Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Михалёв, И. А. Пинчук, Конформные алгебры Стейнберга, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 5, 31–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1356>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 10:04:46

УДК 512.554

А. В. Михалёв, И. А. Пинчук

Конформные алгебры Стейнберга

В работе исследуется строение конформных алгебр Стейнберга, которые являются аналогами групп (алгебр, супералгебр) Стейнберга.

Конформная алгебра Стейнберга задается как абстрактная алгебра системой образующих и определяющими соотношениями для этих образующих. Доказывается, что конформная алгебра Стейнберга является универсальным центральным расширением соответствующей конформной алгебры Ли, а также вычисляется ядро этого универсального центрального расширения.

Библиография: 15 названий.

В настоящей работе исследуется строение конформных алгебр Стейнберга, которые являются аналогами групп (алгебр, супералгебр) Стейнберга.

Термин “группа Стейнберга” был введен Дж. Милнором в [1] для обозначения универсального центрального расширения группы элементарных матриц с элементами из ассоциативного кольца R . Развивая идеи, содержащиеся в работе Р. Стейнберга [2], Дж. Милнор задает группу Стейнберга образующими и соотношениями, повторяющими соотношения между элементарными матрицами, и доказывает, что центр этой группы совпадает с функтором K_2 кольца R .

Далее подобные конструкции реализуются в теории алгебр и супералгебр Ли. Так, в работах [3]–[7] изучаются алгебра Стейнберга и унитарная алгебра Стейнберга, являющиеся универсальными центральными расширениями алгебры Ли типа A_n и алгебры Ли типа A_n с инволюцией, а также их аналоги для простых алгебр Ли других типов. Работы [8]–[11] посвящены супералгебрам Стейнберга.

Во всех случаях как алгебры, так и супералгебры Стейнберга задаются как абстрактные алгебры образующими и соотношениями для этих образующих. Оказывается, что алгебры и супералгебры Стейнберга можно охарактеризовать как универсальные центральные расширения соответствующих алгебр или супералгебр Ли, ядро этих расширений изоморфно либо группе циклических гомологий Конна (для алгебр и супералгебр Ли), либо группе косодиэдральных гомологий (для унитарных алгебр Ли). Во всех этих случаях A – ассоциативная или ассоциативно-коммутативная k -алгебра коэффициентов (k – поле или кольцо), причем для коммутативной алгебры A группа $HC_2(A)$ изоморфна k -фактормодулю $\Omega_{A/k}^1/dA$ модуля дифференцирований алгебры A над k по подмодулю точных форм.

В настоящей работе доказывается, что конформные алгебры Стейнберга являются универсальными центральными расширениями соответствующих конформных алгебр Ли, а также вычисляются ядра этих расширений. Схема доказательства, в основном, аналогична использованной в работе [7].

Напомним основные понятия и конструкции из теории конформных алгебр Ли, используемые в дальнейшем (см., например, [12]–[15]).

Пусть $\mathbb{Z}_+$ – множество неотрицательных целых чисел; C – линейное пространство над полем k ($\text{char } k = 0$); $D: C \rightarrow C$ – линейное отображение.

Линейное пространство C называется *конформной алгеброй Ли*, если в нем для всех неотрицательных целых чисел n определены билинейные произведения $\textcircled{n}$ такие, что для любых $a, b, c \in C$ и всех $m, n \in \mathbb{Z}_+$ выполняются следующие условия:

$$a \textcircled{n} b = 0 \quad \text{при всех } n \geq N(a, b), \quad (1)$$

где $N(a, b)$ – некоторое целое неотрицательное число, зависящее от a и b ;

$$D(a \textcircled{n} b) = Da \textcircled{n} b + a \textcircled{n} Db; \quad (2)$$

$$Da \textcircled{n} b = -na \textcircled{n-1} b \quad (3)$$

(причем $Da \textcircled{0} b = 0$);

$$a \textcircled{n} b = \sum_{s \geq 0} (-1)^{n+s+1} D^{(s)}(b \textcircled{n+s} a) \quad (4)$$

(условие антикоммутативности);

$$(a \textcircled{n} b) \textcircled{m} c = \sum_{s \geq 0} (-1)^s \binom{n}{s} (a \textcircled{n-s} (b \textcircled{m+s} c) - b \textcircled{m+s} (a \textcircled{n-s} c)) \quad (5)$$

(тождество Якоби). Здесь и далее $D^{(i)} = D^i/i!$ при $i \geq 0$.

Центральным расширением конформной алгебры Ли C называется точная последовательность конформных алгебр

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow U \xrightarrow{\varphi} C \longrightarrow 0, \quad (6)$$

в которой алгебра I лежит в центре алгебры U . Иногда центральным расширением алгебры C называют пару, состоящую из алгебры U и гомоморфизма φ из последовательности (6).

Центральное расширение (6) называется *универсальным*, если для любого другого центрального расширения

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow V \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$$

существует единственный гомоморфизм $h: U \rightarrow V$ такой, что $\psi h = \varphi$.

В работе [4] отмечено, что любое центральное расширение (6) с одномерным центром I задается с помощью 2-коцикла $\{\alpha_n\}$, т.е. счетного множества отображений $C \times C \rightarrow I$, для которых

$$\alpha_n(Da, b) = -n\alpha_{n-1}(a, b); \quad (7)$$

$$\alpha_n(a, b) = (-1)^{n+1}\alpha_n(b, a); \quad (8)$$

$$\alpha_m(a, b \textcircled{n} c) = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \alpha_{m+n-j}(a \textcircled{j} b, c) + \alpha_n(b, a \textcircled{m} c). \quad (9)$$

Тогда $U = C \oplus I$; билинейные произведения $\circledast$ в U для всех $a, b \in C \subset U$ определяются с помощью коцикла α_n по формуле

$$a \circledast b = a \circ b + \alpha_n(a, b),$$

где $\circ$ – произведение, определенное в C ; $I \circ U = I \circledast U = 0$ и $DI = 0$.

В работах [12] и [13] рассматривается следующий способ построения конформных алгебр Ли.

Пусть R – алгебра Ли над полем k с операцией коммутирования $[\cdot, \cdot]$ и $C_R = k[D] \otimes_k R$. Как и в [12], будем записывать элементы $D^i \otimes r$ из C_R в виде $D^i r$, где $r \in R$. Для превращения C_R в конформную алгебру Ли для любых $r, s \in R$, $n, i \in \mathbb{Z}_+$ и $x \in C_R$ необходимо определить

$$r \circledast s = [r, s], \quad r \circledast s = 0 \quad \text{для } n \geq 1; \quad (10)$$

$$D^{(i)} r \circledast x = (-1)^i \binom{n}{i} r \circledast x \quad (11)$$

(ясно, что $r \circledast x = 0$ для $n < 0$);

$$r \circledast D^{(i)} s = D^{(i-n)} [r, s] \quad (\text{где } D^{(i)} = 0 \text{ для } i < 0). \quad (12)$$

Из соотношений (11) и (12) нетрудно получить непосредственно результат произведения $\circledast$:

$$D^{(i)} r \circledast D^{(j)} s = (-1)^i \binom{n}{i} D^{(i+j-n)} [r, s]. \quad (13)$$

Пусть g – простая комплексная алгебра Ли; A – коммутативная и ассоциативная k -алгебра с 1; Δ – фиксированная система ненулевых корней алгебры g ранга l и $E_\alpha, E_{-\alpha}, H_\alpha, \alpha \in \Delta$, – базис Шевалле в g , определяемый системой корней Δ . Обозначим через $g_{\mathbb{Z}}$ подалгебру Ли, порожденную всеми E_α с целыми коэффициентами, и определим алгебру Ли $g(A) = g_{\mathbb{Z}} \otimes A$ (см., например, [4]) с операциями, для которых

$$\lambda(x \otimes a) = x \otimes \lambda a, \quad [x \otimes a, y \otimes b] = [x, y] \otimes ab,$$

где $x, y \in g_{\mathbb{Z}}, a, b \in A, \lambda \in k$.

