Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Коновалов, Влияние формы функций на порядки кусочно полиномиальной и рациональной аппроксимации, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 5, 3–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1355>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 09:46:21

УДК 517.5

В. Н. Коновалов

Влияние формы функций на порядки кусочно полиномиальной и рациональной аппроксимации

Пусть Δ_+^s – множество функций $x: I \rightarrow \mathbb{R}$ на конечном интервале I таких, что разделенные разности $[x; t_0, \dots, t_s]$ порядка $s \in \mathbb{N}$ этих функций являются неотрицательными для всех наборов из $s + 1$ различных точек $t_0, \dots, t_s \in I$. Пусть $\Sigma_{r,n} = \{\sigma_{r,n}\}$ – множество кусочно полиномиальных сплайнов $\sigma_{r,n}$ порядка r с $n - 1$ свободными узлами, а $R_n = \{\rho_n\}$ – множество рациональных функций $\rho_n = \hat{\pi}_n / \check{\pi}_n$, где $\hat{\pi}_n$ и $\check{\pi}_n$ – многочлены порядка n . Для классов $\Delta_+^s B_p := \Delta_+^s \cap B_p$, где B_p – единичный шар в L_p , установлены точные порядки

$$E(\Delta_+^s B_p, \Sigma_{r,n})_{L_q} \asymp n^{-\min\{r,s\}} \quad \text{и} \quad E(\Delta_+^s B_p, R_n)_{L_q} \asymp n^{-s}$$

наилучших приближений в метриках L_q при условии, что $1 \leq q < p \leq \infty$.

Библиография: 18 названий.

§1. Введение. Формулировки основных результатов

При $s \in \mathbb{N}$ функцию $x: I \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть *s-монотонной* на промежутке $I \subseteq \mathbb{R}$ (интервале, полуинтервале или отрезке), если для всех наборов из $s + 1$ различных точек $t_0, \dots, t_s \in I$ соответствующие разделенные разности $[x; t_0, \dots, t_s]$ порядка s этой функции являются неотрицательными. Очевидно, что *s-монотонные* функции при $s = 1$ и $s = 2$ – это соответственно неубывающие и выпуклые функции на I . Таким образом, параметр s характеризует форму функций.

Известны (см., например, [1]–[3]) следующие свойства *s-монотонных* функций. Если функция x имеет непрерывную на I производную $x^{(s)}$ порядка s , то эта функция является *s-монотонной* тогда и только тогда, когда $x^{(s)}(t) \geq 0$, $t \in I$. Ясно также, что у 1-монотонной функции x существуют в каждой внутренней точке $t \in I$ конечные пределы $x_-(t)$ и $x_+(t)$ слева и справа. Если же $s > 1$ и функция x является *s-монотонной* на I , то при всех $k \leq s - 2$ существуют обычные производные $x^{(k)}$ порядка k в каждой внутренней точке $t \in I$, являющиеся $(s - k)$ -монотонными функциями на любом интервале из I . В частности, производная $x^{(s-2)}$ существует и является выпуклой функцией на любом интервале из I . Кроме того, $x^{(s-2)}$ удовлетворяет (локально) условию Липшица на каждом внутреннем отрезке из I . Следовательно, функция $x^{(s-2)}$ является локально абсолютно непрерывной на I . Односторонние производные $x_-^{(s-1)}(t)$ и $x_+^{(s-1)}(t)$ слева и справа существуют в каждой внутренней точке $t \in I$ и являются неубывающими функциями. Обычная производная $x^{(s-1)}$ существует почти всюду на I , за исключением не более чем счетного множества точек.

Класс всех s -монотонных на I функций будем обозначать через $\Delta_+^s(I)$. Кроме того, если на I определен некоторый класс функций $W(I)$, то полагаем $\Delta_+^s W(I) := \Delta_+^s(I) \cap W(I)$. Через $L_p(I)$, $1 \leq p \leq \infty$, обозначаем, как обычно, линейное пространство всех измеримых по Лебегу функций $x: I \rightarrow \mathbb{R}$ с конечной нормой $\|x\|_{L_p(I)}$. При $p = \infty$ под $\|x\|_{L_\infty(I)}$ понимается ess sup - или sup -норма. Единичный шар пространства $L_p(I)$ обозначаем через $B_p(I)$. Для промежутка I с концами в точках $a := -1$ и $b := 1$ его обозначение будет иногда опускаться. Например, если $I = (-1, 1)$, то $W := W(I)$.

Нетрудно проверить, что $\Delta_+^s B_p \not\subset L_q$ при $1 \leq p < q \leq \infty$. Следует также отметить, что несмотря на наличие при $s > 1$ у функций $x \in \Delta_+^s B_p$ определенных дифференциальных свойств, нельзя, вообще говоря, гарантировать при $1 \leq p < \infty$ ограниченность норм производных $x^{(k)}$ порядка $k \geq 1$ в каком-либо из пространств L_q , $1 \leq q \leq \infty$. Лишь для функций $x \in \Delta_+^s B_\infty$, где $s > 1$, можно утверждать, что $\|x'\|_{L_1} < \infty$.

Обозначим через $P_n(I)$, где $n \in \mathbb{N}$, множество всех алгебраических многочленов π_n порядка $\leq n$ (т.е. степени $\leq n-1$), определенных на промежутке I . Через $R_n(I)$ обозначаем множество всех рациональных функций на I , имеющих вид $\rho_n = \hat{\pi}_n / \check{\pi}_n$, где $\hat{\pi}_n, \check{\pi}_n \in P_n$. При этом предполагается, что $\check{\pi}_n \neq 0$. В тех точках $t \in I$, где $\check{\pi}_n(t) = 0$, функция ρ_n может принимать произвольные конечные значения. Если на промежутке I с концами в точках $a := -1$ и $b := 1$ задан некоторый класс W функций x такой, что $W \subset L_q$, то через

$$E(W, R_n)_{L_q} := \sup_{x \in W} \inf_{\rho_n \in R_n} \|x - \rho_n\|_{L_q}$$

обозначим величину его наилучшего приближения в L_q множеством R_n .

А. П. Булановым [4] было установлено, что для множества $\Delta_+^2 B_\infty$ всех выпуклых на интервале $I := (-1, 1)$ функций x , удовлетворяющих ограничению $\|x\|_{L_\infty} \leq 1$, справедливы двухсторонние оценки

$$c_1 n^{-1} \leq E(\Delta_+^2 B_\infty, R_n)_{L_\infty} \leq c_2 n^{-1} \log^2(n+1), \quad n \geq 1,$$

где $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ — абсолютные постоянные.

Затем В. А. Попов и П. П. Петрушев [5] усилили оценку сверху, доказав, что

$$E(\Delta_+^2 B_\infty, R_n)_{L_\infty} \leq c n^{-1}, \quad n \geq 1,$$

где $c > 0$ — абсолютная постоянная. Таким образом, был найден точный порядок

$$c_1 n^{-1} \leq E(\Delta_+^2 B_\infty, R_n)_{L_\infty} \leq c_2 n^{-1}, \quad n \geq 1,$$

наилучших равномерных приближений класса $\Delta_+^2 B_\infty$ рациональными функциями.

К. Г. Иванов [6] также установил, что точный порядок наилучшего приближения в метрике L_1 класса $\Delta_+^2 B_\infty$ ломаными, имеющими не более чем n звеньев, равен n^{-2} .

Эти результаты ясно указали на то, что форма функций может существенным образом влиять на порядки их приближения. Отметим, что вопросы аппроксимации классов s -монотонных функций из пространств Соболева исследовались

в [7]–[12]. В [13], [14] изучалось поведение формосохраняющих поперечников типа Колмогорова классов $\Delta_+^s B_p$.

В настоящей работе решается задача о точных порядках наилучших приближений классов $\Delta_+^s B_p$ при всех $s \in \mathbb{N}$ в метриках L_q для $1 \leq q < p \leq \infty$ сплайнами со свободными узлами и рациональными функциями.

Через $\Sigma_{r,n}(I)$, где $r, n \in \mathbb{N}$, обозначим множество всех определенных на промежутке I кусочно полиномиальных сплайнов $\sigma_{r,n}$ порядка $\leq r$ с не более чем $n - 1$ свободными узлами. По определению $\sigma_{r,n} \in \Sigma_{r,n}(I)$, если существует некоторый набор $\{I_i\}_{i=1}^m$ из $m \leq n$ попарно непересекающихся интервалов $I_i \subseteq I$, суммарная длина которых равна длине I и таких, что на каждом из интервалов I_i сплайн $\sigma_{r,n}$ совпадает с некоторым многочленом $\pi_r(\cdot; I_i) \in P_r(I_i)$. Точки промежутка I , в которых сплайн $\sigma_{r,n}$ или хотя бы одна из его производных имеет разрыв, называются *узлами*. Узлы, лежащие внутри промежутка I , будем называть *свободными*.

Прежде чем сформулировать полученные результаты, условимся еще о некоторых обозначениях. Через $|I|$ будут обозначаться длины промежутков I , а через $c := c(\alpha, \beta, \dots, \gamma)$ – различные положительные “постоянные”, зависящие от параметров $\alpha, \beta, \dots, \gamma$. Если заданы две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ положительных чисел a_n и b_n , то эти последовательности удовлетворяют соотношению $a_n \asymp b_n$, $n \geq 1$, тогда и только тогда, когда существуют не зависящие от n постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ такие, что $c_1 \leq a_n/b_n \leq c_2$ для всех $n \geq 1$.

Основные результаты настоящей работы приведены в следующих двух теоремах, где предполагается, что классы $\Delta_+^s B_p$ заданы на интервале $I := (-1, 1)$.

ТЕОРЕМА 1. *Если $r, s \in \mathbb{N}$ и $1 \leq q < p \leq \infty$, то*

$$E(\Delta_+^s B_p, \Sigma_{r,n})_{L_q} \asymp n^{-\min\{r,s\}}, \quad n \geq 1. \quad (1.1)$$

ТЕОРЕМА 2. *Если $s \in \mathbb{N}$ и $1 \leq q < p \leq \infty$, то*

$$E(\Delta_+^s B_p, R_n)_{L_q} \asymp n^{-s}, \quad n \geq 1. \quad (1.2)$$

§ 2. Вспомогательные утверждения

Приведенная ниже лемма 3 доказана в [14; лемма 3]. В этой лемме и далее для функций $x: I \rightarrow \mathbb{R}$, имеющих в точке $t \in I$ интервала I конечные односторонние производные $x_-^{(k)}(t)$ и $x_+^{(k)}(t)$ порядка $k \in \mathbb{N}$, полагаем

$$x^{(k)}(t) := \frac{1}{2}(x_-^{(k)}(t) + x_+^{(k)}(t)).$$

Ясно, что если в какой-либо точке интервала I существует обычная производная порядка $k \in \mathbb{N}$, то она совпадает с так определяемой обобщенной производной. При $k = 0$ полагаем $x^{(0)}(t) := x(t)$, $t \in I$.

ЛЕММА 3. *Пусть $x \in \Delta_+^s L_p(I)$, $s \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, где I – конечный интервал. Пусть $\bar{t}$ – середина интервала I и*

$$\pi_s(t; x; \bar{t}) := \sum_{k=0}^{s-1} \frac{x^{(k)}(\bar{t})}{k!} (t - \bar{t})^k, \quad t \in I.$$

Тогда для функции

$$\tilde{x}(t) := x(t) - \pi_s(t; x; \bar{t}), \quad t \in I,$$

будет справедливо неравенство

$$\|\tilde{x}\|_{L_p(I)} \leq \tilde{c} \|x\|_{L_p(I)},$$

где $\tilde{c} = \tilde{c}(s, p)$.

ЛЕММА 4. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\gamma > 0$ и $\delta_i > 0$, $i = 1, \dots, n$. Тогда

$$\sum_{i=1}^n \delta_i \left(\sum_{j=1}^i \delta_j \right)^\gamma \geq (\gamma + 1)^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \delta_i \right)^{\gamma+1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если положить

$$\tau_0 := 0, \quad \tau_i := \sum_{j=1}^i \delta_j, \quad i = 1, \dots, n,$$

то утверждение леммы 4 следует из соотношений

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \delta_i \left(\sum_{j=1}^i \delta_j \right)^\gamma &= \sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i-1}) \tau_i^\gamma \\ &\geq \int_{\tau_0}^{\tau_n} \tau^\gamma d\tau = (\gamma + 1)^{-1} \tau_n^\gamma = (\gamma + 1)^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \delta_i \right)^{\gamma+1}. \end{aligned}$$

Лемма 4 доказана.

