Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Д. Кудрявцев, О лагранжевой асимптотике решений неоднородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, *Матем. сб.*, 2006, том 197, номер 9, 91–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1353>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 11:40:54

УДК 517.91/.93

Л. Д. Кудрявцев

О лагранжевой асимптотике решений неоднородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Изучается задача, когда решения неоднородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, сводящейся в слабо нелинейную систему, имеют ту же асимптотику, что и решения соответствующей однородной системы. Доказываются теоремы существования и единственности решений в целом неоднородной системы при задании в особых точках этих систем асимптотических начальных данных в виде решения какой-либо однородной системы дифференциальных уравнений.

Библиография: 6 названий.

Рассматривается задача о, вообще говоря, нелинейных возмущениях $f(t, \mathbf{x})$ правой части однородной системы линейных дифференциальных уравнений

$$L\mathbf{x} = 0, \quad (1)$$

не влияющих на лагранжево асимптотическое поведение (L -асимптотику) решений системы (1) вблизи особой точки (конечной или бесконечно удаленной). Иначе говоря, изучается вопрос, когда решения однородной системы уравнений (1) и неоднородной

$$L\mathbf{x} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (2)$$

имеют одинаковую L -асимптотику вблизи особой точки системы (2).

Кроме того, доказывается теорема существования и единственности решений в целом неоднородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений при задании в особой точке этой системы асимптотических начальных данных в виде решений какой-либо однородной системы (1) линейных уравнений.

Рассматриваются системы уравнений, которые сводятся к слабо нелинейным уравнениям. Для них строятся почти нормированные пространства, в которых интегральные операторы, порождаемые дифференциальными уравнениями, являются сжимающими. Это позволяет получать не только локальные решения задач, но и решения в целом вместе с их асимптотикой.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05.01.00422а) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1549.2003.1).

Будут употребляться следующие обозначения:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t): [a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (3)$$

– вектор функция, $-\infty < a < b \leq +\infty$;

$$L = \frac{d}{dt} + A(t), \quad (4)$$

где

$$A = A(t): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (5)$$

при каждом фиксированном $t \in [a, b)$ – линейный однородный оператор, непрерывно зависящий от t при его изменении на полуинтервале $[a, b)$;

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}): [a, b) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

– непрерывная на области своего задания вектор-функция, точка $t = b$ – особая точка системы (2), в которой ее правая часть не определена.

Пусть

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \quad (6)$$

– базис в пространстве $\mathbb{R}^n$, x^i , $i = 1, 2, \dots, n$, – координаты вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ относительно базиса (6), т.е. $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$. Здесь и в дальнейшем будем употреблять тензорную запись, индекс суммирования будет меняться всегда от 1 до n .

Пусть

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

– некоторый базис ядра $\ker L$, т.е. фундаментальная система решений однородной системы уравнений (1). Если v_i^j – коэффициенты разложения вектора $\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, по базису (6), т.е. $\mathbf{v}_i = v_i^j \mathbf{e}_j$, то положим

$$V = V(t) = (v_j^i), \quad (8)$$

т.е. (v_j^i) – матрица фундаментальной системы решений (7) (i – номер строки, j – номер столбца). Линейный однородный оператор, задаваемый матрицей (8), будет также обозначаться V .

Для всякой вектор-функции $\mathbf{x}(t): [a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ существует и притом единственное ее представление в виде

$$\mathbf{x}(t) = x_v^j(t) \mathbf{v}_j(t). \quad (9)$$

Вектор-функция $\mathbf{x}(t)$ называется L -асимптотически приближающейся при $t \rightarrow b$ к решению

$$\mathbf{v}(t) = c^j \mathbf{v}_j(t) \quad (10)$$

однородной системы уравнений (1) [1], если

$$\lim_{t \rightarrow b} x_v^j(t) = c^j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

Когда речь идет о L -асимптотическом приближении вектор-функций к алгебраическим вектор-многочленам, из L -асимптотического приближения следует асимптотическое приближение в классическом смысле, но не наоборот [2].

