимых числах b, c получаем слоение $F_2(b, c)$ без компактных слоев, а при рациональных b, c получаем слоение $F_2(b, c)$ из компактных слоев. Семейство плоскостей $ax + by + t = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ фиксированы, t – параметр, принадлежащий $\mathbb{R}$, инвариантно относительно действия групп Γ_7, Γ_8 . Следовательно, это семейство определяет линейные слоения $F_7(a, b), F_8(a, b)$ на многообразиях $M_7 = \mathbb{R}^3/\Gamma_7, M_8 = \mathbb{R}^3/\Gamma_8$, соответственно. Любая плоскость $ax + by + t = 0$ инвариантна относительно сдвигов $t_3 \in \Gamma_7$ и $t_1^{-1}t_2^{-1}g_8^2 \in \Gamma_8$. Поэтому для рационально независимых чисел a, b мы получаем слоения $F_7(a, b), F_8(a, b)$ без компактных слоев. Нетрудно проверить, что слоения $F_7(0, 1), F_8(0, 1)$ состоят из компактных слоев.

¹ Возможные слоения без компактных слоев будут исследованы в следующей работе.

Докажем утверждение 3). Для этого исследуем линейные слоения на $\mathbb{R}^3$, инвариантные относительно действия групп $\Gamma_3 - \Gamma_6, \Gamma_9, \Gamma_{10}$. Семейство плоскостей $ax + by + cz + t = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ фиксированы, t — параметр, принадлежащий $\mathbb{R}$, определяет линейное слоение $F_0(a, b, c)$, обозначаемое далее через F_0 , на $\mathbb{R}^3$. Под действием преобразования β это семейство переходит в семейство плоскостей: $ax + (-b/2 + c\sqrt{3}/2)y + (-b\sqrt{3}/2 - c/2)z + t = 0$. Так как система $\lambda b = -b/2 + \sqrt{3}/2c$, $\lambda c = -b\sqrt{3}/2 - c/2$ при любом $\lambda \in \mathbb{R}$ имеет только тривиальное решение $b = c = 0$ (определитель этой системы $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ не имеет действительных корней), то равенство $\beta(F_0) = F_0$ выполняется только в случае $b = c = 0$, $a \neq 0$ — любое. Каждая плоскость $x + t = 0$ инвариантна относительно сдвигов t_2, t_3 . Поэтому слоение $F_0(1, 0, 0)$ индуцирует на M_3 слоение из двумерных торов.

Аналогичные рассуждения проводятся для группы Γ_5 и многообразия M_5 . Под действием преобразования γ плоскость $ax + by + cz + t = 0$ переходит в плоскость $ax + cy - bz + \tilde{t} = 0$. Так как система $\lambda b = c$, $\lambda c = -b$ при любом $\lambda \in \mathbb{R}$ имеет только тривиальное решение $b = c = 0$, то равенство $\gamma(F_0) = F_0$ выполняется только для слоения $F_0 = F_0(1, 0, 0)$. Плоскость $x + t = 0$ инвариантна относительно сдвигов t_2, t_3 , поэтому $F_0(1, 0, 0)$ индуцирует на M_4 слоение из двумерных торов. Под действием преобразований ν, μ плоскость $ax + by + cz + t = 0$ переходит в плоскости $ax - by + cz + t_1 = 0$, $ax + by - cz + t_2 = 0$, соответственно. Из равенств $\nu(F_0) = \mu(F_0) = F_0$ вытекает, что плоскости слоения F_0 имеют либо вид $x + t = 0$, либо $y + t = 0$, либо $z + t = 0$. Во всех случаях мы получаем на M_6 слоение из двумерных торов. Под действием преобразований α, q плоскость $ax + by + cz + t = 0$ переходит в плоскости $-ax + by + cz + t_1 = 0$, $ax + by - cz + t_2 = 0$, соответственно. Отсюда вытекает, что на M_9 проектируется либо слоение $F_0(1, 0, 0)$, либо $F_0(0, 1, 0)$, либо $F_0(0, 0, 1)$. Во всех случаях на M_9 получаем слоение из компактных слоев. Аналогично рассматривается линейное слоение на многообразии M_{10} .

ЗАМЕЧАНИЕ. Многообразия $M_1 - M_6$ являются ориентируемыми многообразиями. На $M_1, M_3 - M_6$ слоения из компактных слоев имеют слои, гомеоморфные двумерному тору. На M_2 существуют слоения из двумерных торов и бутылок Клейна. Многообразия $M_7 - M_{10}$ неориентируемые. На этих многообразиях существуют слоения как из двумерных торов, так и из бутылок Клейна.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. 1) На $M_1 = T^3$ вполне геодезическое слоение является слоением либо из плоскостей, либо из цилиндров, либо из двумерных торов.

2) На плоских замкнутых 3-многообразиях M_2, M_7, M_8 вполне геодезическое слоение является слоением либо из цилиндров, либо из открытых листов Мебиуса, либо из компактных слоев.