Введем обозначения

$$E_\alpha(a) = E_\alpha \otimes a, \quad H_\alpha(a) = H_\alpha \otimes a.$$

Алгебра $g(A)$ может быть задана соотношениями, вытекающими из соотношений в алгебре g :

$$[E_\alpha(a), E_{-\alpha}(b)] = H_\alpha(ab); \quad (14)$$

$$[H_\alpha(a), E_\beta(b)] = \beta(H_\alpha) E_\beta(ab); \quad (15)$$

$$[E_\alpha(a), E_\beta(b)] = 0, \quad \text{если } \alpha + \beta \notin \Delta \cup \{0\}; \quad (16)$$

$$[E_\alpha(a), E_\beta(b)] = N_{\alpha, \beta} E_{\alpha+\beta}(ab), \quad \text{если } \alpha + \beta, \alpha, \beta \in \Delta, \quad (17)$$

коэффициенты $N_{\alpha,\beta}$ – целые числа, определяемые с точностью до знака и зависящие только от системы корней Δ .

Отметим, что коэффициенты $\beta(H_\alpha)$ и $N_{\alpha,\beta}$ удовлетворяют равенствам (см., например, [7])

$$N_{\alpha,\beta} = -N_{\beta,\alpha} = -N_{-\alpha,-\beta}; \quad (18)$$

$$\beta(H_\alpha) + N_{-\alpha,\beta}N_{-\alpha+\beta,\alpha} + N_{\beta,\alpha}N_{\alpha+\beta,-\alpha} = 0 \quad (19)$$

(здесь $\alpha, \beta \in \Delta$ и $\alpha \pm \beta \neq 0$).

Обозначим через $C_g(A) = k[D] \otimes_k g(A)$ конформную алгебру Ли, заданную так, как описано выше. Из условий (10)–(12) и (14)–(17) следует, что $C_g(A)$ определяется образующими $D^{(i)}E_\alpha(a)$, $D^{(i)}H_\alpha(a)$ и соотношениями

$$\begin{aligned} & D^{(i)}E_\alpha(a) \circledast D^{(j)}E_{-\alpha}(b) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{если } i+j < n, \\ (-1)^i \binom{n}{i} D^{(i+j-n)}H_\alpha(ab), & \text{если } i+j \geq n; \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & D^{(i)}H_\alpha(a) \circledast D^{(j)}E_\beta(b) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{если } i+j < n, \\ (-1)^i \binom{n}{i} \beta(H_\alpha) \\ \quad \times D^{(i+j-n)}E_\beta(ab), & \text{если } i+j \geq n; \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & D^{(i)}E_\alpha(a) \circledast D^{(j)}E_\beta(b) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{если } i+j < n \text{ или } \alpha + \beta \notin \Delta \cup \{0\}, \\ (-1)^i \binom{n}{i} N_{\alpha,\beta} \\ \quad \times D^{(i+j-n)}E_{\alpha+\beta}(ab), & \text{если } i+j \geq n \text{ и } \alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta. \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

В дальнейших вычислениях нам полезны следующие формулы (см. [12]):

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{r}{k} \binom{s+k}{n} = (-1)^r \binom{s}{n-r}, \quad r \geq 0; \quad (23)$$

$$\binom{n}{s} \binom{n-s}{i} = \binom{n}{i} \binom{n-i}{s}; \quad (24)$$

$$\binom{-r}{k} = (-1)^k \binom{r+k-1}{k}; \quad (25)$$

$$D^{(s)}D^{(t)} = \binom{s+t}{s} D^{(s+t)}; \quad (26)$$

$$D^{(s)}(a \circledast b) = \sum_{s_1 \geq 0} D^{(s_1)}(a) \circledast D^{(s-s_1)}(b); \quad (27)$$

$$\binom{n}{i} (n-i) = \binom{n}{i+1} (i+1). \quad (28)$$

Назовем *конформной алгеброй Стейнберга* $\text{st}_C(g, A)$ для алгебры $C_g(A)$ конформную алгебру Ли, порожденную элементами $D^{(i)}u_\alpha(a)$, $a \in A$, $\alpha \in \Delta$, $i \in \mathbb{Z}_+$, и соотношениями

$$D^{(i)}u_\alpha(\lambda a + \mu b) = \lambda D^{(i)}u_\alpha(a) + \mu D^{(i)}u_\alpha(b); \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & D^{(i)}u_\alpha(a) \circledcirc D^{(j)}u_\beta(b) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{если } i+j < n \text{ или } \alpha + \beta \notin \Delta \cup \{0\}, \\ (-1)^i \binom{n}{i} N_{\alpha, \beta} \\ \quad \times D^{(i+j-n)}u_{\alpha+\beta}(ab), & \text{если } i+j \geq n \text{ и } \alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta. \end{cases} \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь $a, b \in A$, $\alpha, \beta \in \Delta$, $\lambda, \mu \in k$, коэффициенты $N_{\alpha, \beta}$ те же, что и в соотношениях (17) и (22).

Введем обозначение

$$D^{(i+j-n)}h_\alpha(a, b) = \frac{(-1)^i}{\binom{n}{i}} D^{(i)}u_\alpha(a) \circledcirc D^{(j)}u_{-\alpha}(b). \quad (31)$$

ЛЕММА 1. Если ранг l системы корней Δ алгебры Ли g не менее двух, то

$$\begin{aligned} & D^{(i+j-n)}h_\alpha(a, b) \circledcirc D^{(k)}u_\beta(c) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{если } i+j+k < m+n, \\ (-1)^{i+j-n} \binom{m}{i+j-n} \beta(H_\alpha) \\ \quad \times D^{(i+j+k-m-n)}u_\beta(abc), & \text{если } i+j+k \geq m+n. \end{cases} \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\beta \neq \pm\alpha$, тогда

$$\begin{aligned} & D^{(i+j-n)}h_\alpha(a, b) \circledcirc D^{(k)}u_\beta(c) \\ &\stackrel{(31)}{=} \left(\frac{(-1)^i}{\binom{n}{i}} D^{(i)}u_\alpha(a) \circledcirc D^{(j)}u_{-\alpha}(b) \right) \circledcirc D^{(k)}u_\beta(c) \\ &\stackrel{(5)}{=} \frac{(-1)^i}{\binom{n}{i}} \sum_{s \geq 0} (-1)^s \binom{n}{s} (D^{(i)}u_\alpha(a) \circledcirc_{n-s} (D^{(j)}u_{-\alpha}(b) \circledcirc_{m+s} D^{(k)}u_\beta(c)) \\ &\quad - D^{(j)}u_{-\alpha}(b) \circledcirc_{m+s} (D^{(i)}u_\alpha(a) \circledcirc_{n-s} D^{(k)}u_\beta(c))) \\ &\stackrel{(30)}{=} \frac{(-1)^i}{\binom{n}{i}} \sum_{s \geq 0} (-1)^s \binom{n}{s} \left(D^{(i)}u_\alpha(a) \circledcirc_{n-s} (-1)^j \binom{m+s}{j} \right. \\ &\quad \times N_{-\alpha, \beta} D^{(j+k-m-s)}u_{-\alpha+\beta}(bc) \\ &\quad \left. - D^{(j)}u_{-\alpha}(b) \circledcirc_{m+s} (-1)^i \binom{n-s}{i} N_{\alpha, \beta} D^{(i+k-n+s)}u_{\alpha+\beta}(ac) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(30)}{=} \frac{(-1)^i}{\binom{n}{i}} \sum_{s \geq 0} (-1)^s \binom{n}{s} \left((-1)^{i+j} \binom{n-s}{i} \binom{m+s}{j} \right) \\
& \quad \times N_{-\alpha, \beta} N_{\alpha, -\alpha+\beta} D^{(i+j+k-n-m)} u_{\beta}(abc) \\
& \quad - (-1)^{i+j} \binom{n-s}{i} \binom{m+s}{j} N_{\alpha, \beta} N_{-\alpha, \alpha+\beta} D^{(i+j+k-n-m)} u_{\beta}(abc) \Big) \\
& = \frac{(-1)^j}{\binom{n}{i}} (N_{-\alpha, \beta} N_{\alpha, -\alpha+\beta} - N_{\alpha, \beta} N_{-\alpha, \alpha+\beta}) \sum_{s \geq 0} (-1)^s \binom{n}{s} \binom{n-s}{i} \\
& \quad \times \binom{m+s}{j} D^{(i+j+k-n-m)} u_{\beta}(abc) \\
& \stackrel{(18), (19), (24)}{=} (-1)^j \beta(H_{\alpha}) \sum_{s \geq 0} (-1)^s \binom{n-i}{s} \binom{m+s}{j} D^{(i+j+k-n-m)} u_{\beta}(abc) \\
& \stackrel{(23)}{=} (-1)^{i+j-n} \binom{m}{i+j-n} \beta(H_{\alpha}) D^{(i+j+k-n-m)} u_{\beta}(abc).
\end{aligned}$$