Тем самым в этом случае L -асимптотическое приближение содержит больше информации о функции, чем обычная асимптотика. В общем случае такой связи нет [3].

Для того чтобы непрерывно дифференцируемая вектор-функция $\mathbf{x}(t)$ L -асимптотически приближалась при $t \rightarrow b$ к некоторому решению однородной системы уравнений (1), необходимо и достаточно [3], чтобы сходиллся интеграл

$$\int_a^b V^{-1}(t)(L\mathbf{x})(t) dt, \quad (12)$$

где V^{-1} – оператор, обратный оператору (8).

Задача о L -асимптотическом приближении при $t \rightarrow b$ решений неоднородной системы уравнений (2) к решениям однородной системы (1) сводится к более простой. Именно, все решения неоднородной системы (2), определенные на полуинтервале $[a, b)$, L -асимптотически приближаются при $t \rightarrow b$ к решениям однородной системы уравнений (1) тогда и только тогда, когда все решения уравнения

$$\mathbf{y}' = V^{-1}\mathbf{f}(t, V\mathbf{y}) \quad (13)$$

имеют конечные пределы при $t \rightarrow b$ (т.е. стремятся к векторным константам [1]).

Если система уравнений (13) является слабо нелинейной, то имеются достаточные довольно общие условия для того, чтобы все решения этой системы уравнений стремились при $t \rightarrow b$ к векторным константам.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Нормальная система уравнений

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (14)$$

называется *слабо нелинейной*, если вектор-функция $\mathbf{f}: [a, b) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $-\infty < a < b \leq \infty$, непрерывна на области своего задания, существует такая неотрицательная функция $\varphi: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, что

$$\int_a^b \varphi(t) dt < +\infty, \quad (15)$$

и для любых $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ и $t \in [a, b)$ выполняется неравенство

$$|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x})| \leq \varphi(t)|\mathbf{y} - \mathbf{x}|. \quad (16)$$

Кроме того, каково бы ни было T , $a < T < b$, вектор-функция $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ ограничена на “полосе” $[a, T] \times \mathbb{R}^n$, а функция $\varphi(t)$ – на отрезке $[a, T]$.

Ранее в работах автора (см., например, [4]) вместо термина “слабо нелинейные уравнения” употреблялся менее удачный термин “асимптотически линейные уравнения”.

Заметим, что не всякое линейное уравнение является слабо нелинейным. Например, уравнение $x' = x$, $x(t) \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, является линейным, но не является слабо нелинейным, так как для функции $f(x, t) = x$ имеем $f_x(x, t) = 1$ и потому

эта функция не удовлетворяет условию Липшица “с суммируемой константой” (для нее $\varphi(t) \equiv 1$) на всей числовой оси.

Все решения слабо нелинейной системы уравнений (14) определены на всем полуинтервале $[a, b)$ (конечном или бесконечном). В самом деле, пусть $\mathbf{x}_0(t)$ – какое-либо решение слабо нелинейной системы уравнений (14) и точка t_0 принадлежит области его определения $t_0 \in [a, b)$. Выберем число T так, чтобы $t_0 < T < b$. Согласно определению 1 существуют такие постоянные $c > 0$ и $M > 0$, что

$$|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})| \leq M, \quad |\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})| \leq c|\mathbf{y} - \mathbf{x}|, \quad (t, \mathbf{x}) \in [a, T] \times \mathbb{R}^n.$$

Поэтому задача Коши для системы уравнений (14) с начальными данными $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0(t_0)$ имеет и притом единственное решение на отрезке $[a, T]$, которое, следовательно, совпадает на этом отрезке с заданным решением $\mathbf{x}_0(t)$. Поскольку T – любое число такое, что $t_0 < T < b$, то решение $\mathbf{x}(t)$ задачи Коши $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0(t_0)$ для системы уравнений (14) однозначно определено на всем полуинтервале $[a, b)$.