В следующей лемме и далее считаем, что $(\sum_{i=1}^n |a_i|^\infty)^{1/\infty} := \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|$.

ЛЕММА 5. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\delta_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, $1 \leq p \leq \infty$, а числа $\alpha > 0$ и $\beta \geq 0$ удовлетворяют условию $\alpha - \beta - 1/p > 0$. Тогда

$$\left(\sum_{i=1}^n \left(\delta_i^{1/p} \sum_{j=1}^i \delta_j^{-\alpha} \left(\sum_{k=j}^i \delta_k \right)^\beta \right)^p \right)^{-1/p} \leq c \left(\sum_{i=1}^n \delta_i \right)^{\alpha - \beta - 1/p} n^{-\alpha - 1},$$

где $c = c(\alpha, \beta, p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вначале случай $1 \leq p < \infty$. Воспользовавшись известным неравенством

$$\sum_{i=1}^n |a_i| \leq n^{1-1/p} \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{1/p},$$

получим

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^n \left(\delta_i^{1/p} \sum_{j=1}^i \delta_j^{-\alpha} \left(\sum_{k=j}^i \delta_k \right)^\beta \right)^p \right)^{-1/p} \\ & \leq n^{1-1/p} \left(\sum_{i=1}^n \delta_i^{1/p} \sum_{j=1}^i \delta_j^{-\alpha} \left(\sum_{k=j}^i \delta_k \right)^\beta \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Меняя затем порядок суммирования, имеем

$$\sum_{i=1}^n \delta_i^{1/p} \sum_{j=1}^i \delta_j^{-\alpha} \left(\sum_{k=j}^i \delta_k \right)^\beta = \sum_{i=1}^n \delta_i^{-\alpha} \sum_{j=i}^n \delta_j^{1/p} \left(\sum_{k=i}^j \delta_k \right)^\beta. \quad (2.2)$$

Кроме того, учитывая соотношения

$$\sum_{k=i}^j \delta_k = \left(\left(\sum_{k=i}^j (\delta_k^{1/p})^p \right)^{1/p} \right)^p \geq n^{1-p} \left(\sum_{k=i}^j \delta_k^{1/p} \right)^p,$$

приходим к неравенствам

$$\sum_{i=1}^n \delta_i^{-\alpha} \sum_{j=i}^n \delta_j^{1/p} \left(\sum_{k=i}^j \delta_k \right)^\beta \geq n^{\beta(1-p)} \sum_{i=1}^n \delta_i^{-\alpha} \sum_{j=i}^n \delta_j^{1/p} \left(\sum_{k=i}^j \delta_k^{1/p} \right)^{\beta p}. \quad (2.3)$$

Воспользовавшись леммой 4 при $\gamma := \beta p$, получим

$$\sum_{j=i}^n \delta_j^{1/p} \left(\sum_{k=i}^j \delta_k^{1/p} \right)^{\beta p} \geq (\beta p + 1)^{-1} \left(\sum_{k=i}^j \delta_k^{1/p} \right)^{\beta p + 1}.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^n \delta_i^{-\alpha} \sum_{j=i}^n \delta_j^{1/p} \left(\sum_{k=i}^j \delta_k^{1/p} \right)^{\beta p} \geq (\beta p + 1)^{-1} \sum_{i=1}^n \delta_i^{-\alpha} \left(\sum_{j=i}^n \delta_j^{1/p} \right)^{\beta p + 1}. \quad (2.4)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^n \delta_i^{-\alpha} \left(\sum_{j=i}^n \delta_j^{1/p} \right)^{\beta p + 1} \right)^{-1/(\alpha p)} \\ & = \left(\sum_{i=1}^n \left(\delta_i^{1/p} \left(\sum_{j=i}^n \delta_j^{1/p} \right)^{-(\beta p + 1)/(\alpha p)} \right)^{-\alpha p} \right)^{-1/(\alpha p)}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Воспользуемся теперь известным неравенством (см. [15; раздел 2.8, неравенство (2.8.4)])

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^{-\lambda} \right)^{-1/\lambda} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i, \quad (2.6)$$

которое справедливо для произвольных положительных чисел λ и a_i , $i = 1, \dots, n$.
Полагая в этом неравенстве $\lambda := \alpha p$ и

$$a_i := \delta_i^{1/p} \left(\sum_{j=i}^n \delta_j^{1/p} \right)^{-(\beta p + 1)/(\alpha p)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

получаем оценку

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^n \left(\delta_i^{1/p} \left(\sum_{j=i}^n \delta_j^{1/p} \right)^{-(\beta p + 1)/(\alpha p)} \right)^{-\alpha p} \right)^{-1/(\alpha p)} \\ & \leq n^{-1-1/(\alpha p)} \sum_{i=1}^n \delta_i^{1/p} \left(\sum_{j=i}^n \delta_j^{1/p} \right)^{-(\beta p + 1)/(\alpha p)}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Полагая затем

$$\tau_i := \sum_{j=i}^n \delta_j^{1/p}, \quad i = 1, \dots, n, \quad \tau_{n+1} := 0,$$

имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \delta_i^{1/p} \left(\sum_{j=i}^n \delta_j^{1/p} \right)^{-(\beta p + 1)/(\alpha p)} = \sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i+1}) \tau_i^{-(\beta p + 1)/(\alpha p)} \\ & \leq \int_{\tau_{n+1}}^{\tau_1} \tau^{-(\beta p + 1)/(\alpha p)} d\tau = \left(1 - \frac{\beta p + 1}{\alpha p} \right)^{-1} \tau_1^{1-(\beta p + 1)/(\alpha p)} \\ & = \frac{\alpha}{\alpha - \beta - 1/p} \left(\sum_{i=1}^n \delta_i^{1/p} \right)^{(\alpha - \beta - 1/p)/\alpha}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

А так как

$$\sum_{i=1}^n \delta_i^{1/p} \leq n^{1-1/p} \left(\sum_{i=1}^n \delta_i \right)^{1/p}, \quad (2.9)$$

то из соотношений (2.1)–(2.5) и (2.7)–(2.9) следует утверждение леммы 5 при $1 \leq p < \infty$, где $c := (\beta p + 1)\alpha^{\alpha p}(\alpha - \beta - 1/p)^{-\alpha p}$.

Осталось рассмотреть случай $p = \infty$. В этом случае необходимо доказать, что

$$\left(\sum_{i=1}^n \delta_i^{-\alpha} \left(\sum_{j=i}^n \delta_j \right)^{\beta} \right)^{-1} \leq c \left(\sum_{i=1}^n \delta_i \right)^{\alpha - \beta} n^{-\alpha - 1}, \quad (2.10)$$

где $c = c(\alpha, \beta)$.

Вновь воспользовавшись неравенством (2.6), но уже для $\lambda := \alpha$ и

$$a_i := \delta_i \left(\sum_{j=i}^n \delta_j \right)^{-\beta/\alpha}, \quad i = 1, \dots, n,$$

имеем

$$\left(\sum_{i=1}^n \left(\delta_i \left(\sum_{j=i}^n \delta_j \right)^{-\beta/\alpha} \right)^{-\alpha} \right)^{-1/\alpha} \leq n^{-1-1/\alpha} \sum_{i=1}^n \delta_i \left(\sum_{j=i}^n \delta_j \right)^{-\beta/\alpha}. \quad (2.11)$$

Далее, полагая

$$\tau_i := \sum_{j=i}^n \delta_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad \tau_{n+1} := 0,$$

получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \delta_i \left(\sum_{j=i}^n \delta_j \right)^{-\beta/\alpha} &= \sum_{i=1}^n (\tau_i - \tau_{i+1}) \tau_i^{-\beta/\alpha} \leq \sum_{i=1}^n \int_{\tau_{i+1}}^{\tau_i} \tau^{-\beta/\alpha} d\tau \\ &= \int_{\tau_{n+1}}^{\tau_1} \tau^{-\beta/\alpha} d\tau = \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} \right)^{-1} \tau_1^{1-\beta/\alpha} = \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \delta_i \right)^{1-\beta/\alpha}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Но тогда из (2.11) и (2.12) следует неравенство (2.10), где $c := (\alpha - \beta)^{-\alpha} \alpha^\alpha$. Лемма 5 доказана.

ЛЕММА 6. Пусть на множестве всех отрезков $[a, b] \subseteq [0, 1]$, где $a \leq b$, определено отображение $\mu: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ такое, что

- 1) $\mu([a, b]) \geq 0 \quad \forall [a, b] \subseteq [0, 1]$;
- 2) $\mu([c, c]) = 0 \quad \forall c \in [0, 1]$;
- 3) $\mu([a, t])$ – непрерывная и неубывающая функция по t на $[a, 1] \quad \forall a \in [0, 1]$;
- 4) $\mu([t, b])$ – непрерывная и невозрастающая функция по t на $[0, b] \quad \forall b \in [0, 1]$.

Тогда при каждом $n \in \mathbb{N}$ существует разбиение $0 =: t_0^* \leq t_1^* \leq \dots \leq t_n^* := 1$ отрезка $[0, 1]$ на отрезки $[t_{i-1}^*, t_i^*]$, $i = 1, \dots, n$, такие, что

$$\max_{1 \leq i \leq n} \mu([t_{i-1}^*, t_i^*]) = \min_{1 \leq i \leq n} \mu([t_{i-1}^*, t_i^*]).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 1$ утверждение леммы 6 очевидно. Поэтому будем считать, что $n > 1$. Полагая $t_0 := 0$ и $t_n := 1$, определяем на $(n - 1)$ -мерном симплексе

$$S^{n-1} := \{ \mathbf{t} \mid \mathbf{t} := (t_1, \dots, t_{n-1}), \quad 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq 1 \}$$

следующие непрерывные функции

$$\begin{aligned} M(\mathbf{t}) &:= \max_{1 \leq i \leq n} \mu([t_{i-1}, t_i]), \quad m(\mathbf{t}) := \min_{1 \leq i \leq n} \mu([t_{i-1}, t_i]), \\ \Delta(\mathbf{t}) &:= M(\mathbf{t}) - m(\mathbf{t}). \end{aligned}$$

Обозначим через $J(\mathbf{t}) := \{j(\mathbf{t})\}$ множество всех индексов $j(\mathbf{t}) \in \{1, \dots, n\}$ таких, что

$$\mu([t_{j(\mathbf{t})-1}, t_{j(\mathbf{t})}]) = M(\mathbf{t}).$$

Пусть T^* – множество всех точек $\mathbf{t}^* := (t_1^*, \dots, t_{n-1}^*) \in S^{n-1}$ таких, что

$$\Delta(\mathbf{t}^*) = \min_{\mathbf{t} \in S^{n-1}} \Delta(\mathbf{t}).$$

Так как функция Δ непрерывна, то $T^* \neq \emptyset$. Зафиксируем произвольную точку $\mathbf{t}^* \in T^*$ и допустим от противного, что $\Delta(\mathbf{t}^*) > 0$. Тогда $M(\mathbf{t}^*) > 0$ и $1 \leq \text{card } J(\mathbf{t}^*) < n$. Также ясно, что существует индекс $j(\mathbf{t}^*) \in J(\mathbf{t}^*)$ такой, что хотя бы один из индексов $j(\mathbf{t}^*) - 1$ или $j(\mathbf{t}^*) + 1$ не принадлежит множеству $J(\mathbf{t}^*)$. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что $1 < j(\mathbf{t}^*) \leq n$ и $(j(\mathbf{t}^*) - 1) \notin J(\mathbf{t}^*)$. Очевидно, что в этом случае $t_{j(\mathbf{t}^*)-1}^* < t_{j(\mathbf{t}^*)}^*$ и $\mu([t_{j(\mathbf{t}^*)-2}^*, t_{j(\mathbf{t}^*)-1}^*]) < \mu([t_{j(\mathbf{t}^*)-1}^*, t_{j(\mathbf{t}^*)}^*])$. Но тогда из условий 1)–4) леммы 6 следует существование числа $\hat{t}^* \in (t_{j(\mathbf{t}^*)-1}^*, t_{j(\mathbf{t}^*)}^*)$ такого, что

$$m(\mathbf{t}^*) < \mu([t_{j(\mathbf{t}^*)-2}^*, \hat{t}^*]) < \mu([\hat{t}^*, t_{j(\mathbf{t}^*)}^*]) < M(\mathbf{t}^*).$$

Полагаем $\hat{\mathbf{t}}^* = (\hat{t}_1^*, \dots, \hat{t}_{n-1}^*)$, где $\hat{t}_i^* := t_i^*$ при $i \neq j(\mathbf{t}^*) - 1$, а $\hat{t}_{j(\mathbf{t}^*)-1}^* = \hat{t}^*$.