Рассмотрим, далее, условие $\alpha = \beta$. Так как $l \geq 2$, то (см. [7]) существуют $\gamma, \delta \in \Delta$ такие, что $\alpha = \gamma + \delta$, причем $\alpha \neq \pm(\gamma - \delta)$, $\alpha \neq \pm\gamma$, $\alpha \neq \pm\delta$. Тогда согласно (30) запишем

$$(-1)^p \binom{r}{p} N_{\gamma, \delta} D^{(k)} u_{\gamma+\delta}(c) = D^{(p)} u_{\gamma}(c) \circledcirc D^{(k+r-p)} u_{\delta}(1).$$

Имеем

$$\begin{aligned}
& (-1)^p \binom{r}{p} N_{\gamma, \delta} (D^{(i+j-n)} h_{\alpha}(a, b) \circledcirc D^{(k)} u_{\alpha}(c)) \\
& = D^{(i+j-n)} h_{\alpha}(a, b) \circledcirc (D^{(p)} u_{\gamma}(c) \circledcirc D^{(k+r-p)} u_{\delta}(1)).
\end{aligned} \tag{32}$$

Преобразуя выражение (32), приводим его к виду

$$(-1)^p \binom{r}{p} N_{\gamma, \delta} \left((-1)^{i+j-n} \binom{m}{i+j-n} D^{(i+j+k-n-m)} u_{\alpha}(abc) \right).$$

Из условия $N_{\gamma, \delta} \neq 0$ получаем требуемое равенство. Соотношение $i+j+k \geq m+n$ очевидно. Лемма 1 доказана.

Обозначим через H подмодуль алгебры $\text{st}_C(g, A)$, порожденный всеми элементами $D^{(s)} h_{\alpha}(a, b)$, $\alpha \in \Delta$, $a, b \in A$, и определим сюръективный гомоморфизм

$$\varphi: \text{st}_C(g, A) \rightarrow C_g(A)$$

условием $\varphi D^{(i)} u_{\alpha}(a) = D^{(i)} E_{\alpha}(a)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Конформная алгебра Стейнберга $\text{st}_C(g, A)$ с гомоморфизмом φ является центральным расширением конформной алгебры $C_g(A)$, ядро гомоморфизма φ лежит в подмодуле H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначение U для подмодуля в алгебре $\text{st}_C(g, A)$, порожденного всеми $D^{(i)}u_\alpha(a)$, $\alpha \in \Delta$, $a \in A$, и покажем, что

$$\text{st}_C(g, A) = H \oplus U.$$

Пусть $x \in H + U$. Для любого образующего $D^{(i)}u_\alpha(a)$ алгебры $\text{st}_C(g, A)$ имеем $x \circ D^{(i)}u_\alpha(a) \in H + U$ (на основании соотношения (30), определения (31) элементов $D^{(s)}h_\alpha(a, b)$ и леммы 1). Отсюда следует, что сумма $H + U$ является идеалом в $\text{st}_C(g, A)$. Из предположения о том, что $h + u = 0$, $h \in H$, $u \in U$, имеем

$$\varphi(h + u) = \varphi(h) + \varphi(u) = 0.$$

Так как ограничение гомоморфизма φ на подмодуль U инъективно (что следует из определения отображения φ), то $\varphi(u)$ является линейной комбинацией элементов $D^{(i)}E_\alpha(a)$, $\alpha \in \Delta$. Тогда $\varphi(u) = 0$ и $u = 0$, откуда $h = 0$, т.е. сумма подмодулей H и U прямая.

Пусть $x = h + u \in \text{Ker } \varphi$, для него $0 = \varphi(x) = \varphi(h) + \varphi(u)$. Рассуждая так же, как ранее, имеем $u = 0$ и $x = h$, что означает выполнение включения $\text{Ker } \varphi \subset H$. Отсюда сразу же следует центральность данного расширения, так как по лемме 1 $h \circ u \subseteq U$. Это завершает доказательство предложения 2.

ЛЕММА 3. В конформной алгебре Стейнберга $\text{st}_C(g, A)$ выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} 1) \quad & D^{(i)}h_\alpha(1, a) \circ D^{(j)}h_\beta(1, b) \\ &= (-1)^i \binom{n}{i} \alpha(H_\beta) (D^{(i+j-n)}h_\alpha(1, ab) - D^{(i+j-n)}h_\alpha(b, a)) \\ &= (-1)^{i+1} \binom{n}{i} \beta(H_\alpha) (D^{(i+j-n)}h_\beta(1, ab) - D^{(i+j-n)}h_\beta(a, b)); \\ 2) \quad & D^{(i)}u_\alpha(a) \circ D^{(j)}u_{-\alpha}(b) \\ &= (-1)^i \binom{n}{i} \left(D^{(i+j-n)}h_\alpha(1, ab) + \frac{1}{\alpha(H_\alpha)} D^{(i)}h_\alpha(1, a) \circ D^{(j)}h_\alpha(1, b) \right) \end{aligned}$$

(здесь $i + j - n \geq 0$).

Лемма 3 доказывается с помощью непосредственных вычислений, использующих определение (31), соотношения (10)–(12) и (29), (30), а также формулы (23)–(28). Так, в частности, элементы $D^{(i)}h_\alpha(1, a)$, $D^{(j)}h_\beta(1, b)$ и $D^{(i)}u_\alpha(a)$ записываются в виде

$$\begin{aligned} D^{(i)}h_\alpha(1, a) &= \frac{(-1)^s}{\binom{m}{s}} D^{(s)}u_\alpha(1) \circ D^{(i+m-s)}u_{-\alpha}(a); \\ D^{(j)}h_\beta(1, b) &= \frac{(-1)^t}{\binom{m}{t}} D^{(t)}u_\beta(1) \circ D^{(j+m-t)}u_{-\beta}(b); \\ D^{(i)}u_\alpha(a) &= \frac{1}{2} \frac{(-1)^s}{\binom{m}{s}} D^{(s)}h_\alpha(1, a) \circ D^{(i+m-s)}u_\alpha(1). \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta$. Тогда

- 1) $D^{(s)}h_\alpha(a, b) = -D^{(s)}h_{-\alpha}(b, a)$;
- 2) $N_{\alpha, \beta} D^{(s)}h_{\alpha+\beta}(ab, c) = N_{\beta, -\alpha-\beta} D^{(s)}h_\alpha(a, bc) - N_{\alpha, -\alpha-\beta} D^{(s)}h_\beta(b, ac)$;
- 3) $D^{(s)}h_\alpha(1, a) = D^{(s)}h_\alpha(a, 1)$;
- 4) функции $D^{(s)}h_\alpha(a, b)$ k -билинейны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства равенства 1) запишем определение элемента $D^{(s)}h_\alpha(a, b)$. Имеем

$$\begin{aligned}
 D^{(s)}h_\alpha(a, b) &= \frac{(-1)^i}{\binom{n}{i}} D^{(i)}u_\alpha(a) \circledast D^{(s+n-i)}u_{-\alpha}(b) \\
 &= \frac{(-1)^i}{\binom{n}{i}} \sum_{k \geq 0} (-1)^{n+k+1} D^{(k)}(D^{(s+n-i)}u_{-\alpha}(b) \circledast D^{(i)}u_\alpha(a)) \\
 &= \frac{(-1)^i}{\binom{n}{i}} \sum_{k \geq 0} (-1)^{n+k+1} \sum_{t \geq 0} D^{(t)}D^{(s+n-i)}u_{-\alpha}(b) \circledast D^{(k-t)}D^{(i)}u_\alpha(a) \\
 &= \frac{(-1)^i}{\binom{n}{i}} \sum_{k \geq 0} (-1)^{n+k+1} \sum_{t \geq 0} \binom{s+n+t-i}{t} \binom{i+k-t}{k-t} \\
 &\quad \times D^{(s+n-t-i)}u_{-\alpha}(b) \circledast D^{(i+k-t)}u_\alpha(a) \\
 &= \frac{(-1)^i}{\binom{n}{i}} \sum_{k \geq 0} (-1)^{n+k+1} \sum_{t \geq 0} (-1)^{s+n+t-i} \binom{s+n+t-i}{t} \\
 &\quad \times \binom{i+k-t}{k-t} \binom{n+k}{s+n+t-i} D^{(s)}h_{-\alpha}(b, a) \\
 &= -D^{(s)}h_{-\alpha}(b, a).
 \end{aligned}$$