Обозначим через $\tilde{C}[a, b)$ пространство непрерывных на полуинтервале $[a, b)$ вектор-функций, стремящихся при $t \rightarrow b$ к векторным константам. В качестве нормы в пространстве $\tilde{C}[a, b)$ возьмем равномерную норму

$$\|\mathbf{x}\|_C = \sup_{[a, b)} |\mathbf{x}(t)|.$$

Если интеграл

$$\int_a^b \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) dt \quad (17)$$

сходится для всех вектор-функций $\mathbf{x}(t) \in \tilde{C}[a, b)$, то все решения слабо нелинейной системы (14) принадлежат пространству $\tilde{C}[a, b)$ и, следовательно, стремятся при $t \rightarrow b$ к векторным константам [1].

Недостатком этого результата является то, что “пробное пространство” $\tilde{C}[a, b)$, на функциях которого проверяется сходимость интеграла (17), слишком большое в том смысле, что в него входят функции, не имеющие никакого отношения к системе уравнений (14), например недифференцируемые непрерывные функции.

Покажем, что можно ограничиться проверкой сходимости интеграла (17) лишь на подмножестве пространства $\tilde{C}[a, b)$, которое состоит из функций, имеющих локально интегрируемые производные. Под производной всегда будет пониматься обобщенная производная в смысле определения, данного в монографии [5], т.е. производная абсолютно непрерывной на каждом отрезке $[a, T]$, $a < T < b$, функции, существующая тем самым почти всюду на полуинтервале $[a, b)$.

Трудность, которая при этом возникает, связана с тем, что указанное подмножество пространства $\tilde{C}[a, b)$ не является, очевидно, его замкнутым подмножеством и, следовательно, не представляет собой полного метрического пространства относительно равномерной метрики. Поэтому при применении

на этом подмножестве, например, метода сжимающих отображений для решения системы уравнений (14) нельзя а priori гарантировать, что решение окажется в рассматриваемом подмножестве. Это затруднение можно преодолеть, используя понятие почти нормированного пространства [4].

Будет также доказано, что для любой векторной постоянной существует решение неоднородной слабо нелинейной системы уравнений (14), имеющее эту постоянную своим пределом при $t \rightarrow b$. Отсюда в силу теоремы из статьи [1] непосредственно следует, что если система уравнений (13) является слабо нелинейной и ее интеграл типа (17) сходится для всех функций с локально суммируемой производной, то для любого решения $x(t)$ однородной системы уравнений (1) существует решение неоднородной системы уравнений (2), которое L -асимптотически приближается к вектор-функции $x(t)$.

Напомним определение почти нормированного пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Линейное пространство X называется *почти нормированным* (см. [4]), если на нем определен функционал $\|x\|$, $x \in X$, удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;
- 2) $\| -x \| = \|x\|$;
- 3) $\|x\| \geq 0$;
- 4) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.

Функционал $\|x\|$ называется *почти нормой*. Функционал $\|x\|$, который удовлетворяет только условиям 1)–3), называется *почти полунормой*.

Ясно, что норма и даже квазинорма (см. [6]) являются почти нормой.

Почти нормированное пространство является метрическим пространством с метрикой, задаваемой формулой

$$\rho(x, y) = \|x - y\|. \quad (18)$$

Линейное пространство вектор-функций $\mathbf{x}(t): [a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$, имеющих на полуинтервале $[a, b)$ локально интегрируемые первые производные и стремящихся при $t \rightarrow b$ к векторным константам, обозначим $\widehat{C}^1[a, b)$. Ясно, что $\widehat{C}^1[a, b) \subset \widetilde{C}[a, b)$.