Ясно, что если $\text{card } J(\mathbf{t}^*) = 1$, то $\Delta(\hat{\mathbf{t}}^*) < \Delta(\mathbf{t}^*)$ и мы приходим к неравенству

$$\min_{\mathbf{t} \in S^{n-1}} \Delta(\mathbf{t}) \leq \Delta(\hat{\mathbf{t}}^*) < \min_{\mathbf{t} \in S^{n-1}} \Delta(\mathbf{t}),$$

которое свидетельствует о невозможности выполнения неравенства $\Delta(\mathbf{t}^*) > 0$.

Если же $\text{card } J(\mathbf{t}^*) > 1$, то $\hat{\mathbf{t}}^* \in T^*$ и при этом $\text{card } J(\hat{\mathbf{t}}^*) = \text{card } J(\mathbf{t}^*) - 1$.

Повторяя конечное число раз приведенные выше рассуждения, мы докажем существование точки $\check{\mathbf{t}}^* \in S^{n-1}$ такой, что

$$\min_{\mathbf{t} \in S^{n-1}} \Delta(\mathbf{t}) \leq \Delta(\check{\mathbf{t}}^*) < \min_{\mathbf{t} \in S^{n-1}} \Delta(\mathbf{t}).$$

Полученное противоречие свидетельствует о том, что для $\mathbf{t}^* \in T^*$ будет выполняться равенство $\Delta(\mathbf{t}^*) = 0$. Лемма 6 доказана.

ЛЕММА 7. Пусть I_* и I^* – конечные интервалы такие, что $I_* \subseteq I^*$. Если $r \in \mathbb{N}_0$, $s \in \mathbb{N}$, $r \leq s - 1$ и $1 \leq p, q \leq \infty$, то для каждого многочлена π_s порядка $\leq s$ справедливо неравенство

$$\|\pi_s^{(r)}\|_{L_q(I^*)} \leq c |I_*|^{-s+1/p'} |I^*|^{s-r-1/q'} \|\pi_s\|_{L_p(I_*)},$$

где $c = c(r, s)$, $1/p' := 1 - 1/p$ и $1/q' := 1 - 1/q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности рассуждений, будем предполагать, что центр интервала I_* находится в точке $\bar{t}_* = 0$. Полагаем

$$\phi(t) := \begin{cases} \gamma^{-1} e^{t^2/(t^2-1)}, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geq 1, \end{cases}$$

где

$$\gamma := \int_{-1}^1 e^{t^2/(t^2-1)} dt.$$

Ясно, что $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и $\|\phi\|_{L_1(-1,1)} = 1$. Отправляясь от функции ϕ , рассмотрим следующую функцию

$$\phi(t; I_*) := \frac{2}{|I_*|} \phi\left(\frac{2t}{|I_*|}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, что $\phi(t; I_*) > 0$ для $t \in I_*$ и $\phi(t; I_*) = 0$ для $t \in \mathbb{R} \setminus I_*$. Также очевидно, что $\|\phi(\cdot; I_*)\|_{L_1(I_*)} = 1$. Нетрудно проверить, что

$$\|\phi^{(l)}(\cdot; I_*)\|_{L_\infty(I_*)} \leq c_l |I_*|^{-l-1}, \quad l \in \mathbb{N}_0, \quad (2.13)$$

где c_k зависят только от k .

Из формулы Тейлора следует, что для каждого многочлена π_s справедливо тождество

$$\pi_s^{(r)}(t) = \sum_{k=r}^{s-1} \frac{\pi_s^{(k)}(\tau)}{(k-r)!} (t-\tau)^{k-r}, \quad t, \tau \in \mathbb{R}, \quad r \in \mathbb{N}_0.$$

Умножив обе части этого тождества на $\phi(\tau; I_*)$, а затем интегрируя их по τ на I_* , получаем

$$\pi_s^{(r)}(t) = \sum_{k=r}^{s-1} \frac{1}{(k-r)!} \int_{I_*} \pi_s^{(k)}(\tau) (t-\tau)^{k-r} \phi(\tau; I_*) d\tau. \quad (2.14)$$

При этом было использовано равенство $\|\phi(\cdot; I_*)\|_{L_1(I_*)} = 1$. Далее, с помощью интегрирования по частям приходим к равенствам

$$\int_{I_*} \pi_s^{(k)}(\tau) (t-\tau)^{k-r} \phi(\tau; I_*) d\tau = (-1)^k \int_{I_*} \pi_s(\tau) \frac{d^k}{d\tau^k} ((t-\tau)^{k-r} \phi(\tau; I_*)) d\tau. \quad (2.15)$$

Воспользовавшись формулой Лейбница для производных произведения двух функций, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{d\tau^k} ((t-\tau)^{k-r} \phi(\tau; I_*)) &= \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \left(\frac{d^{k-l}}{d\tau^{k-l}} (t-\tau)^{k-r} \right) \phi^{(l)}(\tau; I_*) \\ &= \sum_{l=r}^k (-1)^{k-l} \binom{k}{l} \frac{(k-r)!}{(l-r)!} (t-\tau)^{l-r} \phi^{(l)}(\tau; I_*). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Но тогда из (2.14)–(2.16) следует тождество

$$\pi_s^{(r)}(t) = \sum_{k=r}^{s-1} \sum_{l=r}^k \frac{(-1)^l}{(l-r)!} \binom{k}{l} \int_{I_*} \pi_s(\tau) (t-\tau)^{l-r} \phi^{(l)}(\tau; I_*) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.17)$$

А так как $|t-\tau| \leq |I^*|$ для всех $t \in I^*$ и $\tau \in I_*$, то из (2.17) с учетом неравенства (2.13) следует оценка

$$|\pi_s^{(r)}(t)| \leq \left(\sum_{k=r}^{s-1} \sum_{l=r}^k \frac{c_l}{(l-r)!} \binom{k}{l} \frac{|I^*|^{l-r}}{|I_*|^{l+1}} \right) \|\pi_s\|_{L_1(I_*)}, \quad t \in I^*. \quad (2.18)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=r}^{s-1} \sum_{l=r}^k \frac{c_l}{(l-r)!} \binom{k}{l} \frac{|I^*|^{l-r}}{|I_*|^{l+1}} &\leq \left(\max_{r \leq l \leq s-1} c_l \right) \frac{1}{|I^*|^r |I_*|} \sum_{k=r}^{s-1} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \left(\frac{|I^*|}{|I_*|} \right)^l \\
&= \left(\max_{r \leq l \leq s-1} c_l \right) \frac{1}{|I^*|^r |I_*|} \sum_{k=r}^{s-1} \left(1 + \frac{|I^*|}{|I_*|} \right)^k \\
&\leq (s-r) 2^{s-1} \left(\max_{r \leq l \leq s-1} c_l \right) \frac{|I^*|^{s-r-1}}{|I_*|^s}.
\end{aligned}$$

Поэтому из (2.18) легко получить оценку

$$\|\pi_s^{(r)}\|_{L_q(I^*)} \leq (s-r) 2^{s-1} \left(\max_{r \leq l \leq s-1} c_l \right) |I_*|^{-s} |I^*|^{s-r-1/q'} \|\pi_s\|_{L_1(I_*)}.$$

А из этой оценки в силу неравенства Гёльдера следует неравенство

$$\|\pi_s\|_{L_q(I^*)} \leq (s-r) 2^{s-1} \left(\max_{r \leq l \leq s-1} c_l \right) |I_*|^{-s+1/p'} |I^*|^{s-r-1/q'} \|\pi_s\|_{L_p(I_*)}.$$

Таким образом, лемма 7 доказана.

Обозначим через

$$E(x, R_n)_{L_q} := \inf_{\rho_n \in R_n} \|x - \rho_n\|_{L_q}$$

наилучшее приближение функции x в метрике L_q , $1 \leq q \leq \infty$, на интервале $I := (-1, 1)$ рациональными функциями из R_n , а через

$$E(x, \Sigma_{r,n})_{L_q} := \inf_{\sigma_{r,n} \in \Sigma_{r,n}} \|x - \sigma_{r,n}\|_{L_q}$$

— наилучшее приближение в L_q этой же функции сплайнами из $\Sigma_{r,n}$.

В следующей лемме приводится лишь необходимая нам часть более общих результатов, установленных в [16] и [17].

ЛЕММА 8. Пусть $I := (-1, 1)$, $r, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq q < \infty$ и $\lambda > 0$. Тогда для каждой функции $x \in L_q(I)$ справедливы неравенства

$$E(x, R_n)_{L_q} \leq c n^{-\lambda} \sum_{m=1}^n m^{\lambda-1} E(x, \Sigma_{r,m})_{L_q}, \quad n \geq r,$$

где $c = c(r, \lambda, q)$.

§ 3. Доказательство оценок сверху в теореме 1

При доказательстве оценок сверху будем вначале предполагать, что $x \in \Delta_+^s C^{s-1}(\bar{I})$, где $\bar{I} := [-1, 1]$. То есть предполагаем, что функции x являются s -монотонными на отрезке $\bar{I}$, а их (обычные) производные $x^{(s-1)}$ непрерывны на $\bar{I}$. Кроме того, будем предполагать, что эти функции удовлетворяют дополнительно условию

$$x^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, \dots, s-1. \quad (3.1)$$

Нетрудно убедиться, что при этом условии для всех $k = 0, \dots, s-1$ выполняются неравенства $x^{(k)}(t) \geq 0$, $t \in \bar{I}_+ := [0, 1]$. Если же $t \in \bar{I}_- := [-1, 0]$, то $(-1)^{s-k} x^{(k)}(t) \geq 0$, $k = 0, \dots, s-1$. Отметим, что при условии (3.1) все производные $x^{(k)}$, $k = 0, \dots, s-1$, являются неубывающими на $\bar{I}_+$ функциями. На отрезке же $\bar{I}_-$ происходит чередование монотонности для производных $x^{(k)}$, $k = 0, \dots, s-1$.

Зафиксировав $r \leq s$, построим на каждом из отрезков $\bar{I}_+$ и $\bar{I}_-$ приближающие сплайны $\sigma_{r,n}(\cdot; x; \bar{I}_+) \in \Sigma_{r,n}(\bar{I}_+)$ и $\sigma_{r,n}(\cdot; x; \bar{I}_-) \in \Sigma_{r,n}(\bar{I}_-)$. Построение приближающих сплайнов и оценки приближения осуществим подробно лишь для отрезка $\bar{I}_+$, так как для отрезка $\bar{I}_-$ все рассуждения являются аналогичными.

Если $n = 1$, то полагаем

$$\sigma_{r,1}(t; x; \bar{I}_+) := 0, \quad t \in \bar{I}_+. \quad (3.2)$$

Очевидно, что из неравенства Гёльдера следует оценка

$$\|x(\cdot) - \sigma_{r,1}(\cdot; x; \bar{I}_+)\|_{L_q(\bar{I}_+)} \leq \|x\|_{L_p(\bar{I}_+)}, \quad 1 \leq q < p \leq \infty. \quad (3.3)$$

Если же $n > 1$, то при фиксированных $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq q < \infty$ и x определим на множестве всех отрезков $[a, b] \subseteq \bar{I}_+$, где $a \leq b$, отображения $\mu_{r,q}([a, b]; x) \rightarrow \mathbb{R}$, полагая

$$\mu_{1,q}([a, b]; x) := \left(\int_a^b (x(t) - x(a))^q dt \right)^{1/q} \quad (3.4)$$

для $r = 1$ и

$$\mu_{r,q}([a, b]; x) := \left(\int_a^b \left(\int_a^t (x^{(r-1)}(\tau) - x^{(r-1)}(a))(t - \tau)^{r-2} d\tau \right)^q dt \right)^{1/q} \quad (3.5)$$

для $r > 1$.