3) На плоских 3-многообразиях $M_3 - M_6, M_9, M_{10}$ любое вполне геодезическое слоение является слоением из компактных слоев.

§ 4. Аналог теоремы Новикова—Кнезера для слоений на замкнутых плоских 3-многообразиях

ТЕОРЕМА 4.1. На плоских замкнутых 3-многообразиях M_i , $i = 3-6, 9, 10$,

любое C^r -слоение ($r \geq 2$) коразмерности один имеет компактный слой. На остальных плоских замкнутых 3-многообразиях (т.е. при $i = 1, 2, 7, 8$) существуют C^r -слоения без компактных слоев.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование C^r -слоений ($r \geq 2$) без компактных слоев на многообразиях M_1, M_2, M_7, M_8 следует из теоремы 3.1. Докажем, что на многообразиях $M_j, j = 3-6, 9, 10$, любое C^r -слоение F_j ($r \geq 2$), $j = 3-6, 9, 10$, имеет компактный слой.

Предположим противное. Известно [3, теоремы 3.5.5, 3.5.9], что в каждой группе преобразований $\Gamma_i, i = 1-10$ (такой, что $M_i = \mathbb{R}^3/\Gamma_i$), имеется нормальный делитель $\Gamma_i^{(0)} \subset \Gamma_i$ конечного индекса такой, что $\mathbb{R}^3/\Gamma_i^{(0)}$ есть трехмерный тор $T^3 = M_1$. Таким образом, каждое из плоских многообразий M_2-M_{10} конечнолистно покрывается тором T^3 , причем имеет место коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R}^3/\Gamma_i^{(0)} = T^3 \\ \pi_i \searrow & & \swarrow P_i \\ & \mathbb{R}^3/\Gamma_i & \end{array}$$

где естественная проекция P_i является накрытием. Обозначим через $\tilde{F}_j$ накрывающее для F_j слоение на T^3 относительно накрытия P_j . Так как, в силу предположения, слоение F_j не имеет компактных слоев, то, согласно следствию 1.1, $\tilde{F}_j$ является слоением с тривиальной группой голономии, все слои которого гомеоморфны либо цилиндру, либо плоскости. Пусть $\bar{F}_j$ – накрывающее для F_j слоение в пространстве $\mathbb{R}^3$ относительно накрытия π_j . В силу наличия коммутативной диаграммы слоение $\bar{F}_j$ является накрывающим для слоения $\tilde{F}_j$ относительно накрытия π . Следовательно, слоение $\bar{F}_j$, с одной стороны, должно быть инвариантно относительно действия группы Γ_j , а с другой стороны, должно удовлетворять свойствам слоения, накрывающего некоторое слоение на торе T^3 (в частности, лемме 2.4).

Рассмотрим плоскость $ax + by + cz = 0, a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Обозначим через $K(a, b, c, \varepsilon)$ семейство плоскостей $\tilde{a}x + \tilde{b}y + \tilde{c}z = 0$, нормальные векторы которых $n = (\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c})$ образуют с нормальным вектором $n_0 = (a, b, c)$ угол, меньший $\varepsilon > 0$ (рис. 1). Пусть B_R – открытый шар радиуса $R > 0$ с центром в начале координат O . Тогда объединение $B_R \cup K(a, b, c, \varepsilon)$ образует окрестность $U_R(a, b, c, \varepsilon)$ плоскости $ax + by + cz = 0$.

Согласно лемме 2.4, существует тройка чисел $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ такая, что для любой точки (x, y, z) , лежащей на слое $\bar{L}$ слоения $\bar{F}_j$, выполняется соотношение $\alpha_0 x + \beta_0 y + \gamma_0 z + d(x, y, z) = 0$, где функция $d(x, y, z)$ удовлетворяет условию $(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} d(x, y, z) \rightarrow 0, x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty$.

Расстояние от точки $(x, y, z) \in \bar{L}$ до плоскости $P_0: \alpha_0 x + \beta_0 y + \gamma_0 z = 0$ равно $S(x, y, z) = |d(x, y, z)|(\alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2)^{-1/2}$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется $R_0 > 0$ такое, что если точка $(x, y, z) \in \bar{L}$ лежит вне шара B_{R_0} , то $S(x, y, z) < \varepsilon \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, и, следовательно, $(x, y, z) \in K(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \varepsilon)$.

Отсюда вытекает, что слой $\bar{L}$ лежит в области $U_{R_0}(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \varepsilon)$. Так как $\bar{F}_j$ является слоением либо из плоскостей, либо из цилиндров, то, в силу леммы 2.4,

Рис. 1

по крайней мере одно из чисел $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ иррациональное, и, по крайней мере, два из них отличны от нуля.