Из формулы Ньютона–Лейбница

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(a) + \int_a^t \mathbf{x}'(t) dt, \quad \mathbf{x}(t) \in C^1[a, b),$$

следует, что существование конечного предела $\lim_{t \rightarrow b} \mathbf{x}(t)$ для функций с локально интегрируемой производной равносильно сходимости интеграла

$$\int_a^t \mathbf{x}'(t) dt. \quad (19)$$

Сходимость этого интеграла является частным случаем сходимости интеграла (12), когда $A(t) \equiv 0$ (см. (5)) и, следовательно, $L = d/dt$ (см. (4)). В этом случае пространство решений $\ker L$ однородного уравнения (1) состоит из постоянных вектор-функций. Если в качестве его базиса взять векторы (6), то

матрица V (см. (8)) будет единичной матрицей, а оператор V – тождественным оператором.

Из сказанного следует, что у всех вектор-функций $\mathbf{x}(t)$, принадлежащих пространству $\widehat{C}^1[a, b]$, интеграл (19) сходится.

Обозначим через $\{b_k\}$ какую-либо числовую последовательность такую, что $a \leq b_k < b$, $k = 1, 2, \dots$, и $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = b$.

ЛЕММА 1. В линейном пространстве $\widehat{C}^1 = \widehat{C}^1[a, b]$ функционал

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|_C + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\|\mathbf{x}'\|^{(k)}}{1 + \|\mathbf{x}'\|^{(k)}}, \quad (20)$$

где

$$\|\mathbf{x}\|_C = \sup_{t \in [a, b]} |\mathbf{x}(t)|, \quad (21)$$

$$\|\mathbf{x}\|^{(k)} = \int_a^{b_k} |\mathbf{x}(t)| dt, \quad (22)$$

является почти нормой.

Это непосредственно следует из леммы 4 в статье [4], в которой доказано, что если в линейном пространстве X задана последовательность полунорм $\|\mathbf{x}\|^{(k)}$, $\mathbf{x} \in X$, $k = 1, 2, \dots$, то и функционал

$$\|\mathbf{x}\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\|\mathbf{x}\|^{(k)}}{1 + \|\mathbf{x}\|^{(k)}}, \quad \mathbf{x} \in X,$$

является почти полунормой в этом пространстве. То, что функционал (20) является не только почти полунормой, но и почти нормой, следует из того, что первое слагаемое $\|\mathbf{x}\|_C$ в правой части равенства (20) является нормой в пространстве $\widehat{C}^1[a, b]$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В [4; § 2] при изучении полиномиальной асимптотики в формуле для определения соответствующей почти нормы применительно к асимптотическому приближению к вектор-многочлену нулевой степени, т.е. к векторной константе $\mathbf{c}$, вместо первого слагаемого $\|\mathbf{x}\|_C$ в правой части равенства (20) бралась норма $\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|_C + |\mathbf{c}|$. Эта норма в данном случае эквивалентна норме $\|\mathbf{x}\|_C$.

Действительно, если $\lim_{t \rightarrow b} \mathbf{x}(t) = \mathbf{c}$, то ясно, что $|\mathbf{c}| \leq \|\mathbf{x}\|_C$. Поэтому

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| + |\mathbf{c}| \leq \|\mathbf{x}\|_C + 2|\mathbf{c}| \leq 3\|\mathbf{x}\|_C.$$

С другой стороны,

$$\|\mathbf{x}\|_C = \|(\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \mathbf{c}\|_C \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|_C + |\mathbf{c}|.$$

ТЕОРЕМА 1. Линейное пространство $\widehat{C}^1[a, b]$ с метрикой (18), порожденной почти нормой (20), является полным метрическим пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\mathbf{x}_n(t)\}$ – фундаментальная последовательность вектор-функций в метрическом пространстве $\widehat{C}^1[a, b]$. Это означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0 , что для всех номеров $n > n_0$ и $m > n_0$ выполняется неравенство

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\| \stackrel{(20)}{=} \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\|_C + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\|\mathbf{x}'_n - \mathbf{x}'_m\|^{(k)}}{1 + \|\mathbf{x}'_n - \mathbf{x}'_m\|^{(k)}} < \varepsilon. \quad (23)$$