Очевидно, что эти отображения удовлетворяют условиям 1)–4) леммы 6. Поэтому существуют (зависящие от r , q и x) разбиения $0 =: t_0^* \leq t_1^* \leq \dots \leq t_n^* := 1$ отрезка $\bar{I}_+$ такие, что

$$\max_{1 \leq i \leq n} \mu_{r,q}([t_{i-1}^*, t_i^*]; x) = \min_{1 \leq i \leq n} \mu_{r,q}([t_{i-1}^*, t_i^*]; x).$$

Если

$$\max_{1 \leq i \leq n} \mu_{r,q}([t_{i-1}^*, t_i^*]; x) = \min_{1 \leq i \leq n} \mu_{r,q}([t_{i-1}^*, t_i^*]; x) = 0, \quad (3.6)$$

то из формулы Тейлора следует, что функция x совпадает на $\bar{I}_+$ с алгебраическим многочленом

$$\pi_r(t; x; \bar{I}_+) := \sum_{k=0}^{r-1} \frac{x^{(k)}(0)}{k!} t^k, \quad t \in \bar{I}_+.$$

Поэтому в случае выполнения условия (3.6) приближающий сплайн определяем, полагая

$$\sigma_{r,n}(t; x; \bar{I}_+) := \pi_r(t; x; \bar{I}_+), \quad t \in \bar{I}_+. \quad (3.7)$$

При этом очевидно, что

$$\|x(\cdot) - \sigma_{r,n}(\cdot; x; \bar{I}_+)\|_{L_q(\bar{I}_+)} = 0. \quad (3.8)$$

Если же

$$\max_{1 \leq i \leq n} \mu_{r,q}([t_{i-1}^*, t_i^*]; x) = \min_{1 \leq i \leq n} \mu_{r,q}([t_{i-1}^*, t_i^*]; x) > 0, \quad (3.9)$$

то из условия 2) леммы 6 следует, что для соответствующего разбиения отрезка $\bar{I}_+$ будут выполняться неравенства $t_0^* < t_1^* < \dots < t_n^*$. Полагая $I_i^* := [t_{i-1}^*, t_i^*]$, $i = 1, \dots, n-1$, и $I_n^* := [t_{n-1}^*, t_n^*]$, определяем на каждом из промежутков I_i^* многочлены

$$\pi_r(t; x; I_i^*) := \sum_{k=0}^{r-1} \frac{x^{(k)}(t_{i-1}^*)}{k!} (t - t_{i-1}^*)^k, \quad t \in I_i^*, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.10)$$

порядка $\leq r$. При условии (3.9) приближающий сплайн определяем, полагая

$$\sigma_{r,n}(t; x; \bar{I}_+) := \pi_r(t; x; I_i^*), \quad t \in I_i^*, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.11)$$

Оценим отклонения этих сплайнов от функции x в метрике $L_q(\bar{I}_+)$, $1 \leq q < p \leq \infty$. Отметим, что при получении оценок будут использоваться монотонность и неотрицательность всех производных $x^{(k)}$, $k = 0, \dots, s-1$, а также условие (3.1).

Если $r = 1$, то ясно, что

$$\begin{aligned} \|x(\cdot) - \sigma_{1,n}(\cdot; x; \bar{I}_+)\|_{L_q(\bar{I}_+)} &= \left(\sum_{i=1}^n \int_{I_i^*} (x(t) - \pi_1(t; x; I_i^*))^q dt \right)^{1/q} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \int_{I_i^*} (x(t) - x(t_{i-1}^*))^q dt \right)^{1/q} \\ &\leq n^{1/q} \max_{1 \leq i \leq n} \left(\int_{I_i^*} (x(t) - x(t_{i-1}^*))^q dt \right)^{1/q} = n^{1/q} \max_{1 \leq i \leq n} \mu_{1,q}(\bar{I}_i^*; x), \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $\bar{I}_i^* := [t_{i-1}^*, t_i^*]$, $i = 1, \dots, n$.

Теперь оценим снизу норму $\|x\|_{L_p(\bar{I}_+)}$ через значения отображений вида (3.4) и длины промежутков I_i^* . Учитывая, что $x(t_0^*) = 0$, имеем

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t) - x(t_0^*), \quad t \in I_1^*, \\ x(t) &= (x(t) - x(t_{i-1}^*)) + \sum_{j=1}^{i-1} (x(t_j^*) - x(t_{j-1}^*)), \quad t \in I_i^*, \quad i = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Воспользовавшись неравенством Гёльдера, получим

$$\left(\int_{I_i^*} (x(t) - x(t_{i-1}^*))^p dt \right)^{1/p} \geq |I_i^*|^{1/p-1/q} \mu_{1,q}(\bar{I}_i^*; x), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.13)$$

Кроме того, очевидно, что

$$x(t_j^*) - x(t_{j-1}^*) \geq |I_j^*|^{-1/q} \mu_{1,q}(\bar{I}_j^*; x), \quad j = 1, \dots, i-1, \quad i = 2, \dots, n. \quad (3.14)$$

Но тогда при $1 \leq p < \infty$ будут выполняться соотношения

$$\begin{aligned} \|x\|_{L_p(\bar{I}_+)}^p &= \int_{I_1^*} (x(t) - x(t_0^*))^p dt \\ &\quad + \sum_{i=2}^n \int_{I_i^*} \left((x(t) - x(t_{i-1}^*)) + \sum_{j=1}^{i-1} (x(t_j^*) - x(t_{j-1}^*)) \right)^p dt \\ &\geq \sum_{i=1}^n \int_{I_i^*} (x(t) - x(t_{i-1}^*))^p dt + \sum_{i=2}^n \int_{I_i^*} \left(\sum_{j=1}^{i-1} (x(t_j^*) - x(t_{j-1}^*)) \right)^p dt \\ &\geq \left(\sum_{i=1}^n |I_i^*|^{1-p/q} + \sum_{i=2}^n |I_i^*| \left(\sum_{j=1}^{i-1} |I_j^*|^{-1/q} \right)^p \right) \left(\min_{1 \leq i \leq n} \mu_{1,q}(\bar{I}_i^*; x) \right)^p \\ &\geq 2^{1-p} \left(\sum_{i=1}^n \left(|I_i^*|^{1/p} \sum_{j=1}^i |I_j^*|^{-1/q} \right)^p \right) \left(\min_{1 \leq i \leq n} \mu_{1,q}(\bar{I}_i^*; x) \right)^p. \end{aligned}$$

Кроме неравенств (3.13) и (3.14) здесь использовались также неравенства

$$(|a| + |b|)^p \geq |a|^p + |b|^p \geq 2^{1-p}(|a| + |b|)^p.$$

Таким образом,

$$\min_{1 \leq i \leq n} \mu_{1,q}(\bar{I}_i^*; x) \leq c_* \|x\|_{L_p(\bar{I}_+)} \left(\sum_{i=1}^n \left(|I_i^*|^{1/p} \sum_{j=1}^i |I_j^*|^{-1/q} \right)^p \right)^{-1/p}, \quad (3.15)$$

где $c_* = 2^{1-1/p}$. Нетрудно проверить, что эта оценка верна и в случае $p = \infty$. Поэтому при всех $1 \leq q < p \leq \infty$ из (3.12), (3.15) и (3.9) следует оценка сверху

$$\begin{aligned} \|x(\cdot) - \sigma_{1,n}(\cdot; x; \bar{I}_+)\|_{L_q(\bar{I}_+)} &\leq c^* \|x\|_{L_p(\bar{I}_+)} n^{1/q} \left(\sum_{i=1}^n \left(|I_i^*|^{1/p} \sum_{j=1}^i |I_j^*|^{-1/q} \right)^p \right)^{-1/p}, \quad (3.16) \end{aligned}$$

где $c^* = 2^{1-1/p}$.

Рассмотрим теперь случай $r > 1$. Из (3.11) следует, что

$$\|x(\cdot) - \sigma_{r,n}(\cdot; x; \bar{I}_+)\|_{L_q(\bar{I}_+)} = \left(\sum_{i=1}^n \int_{I_i^*} (x(t) - \pi_r(t; x; I_i^*))^q dt \right)^{1/q}, \quad (3.17)$$

где многочлены $\pi_{r-1}(\cdot; x; I_i^*)$ определены в (3.10).

Воспользовавшись формулой Тейлора, имеем

$$x(t) - \pi_r(t; x; I_i^*) = \frac{1}{(r-2)!} \int_{t_{i-1}^*}^t (x^{(r-1)}(\tau) - x^{(r-1)}(t_{i-1}^*)) (t-\tau)^{r-2} d\tau, \quad t \in I_i^*.$$

Но тогда

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^n \int_{I_i^*} (x(t) - \pi_r(t; x; I_i^*))^q dt \right)^{1/q} \\ & \leq \frac{1}{(r-2)!} \left(\sum_{i=1}^n \int_{I_i^*} \left(\int_{t_{i-1}^*}^t (x^{(r-1)}(\tau) - x^{(r-1)}(t_{i-1}^*)) (t-\tau)^{r-2} d\tau \right)^q dt \right)^{1/q} \\ & \leq \frac{n^{1/q}}{(r-2)!} \max_{1 \leq i \leq n} \mu_{r,q}(\bar{I}_i^*; x). \end{aligned}$$

Поэтому из (3.17) следует, что

$$\|x(\cdot) - \sigma_{r,n}(\cdot; x; \bar{I}_+)\|_{L_q(\bar{I}_+)} \leq \frac{n^{1/q}}{(r-2)!} \max_{1 \leq i \leq n} \mu_{r,q}(\bar{I}_i^*; x). \quad (3.18)$$

Оценим теперь снизу норму $\|x\|_{L_p(\bar{I}_+)}$ через значения отображений вида (3.5) и длины промежутков I_i^* . В силу условия (3.1) имеем

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t) - \pi_r(t; x; I_1^*), \quad t \in I_1^*, \\ x(t) &= x(t) - \pi_r(t; x; I_i^*) + \sum_{j=2}^i (\pi_r(t; x; I_j^*) - \pi_r(t; x; I_{j-1}^*)), \quad t \in I_i^*, \quad i = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Воспользовавшись этими равенствами и неравенством $|a| + |b| \geq (|a|^p + |b|^p)^{1/p}$, при $1 \leq p < \infty$ получим

$$\begin{aligned} \|x\|_{L_p(I_+)}^p & \geq \sum_{i=1}^n \int_{I_i^*} (x(t) - \pi_r(t; x; I_i^*))^p dt \\ & \quad + \sum_{i=2}^n \int_{I_i^*} \left(\sum_{j=2}^i (\pi_r(t; x; I_j^*) - \pi_r(t; x; I_{j-1}^*)) \right)^p dt. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Из определения (3.10) многочленов $\pi_r(\cdot; x; I_i^*)$ следует, что при $j = 2, \dots, i$, где $i = 2, \dots, n$, справедливы равенства

$$\begin{aligned} \pi_r(t; x; I_j^*) - \pi_r(t; x; I_{j-1}^*) &= \sum_{k=0}^{r-1} (x^{(k)}(t_{j-1}^*) - \pi_r^{(k)}(t_{j-1}^*; x; I_{j-1}^*)) \frac{(t - t_{j-1}^*)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{r-1} (x^{(k)}(t_{j-1}^*) - \pi_{r-k}(t_{j-1}^*; x^{(k)}; I_{j-1}^*)) \frac{(t - t_{j-1}^*)^k}{k!}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

где

$$\pi_{r-k}(t_{j-1}^*; x^{(k)}; I_{j-1}^*) := \sum_{l=0}^{r-1-k} \frac{x^{(k+l)}(t_{j-2}^*)}{l!} (t_{j-1}^* - t_{j-2}^*)^l.$$

Если $0 \leq k < r-1$, то, воспользовавшись формулой Тейлора и учитывая монотонность производной $x^{(r-1)}$, получаем

$$\begin{aligned} x^{(k)}(t_{j-1}^*) - \pi_{r-k}(t_{j-1}^*; x^{(k)}; I_{j-1}^*) &= \frac{1}{(r-k-2)!} \int_{I_{j-1}^*} (x^{(r-1)}(\tau) - x^{(r-1)}(t_{j-2}^*)) (t_{j-1}^* - \tau)^{r-k-2} d\tau \\ &\geq \frac{|I_{j-1}^*|^{-k}}{(r-k-2)!} \int_{I_{j-1}^*} (x^{(r-1)}(\tau) - x^{(r-1)}(t_{j-2}^*)) (t_{j-1}^* - \tau)^{r-2} d\tau. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Если же $k = r-1$, то в силу монотонности производной $x^{(r-1)}$ имеем

$$\begin{aligned} x^{(r-1)}(t_{j-1}^*) - \pi_1(t_{j-1}^*; x^{(r-1)}; I_{j-1}^*) &= x^{(r-1)}(t_{j-1}^*) - x^{(r-1)}(t_{j-2}^*) \\ &\geq |I_{j-1}^*|^{-r+1} \int_{I_{j-1}^*} (x^{(r-1)}(\tau) - x^{(r-1)}(t_{j-2}^*)) (t_{j-1}^* - \tau)^{r-2} d\tau. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Но тогда из (3.21) и (3.22) следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{r-1} (x^{(k)}(t_{j-1}^*) - \pi_{r-k}(t_{j-1}^*; x^{(k)}; I_{j-1}^*)) \frac{(t - t_{j-1}^*)^k}{k!} &\geq \frac{1}{(r-1)!} \left(\sum_{k=0}^{r-1} (|I_{j-1}^*|^{-1} (t - t_{j-1}^*))^k \right) \\ &\quad \times \int_{I_{j-1}^*} (x^{(r-1)}(\tau) - x^{(r-1)}(t_{j-2}^*)) (t_{j-1}^* - \tau)^{r-2} d\tau. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Учитывая, что $\binom{r-1}{k} \leq 2^{r-1}$, $k = 0, \dots, r-1$, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{r-1} (|I_{j-1}^*|^{-1} (t - t_{j-1}^*))^k &\geq \frac{1}{2^{r-1}} \left(\sum_{k=0}^{r-1} \binom{r-1}{k} (|I_{j-1}^*|^{-1} (t - t_{j-1}^*))^k \right) \\ &= \frac{|I_{j-1}^*|^{-r+1}}{2^{r-1}} (|I_{j-1}^*| + (t - t_{j-1}^*))^{r-1}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Полагая $\bar{t}_i^* := (t_{i-1}^* + t_i^*)/2$, отмечаем, что при $j = 2, \dots, i$, где $i = 2, \dots, n$, будут выполняться неравенства

$$|I_{j-1}^*| + (t - t_{j-1}^*) \geq \frac{1}{2} \sum_{k=j-1}^i |I_k^*|, \quad t \in [\bar{t}_i^*, t_i^*], \quad i = 2, \dots, n. \quad (3.25)$$