Для доказательства равенства 2) отметим, что

$$(-1)^i \binom{r}{i} N_{\alpha, \beta} D^{(k)}u_{\alpha+\beta}(ab) = D^{(i)}u_\alpha(a) \circledast D^{(k+r-i)}u_\beta(b).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 (-1)^i \binom{r}{i} N_{\alpha, \beta} D^{(s)}h_{\alpha+\beta}(ab, c) &= (-1)^i \binom{r}{i} N_{\alpha, \beta} \\
 &\quad \times \frac{(-1)^k}{\binom{n}{k}} D^{(k)}u_{\alpha+\beta}(ab) \circledast D^{(n+s-k)}u_{-\alpha-\beta}(c) \\
 &= \frac{(-1)^k}{\binom{n}{k}} (D^{(i)}u_\alpha(a) \circledast D^{(k+r-i)}u_\beta(b)) \circledast D^{(n+s-k)}u_{-\alpha-\beta}(c) \\
 &= \frac{(-1)^k}{\binom{n}{k}} \left(\sum_{t \geq 0} (-1)^t \binom{r}{t} (D^{(i)}u_\alpha(a) \circledast D^{(k+r-i)}u_\beta(b) \right. \\
 &\quad \left. \circledast D^{(n+s-k)}u_{-\alpha-\beta}(c)) - D^{(k+r-i)}u_\beta(b) \circledast (D^{(i)}u_\alpha(a) \right. \\
 &\quad \left. \circledast D^{(n+s-k)}u_{-\alpha-\beta}(c)) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(-1)^k}{\binom{n}{k}} \left(\sum_{t \geq 0} (-1)^t \binom{r}{t} \left(D^{(i)} u_\alpha(a) \circledast_{r-t} (-1)^{k+r-i} \binom{n+t}{k+r-i} \right. \right. \\
 &\quad \times N_{\beta, -\alpha-\beta} D^{(s+r-i-t)} u_{-\alpha}(bc) - D^{(k+r-i)} u_\beta(b) \circledast_{n+t} (-1)^i \binom{r-t}{i} \\
 &\quad \left. \left. \times N_{\alpha, -\alpha-\beta} D^{(n+s-k+i-r+t)} u_{-\beta}(ac) \right) \right) \\
 &= \frac{(-1)^r}{\binom{n}{k}} (N_{\beta, -\alpha-\beta} D^{(s)} h_\alpha(a, bc) - N_{\alpha, -\alpha-\beta} D^{(s)} h_\beta(b, ac)) \\
 &\quad \times \sum_{t \geq 0} (-1)^t \binom{r}{t} \binom{r-t}{i} \binom{n+t}{k+r-i} \\
 &= (-1)^i \binom{r}{i} (N_{\beta, -\alpha-\beta} D^{(s)} h_\alpha(a, bc) - N_{\alpha, -\alpha-\beta} D^{(s)} h_\beta(b, ac)).
 \end{aligned}$$

Так как $(-1)^i \binom{r}{i} \neq 0$, то равенство 2) доказано.

Доказательство равенства 3) основано на результатах леммы 3. Запишем $D^{(s)} h_\alpha(a, b)$ в виде

$$D^{(s)} h_\alpha(a, b) = D^{(0)} u_\alpha(a) \circledast D^{(s)} u_{-\alpha}(b). \quad (33)$$

Тогда по лемме 3

$$D^{(0)} u_\alpha(a) \circledast D^{(s)} u_{-\alpha}(b) = D^{(s)} h_\alpha(1, ab) + \frac{1}{\alpha(H_\alpha)} D^{(0)} h_\alpha(1, a) \circledast D^{(s)} h_\alpha(1, b). \quad (34)$$

По той же лемме

$$D^{(0)} h_\alpha(1, a) \circledast D^{(s)} h_\alpha(1, b) = \alpha(H_\alpha) (D^{(s)} h_\alpha(1, ab) - D^{(s)} h_\alpha(b, a)). \quad (35)$$

Подставим выражение (35) в равенство (34). Имеем

$$D^{(0)} u_\alpha(a) \circledast D^{(s)} u_{-\alpha}(b) = 2D^{(s)} h_\alpha(1, ab) - D^{(s)} h_\alpha(b, a). \quad (36)$$

Полагая в (36) $b = 1$ и учитывая (33), получаем требуемое утверждение.

Условие 4) следует непосредственно из определения элементов $D^{(s)} h_\alpha(a, b)$. Предложение 4 доказано.

ТЕОРЕМА 5. Конформная алгебра Стейнберга $st_C(g, A)$ с гомоморфизмом φ является универсальным центральным расширением алгебры $C_g(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольное центральное расширение конформной алгебры Ли $C_g(A)$:

$$0 \longrightarrow Z \longrightarrow C'_g(A) \xrightarrow{\psi} C_g(A) \longrightarrow 0. \quad (37)$$

Исследуем соотношения, выполняемые в конформной алгебре Ли $C'_g(A)$. Для этого введем некоторые обозначения.

Пусть $x, y \in C_g(A)$, $x' = \psi^{-1}(x)$, $y' = \psi^{-1}(y)$, $x', y' \in C'_g(A)$. Ясно, что произведение $x' \circledast y'$ зависит лишь от x, y , а не от выбора прообразов x' и y' , поэтому введем обозначение $(x \circledast y)'$ для $x' \circledast y'$.

Для всех $\alpha \in \Delta$, $a \in A$ и $i \in \mathbb{Z}_+$ определим в $C'_g(A)$ следующие элементы:

$$\begin{aligned} D^{(i)} E'_{\pm\alpha}(a) &= \pm \frac{1}{\alpha(H_\alpha)} (-1)^k \binom{m}{k}^{-1} (D^{(k)} H_\alpha(1) \circledast D^{(i+m-k)} E_{\pm\alpha}(a)); \\ D^{(i)} H'_\alpha(a) &= (-1)^k \binom{m}{k}^{-1} (D^{(k)} E_\alpha(1) \circledast D^{(i+m-k)} E_{-\alpha}(a))'. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \psi(D^{(i)} E'_{\pm\alpha}(a)) &= E_{\pm\alpha}(a); \\ \psi(D^{(i)} H'_\alpha(a)) &= H_\alpha(a); \\ \psi(D^{(i)} H'_\alpha(a) \circledast D^{(j)} H'_\alpha(b)) &= \psi(D^{(i)} H'_\alpha(a)) \circledast \psi(D^{(j)} H'_\alpha(b)) \\ &= D^{(i)} H_\alpha(a) \circledast D^{(j)} H_\alpha(b) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$D^{(i)} H'_\alpha(a) \circledast D^{(j)} H'_\alpha(b) = (D^{(i)} H_\alpha(a) \circledast D^{(j)} H_\alpha(b))' \in Z.$$

Введем обозначение

$$\{a^{(i)} \circledast b^{(j)}\}_\alpha = D^{(i)} H'_\alpha(a) \circledast D^{(j)} H'_\alpha(b).$$

Ясно, что верно равенство

$$D^{(i)} E'_{\pm\alpha}(a) = \pm \frac{1}{\alpha(H_\alpha)} (-1)^k \binom{m}{k}^{-1} D^{(k)} H'_\alpha(1) \circledast D^{(i+m-k)} E'_{\pm\alpha}(a).$$

ЛЕММА 6. В конформной алгебре Ли $C'_g(A)$ выполняются соотношения:

- 1) $D^{(i)} H'_\alpha(a) \circledast D^{(j)} H'_\alpha(b) = \{a^{(i)} \circledast b^{(j)}\}_\alpha \in Z$;
- 2) $D^{(i)} H'_\alpha(a) \circledast D^{(j)} E'_{\pm\alpha}(b) = \pm \alpha(H_\alpha) (-1)^i \binom{n}{i} D^{(i+j-n)} E'_{\pm\alpha}(ab)$;
- 3) $D^{(i)} E'_\alpha(a) \circledast D^{(j)} E'_{-\alpha}(b) = (-1)^i \binom{n}{i} D^{(i+j-n)} H'_\alpha(ab) + \frac{(-1)^{i+m}}{\alpha(H_\alpha)} \binom{m}{k}^{-1} \sum_{s \geq 0} (-1)^s \binom{m}{s} \binom{n+s}{i+m-k} \times \{a^{(k)} \circledast b^{(i+j+m-k-n-s)}\}_\alpha$;
- 4) $D^{(i)} E'_{\pm\alpha}(a) \circledast D^{(j)} E'_{\pm\alpha}(b) = 0$;
- 5) $D^{(i)} H'_\alpha(a) \circledast D^{(j)} E'_\beta(b) = (-1)^i \beta(H_\alpha) \binom{n}{i} D^{(i+j-n)} E'_\beta(ab)$;

$$\begin{aligned}
 6) \quad & D^{(i)} H'_\alpha(a) \circledcirc D^{(j)} H'_\beta(b) = (-1)^{n+j+1} \frac{\alpha(H_\beta)}{\alpha(H_\alpha)} \\
 & \times \sum_{t \geq 0} (-1)^t \binom{n+t}{j} D^{(t)} \{b^{(0)} \circledcirc a^{(i+j-n-t)}\}_\alpha \\
 & = (-1)^i \frac{\beta(H_\alpha)}{\beta(H_\beta)} \sum_{s \geq 0} D^{(s)} \sum_{t \geq 0} (-1)^t \binom{n+s+t}{i} D^{(t)} \{a^{(0)} \circledcirc b^{(i+j-n-s-t)}\}_\beta; \\
 7) \quad & D^{(i)} E'_\alpha(a) \circledcirc D^{(j)} E'_\beta(b) = (-1)^i \binom{n}{i} N_{\alpha,\beta} D^{(i+j-n)} E'_{\alpha+\beta}(ab),
 \end{aligned}$$

где $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость утверждения 1) очевидна в силу свойств введенных обозначений.

Для доказательства утверждения 2) представим $D^{(j)} E'_{\pm\alpha}(b)$ в виде

$$D^{(j)} E'_{\pm\alpha}(b) = \pm \frac{1}{\alpha(H_\alpha)} (-1)^k \binom{m}{k}^{-1} D^{(k)} H'_\alpha(1) \circledcirc D^{(j+m-k)} E'_{\pm\alpha}(b),$$

тогда

$$\begin{aligned}
 & D^{(i)} H'_\alpha(a) \circledcirc D^{(j)} E'_{\pm\alpha}(b) \\
 & = \pm \frac{(-1)^k}{\alpha(H_\alpha)} \binom{m}{k}^{-1} D^{(i)} H'_\alpha(a) \circledcirc (D^{(k)} H'_\alpha(1) \circledcirc D^{(j+m-k)} E'_{\pm\alpha}(b)) \\
 & = \pm \frac{(-1)^k}{\alpha(H_\alpha)} \binom{m}{k}^{-1} \sum_{s \geq 0} (-1)^{n+s+1} D^{(s)} ((D^{(k)} H'_\alpha(1) \circledcirc D^{(j+m-k)} E'_{\pm\alpha}(b)) \\
 & \quad \circledcirc D^{(i)} H'_\alpha(a)) \\
 & = \pm \frac{(-1)^k}{\alpha(H_\alpha)} \binom{m}{k}^{-1} \sum_{s \geq 0} (-1)^{n+s+1} D^{(s)} \left(\sum_{t \geq 0} (-1)^t \binom{m}{t} (D^{(k)} H'_\alpha(1) \right. \\
 & \quad \circledcirc (D^{(j+m-k)} E'_{\pm\alpha}(b) \circledcirc D^{(i)} H'_\alpha(a)) \\
 & \quad \left. - D^{(j+m-k)} E'_{\pm\alpha}(b) \circledcirc (D^{(k)} H'_\alpha(1) \circledcirc D^{(i)} H'_\alpha(a))) \right) \\
 & = \pm \frac{(-1)^k}{\alpha(H_\alpha)} \binom{m}{k}^{-1} \sum_{s \geq 0} (-1)^{n+s+1} D^{(s)} \left(\sum_{t \geq 0} (-1)^t \binom{m}{t} \left(D^{(k)} H'_\alpha(1) \right. \right. \\
 & \quad \circledcirc \left(\sum_{p \geq 0} (-1)^{n+s+t+p+1} D^{(p)} (D^{(i)} H'_\alpha(a) \right. \\
 & \quad \left. \left. \circledcirc D^{(j+m-k)} E'_{\pm\alpha}(b)) \right) \right) \left. \right) \\
 & = \pm \frac{(-1)^k}{\alpha(H_\alpha)} \binom{m}{k}^{-1} \sum_{s \geq 0} (-1)^{n+s+1} D^{(s)} \left((-1)^{j+k+1} (\alpha(H_\alpha))^2 \binom{m}{k} \right. \\
 & \quad \times \binom{n+s}{j} D^{(i+j-n-s)} E'_{\pm\alpha}(ab) \left. \right) \\
 & = \pm \alpha(H_\alpha) (-1)^i \binom{n}{i} D^{(i+j-n)} E'_{\pm\alpha}(ab).
 \end{aligned}$$

Доказывая утверждение 3), записываем $D^{(i)}E'_\alpha(a)$ так:

$$D^{(i)}E'_\alpha(a) = \frac{1}{\alpha(H_\alpha)} (-1)^k \binom{m}{k}^{-1} D^{(k)}H'_\alpha(a) \circledcirc D^{(i+m-k)}E'_\alpha(1) + z',$$

где z' принадлежит Z – центру алгебры $C'_g(A)$.

Имеем

$$\begin{aligned} & D^{(i)}E'_\alpha(a) \circledcirc D^{(j)}E'_{-\alpha}(b) \\ &= \frac{(-1)^k}{\alpha(H_\alpha)} \binom{m}{k}^{-1} (D^{(k)}H'_\alpha(a) \circledcirc D^{(i+m-k)}E'_\alpha(1)) \circledcirc D^{(j)}E'_{-\alpha}(b) \\ &= \frac{(-1)^k}{\alpha(H_\alpha)} \binom{m}{k}^{-1} \sum_{s \geq 0} (-1)^s \binom{m}{s} (D^{(k)}H'_\alpha(a) \circledcirc D^{(i+m-k)}E'_\alpha(1) \\ &\quad \circledcirc D^{(j)}E'_{-\alpha}(b)) - D^{(i+m-k)}E'_\alpha(1) \\ &\quad \circledcirc (D^{(k)}H'_\alpha(a) \circledcirc D^{(j)}E'_{-\alpha}(b))) \\ &= \frac{1}{\alpha(H_\alpha)} \binom{m}{k}^{-1} \sum_{s \geq 0} (-1)^s \binom{m}{s} \left((-1)^{i+m} \binom{n+s}{i+m-k} (D^{(k)}H'_\alpha(a) \right. \\ &\quad \circledcirc D^{(i+j+m-k-n-s)}H'_\alpha(b)) + \alpha(H_\alpha) \binom{m-s}{k} D^{(i+m-k)}E'_\alpha(1) \\ &\quad \left. \circledcirc (D^{(k+j-m+s)}E'_{-\alpha}(ab) + z'_1) \right) \\ &= \frac{(-1)^{i+m}}{\alpha(H_\alpha)} \binom{m}{k}^{-1} \sum_{s \geq 0} (-1)^s \binom{m}{s} \binom{n+s}{i+m-k} \\ &\quad \times \{ a^{(k)} \circledcirc b^{(i+j+m-k-n-s)} \}_\alpha + (-1)^i \binom{n}{i} D^{(i+j-n)}H'_\alpha(ab), \end{aligned}$$

так как $z'_1 \in Z$.