Поэтому для любых $n > n_0$ и $m > n_0$ имеет место неравенство

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\|_C < \varepsilon,$$

т.е. последовательность $\{\mathbf{x}_n(t)\}$ является фундаментальной последовательностью в полном нормированном пространстве $\widehat{C}[a, b]$ непрерывных на полуинтервале вектор-функций, стремящихся при $t \rightarrow b$ к векторным постоянным, с равномерной нормой (21). Следовательно, эта последовательность равномерно на полуинтервале $[a, b)$ сходится к некоторой непрерывной на нем функции $\mathbf{x}(t)$:

$$\mathbf{x}_n(t) \stackrel{[a, b)}{\rightrightarrows} \mathbf{x}(t), \quad n \rightarrow \infty, \quad (24)$$

и у нее существует предел

$$\lim_{t \rightarrow b} \mathbf{x}(t), \quad (25)$$

являющийся векторной константой.

Покажем, что вектор-функция $\mathbf{x}(t)$ имеет локально интегрируемую производную.

Зафиксируем номер k и зададим число ε ,

$$0 < \varepsilon < 1. \quad (26)$$

Тогда в силу фундаментальности последовательности $\{\mathbf{x}_n(t)\}$ в пространстве $\widehat{C}^1[a, b]$ существует такой номер n_0 , что для всех $n > n_0$ и $m > n_0$ выполняется неравенство

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\| < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}},$$

а потому в силу (20)

$$\frac{1}{2^k} \cdot \frac{\|\mathbf{x}'_n - \mathbf{x}'_m\|^{(k)}}{1 + \|\mathbf{x}'_n - \mathbf{x}'_m\|^{(k)}} < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}},$$

откуда

$$\|\mathbf{x}'_n - \mathbf{x}'_m\|^{(k)} < \frac{\varepsilon}{2 - \varepsilon} \stackrel{(26)}{<} \varepsilon.$$

Таким образом, согласно (22) последовательность $\{\mathbf{x}'_n(t)\}$ является фундаментальной в полном лебеговом пространстве $L_1[a, b_k]$. Поэтому она сходится в нем. Кроме того, из равномерной сходимости (24) следует, что последовательность $\{\mathbf{x}_n(t)\}$ сходится в среднем на отрезке $[a, b_k]$ к функции $\mathbf{x}(t)$. Таким образом, как сама последовательность $\{\mathbf{x}_n(t)\}$, так и последовательность ее производных $\{\mathbf{x}'_n(t)\}$ сходятся в среднем на отрезке $[a, b_k]$, иначе говоря, $\{\mathbf{x}_n(t)\}$

сходится в полном соболевском пространстве $W_1^1[a, b_k]$ к функции $\mathbf{x}(t)$, поэтому функция $\mathbf{x}(t)$ имеет на отрезке $[a, b_k]$ обобщенную интегрируемую на этом отрезке производную $\mathbf{x}'(t)$, равную пределу в среднем производных $\mathbf{x}'_n(t)$:

$$\mathbf{x}'(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}'_n(t). \quad (27)$$

Так как это верно для любого $k = 1, 2, \dots$, то функция $\mathbf{x}(t)$ имеет локально интегрируемую производную, а поэтому в силу существования предела (25) функция $\mathbf{x}(t)$ принадлежит пространству $\hat{C}^1[a, b]$.

Покажем, что она является пределом последовательности $\mathbf{x}_n(t)$ в смысле метрики, порожденной почти нормой (20).