Ясно также, что для $t \in I_{j-1}^*$, $j = 2, \dots, n$, в силу монотонности производной $x^{(r-1)}$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} & \int_{I_{j-1}^*} (x^{(r-1)}(\tau) - x^{(r-1)}(t_{j-2}^*)) (t_{j-1}^* - \tau)^{r-2} d\tau \\ & \geq \int_{t_{j-2}^*}^t (x^{(r-1)}(\tau) - x^{(r-1)}(t_{j-2}^*)) (t - \tau)^{r-2} d\tau, \end{aligned}$$

из которых следует, что

$$\int_{I_{j-1}^*} (x^{(r-1)}(\tau) - x^{(r-1)}(t_{j-2}^*)) (t_{j-1}^* - \tau)^{r-2} d\tau \geq |I_{j-1}^*|^{-1/q} \mu_{r,q}(\bar{I}_{j-1}^*; x). \quad (3.26)$$

Но тогда из (3.20) и (3.23)–(3.26) следует, что при $j = 2, \dots, i$, где $i = 2, \dots, n$, для $t \in [\bar{t}_i^*, t_i^*]$ будут выполняться неравенства

$$\pi_r(t; x; I_j^*) - \pi_r(t; x; I_{j-1}^*) \geq \frac{|I_{j-1}^*|^{-r+1-1/q}}{2^{2r-2}(r-1)!} \left(\sum_{k=j-1}^i |I_k^*| \right)^{r-1} \mu_{r,q}(\bar{I}_{j-1}^*; x).$$

Поэтому при $i = 2, \dots, n$ будут справедливы неравенства

$$\begin{aligned} & \int_{I_i^*} \left(\sum_{j=2}^i (\pi_r(t; x; I_j^*) - \pi_r(t; x; I_{j-1}^*)) \right)^p dt \\ & \geq \int_{\bar{t}_i^*}^{t_i^*} \left(\sum_{j=2}^i (\pi_r(t; x; I_j^*) - \pi_r(t; x; I_{j-1}^*)) \right)^p dt \\ & \geq \frac{|I_i^*|}{2^{(2r-2)p+1}((r-1)!)^p} \left(\min_{2 \leq j \leq i} \mu_{r,q}(\bar{I}_{j-1}^*; x) \right)^p \\ & \quad \times \left(\sum_{j=2}^i |I_{j-1}^*|^{-r+1-1/q} \left(\sum_{k=j-1}^i |I_k^*| \right)^{r-1} \right)^p. \quad (3.27) \end{aligned}$$

Наряду с этим при $i = 1, \dots, n$ из формулы Тейлора и неравенства Гёльдера следует, что

$$\int_{I_i^*} (x(t) - \pi_r(t; x; I_i^*))^p dt \geq \frac{|I_i^*|^{1-p/q}}{((r-2)!)^p} (\mu_{r,q}(\bar{I}_i^*; x))^p. \quad (3.28)$$

Подставляя оценки (3.27) и (3.28) в (3.19), имеем

$$\|x\|_{L_p(\bar{I}_+)}^p \geq c \left(\sum_{i=1}^n |I_i^*|^{1-p/q} + \sum_{i=2}^n |I_i^*| \left(\sum_{j=2}^i |I_{j-1}^*|^{-r+1-1/q} \left(\sum_{k=j-1}^i |I_k^*| \right)^{r-1} \right)^p \right) \times \left(\min_{1 \leq i \leq n} \mu_{r,q}(\bar{I}_i^*; x) \right)^p,$$

где $c = 2^{-2rp+2p-1}((r-1)!)^{-p}$. Воспользовавшись неравенством $(|a|^p + |b|^p)^{1/p} \geq 2^{1/p-1}(|a| + |b|)$, получим

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^n |I_i^*|^{1-p/q} + \sum_{i=2}^n |I_i^*| \left(\sum_{j=2}^i |I_{j-1}^*|^{-r+1-1/q} \left(\sum_{k=j-1}^i |I_k^*| \right)^{r-1} \right)^p \right)^{1/p} \\ & \geq 2^{1/p-1} \left(\sum_{i=1}^n \left(|I_i^*|^{1/p} \sum_{j=1}^i |I_j^*|^{-r+1-1/q} \left(\sum_{k=j}^i |I_k^*| \right)^{r-1} \right)^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \min_{1 \leq i \leq n} \mu_{r,q}(\bar{I}_i^*; x) \\ & \leq c_* \|x\|_{L_p(\bar{I}_+)} \left(\sum_{i=1}^n \left(|I_i^*|^{1/p} \sum_{j=1}^i |I_j^*|^{-r+1-1/q} \left(\sum_{k=j}^i |I_k^*| \right)^{r-1} \right)^p \right)^{-1/p}, \quad (3.29) \end{aligned}$$

где $c_* = 2^{2r-1}(r-1)!$. Нетрудно убедиться, что оценка (3.29) верна и при $p = \infty$.

Но тогда при $r > 1$ и $1 \leq q < p \leq \infty$ из (3.18), (3.9) и (3.29) следует оценка

$$\begin{aligned} & \|x(\cdot) - \sigma_{r,n}(\cdot; x; \bar{I}_+)\|_{L_q(\bar{I}_+)} \\ & \leq c^* n^{1/q} \|x\|_{L_p(\bar{I}_+)} \left(\sum_{i=1}^n \left(|I_i^*|^{1/p} \sum_{j=1}^i |I_j^*|^{-r+1-1/q} \left(\sum_{k=j}^i |I_k^*| \right)^{r-1} \right)^p \right)^{-1/p}, \quad (3.30) \end{aligned}$$

где $c^* = 2^{2r-1}(r-1)$. Учитывая неравенство (3.16), видим, что оценка (3.30) верна и в случае $r = 1$ с постоянной $c^* = 2^{1-1/p}$.

Теперь можем воспользоваться леммой 5. Полагая в ней $\alpha := r - 1 + 1/q$, $\beta := r - 1$ и $\delta_i := |I_i^*|$, $i = 1, \dots, n$, получаем

$$\left(\sum_{i=1}^n \left(|I_i^*|^{1/p} \sum_{j=1}^i |I_j^*|^{-r+1-1/q} \left(\sum_{k=j}^i |I_k^*| \right)^{r-1} \right)^p \right)^{-1/p} \leq c n^{-r-1/q},$$

где $c = c(r, p, q)$.

Подставляя эту оценку в (3.30), имеем

$$\|x(\cdot) - \sigma_{r,n}(\cdot; x; \bar{I}_+)\|_{L_q(\bar{I}_+)} \leq c \|x\|_{L_p(\bar{I}_+)} n^{-r}, \quad n > 1, \quad 1 \leq q < p \leq \infty, \quad (3.31)$$

где $c = c(r, p, q)$. Напомним, что оценка (3.31) доказана при условии (3.9). Но, учитывая соотношения (3.3) и (3.8), видим, что оценка (3.31) верна и для $n = 1$, а также для $n > 1$ при условии (3.6).

Отметим теперь, что функция $y(t) := (-1)^s x(-t)$, $t \in \bar{I}_+$, имеет на $\bar{I}_+$ неотрицательные производные $y^{(k)}$, $k = 0, \dots, s-1$, и что $y^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, \dots, s-1$. Определив для функции y сплайны $\sigma_{r,n}(\cdot; y; \bar{I}_+)$ на отрезке $\bar{I}_+$ аналогично тому, как определялись сплайны $\sigma_{r,n}(t; x; \bar{I}_+)$ для функции x , полагаем

$$\sigma_{r,n}(t; x; \bar{I}_-) := (-1)^s \sigma_{r,n}(-t; y; \bar{I}_+), \quad t \in \bar{I}_-.$$

Ясно, что из (3.31) следует оценка

$$\|x(\cdot) - \sigma_{r,n}(\cdot; x; \bar{I}_-)\|_{L_q(\bar{I}_-)} \leq c \|x\|_{L_p(\bar{I}_-)} n^{-r}, \quad n \geq 1, \quad 1 \leq q < p \leq \infty, \quad (3.32)$$

где $c = c(r, p, q)$.

Затем определяем сплайн $\sigma_{r,n}(\cdot; x; \bar{I})$ на всем отрезке $\bar{I}$, полагая

$$\sigma_{r,n}(t; x; \bar{I}) := \begin{cases} \sigma_{r,n}(t; x; \bar{I}_+), & t \in \bar{I}_+, \\ \sigma_{r,n}(t; x; \bar{I}_-), & t \in \bar{I}_-. \end{cases}$$

Тогда из (3.31) и (3.32) будет следовать, что для $r \leq s$ имеет место оценка

$$\|x(\cdot) - \sigma_{r,n}(\cdot; x; \bar{I})\|_{L_q(\bar{I})} \leq c \|x\|_{L_p(\bar{I})} n^{-r}, \quad n \geq 1, \quad 1 \leq q < p \leq \infty, \quad (3.33)$$

где $c = c(r, p, q)$.

Учитывая, что при $r = s$ приближающие сплайны $\sigma_{s,n}(\cdot; x; \bar{I})$ уже построены, определяем приближающие сплайны в случае $r > s$, полагая

$$\sigma_{r,n}(t; x; \bar{I}) := \sigma_{s,n}(t; x; \bar{I}), \quad t \in \bar{I}. \quad (3.34)$$

Тогда из (3.33) немедленно следует оценка

$$\|x(\cdot) - \sigma_{r,n}(\cdot; x; \bar{I})\|_{L_q(\bar{I})} \leq c \|x\|_{L_p(\bar{I})} n^{-\min\{r,s\}}, \quad 1 \leq q < p \leq \infty, \quad (3.35)$$

где $c = c(r, s, p, q)$. Кроме того, очевидно, что сплайны $\sigma_{r,n}(\cdot; x; \bar{I})$ имеют не более $2(n-1)$ свободных узлов на отрезке $\bar{I}$.

Отметим, что неравенства (3.35) установлены для s -монотонных функций из пространства $C^{s-1}(\bar{I})$ и при дополнительном условии (3.1). Чтобы получить оценки вида (3.35) в общем случае, т.е. для функций $x \in \Delta_+^s L_p(I)$, $1 \leq p \leq \infty$, на интервале $I = (-1, 1)$, необходимо построить более гладкие функции, сохранив при этом s -монотонность и не увеличив существенно норму в L_p .

Для этого поступим следующим образом. Пусть $x \in \Delta_+^s L_p(I)$, $1 \leq p \leq \infty$. Полагая

$$\tilde{x}(t) := x(t) - \pi_s(t; x), \quad t \in I,$$

где

$$\pi_s(t; x) := \sum_{k=0}^{s-1} \frac{x^{(k)}(0)}{k!} t^k, \quad t \in I, \quad (3.36)$$

и воспользовавшись леммой 3, имеем

$$\|\tilde{x}\|_{L_p(I)} \leq \tilde{c}\|x\|_{L_p(I)}, \quad (3.37)$$

где $\tilde{c} = \tilde{c}(s, p)$.

Ясно, что $\tilde{x}$ является s -монотонной функцией на I . Кроме того, нетрудно убедиться, что для всех $k = 0, \dots, s-1$ выполняются неравенства $\tilde{x}^{(k)}(t) \geq 0$, $t \in I_+ := [0, 1)$. Если же $t \in I_- := (-1, 0]$, то $(-1)^{s-k}\tilde{x}^{(k)}(t) \geq 0$, $k = 0, \dots, s-1$. Отметим также, что все производные $\tilde{x}^{(k)}$, $k = 0, \dots, s-1$, являются неубывающими на I_+ функциями, а на I_- происходит чередование монотонности для производных $\tilde{x}^{(k)}$, $k = 0, \dots, s-1$.