С другой стороны, согласно теореме 3.1, на многообразии M_j , $j = 3-6, 9, 10$, существуют линейные слоения только из компактных слоев. Поэтому найдется преобразование $\eta_j \in \Gamma_j$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что плоскость $\eta_j(P_0): \alpha_j x + \beta_j y + \gamma_j z + \delta_j = 0$ и множество $K(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \varepsilon)$ не содержатся в $K(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \varepsilon)$, а множество $K(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \varepsilon)$ не содержится в $K(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \varepsilon)$ (рис. 2).

Рис. 2

Дополнение $\mathbb{R}^3$ к множеству $K(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \varepsilon)$ состоит из двух компонент K_1, K_2 . Так как η_j — изометрия, то существуют две последовательности точек $(x_{1n}, y_{1n}, z_{1n}), (x_{2n}, y_{2n}, z_{2n})$, лежащих на слое $\eta_j(\bar{L})$ и таких, что $(x_{1n}, y_{1n}, z_{1n}) \in K_1, (x_{2n}, y_{2n}, z_{2n}) \in K_2, x_{kn}^2 + y_{kn}^2 + z_{kn}^2 \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty, k = 1, 2$. Поэтому для достаточно большого n найдутся точки $(x_{1n}, y_{1n}, z_{1n}), (x_{2n}, y_{2n}, z_{2n})$, лежащие в разных компонентах множества $\mathbb{R}^3 \setminus U_{R_0}(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \varepsilon)$.

Из теоремы 5.1 [6] вытекает, что любой слой (в частности, и слой $\overline{L}$) слоения $\overline{F}_j$ разбивает $\mathbb{R}^3$. Тогда из включения $\overline{L} \subset U_{R_0}(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \varepsilon)$ следует, что точки $(x_{1n}, y_{1n}, z_{1n}), (x_{2n}, y_{2n}, z_{2n}) \in \eta_j(\overline{L})$ лежат в разных компонентах множества $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{L}$, что невозможно, так как слои слоения не пересекаются.

Список литературы

1. Арансон С. Х. Траектории на неориентируемых двумерных многообразиях // Матем. сб. 1969. Т. 80 (122). № 3. С. 314–333.
2. Арансон С. Х., Жузома Е. В. О топологической классификации слоений Рибба коразмерности один на трехмерном торе // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Межвуз. тематич. сб. научн. тр / ред. Е. А. Леонтович-Андропова. Горький: Горьк. гос. ун-т, 1978. С. 41–64.
3. Вольф Дж. Пространства постоянной кривизны. М.: Наука, 1982.
4. Локоть Т. В. Классы вращения для слоений коразмерности один с тривиальными группами голономии и их применения // Дисс. . . . канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1972.
5. Матвеев С. В., Чернавский А. В. Основы топологии многообразий. Краснодар, 1974.
6. Новиков С. П. Топология слоений // Труды ММО. 1965. Т. 14. С. 248–278.
7. Солодов В. В. Гомеоморфизм прямой и слоения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. № 5. С. 1047–1061.
8. Солодов В. В. Гомеоморфизмы окружности и слоения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. № 3. С. 599–613.
9. Тамура И. Топология слоений. М.: Мир, 1979.
10. Baer R. Isotopie von Kurven auf orientierbaren geschlossenen Flächen und ihr Zusammenhang mit topologischen Deformation der Flächen // J. Reine Angew. Math. 1928. V. 159. № 2. P. 101–116.
11. Haefliger A. Variétés feuilletées // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 1962. V. 16. № 3. P. 367–397.
12. Imanishi H. On the theorem of Denjoy–Sacksteder for codimension one foliations without holonomy // J. Math. Kyoto Univ. 1974. V. 14. № 3. P. 607–634.
13. Kneser H. Reguläre Kurvenscharen auf Ringflächen // Math. Ann. 1924. V. 91. P. 135–154.
14. Lamoureux C. Quelques conditions d'existence de feuilles compactes // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1974. V. 24. № 4. P. 229–240.
15. Markley N. G. The Poincaré–Bendixon theorem for the Klein bottle // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 135. P. 159–165.
16. Moussu R. Feuilletage sans holonomie d'une variété fermée // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1970. V. 270. № 20. P. A1308–A1311.
17. Moussu R., Roussarie R. Une condition suffisante pour qu'un feuilletage soit sans holonomie // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1970. V. 271. № 4. P. A240–A243.
18. Plante J. Foliations with measure preserving holonomy // Ann. of Math. 1975. V. 102. № 2. P. 327–361.
19. Rosenberg H. Foliations by planes // Topology. 1968. № 7. P. 131–138.
20. Schweitzer P. Compact leaves of codimension one foliations // Lecture Notes in Math. 1975. V. 484. P. 273–276.
21. Wood J. Foliations on 3-manifolds // Ann. of Math. 1970. V. 89. № 2. P. 336–358.

Нижегородский государственный
университет им. Н. И. Лобачевского

Поступила в редакцию
13.10.1993 и 15.05.1995