Зададим $\varepsilon > 0$. Для него существует такой номер k_0 , что

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (28)$$

Далее, существует такой номер n_0 , что для отрезков $[a, b_k]$, $k = 1, 2, \dots, k_0$, при $n > n_0$ в силу условия (27) выполняется неравенство

$$\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_n\|^{(k)} < \frac{\varepsilon}{4k_0}, \quad k = 1, 2, \dots, k_0, \quad (29)$$

а для полуинтервала $[a, b)$ в силу условия (24) – неравенство

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n\|_C < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (30)$$

Отсюда для почти нормы пространства $\hat{C}^1[a, b)$ разности $\mathbf{x} - \mathbf{x}_n$ при $n > n_0$ имеем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n\| &\stackrel{(20)}{=} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n\|_C + \sum_{k=1}^{k_0} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_n\|^{(k)}}{1 + \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_n\|^{(k)}} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_n\|^{(k)}}{1 + \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_n\|^{(k)}} \\ &\stackrel{(30)}{<} \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{k=1}^{k_0} \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_n\|^{(k)} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \stackrel{(28), (29)}{<} \varepsilon. \end{aligned}$$

Это и означает, что последовательность $\{\mathbf{x}_n(t)\}$ сходится в пространстве $\hat{C}^1[a, b)$ к функции $\mathbf{x}(t)$. Теорема 1 доказана.

ЛЕММА 2. Если система уравнений (14) слабо нелинейная, если интеграл (17) сходится для всех функций $\mathbf{x}(t)$ из пространства $\hat{C}^1[a, b)$, если (см. (15))

$$\int_a^b \varphi(t) dt < \frac{1}{2} \quad (31)$$

и $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, то оператор I_1 , задаваемый формулой

$$I_1 \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_a^t \mathbf{f}(u, \mathbf{x}(u)) du, \quad \mathbf{x}(t) \in \hat{C}^1[a, b), \quad (32)$$

является сжимающим оператором, отображающим пространство $\hat{C}^1[a, b)$ в себя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что в предположениях леммы функция $I_1 \mathbf{x}(t)$ непрерывна на полуинтервале $[a, b)$ и имеет предел

$$\lim_{t \rightarrow b} I_1 \mathbf{x}(t) \stackrel{(32)}{=} \mathbf{x}_0 + \int_a^b \mathbf{f}(u, \mathbf{x}(u)) du,$$

равный векторной постоянной. Далее, у функции $I_1 \mathbf{x}(t)$ существует производная

$$(I_1 \mathbf{x}(t))' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)). \quad (33)$$

Эта производная непрерывна и, следовательно, локально интегрируема на полуинтервале $[a, b)$. Это означает, что при $\mathbf{x}(t) \in \widehat{C}^1[a, b)$ имеем $I_1 \mathbf{x}(t) \in \widehat{C}^1[a, b)$.

Покажем, что оператор I_1 сжимающий. Положим

$$\alpha = 2 \int_a^b \varphi(t) dt \stackrel{(31)}{<} 1. \quad (34)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|I_1 \mathbf{y} - I_1 \mathbf{x}\| &\stackrel{(20)}{=} \|I_1 \mathbf{y} - I_1 \mathbf{x}\|_C + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\|(I_1 \mathbf{y} - I_1 \mathbf{x})'\|^{(k)}}{1 + \|(I_1 \mathbf{y} - I_1 \mathbf{x})'\|^{(k)}} \\ &\stackrel{(32), (33)}{\leq} \left\| \int_a^t |\mathbf{f}(u, \mathbf{y}(u)) - \mathbf{f}(u, \mathbf{x}(u))| du \right\|_C \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \int_a^{b_k} |\mathbf{f}(u, \mathbf{y}(u)) - \mathbf{f}(u, \mathbf{x}(u))| du \\ &\stackrel{(16)}{\leq} \int_a^b \varphi(u) |\mathbf{y}(u) - \mathbf{x}(u)| du + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \int_a^b \varphi(u) |\mathbf{y}(u) - \mathbf{x}(u)| du \\ &\leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_C \int_a^b \varphi(u) du \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \right) \stackrel{(34)}{=} \alpha \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_C \leq \alpha \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|, \end{aligned}$$