Пусть $\epsilon \in (0, 1/2)$, а $t_\epsilon^- := -1 + \epsilon$ и $t_\epsilon^+ := 1 - \epsilon$. Полагая

$$\begin{aligned} \pi_s(t; \tilde{x}; t_\epsilon^-) &:= \sum_{k=0}^{s-1} \frac{\tilde{x}^{(k)}(t_\epsilon^-)}{k!} (t - t_\epsilon^-)^k, \quad t \in \mathbb{R}, \\ \pi_s(t; \tilde{x}; t_\epsilon^+) &:= \sum_{k=0}^{s-1} \frac{\tilde{x}^{(k)}(t_\epsilon^+)}{k!} (t - t_\epsilon^+)^k, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

определяем на $\mathbb{R}$ следующие функции:

$$\tilde{x}_\epsilon(t) := \begin{cases} \pi_s(t; \tilde{x}; t_\epsilon^-), & t \in (-\infty, t_\epsilon^-], \\ \tilde{x}(t), & t \in (t_\epsilon^-, t_\epsilon^+), \\ \pi_s(t; \tilde{x}; t_\epsilon^+), & t \in [t_\epsilon^+, +\infty). \end{cases}$$

Ясно, что функции $\tilde{x}_\epsilon$ являются s -монотонными на любом конечном интервале и при этом $0 \leq (-1)^s \pi_s(t; \tilde{x}; t_\epsilon^-) \leq (-1)^s \tilde{x}(t)$ для $t \in (-1, t_\epsilon^-)$, а для $t \in (t_\epsilon^+, 1)$ выполняются неравенства $0 \leq \pi_s(t; \tilde{x}; t_\epsilon^+) \leq \tilde{x}(t)$. Очевидно также, что

$$\|\tilde{x}_\epsilon\|_{L_p(I)} \leq \|\tilde{x}\|_{L_p(I)}. \quad (3.38)$$

Кроме того, из определения функции $\tilde{x}_\epsilon$ и неравенства Гёльдера следует, что

$$\begin{aligned} \|\tilde{x} - \tilde{x}_\epsilon\|_{L_q(I)} &\leq \|\tilde{x}(\cdot) - \pi_s(\cdot; \tilde{x}; t_\epsilon^-)\|_{L_q(-1, t_\epsilon^-)} + \|\tilde{x}(\cdot) - \pi_s(\cdot; \tilde{x}; t_\epsilon^+)\|_{L_q(t_\epsilon^+, 1)} \\ &\leq \|\tilde{x}\|_{L_q(-1, t_\epsilon^-)} + \|\tilde{x}\|_{L_q(t_\epsilon^+, 1)} \leq \epsilon^{1/q-1/p} (\|\tilde{x}\|_{L_p(-1, t_\epsilon^-)} + \|\tilde{x}\|_{L_p(t_\epsilon^+, 1)}) \\ &\leq 2\epsilon^{1/q-1/p} \|\tilde{x}\|_{L_p(I)}. \end{aligned}$$

Таким образом, если $1 \leq q < p \leq \infty$, то

$$\|\tilde{x} - \tilde{x}_\epsilon\|_{L_q(I)} \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0. \quad (3.39)$$

Наряду с этим из леммы 3 следует, что на интервалах $J_\epsilon^- := (-1, -1 + 2\epsilon)$ и $J_\epsilon^+ := (1 - 2\epsilon, 1)$ выполняются соответственно неравенства

$$\|\pi_s(\cdot; \tilde{x}; t_\epsilon^-)\|_{L_p(J_\epsilon^-)} \leq c_\epsilon \|\tilde{x}\|_{L_p(J_\epsilon^-)}, \quad (3.40)$$

$$\|\pi_s(\cdot; \tilde{x}; t_\epsilon^+)\|_{L_p(J_\epsilon^+)} \leq c_\epsilon \|\tilde{x}\|_{L_p(J_\epsilon^+)}, \quad (3.41)$$

где $c_\epsilon = c_\epsilon(s, p)$.

Кроме того, из леммы 7 следует, что на интервалах $J_{2\epsilon}^- := (-1 - \epsilon, -1 + 3\epsilon)$ и $J_{2\epsilon}^+ := (1 - 3\epsilon, 1 + \epsilon)$ выполняются соответственно неравенства

$$\|\pi_s(\cdot; \tilde{x}; t_\epsilon^-)\|_{L_p(J_{2\epsilon}^-)} \leq \widehat{c}_\epsilon \|\pi_s(\cdot; \tilde{x}; t_\epsilon^-)\|_{L_p(J_\epsilon^-)}, \quad (3.42)$$

$$\|\pi_s(\cdot; \tilde{x}; t_\epsilon^+)\|_{L_p(J_{2\epsilon}^+)} \leq \widehat{c}_\epsilon \|\pi_s(\cdot; \tilde{x}; t_\epsilon^+)\|_{L_p(J_\epsilon^+)}, \quad (3.43)$$

где $\widehat{c}_\epsilon = \widehat{c}_\epsilon(s, p)$.

Но тогда из (3.37), (3.38) и (3.40)–(3.43) следует, что на интервале $I_\epsilon := (-1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$ будет выполняться неравенство

$$\|\tilde{x}_\epsilon\|_{L_p(I_\epsilon)} \leq \widetilde{c}_\epsilon \|x\|_{L_p(I)}, \quad (3.44)$$

где $\widetilde{c}_\epsilon = \widetilde{c}_\epsilon(s, p)$.

Теперь сгладим функции $\tilde{x}_\epsilon$. При каждом $\varepsilon \in (0, \epsilon)$ обозначим через

$$\tilde{x}_{\epsilon, \varepsilon}(t) := \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \tilde{x}_\epsilon(t + \tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R},$$

ε -усреднение по Стеклову функций $\tilde{x}_\epsilon$. Ясно, что функции $\tilde{x}_{\epsilon, \varepsilon}$ являются s -монотонными на отрезке $\bar{I} = [-1, 1]$ и имеют на $\bar{I}$ непрерывную производную порядка $s - 1$. Кроме того, из обобщенного неравенства Минковского для интегралов и непрерывности в целом функций из L_q , $1 \leq q < \infty$, следует, что

$$\|\tilde{x}_\epsilon - \tilde{x}_{\epsilon, \varepsilon}\|_{L_q(\bar{I})} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.45)$$

Очевидно также, что

$$\|\tilde{x}_{\epsilon, \varepsilon}\|_{L_p(I)} \leq \|\tilde{x}_\epsilon\|_{L_p(\bar{I}_\epsilon)}. \quad (3.46)$$

Полагая теперь

$$\pi_s(t; \tilde{x}_{\epsilon, \varepsilon}) := \sum_{k=0}^{s-1} \frac{\tilde{x}_{\epsilon, \varepsilon}^{(k)}(0)}{k!} t^k, \quad t \in \bar{I}, \quad (3.47)$$

рассматриваем функции

$$\check{x}_{\epsilon, \varepsilon}(t) := \tilde{x}_{\epsilon, \varepsilon}(t) - \pi_s(t; \tilde{x}_{\epsilon, \varepsilon}), \quad t \in \bar{I}.$$

Из леммы 3 следует, что

$$\|\check{x}_{\epsilon, \varepsilon}\|_{L_p(\bar{I})} \leq \check{c}_{\epsilon, \varepsilon} \|\tilde{x}_{\epsilon, \varepsilon}\|_{L_p(\bar{I})}, \quad (3.48)$$

где $\check{c}_{\epsilon, \varepsilon} = \check{c}_{\epsilon, \varepsilon}(s, p)$. При этом $\check{x}_{\epsilon, \varepsilon} \in \Delta_+^s C^{s-1}(\bar{I})$ и $\check{x}_{\epsilon, \varepsilon}^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, \dots, s - 1$.

Таким образом, функции $\check{x}_{\epsilon, \varepsilon}$ удовлетворяют всем условиям, при которых установлены неравенства вида (3.35). Поэтому, определив для функций $\check{x}_{\epsilon, \varepsilon}$ сплайны $\sigma_{r, n}(\cdot; \check{x}_{\epsilon, \varepsilon}; \bar{I})$ согласно (3.2), (3.7), (3.11) и (3.34), имеем

$$\|\check{x}_{\epsilon, \varepsilon}(\cdot) - \sigma_{r, n}(\cdot; \check{x}_{\epsilon, \varepsilon}; \bar{I})\|_{L_q(\bar{I})} \leq c_{\epsilon, \varepsilon} \|\check{x}_{\epsilon, \varepsilon}\|_{L_p(\bar{I})} n^{-\min\{r, s\}}, \quad (3.49)$$

где $c_{\epsilon, \varepsilon} = c_{\epsilon, \varepsilon}(r, s, p, q)$.

Теперь воспользуемся этими сплайнами для построения сплайнов, приближающих функции $x \in \Delta_+^s L_p(I)$.

Если $r \geq s$, то для каждой функции $x \in \Delta_+^s L_p(I)$ полагаем

$$\sigma_{r,s,n}(t; x; I) := \sigma_{r,n}(t; \check{x}_{\epsilon,\varepsilon}; \bar{I}) + \pi_s(t; \tilde{x}_{\epsilon,\varepsilon}) + \pi_s(t; x), \quad t \in I, \quad (3.50)$$

где $\pi_s(\cdot; \tilde{x}_{\epsilon,\varepsilon})$ и $\pi_s(\cdot; x)$ — многочлены из (3.47) и (3.36) соответственно.

Отметим, что из определения сплайнов $\sigma_{r,n}(\cdot; \check{x}_{\epsilon,\varepsilon}; \bar{I})$ следуют тождества

$$\begin{aligned} \sigma_{r,n}(t; \pi_s(\cdot; \tilde{x}_{\epsilon,\varepsilon}); \bar{I}) &= \pi_s(t; \tilde{x}_{\epsilon,\varepsilon}), & t \in \bar{I}, \\ \sigma_{r,n}(t; \pi_s(\cdot; x); \bar{I}) &= \pi_s(t; x), & t \in \bar{I}. \end{aligned}$$

Поэтому, учитывая также тождество

$$x(t) = \check{x}_{\epsilon,\varepsilon}(t) + (\tilde{x}_\epsilon(t) - \tilde{x}_{\epsilon,\varepsilon}(t)) + (\tilde{x}(t) - \tilde{x}_\epsilon(t)) + \pi_s(t; \tilde{x}_{\epsilon,\varepsilon}) + \pi_s(t; x), \quad (3.51)$$

имеем

$$x(t) - \sigma_{r,s,n}(t; x; I) = (\check{x}_{\epsilon,\varepsilon}(t) - \sigma_{r,n}(t; \check{x}_{\epsilon,\varepsilon}; \bar{I})) + (\tilde{x}_\epsilon(t) - \tilde{x}_{\epsilon,\varepsilon}(t)) + (\tilde{x}(t) - \tilde{x}_\epsilon(t)).$$

Но тогда

$$\begin{aligned} \|x(\cdot) - \sigma_{r,s,n}(\cdot; x; I)\|_{L_q(I)} \\ \leq \|\check{x}_{\epsilon,\varepsilon}(\cdot) - \sigma_{r,n}(\cdot; \check{x}_{\epsilon,\varepsilon}; \bar{I})\|_{L_q(\bar{I})} + \|\tilde{x}_\epsilon - \tilde{x}_{\epsilon,\varepsilon}\|_{L_q(\bar{I})} + \|\tilde{x} - \tilde{x}_\epsilon\|_{L_q(\bar{I})}. \end{aligned}$$

Из этого неравенства, а также из (3.39), (3.45) и (3.49) следует, что для $r \geq s$ при достаточно малых ϵ и ε будет иметь место оценка

$$\|x(\cdot) - \sigma_{r,s,n}(\cdot; x; I)\|_{L_q(I)} \leq c \|x\|_{L_p(I)} n^{-s}, \quad n \geq 1, \quad 1 \leq q < p \leq \infty, \quad (3.52)$$

где $c = c(r, s, p, q)$.

Если же $r < s$, то функция $\sigma_{r,s,n}(\cdot; x; I)$, определенная согласно (3.50), не является сплайном порядка $\leq r$. Поэтому необходимо заменить многочлены $\pi_s(\cdot; \tilde{x}_{\epsilon,\varepsilon})$ и $\pi_s(\cdot; x)$ на сплайны порядка $\leq r$, которые достаточно хорошо приближают эти многочлены.