В доказательстве утверждения 4) отметим, что

$$D^{(i)}E'_{\pm\alpha}(a) = \pm \frac{1}{\alpha(H_\alpha)} D^{(0)}H'_\alpha(1) \circledcirc D^{(i)}E'_{\pm\alpha}(a),$$

откуда

$$\begin{aligned} & D^{(i)}E'_{\pm\alpha}(a) \circledcirc D^{(j)}E'_{\pm\alpha}(b) = \pm \frac{1}{\alpha(H_\alpha)} (D^{(0)}H'_\alpha(1) \circledcirc D^{(i)}E'_{\pm\alpha}(a)) \circledcirc D^{(j)}E'_{\pm\alpha}(b) \\ &= \pm \frac{1}{\alpha(H_\alpha)} (D^{(0)}H'_\alpha(1) \circledcirc (D^{(i)}E'_{\pm\alpha}(a) \circledcirc D^{(j)}E'_{\pm\alpha}(b)) \\ &\quad - D^{(i)}E'_{\pm\alpha}(a) \circledcirc (D^{(0)}H'_\alpha(1) \circledcirc D^{(j)}E'_{\pm\alpha}(b))) \\ &= \mp \frac{1}{\alpha(H_\alpha)} D^{(i)}E'_{\pm\alpha}(a) \circledcirc ((\pm\alpha(H_\alpha))D^{(j)}E'_{\pm\alpha}(b)) \\ &= -D^{(i)}E'_{\pm\alpha}(a) \circledcirc D^{(j)}E'_{\pm\alpha}(b), \end{aligned}$$

так как $D^{(i)}E'_{\pm\alpha}(a) \circledcirc D^{(j)}E'_{\pm\alpha}(b) \in Z$. Из полученного равенства и вытекает справедливость утверждения 4).

Доказывая равенство 5), используем для элемента $D^{(j)}E'_\beta(b)$ формулу

$$D^{(j)}E'_\beta(b) = \frac{1}{\beta(H_\beta)} (-1)^k \binom{m}{k}^{-1} D^{(k)}H'_\beta(1) \circledcirc D^{(j+m-k)}E'_\beta(b).$$

Это позволяет выполнить следующие вычисления:

$$\begin{aligned} & D^{(i)}H'_\alpha(a) \circledcirc D^{(j)}E'_\beta(b) \\ &= \frac{(-1)^k}{\beta(H_\beta)} \binom{m}{k}^{-1} D^{(i)}H'_\alpha(a) \circledcirc (D^{(k)}H'_\beta(1) \circledcirc D^{(j+m-k)}E'_\beta(b)) \\ &= \frac{(-1)^k}{\beta(H_\beta)} \binom{m}{k}^{-1} \sum_{t \geq 0} (-1)^{n+t+1} D^{(t)}((D^{(k)}H'_\beta(1) \circledcirc D^{(j+m-k)}E'_\beta(b)) \\ &\quad \circledcirc D^{(i)}H'_\alpha(a)) \\ &= \frac{(-1)^k}{\beta(H_\beta)} \binom{m}{k}^{-1} \sum_{t \geq 0} (-1)^{n+t+1} D^{(t)} \left(\sum_{s \geq 0} (-1)^s \binom{m}{s} (D^{(k)}H'_\beta(1) \right. \\ &\quad \circledcirc D^{(j+m-k)}E'_\beta(b) \circledcirc D^{(i)}H'_\alpha(a)) \\ &\quad \left. - D^{(j+m-k)}E'_\beta(b) \circledcirc D^{(k)}H'_\beta(1) \circledcirc D^{(i)}H'_\alpha(a) \right) \\ &= \frac{(-1)^k}{\beta(H_\beta)} \binom{m}{k}^{-1} \sum_{t \geq 0} (-1)^{n+t+1} D^{(t)} \left(\sum_{s \geq 0} (-1)^s \binom{m}{s} \left(D^{(k)}H'_\beta(1) \right. \right. \\ &\quad \circledcirc \left(\sum_{p \geq 0} (-1)^{n+t+s+p+1} D^{(p)}(D^{(i)}H'_\alpha(a) \right. \\ &\quad \left. \left. \circledcirc D^{(j+m-k)}E'_\beta(b)) \right) \right) \Bigg) \\ &= \frac{(-1)^k}{\beta(H_\beta)} \binom{m}{k}^{-1} \sum_{t \geq 0} D^{(t)} \left(\sum_{s \geq 0} \binom{m}{s} D^{(k)}H'_\beta(1) \circledcirc \sum_{p \geq 0} (-1)^{p+i} \beta(H_\alpha) \right. \\ &\quad \times \binom{n+t+s+p}{i} D^{(p)}(D^{(i+j+m-k-n-t-s-p)}E'_\beta(ab) + z') \Bigg) \\ &= \frac{(-1)^{k+i}}{\beta(H_\beta)} \beta(H_\alpha) \binom{m}{k}^{-1} \sum_{t \geq 0} D^{(t)} \left(\sum_{s \geq 0} (-1)^{i+j+m-k-n-t-s} \right. \\ &\quad \times \binom{m}{s} \binom{n+t+s}{j+m-k} D^{(k)}H'_\beta(1) \\ &\quad \left. \circledcirc D^{(i+j+m-k-n-t-s)}E'_\beta(ab) \right) \\ &= (-1)^{j+n} \beta(H_\alpha) \sum_{t \geq 0} (-1)^t \binom{n+t}{j} D^{(t)} D^{(i+j-n-t)}E'_\beta(ab) \\ &= (-1)^i \beta(H_\alpha) \binom{n}{i} D^{(i+j-n)}E'_\beta(ab), \end{aligned}$$

так как $D^{(k)}H'_\beta(1) \stackrel{(m-s)}{\circ} D^{(i)}H'_\alpha(a)$, $z' \in Z$.

Для доказательства первой части утверждения б) запишем $D^{(i)}H'_\alpha(a)$ в виде

$$D^{(i)}H'_\alpha(a) = D^{(0)}E'_\alpha(1) \circ D^{(i)}E'_{-\alpha}(a),$$

откуда

$$\begin{aligned} D^{(i)}H'_\alpha(a) \circ D^{(j)}H'_\beta(b) &= (D^{(0)}E'_\alpha(1) \circ D^{(i)}E'_{-\alpha}(a)) \circ D^{(j)}H'_\beta(b) \\ &= D^{(0)}E'_\alpha(1) \circ (D^{(i)}E'_{-\alpha}(a) \circ D^{(j)}H'_\beta(b)) \\ &\quad - D^{(i)}E'_{-\alpha}(a) \circ (D^{(0)}E'_\alpha(1) \circ D^{(j)}H'_\beta(b)) \\ &= (-1)^i \alpha(H_\beta) \binom{n}{i} D^{(0)}E'_\alpha(1) \circ D^{(i+j-n)}E'_{-\alpha}(ab) \\ &\quad - (-1)^i \alpha(H_\alpha) \binom{n}{i} D^{(i+j-n)}H'_\alpha(ab) \\ &\quad - (-1)^{n+j} \frac{\alpha(H_\beta)}{\alpha(H_\alpha)} \sum_{t \geq 0} (-1)^t \binom{n+t}{j} D^{(t)}\{b^{(0)} \circ a^{(i+j-n-t)}\}_\alpha \\ &= (-1)^{n+j+1} \frac{\alpha(H_\beta)}{\alpha(H_\alpha)} \sum_{t \geq 0} (-1)^t \binom{n+t}{j} D^{(t)}\{b^{(0)} \circ a^{(i+j-n-t)}\}_\alpha, \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned} D^{(i)}E'_{-\alpha}(a) \circ D^{(j)}H'_\beta(b) &= (-1)^i \alpha(H_\beta) \binom{n}{i} D^{(i+j-n)}E'_{-\alpha}(ab) + z'_1; \\ D^{(0)}E'_\alpha(1) \circ D^{(j)}H'_\beta(b) &= -\alpha(H_\beta) D^{(j)}E'_\alpha(b) + z'_2 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} D^{(i)}E'_{-\alpha}(a) \circ (-\alpha(H_\alpha)) D^{(j)}E'_\alpha(b) &= (-1)^i \alpha(H_\beta) \binom{n}{i} D^{(i+j-n)}H'_\alpha(ab) \\ &\quad + (-1)^{n+j} \frac{\alpha(H_\beta)}{\alpha(H_\alpha)} \sum_{t \geq 0} (-1)^t \binom{n+t}{j} D^{(t)}\{b^{(0)} \circ a^{(i+j-n-t)}\}_\alpha. \end{aligned}$$

Здесь $z'_1, z'_2 \in Z$.