где $0 < \alpha < 1$. Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Если система уравнений (14) слабо нелинейная, если интеграл (17) сходится для всех функций $\mathbf{x}(t)$ из пространства $\widehat{C}^1[a, b)$, если

$$\int_a^b \varphi(t) dt < \frac{1}{2}$$

и $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, то оператор I_2 , задаваемый формулой

$$I_2 \mathbf{x}(t) = \mathbf{c} - \int_t^b \mathbf{f}(u, \mathbf{x}(u)) du, \quad \mathbf{x}(t) \in \widehat{C}^1[a, b), \quad (35)$$

является сжимающим оператором, отображающим пространство $\widehat{C}^1[a, b)$ в себя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$I_1 \mathbf{x}(t) - I_2 \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 - \mathbf{c} + \int_a^b \mathbf{f}(u, \mathbf{x}(u)) du.$$

В правой части этого равенства стоит векторная постоянная. Поэтому из того, что оператор I_1 отображает пространство $\widehat{C}^1[a, b]$ в себя (лемма 2), следует, что и оператор I_2 делает то же самое.

Сжимаемость оператора I_2 доказывается аналогично сжимаемости оператора I_1 . Действительно, заметив, что

$$(I_2 \mathbf{x}(t))' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)),$$

и снова положив

$$\alpha = 2 \int_a^b \varphi(t) dt,$$

получим

$$\begin{aligned} \|I_2 \mathbf{y} - I_2 \mathbf{x}\| &= \|I_2 \mathbf{y} - I_2 \mathbf{x}\|_C + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\|(I_2 \mathbf{y} - I_2 \mathbf{x})'\|^{(k)}}{1 + \|(I_2 \mathbf{y} - I_2 \mathbf{x})'\|^{(k)}} \\ &\leq \int_a^b \varphi(u) |\mathbf{y}(u) - \mathbf{x}(u)| du + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \int_a^b \varphi(u) |\mathbf{y}(u) - \mathbf{x}(u)| du \\ &\leq \alpha \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_C \leq \alpha \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|, \end{aligned}$$

т.е. оператор I_2 также сжимающий.

ТЕОРЕМА 2. Если система уравнений (14) является слабо нелинейной и интеграл (17) сходится для всех функций $\mathbf{x}(t)$ из пространства $\widehat{C}^1[a, b]$, то

- 1) каждое решение $\mathbf{x}(t)$ системы уравнений (14) имеет своим пределом при $t \rightarrow b$ векторную константу и тем самым $\mathbf{x}(t) \in \widehat{C}^1[a, b]$;
- 2) для каждой векторной константы существует и притом единственное решение системы уравнений (14), которое имеет своим пределом при $t \rightarrow b$ эту константу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что в силу условия (15) существует такое число T , $a < T < b$, что

$$\int_T^b \varphi(t) dt < \frac{1}{2}.$$

Если $\mathbf{x}(t)$ – какое-либо решение системы уравнений (14) на полуинтервале $[T, b)$, то оно является и решением интегрального уравнения

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(T) + \int_T^t \mathbf{f}(u, \mathbf{x}(u)) du. \quad (36)$$

Верно и обратное: каждое решение уравнения (36) на полуинтервале $[T, b)$ является и решением системы (14) на этом полуинтервале.

Оператор I_1 (см. (32) при $a = T$) является сжимающим в пространстве $\widehat{C}^1[T, b)$ (лемма 2). Следовательно, существует единственное решение уравнения (36) в пространстве $\widehat{C}^1[T, b)$. Оно является и решением системы уравнений (14), причем в силу единственности совпадает на полуинтервале $[T, b)$ с данным решением $\mathbf{x}(t)$ системы уравнений (14). Таким образом, $\mathbf{x}(t) \in \widehat{C}^1[T, b)$.