Воспользовавшись леммой 7, имеем

$$\|\pi_s^{(r)}(\cdot; \tilde{x}_{\epsilon,\varepsilon})\|_{L_\infty(I)} \leq c \|\pi_s(\cdot; \tilde{x}_{\epsilon,\varepsilon})\|_{L_p(I)}, \quad (3.53)$$

где $c = c(r, s, p)$. Но тогда из (3.37), (3.44), (3.46), (3.48) и (3.53) следует, что

$$\|\pi_s^{(r)}(\cdot; \tilde{x}_{\epsilon,\varepsilon})\|_{L_\infty(I)} \leq c' \|x\|_{L_p(I)}, \quad (3.54)$$

где $c' = c'(r, s, p)$. Аналогично, из (3.37) и леммы 7 следует, что

$$\|\pi_s^{(r)}(\cdot; x)\|_{L_\infty(I)} \leq c'' \|x\|_{L_p(I)}, \quad (3.55)$$

где $c'' = c''(r, s, p)$.

Воспользовавшись неравенствами (3.54) и (3.55), а также известными оценками приближения сплайнами функций из пространств Соболева (см., например, [18; §3.1, теорема 1]), найдем сплайны $\varsigma_{r,n}(\cdot; \pi_s(\cdot; \tilde{x}_{\epsilon,\varepsilon}); I)$ и $\varsigma_{r,n}(\cdot; \pi_s(\cdot; x); I)$ порядка $\leq r$ с не более чем $n-1$ свободными узлами на I такие, что

$$\|\pi_s(\cdot; \tilde{x}_{\epsilon,\varepsilon}) - \varsigma_{r,n}(\cdot; \pi_s(\cdot; \tilde{x}_{\epsilon,\varepsilon}); I)\|_{L_q(I)} \leq \bar{c}\|x\|_{L_p(I)}n^{-r}, \quad n \geq 1, \quad (3.56)$$

$$\|\pi_s(\cdot; x) - \varsigma_{r,n}(\cdot; \pi_s(\cdot; x); I)\|_{L_q(I)} \leq \bar{c}\|x\|_{L_p(I)}n^{-r}, \quad n \geq 1, \quad (3.57)$$

где $\bar{c} = \bar{c}(r, s, p, q)$.

Теперь можем определить приближающие сплайны порядка $\leq r$ и в случае $r < s$. В этом случае полагаем

$$\sigma_{r,s,n}(t; x; I) := \sigma_{r,n}(t; \check{x}_{\epsilon,\varepsilon}; \bar{I}) + \varsigma_{r,n}(t; \pi_s(\cdot; \tilde{x}_{\epsilon,\varepsilon}); I) + \varsigma_{r,n}(t; \pi_s(\cdot; x); I), \quad (3.58)$$

где сплайны $\sigma_{r,n}(\cdot; \check{x}_{\epsilon,\varepsilon}; \bar{I})$, $\varsigma_{r,n}(\cdot; \pi_s(\cdot; \tilde{x}_{\epsilon,\varepsilon}); I)$ и $\varsigma_{r,n}(\cdot; \pi_s(\cdot; x); I)$ удовлетворяют неравенствам (3.49), (3.56) и (3.57) соответственно.

Очевидно, что из (3.51) и (3.58) следует тождество

$$\begin{aligned} x(t) - \sigma_{r,s,n}(t; x; I) &= (\check{x}_{\epsilon,\varepsilon}(t) - \sigma_{r,n}(t; \check{x}_{\epsilon,\varepsilon}; \bar{I})) + (\tilde{x}_\epsilon(t) - \tilde{x}_{\epsilon,\varepsilon}(t)) + (\tilde{x}(t) - \tilde{x}_\epsilon(t)) \\ &\quad + (\pi_s(t; \tilde{x}_{\epsilon,\varepsilon}) - \varsigma_{r,n}(t; \pi_s(\cdot; \tilde{x}_{\epsilon,\varepsilon}); I)) + (\pi_s(t; x) - \varsigma_{r,n}(t; \pi_s(\cdot; x); I)). \end{aligned}$$

Но тогда

$$\begin{aligned} \|x(\cdot) - \sigma_{r,s,n}(\cdot; x; I)\|_{L_q(I)} &\leq \|\check{x}_{\epsilon,\varepsilon}(\cdot) - \sigma_{r,n}(\cdot; \check{x}_{\epsilon,\varepsilon}; \bar{I})\|_{L_q(I)} + \|\tilde{x}_\epsilon - \tilde{x}_{\epsilon,\varepsilon}\|_{L_q(I)} \\ &\quad + \|\tilde{x} - \tilde{x}_\epsilon\|_{L_q(I)} + \|\pi_s(\cdot; \tilde{x}_{\epsilon,\varepsilon}) - \varsigma_{r,n}(\cdot; \pi_s(\cdot; \tilde{x}_{\epsilon,\varepsilon}); I)\|_{L_q(I)} \\ &\quad + \|\pi_s(\cdot; x) - \varsigma_{r,n}(\cdot; \pi_s(\cdot; x); I)\|_{L_q(I)}. \end{aligned}$$

Из этого неравенства, а также соотношений (3.39), (3.45), (3.49), (3.56) и (3.57) видно, что при $r < s$ для достаточно малых ϵ и ε будет справедлива оценка

$$\|x(\cdot) - \sigma_{r,s,n}(\cdot; x; I)\|_{L_q(I)} \leq c\|x\|_{L_p(I)}n^{-r}, \quad n \geq 1, \quad 1 \leq q < p \leq \infty, \quad (3.59)$$

где $c = c(r, s, p, q)$.

Объединяя оценки (3.52) и (3.59), имеем

$$\|x(\cdot) - \sigma_{r,s,n}(\cdot; x; I)\|_{L_q(I)} \leq c\|x\|_{L_p(I)}n^{-\min\{r,s\}}, \quad 1 \leq q < p \leq \infty, \quad (3.60)$$

где $r, s \in \mathbb{N}$, а $c = c(r, s, p, q)$.

При этом ясно, что сплайны $\sigma_{r,s,n}(\cdot; x; I)$, определяемые согласно (3.50), (3.58), имеют на интервале $I = (-1, 1)$ не более $3(n-1)$ свободных узлов. Поэтому из (3.60) следует, что

$$E(\Delta_+^s B_p, \Sigma_{r,n})_{L_q} \leq cn^{-\min\{r,s\}}, \quad n \geq 1, \quad 1 \leq q < p \leq \infty, \quad r, s \in \mathbb{N}, \quad (3.61)$$

где $c = c(r, s, p, q)$. Таким образом, оценки сверху доказаны и в общем случае.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. При доказательстве оценок сверху в теореме 1 осуществлялась “балансировка” отрезков $\bar{I}_i^*$. Отметим, что подобная идея “балансировки” применялась ранее в работах [7] и [12].

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Сплайны, которые использовались для получения оценок сверху, являются, вообще говоря, разрывными. Нетрудно убедиться, что за счет некоторого увеличения числа узлов можно построить и более гладкие сплайны, дающие тот же порядок приближения.

§ 4. Доказательство оценок снизу в теореме 1

Вначале рассмотрим случай $r \leq s$. Пусть на интервале $I := (-1, 1)$ задана функция

$$x_r(t) := t^r, \quad t \in I,$$

для которой включение $x_r \in \Delta_+^s B_\infty(I)$ является очевидным.

Докажем, что

$$E(x_r, \Sigma_{r,n})_{L_1(I)} \geq 2^{-r+1} n^{-r}, \quad n \geq 1. \quad (4.1)$$

Для этого разобьем интервал I произвольным образом на n непересекающихся промежутков I_i , $i = 1, \dots, n$, таких, что $\bigcup_{i=1}^n I_i = I$. Обозначим через

$$E(x_r, P_r)_{L_1(I_i)} := \inf_{\pi_r \in P_r} \|x_r - \pi_r\|_{L_1(I_i)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

наилучшие приближения в $L_1(I_i)$ функции x_r многочленами $\pi_r \in P_r(I_i)$.

Из определения многообразия $\Sigma_{r,n}(I)$ сплайнов следует, что

$$E(x_r, \Sigma_{r,n})_{L_1(I)} = \inf_{\{I_i\}_1^n} \sum_{i=1}^n E(x_r, P_r)_{L_1(I_i)}, \quad (4.2)$$

где $\inf$ взят по всем разбиениям $\{I_i\}_1^n$ интервала I на промежутки I_i . А так как известно (см., например, [18; § 2.1.4]), что

$$E(x_r, P_r)_{L_1(I_i)} = 2^{-2r} |I_i|^{r+1}, \quad i = 1, \dots, n,$$

то, следовательно,

$$\sum_{i=1}^n E(x_r, P_r)_{L_1(I_i)} = 2^{-2r} \sum_{i=1}^n |I_i|^{r+1}. \quad (4.3)$$

Воспользовавшись затем известным неравенством

$$\sum_{i=1}^n |a_i| \leq n^{1-1/(r+1)} \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^{r+1} \right)^{1/(r+1)},$$

получим

$$\sum_{i=1}^n |I_i|^{r+1} \geq n^{-r} \left(\sum_{i=1}^n |I_i| \right)^{r+1} = 2^{r+1} n^{-r}. \quad (4.4)$$

Но тогда из (4.3) и (4.4) следует, что

$$\sum_{i=1}^n E(x_r, P_r)_{L_1(I_i)} \geq 2^{-r+1} n^{-r}. \quad (4.5)$$

Неравенство (4.1) – немедленное следствие соотношений (4.2) и (4.5). А в качестве простого следствия из неравенства (4.1) получаем оценку

$$E(\Delta_+^s B_p, \Sigma_{r,n})_{L_q} \geq cn^{-r}, \quad n \geq 1, \quad 1 \leq q < p \leq \infty, \quad r \leq s, \quad (4.6)$$

где $c = c(r, p, q)$. Итак, необходимая оценка снизу доказана для случая $r \leq s$.

Остается рассмотреть случай $r > s$. В этом случае построим при каждом $n \in \mathbb{N}$ функции из $\Delta_+^s B_\infty$, которые невозможно приблизить в метрике L_1 лучше, чем cn^{-s} , где $c = c(r, s)$.

Полагая

$$\phi_0(t) := \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, 1], \\ 1, & t \in (-1, 1), \\ 0, & t \in [1, +\infty), \end{cases}$$

определяем следующие функции:

$$\phi_s(t) := \int_{-\infty}^t (\phi_{s-1}(2\tau+1) - \phi_{s-1}(2\tau-1)) d\tau, \quad t \in (-\infty, +\infty), \quad s \in \mathbb{N}.$$

Ясно, что функции ϕ_s являются положительными на $(-1, 1)$ и $\text{supp } \phi_s = [-1, 1]$.

При каждом $m \in \mathbb{N}$ разобьем интервал I на m промежутков I_i , $i = 1, \dots, m$, равной длины с концами соответственно в точках $t_{i-1} := -1 + 2(i-1)/m$ и $t_i := -1 + 2i/m$. Обозначая через $\bar{t}_i := -1 + (2i-1)/m$ середины промежутков I_i , полагаем

$$\phi_{s,m,i}(t) := \phi_s(m(t - \bar{t}_i)), \quad t \in I, \quad i = 1, \dots, m.$$

Очевидно, что каждая из функций $\phi_{s,m,i}$ положительна на соответствующем интервале (t_{i-1}, t_i) , а $\text{supp } \phi_{s,m,i} = [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, m$. Кроме того, нетрудно проверить, что при $s \in \mathbb{N}$ и всех $i = 1, \dots, m$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} \|\phi_{s,m,i}\|_{L_\infty(I_i)} &= 2^{-s+1}, & \|\phi_{s,m,i}\|_{L_1(I_i)} &= 2^{-s+1}m^{-1}, \\ \|\phi_{s,m,i}^{(s)}\|_{L_\infty(I_i)} &= 2^{(s-1)s/2}m^s. \end{aligned} \quad (4.7)$$

С помощью функций $\phi_{s,m,i}$ определим функции

$$\varphi_{s,m}(t) := (-1)^i 2^{-(s-1)s/2-1} m^{-s} \phi_{s,m,i}(t), \quad t \in I_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.8)$$

Учитывая равенства (4.7), имеем

$$\|\varphi_{s,m}\|_{L_\infty(I)} = 2^{-s(s+1)/2} m^{-s}, \quad \|\varphi_{s,m}^{(s)}\|_{L_\infty(I)} = 2^{-1}. \quad (4.9)$$

Полагая

$$y_s(t) := 2^{-1}t^s, \quad t \in I, \quad (4.10)$$

рассмотрим функции

$$y_{s,m}(t) := y_s(t) + \varphi_{s,m}(t), \quad t \in I. \quad (4.11)$$

Воспользовавшись равенствами (4.9), легко убедиться, что $\|y_{s,m}\|_{L_\infty(I)} \leq 1$. При этом производная $y_{s,m}^{(s)}$ порядка s , существующая всюду на I за исключением конечного числа точек, является кусочно постоянной неотрицательной функцией. Поэтому $y_{s,m} \in \Delta_+^s B_\infty(I)$ при всех $m \in \mathbb{N}$. Учитывая, что y_s — алгебраический многочлен степени s , имеем

$$E(y_{s,m}, \Sigma_{r,n})_{L_1(I)} \geq E(\varphi_{s,m}, \Sigma_{r,n})_{L_1(I)}, \quad n \geq 1, \quad m \in \mathbb{N}, \quad r > s. \quad (4.12)$$

Докажем теперь, что при $m = 8rn$ будет справедлива оценка

$$E(\varphi_{s,8rn}, \Sigma_{r,n})_{L_1(I)} \geq cn^{-s}, \quad n \geq 1, \quad r > s, \quad (4.13)$$

где $c = c(r, s)$.