Аналогично, для доказательства второго равенства в утверждении б) представим элемент $D^{(j)}H'_\beta(b)$ в виде

$$D^{(j)}H'_\beta(b) = D^{(0)}E'_\beta(1) \circ D^{(j)}E'_{-\beta}(b).$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} D^{(i)}H'_\alpha(a) \circ D^{(j)}H'_\beta(b) &= D^{(i)}H'_\alpha(a) \circ (D^{(0)}E'_\beta(1) \circ D^{(j)}E'_{-\beta}(b)) \\ &= \sum_{s \geq 0} (-1)^{n+s+1} D^{(s)}((D^{(0)}E'_\beta(1) \circ D^{(j)}E'_{-\beta}(b)) \stackrel{(n+s)}{\circ} D^{(i)}H'_\alpha(a)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{s \geq 0} (-1)^{n+s+1} D^{(s)} (D^{(0)} E'_\beta(1) \oplus (D^{(j)} E'_{-\beta}(b) \oplus D^{(i)} H'_\alpha(a)) \\
 &\quad - D^{(j)} E'_{-\beta}(b) \oplus (D^{(0)} E'_\beta(1) \oplus D^{(i)} H'_\alpha(a))) \\
 &= \sum_{s \geq 0} (-1)^{n+s+1} D^{(s)} \left((-1)^j \beta(H_\alpha) \binom{n+s}{j} D^{(i+j-n-s)} H'_\beta(ab) \right. \\
 &\quad - (-1)^j \beta(H_\alpha) \binom{n+s}{j} D^{(i+j-n-s)} H'_\beta(ab) \\
 &\quad \left. + (-1)^{n+s+i-1} \frac{\beta(H_\alpha)}{\beta(H_\beta)} \sum_{t \geq 0} (-1)^t \binom{n+s+t}{i} D^{(t)} \{a^{(0)} \oplus b^{(i+j-n-s-t)}\}_\beta \right) \\
 &= (-1)^i \frac{\beta(H_\alpha)}{\beta(H_\beta)} \sum_{s \geq 0} D^{(s)} \sum_{t \geq 0} (-1)^t \binom{n+s+t}{i} D^{(t)} \{a^{(0)} \oplus b^{(i+j-n-s-t)}\}_\beta,
 \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned}
 D^{(j)} E'_{-\beta}(b) \oplus D^{(i)} H'_\alpha(a) &= (-1)^j \beta(H_\alpha) \binom{n+s}{j} D^{(i+j-n-s)} E'_{-\beta}(ab) + z'_1; \\
 D^{(0)} E'_\beta(1) \oplus D^{(i)} H'_\alpha(a) &= -\beta(H_\alpha) D^{(i)} E'_\beta(a) + z'_2; \\
 D^{(j)} E'_{-\beta}(b) \oplus (-\beta(H_\alpha)) D^{(i)} E'_\beta(a) \\
 &= (-1)^j \beta(H_\alpha) \binom{n+s}{j} D^{(i+j-n-s)} H'_\beta(ab) \\
 &\quad + (-1)^{n+s+i} \frac{\beta(H_\alpha)}{\beta(H_\beta)} \sum_{t \geq 0} (-1)^t \binom{n+s+t}{i} D^{(t)} \{a^{(0)} \oplus b^{(i+j-n-s-t)}\}_\beta
 \end{aligned}$$

(здесь также $z'_1, z'_2 \in Z$).

Для доказательства утверждения 7) отметим, во-первых, что

$$(D^{(0)} H'_\gamma(1) \oplus D^{(i)} E'_\alpha(a)) \oplus D^{(j)} E'_\beta(b) = \alpha(H_\gamma) D^{(i)} E'_\alpha(a) \oplus D^{(j)} E'_\beta(b). \quad (38)$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned}
 &(D^{(0)} H'_\gamma(1) \oplus D^{(i)} E'_\alpha(a)) \oplus D^{(j)} E'_\beta(b) \\
 &= D^{(0)} H'_\gamma(1) \oplus (D^{(i)} E'_\alpha(a) \oplus D^{(j)} E'_\beta(b)) \\
 &\quad - D^{(i)} E'_\alpha(a) \oplus (D^{(0)} H'_\gamma(1) \oplus D^{(j)} E'_\beta(b)) \\
 &= D^{(0)} H'_\gamma(1) \oplus \left((-1)^i \binom{n}{i} N_{\alpha,\beta} D^{(i+j-n)} E'_{\alpha+\beta}(ab) + z' \right) \\
 &\quad - \beta(H_\gamma) D^{(i)} E'_\alpha(a) \oplus D^{(j)} E'_\beta(b) \\
 &= (-1)^i \binom{n}{i} N_{\alpha,\beta} D^{(0)} H'_\gamma(1) \oplus D^{(i+j-n)} E'_{\alpha+\beta}(ab) \\
 &\quad - \beta(H_\gamma) D^{(i)} E'_\alpha(a) \oplus D^{(j)} E'_\beta(b) \\
 &= (-1)^i \binom{n}{i} N_{\alpha,\beta} (\alpha + \beta)(H_\gamma) D^{(i+j-n)} E'_{\alpha+\beta}(ab) \\
 &\quad - \beta(H_\gamma) D^{(i)} E'_\alpha(a) \oplus D^{(j)} E'_\beta(b). \quad (39)
 \end{aligned}$$

Сравнив выражения (38) и (39), получим равенство

$$\begin{aligned} & (\alpha + \beta)(H_\gamma)D^{(i)}E'_\alpha(a) \circledast D^{(j)}E'_\beta(b) \\ &= (-1)^i \binom{n}{i} N_{\alpha,\beta}(\alpha + \beta)(H_\gamma)D^{(i+j-n)}E'_{\alpha+\beta}(ab). \end{aligned}$$

Если выбрать H_γ так, чтобы $(\alpha + \beta)(H_\gamma) \neq 0$ (это всегда можно сделать, см., например, [7]), то утверждение 7) окажется верным.

Возвращаясь к доказательству теоремы 5, определим гомоморфизм

$$\eta: \text{st}_C(g, A) \rightarrow C'_g(A),$$

полагая

$$\begin{aligned} \eta(D^{(i)}u_\alpha(a)) &= D^{(i)}E'_\alpha(a); \\ \eta(D^{(j)}h_\beta(1, b)) &= D^{(j)}H'_\beta(b), \end{aligned}$$

где $\alpha, \beta \in \Delta$, $a, b \in A$.

Корректность такого определения и выполнение условий $\psi\eta = \varphi$ следуют из определения конформной алгебры Стейнберга $\text{st}_C(g, A)$, а также из лемм 1, 3 и 6. Это завершает доказательство теоремы 5.

Для вычисления ядра гомоморфизма φ обозначим

$$D^{(s)}t_\alpha(a, b) = D^{(s)}h_\alpha(a, b) - D^{(s)}h_\alpha(1, ab), \quad (40)$$

где $\alpha \in \Delta$, $a, b \in A$.

ЛЕММА 7. *Справедливы равенства:*

- 1) $N_{\beta, -\alpha-\beta}D^{(s)}t_\alpha(a, b) = -N_{\alpha, -\alpha-\beta}D^{(s)}t_\beta(a, b);$
- 2) $N_{\beta, -\alpha-\beta}D^{(s)}t_\alpha(a, b) = N_{\alpha, -\alpha-\beta}D^{(s)}t_\beta(b, a).$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В утверждении 2) предложения 4 положим $a = 1$, $b = a$, $c = b$, тогда

$$N_{\alpha,\beta}D^{(s)}h_{\alpha+\beta}(a, b) = N_{\beta, -\alpha-\beta}D^{(s)}h_\alpha(1, ab) - N_{\alpha, -\alpha-\beta}D^{(s)}h_\beta(a, b). \quad (41)$$

При $b = 1$, $c = b$ получим

$$N_{\alpha,\beta}D^{(s)}h_{\alpha+\beta}(a, b) = N_{\beta, -\alpha-\beta}D^{(s)}h_\alpha(a, b) - N_{\alpha, -\alpha-\beta}D^{(s)}h_\beta(1, ab). \quad (42)$$

Вычисляя разность равенств (41) и (42), имеем

$$N_{\beta, -\alpha-\beta}(D^{(s)}h_\alpha(a, b) - D^{(s)}h_\alpha(1, ab)) = -N_{\alpha, -\alpha-\beta}(D^{(s)}h_\beta(a, b) - D^{(s)}h_\beta(1, ab))$$

или

$$N_{\beta, -\alpha-\beta}D^{(s)}t_\alpha(a, b) = -N_{\alpha, -\alpha-\beta}D^{(s)}t_\beta(a, b).$$