В силу определения слабо нелинейного уравнения всякое решение $\mathbf{x}(t)$ уравнения (14) с полуинтервала $[T, b)$ можно единственным образом продолжить в решение уравнения (14) на весь полуинтервал $[a, b)$. Поэтому всякое решение $\mathbf{x}(t)$ уравнения (14) на интервале $[a, b)$ принадлежит пространству $\widehat{C}^1[a, b)$.

В предположениях теоремы решение системы уравнений (14) на полуинтервале $[T, b)$ при условии $\lim_{t \rightarrow b} \mathbf{x}(t) = \mathbf{c}$, где $\mathbf{c}$ – заданная векторная постоянная, равносильно решению интегрального уравнения

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{c} - \int_t^b \mathbf{f}(u, \mathbf{x}(u)) du.$$

В силу леммы 3 (при $a = T$) это уравнение имеет и притом единственное решение в пространстве $\widehat{C}^1[T, b)$, которое является на полуинтервале $[T, b)$ и решением системы (14). В силу определения слабой нелинейности данное решение однозначно продолжимо на отрезок $[a, T]$.

Теорема 2 доказана.

Вернемся теперь к L -асимптотике решений неоднородных систем дифференциальных уравнений (2). Сформулируем основную теорему.

ТЕОРЕМА 3. *Если система уравнений (13) является слабо нелинейной и интеграл*

$$\int_a^b V^{-1} \mathbf{f}(t, V \mathbf{y}(t)) dt$$

сходится для любой функции $\mathbf{y}(t) \in \widehat{C}^1[a, b)$, то

- 1) *каждое решение неоднородной системы (2) L -асимптотически приближается при $t \rightarrow b$ к некоторому решению однородной системы уравнений (1);*
- 2) *для каждого решения $\mathbf{v}(t)$ однородной системы уравнений (1) существует и притом единственное решение неоднородной системы (2), которое L -асимптотически приближается при $t \rightarrow b$ к вектор-функции $\mathbf{v}(t)$.*

Эта теорема непосредственно следует из теоремы 2 и установленной ранее [1] эквивалентности задачи о L -асимптотическом приближении при $t \rightarrow b$ решений системы уравнений (2) к решениям системы (1) и задачи о стремлении при $t \rightarrow b$ решений системы уравнений (13) к векторным константам.

Вторые утверждения в теоремах 2 и 3 являются теоремами существования и единственности решений задачи с асимптотическими начальными данными в особой точке системы уравнения.

Применение теоремы 3 не ограничивается системами уравнений вида (2). Ее можно применить к любой нормальной системе уравнений (14), добавив к обеим частям равенства член $A\mathbf{x}$, т.е. записав систему (14) в виде

$$L\mathbf{x} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) + A\mathbf{x}.$$

Таким образом, для нормальной системы (14) при указанных в теореме 3 условиях на правую часть системы (в данном случае на $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) + A\mathbf{x}$) можно решать задачу с асимптотическими начальными данными в виде решения любой однородной системы вида (1).

Список литературы

- [1] Л. Д. Кудрявцев, “Асимптотика решений дифференциальных уравнений вблизи сингулярных точек”, *Функциональные пространства, гармонический анализ, дифференциальные уравнения*, Тр. МИАН, **232**, Наука, М., 2001, 194–217.
- [2] Л. Д. Кудрявцев, “Полиномиальная стабилизация и ее приложения в теории обыкновенных дифференциальных уравнений”, *Дифференц. уравнения*, **29**:9 (1993), 1486–1503.
- [3] Л. Д. Кудрявцев, “Стабилизационные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений”, *Дифференц. уравнения*, **29**:12 (1993), 2056–2078.
- [4] Л. Д. Кудрявцев, “Почти нормированные пространства функций с полиномиальной асимптотикой”, *Матем. сб.*, **194**:1 (2003), 103–120.
- [5] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1977.
- [6] К. Иосида, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967.

Л. Д. Кудрявцев (L. D. Kudryavtsev)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: kudryav@mi.ras.ru

Поступила в редакцию

19.10.2005