Для произвольного сплайна $\sigma_{r,n} \in \Sigma_{r,n}(I)$ обозначим через $I_+(\sigma_{r,n})$ множество всех точек $t \in I$ таких, что $\sigma_{r,n}(t) > 0$. Ясно, что число связанных компонент множества $I_+(\sigma_{r,n})$ не превышает rn . Все эти компоненты разобьем на две группы, обозначаемые через $G'_+(\sigma_{r,n})$ и $G''_+(\sigma_{r,n})$. К группе $G''_+(\sigma_{r,n})$ отнесем компоненты, каждая из которых пересекается более чем с одним из интервалов I_i таких, что функция $\varphi_{s,8rn}$ является положительной на I_i . Остальные компоненты отнесем к группе $G'_+(\sigma_{r,n})$.

Допустим, что объединение всех компонент из группы $G''_+(\sigma_{r,n})$ пересекается не более чем с $2rn$ интервалами I_i , на которых функция $\varphi_{s,8rn}$ является положительной. Тогда все множество $I_+(\sigma_{r,n})$ пересекается не более чем с $3rn$ такими интервалами. Всего же имеется $4rn$ интервалов I_i , на которых функция $\varphi_{s,8rn}$ положительна. Значит, на не менее чем rn интервалах I_i из I функции $\sigma_{r,n}$ и $\varphi_{s,8rn}$ имеют разные знаки. Поэтому из (4.8) и (4.7) следует, что

$$\|\varphi_{s,8rn} - \sigma_{r,n}\|_{L_1(I)} \geq rn2^{-(s-1)s/2-1}(8rn)^{-s}2^{-s+1}(8rn)^{-1} = cn^{-s}, \quad (4.14)$$

где $c = r^{-s}2^{-(s-1)s/2-4s-3}$.

Допустим теперь, что объединение всех компонент из группы $G''_+(\sigma_{r,n})$ пересекается более чем с $2rn$ интервалами I_i , на которых функция $\varphi_{s,8rn}$ является положительной. Тогда этому объединению принадлежит не менее чем rn интервалов I_i , на которых функция $\varphi_{s,8rn}$ отрицательна. В этом случае из (4.7) и (4.8) будет следовать, что

$$\|\varphi_{s,8rn} - \sigma_{r,n}\|_{L_1(I)} \geq rn2^{-(s-1)s/2-1}(8rn)^{-s}2^{-s+1}(8rn)^{-1} = cn^{-s}, \quad (4.15)$$

где c — та же константа, что и в (4.14).

Но тогда из (4.14) и (4.15) в силу произвольности выбора сплайна $\sigma_{r,n} \in \Sigma_{r,n}(I)$ следует оценка (4.13). Подставляя неравенство (4.13) в (4.12), имеем

$$E(y_{s,8rn}, \Sigma_{r,n})_{L_1(I)} \geq cn^{-s}, \quad n \geq 1, \quad r > s,$$

где $c = c(r, s)$. А так как $y_{s,8rn} \in \Delta_+^s B_\infty(I)$, то очевидно, что

$$E(\Delta_+^s B_\infty, \Sigma_{r,n})_{L_1} \geq cn^{-s}, \quad n \geq 1, \quad r > s,$$

где $c = c(r, s)$. В качестве простого следствия из этой оценки получаем оценку

$$E(\Delta_+^s B_p, \Sigma_{r,n})_{L_q} \geq cn^{-s}, \quad n \geq 1, \quad 1 \leq q < p \leq \infty, \quad r > s, \quad (4.16)$$

где $c = c(r, s, p, q)$. Объединяя оценки (4.6) и (4.16), имеем

$$E(\Delta_+^s B_p, \Sigma_{r,n})_{L_q} \geq cn^{-\min\{r,s\}}, \quad n \geq 1, \quad 1 \leq q < p \leq \infty, \quad r, s \in \mathbb{N}, \quad (4.17)$$

где $c = c(r, s, p, q)$. Таким образом, оценки снизу в теореме 1 доказаны полностью.

Соотношение (1.1) получаем, объединяя оценку сверху (3.61) с оценкой снизу (4.17). Теорема 1 доказана.

§ 5. Доказательство оценок сверху в теореме 2

Если $1 \leq n < s$, то для любой функции $x \in \Delta_+^s B_p(I)$, $1 \leq p \leq \infty$, заданной на интервале $I := (-1, 1)$, полагаем

$$\rho_n(t; x) := 0, \quad t \in I.$$

Тогда из неравенства Гёльдера следует, что

$$\|x(\cdot) - \rho_n(\cdot; x)\|_{L_q(I)} \leq 2^{1/q-1/p} \|x\|_{L_p(I)}, \quad 1 \leq n < s, \quad 1 \leq q < p \leq \infty. \quad (5.1)$$

Для доказательства оценок сверху при $n \geq s$ воспользуемся уже доказанными выше теоремой 1 и леммой 8. Из теоремы 1 следует, что

$$E(x, \Sigma_{s,k})_{L_q(I)} \leq ck^{-s}, \quad k \geq 1, \quad 1 \leq q < p \leq \infty,$$

где $c = c(s, p, q)$. Но тогда при $\lambda > s$ будут справедливы неравенства

$$\sum_{k=1}^n k^{\lambda-1} E(x, \Sigma_{s,k})_{L_q(I)} \leq c \sum_{k=1}^n k^{\lambda-1-s} \leq c_* n^{\lambda-s},$$

где $c_* = c_*(s, \lambda, p, q)$. Поэтому из леммы 8 следует, что при любом фиксированном $\lambda > s$ имеет место оценка

$$E(x, R_n)_{L_q(I)} \leq c^* n^{-s}, \quad n \geq s, \quad 1 \leq q < p \leq \infty, \quad (5.2)$$

где $c^* = c^*(s, \lambda, p, q)$. Объединяя неравенства (5.1) и (5.2), имеем

$$E(x, R_n)_{L_q(I)} \leq cn^{-s}, \quad n \geq 1, \quad 1 \leq q < p \leq \infty,$$

где $c = c(s, \lambda, p, q)$. А так как x — произвольная функция из $\Delta_+^s B_p(I)$, то

$$E(\Delta_+^s B_p, R_n)_{L_q} \leq cn^{-s}, \quad n \geq 1, \quad 1 \leq q < p \leq \infty, \quad (5.3)$$

где $c = c(s, \lambda, p, q)$. Таким образом, необходимые оценки сверху в теореме 2 доказаны.

§ 6. Доказательство оценок снизу в теореме 2

Оценки снизу доказываются аналогично тому, как это сделано для сплайнов $\sigma_{r,n} \in \Sigma_{r,n}(I)$ в случае $r > s$. Пусть $\varphi_{s,m}$, y_s и $y_{s,m}$ — функции, определенные в (4.8), (4.10) и (4.11) соответственно. Учитывая, что y_s — алгебраический многочлен степени s , имеем

$$E(y_{s,m}, R_n)_{L_1(I)} \geq E(\varphi_{s,m}, R_{n+s+1})_{L_1(I)}, \quad n, m, s \in \mathbb{N}. \quad (6.1)$$

Полагая $m = 16(n+s+1)$ и учитывая, что любая рациональная функция $\rho_{n+s+1} \in R_{n+s+1}$ знакопостоянна на не более чем $2(n+s+1)$ различных интервалах из I , приходим с помощью рассуждений из § 4 к оценке

$$E(\varphi_{s,16(n+s+1)}, R_{n+s+1})_{L_1(I)} \geq c(n+s+1)^{-s}, \quad n \geq 1, \quad (6.2)$$

где $c = c(s)$. Но тогда из (6.1) и (6.2) следует, что

$$E(y_{s,16(n+s+1)}, R_n)_{L_1(I)} \geq cn^{-s}, \quad n \geq 1, \quad (6.3)$$

где $c = c(s)$. А так как $y_{s,16(n+s+1)} \in \Delta_+^s B_\infty(I)$, то оценка

$$E(\Delta_+^s B_p, R_n)_{L_q} \geq cn^{-s}, \quad n \geq 1, \quad 1 \leq q < p \leq \infty, \quad (6.4)$$

где $c = c(s, p, q)$, является простым следствием из (6.3). Итак, необходимая оценка снизу в теореме 2 доказана.

Соотношение (1.2) получаем, объединив оценки (5.3) и (6.4). Этим завершаем доказательство теоремы 2.

Список литературы

1. Bullen P. S. A criterion for n -convexity // Pacific J. Math. 1971. V. 36. P. 81–98.
2. Roberts A. W., Varberg D. E. Convex functions. New York: Academic Press, 1973.
3. Pečarić J. E., Proschan F., Tong Y. L. Convex functions, partial orderings, and statistical applications. Boston: Academic Press, 1992. (Math. Sci. Engrg. V. 187.)
4. Буланов А. П. О порядке приближения выпуклых функций рациональными функциями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1969. Т. 33. № 5. С. 1132–1148.
5. Попов В. А., Петрушев П. П. Точный порядок наилучшего равномерного приближения выпуклых функций рациональными функциями // Матем. сб. 1977. Т. 103(145). № 2(6). С. 285–292.
6. Ivanov K. G. Approximation of convex functions by means of polynomials and polygons // Approximation and function spaces. Proceedings of Conference (Gdansk, 1979). Warszawa, 1981. P. 287–293.
7. Hu Y. Convexity preserving approximation by free knot splines // SIAM J. Math. Anal. 1991. V. 22. P. 1183–1191.
8. Kononov V. N., Leviatan D. Kolmogorov and linear widths of weighted Sobolev-type classes on a finite interval. II // J. Approx. Theory. 2001. V. 113. P. 266–297.
9. Kononov V. N., Leviatan D. Estimates on the approximation of 3-monotone functions by 3-monotone quadratic splines // East J. Approx. 2001. V. 7. P. 333–349.
10. Kononov V. N., Leviatan D. Shape-preserving widths of weighted Sobolev-type classes of positive, monotone and convex functions on a finite interval // Constr. Approx. 2003. V. 19. P. 23–58.

11. *Konovalov V. N., Leviatan D.* Shape preserving widths of Sobolev-type classes of s -monotone functions on a finite interval // Israel J. Math. 2003. V. 133. P. 239–268.
12. *Konovalov V. N., Leviatan D.* Free-knot splines approximation of s -monotone functions on a finite interval // Adv. Comput. Math. 2004. V. 20. P. 347–366.
13. *Konovalov V. N.* Shape preserving widths of Kolmogorov-type of the classes of positive, monotone, and convex integrable functions // East J. Approx. 2004. V. 10. № 1–2. P. 93–117.
14. *Конювалов В. Н.* Формосохраняющие поперечники типа Колмогорова классов s -монотонных интегрируемых функций // Укр. матем. журн. 2004. Т. 55. № 7. С. 901–926.
15. *Харди Г., Литтлвуд Д., Полиа Г.* Неравенства. М.: ИЛ, 1948.
16. *Пекарский А. А.* Соотношения между наилучшими рациональными и кусочно-полиномиальными приближениями // Весці Академіі навук БССР. Сер. фіз.-матем. навук. 1986. № 5. С. 36–39.
17. *Petrushev P. P.* Relation between rational and spline approximation in L_p metric // J. Approx. Theory. 1987. V. 50. P. 141–159.
18. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. М.: МГУ, 1976.

Институт математики НАН Украины, г. Киев
E-mail: vikono@imath.kiev.ua

Поступила в редакцию
10.06.2004 и 01.09.2004