Последовательно выполняя следующие замены в утверждении 2) предложения 4: $c = 1$ и $a = ab$, $b = 1$, $c = 1$, получаем равенства:

$$N_{\alpha,\beta}D^{(s)}h_{\alpha+\beta}(ab, 1) = N_{\beta,-\alpha-\beta}D^{(s)}h_{\alpha}(a, b) - N_{\alpha,-\alpha-\beta}D^{(s)}h_{\beta}(b, a); \quad (43)$$

$$N_{\alpha,\beta}D^{(s)}h_{\alpha+\beta}(ab, 1) = N_{\beta,-\alpha-\beta}D^{(s)}h_{\alpha}(ab, 1) - N_{\alpha,-\alpha-\beta}D^{(s)}h_{\beta}(1, ab). \quad (44)$$

Вычитая из (44) равенство (43) и используя условие 3) предложения 4, получаем

$$N_{\beta,-\alpha-\beta}(D^{(s)}h_{\alpha}(a, b) - D^{(s)}h_{\alpha}(1, ab)) = N_{\alpha,-\alpha-\beta}(D^{(s)}h_{\beta}(b, a) - D^{(s)}h_{\beta}(1, ab)),$$

что означает

$$N_{\beta,-\alpha-\beta}D^{(s)}t_{\alpha}(a, b) = N_{\alpha,-\alpha-\beta}D^{(s)}t_{\beta}(b, a).$$

Тем самым, лемма 7 доказана.

ЛЕММА 8. Для всех $\alpha \in \Delta$ и $a, b \in A$ справедливы утверждения:

- 1) $D^{(s)}t_{\alpha}(a, b) + D^{(s)}t_{\alpha}(b, a) = 0$;
- 2) $D^{(s)}t_{\alpha}(ab, c) + D^{(s)}t_{\alpha}(bc, a) + D^{(s)}t_{\alpha}(ac, b) = 0$;
- 3) $D^{(s)}t_{\alpha}(a, 1) = D^{(s)}t_{\alpha}(1, a) = 0$;
- 4) функции $D^{(s)}t_{\alpha}(a, b)$ k -билинейны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства утверждения 1), вычитая из равенства 2) леммы 7 равенство 1) той же леммы, получаем

$$N_{\alpha,-\alpha-\beta}(D^{(s)}t_{\beta}(a, b) + D^{(s)}t_{\beta}(b, a)) = 0. \quad (45)$$

Так как ранг системы корней Δ не менее двух, то для каждого $\alpha \in \Delta$ можно найти $\beta \in \Delta$ такой, что $\alpha + \beta \in \Delta$, откуда $N_{\alpha,-\alpha-\beta} \neq 0$. Сокращая на этот элемент равенство (45), получаем утверждение 1).

Для доказательства утверждения 2) подставим в равенство (42) $a = ab$, $b = c$. Получим

$$N_{\alpha,\beta}D^{(s)}h_{\alpha+\beta}(ab, c) = N_{\beta,-\alpha-\beta}D^{(s)}h_{\alpha}(ab, c) - N_{\alpha,-\alpha-\beta}D^{(s)}h_{\beta}(1, abc). \quad (46)$$

Сопоставление равенства (46) и условия 2) в предложении 4 дает нам следующие равенства:

$$\begin{aligned} & N_{\beta,-\alpha-\beta}D^{(s)}h_{\alpha}(ab, c) - N_{\alpha,-\alpha-\beta}D^{(s)}h_{\beta}(1, abc) \\ &= N_{\beta,-\alpha-\beta}D^{(s)}h_{\alpha}(a, bc) - N_{\alpha,-\alpha-\beta}D^{(s)}h_{\beta}(b, ac); \\ & N_{\beta,-\alpha-\beta}(D^{(s)}t_{\alpha}(ab, c) + D^{(s)}h_{\alpha}(1, abc)) - N_{\alpha,-\alpha-\beta}D^{(s)}h_{\beta}(1, abc) \\ &= N_{\beta,-\alpha-\beta}(D^{(s)}t_{\alpha}(a, bc) + D^{(s)}h_{\alpha}(1, abc)) - N_{\alpha,-\alpha-\beta}D^{(s)}h_{\beta}(b, ac); \\ & N_{\beta,-\alpha-\beta}D^{(s)}t_{\alpha}(ab, c) + N_{\alpha,-\alpha-\beta}D^{(s)}t_{\beta}(b, ac) - N_{\beta,-\alpha-\beta}D^{(s)}t_{\alpha}(a, bc) = 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Применяя к равенству (47) лемму 7, утверждение 1), а также учитывая, что

$$N_{\beta,-\alpha-\beta} \neq 0,$$

получаем утверждение 2).

Утверждения 3) и 4) справедливы в силу определения элементов $D^{(s)}t_{\alpha}(a, b)$.

ЛЕММА 9. *Любой элемент $\omega \in \text{Ker } \varphi$ может быть записан в виде*

$$\omega = \sum_i D^{(0)} t_{\alpha_1}(a_i, b_i),$$

где α_1 – некоторый простой корень относительно выбранного упорядочения системы корней Δ , $a_i, b_i \in A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По свойствам системы корней Δ любой корень $\lambda \in \Delta$ является линейной комбинацией простых корней $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Delta$. Из этого и из предложения 4 следует, что элемент $D^{(s)} h_\lambda(a, b)$ можно представить в виде линейной комбинации элементов $D^{(s)} h_{\alpha_i}(a_i, b_i)$, где α_i – простые корни системы корней Δ , $a_i, b_i \in A$. Используя равенство (40), запишем любой элемент $D^{(s)} h_{\alpha_i}(a, b)$ в следующем виде:

$$D^{(s)} h_{\alpha_i}(a, b) = D^{(s)} t_{\alpha_i}(a, b) + D^{(s)} h_{\alpha_i}(1, ab).$$

Из леммы 7 следует, что элементы $D^{(s)} t_{\alpha_i}(a, b)$ и $D^{(s)} t_{\alpha_j}(a, b)$ линейно зависимы в том случае, когда $\alpha_i + \alpha_j$ – корень. Отсюда можно заключить, что любой элемент ω из подмодуля H конформной алгебры Стейнберга $\text{st}_C(g, A)$ представляется в виде

$$\omega = \sum_i D^{(s)} t_{\alpha_1}(a_i, b_i) + \sum_{j=1}^l D^{(s)} h_{\alpha_j}(1, c_j),$$

где l – ранг системы корней Δ . Если $\omega \in \text{Ker } \varphi$, то $\varphi(\omega) = 0$ и $D\omega = 0$ (см. [13]). Далее,

$$\varphi(\omega) = \varphi\left(\sum_i D^{(s)} t_{\alpha_1}(a_i, b_i) + \sum_{j=1}^l D^{(s)} h_{\alpha_j}(1, c_j)\right) = \sum_{j=1}^l D^{(s)} H_{\alpha_j}(c_j) = 0,$$

откуда следует, что $c_1 = c_2 = \dots = c_l = 0$, т.е.

$$\omega = \sum_i D^{(s)} t_{\alpha_1}(a_i, b_i).$$

Кроме того, в силу условия $D\omega = 0$ получаем, что $D^{(s)} t_{\alpha_1}(a, b) = 0$ для всех $s \geq 1$, откуда и следует утверждение леммы 9.

ТЕОРЕМА 10. *Ядро универсального центрального расширения $(\text{st}_C(g, A), \varphi)$ конформной алгебры Ли $C_g(A)$ изоморфно k -фактормодулю $\Omega_{A/k}^1/dA$ модуля дифференцирований алгебры A над k по подмодулю точных форм.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим отображение

$$\eta: \Omega_{A/k}^1/dA \rightarrow \text{Ker } \varphi,$$

полагая $\eta(a db) = D^{(0)} t_{\alpha_1}(a, b)$. В силу доказанных свойств элементов $D^{(0)} t_{\alpha_1}(a, b)$ такое определение отображения η корректно, причем, очевидно, η – сюръекция.

Для доказательства инъективности отображения η построим некоторое центральное расширение конформной алгебры Ли $C_g(A)$.

ЛЕММА 11. *Счетное множество отображений*

$$f_n : C_g(A) \times C_g(A) \rightarrow \Omega_{A/k}^1/dA,$$

задаваемых условиями

$$f_0(D^{(0)}x(a), D^{(0)}y(b)) = (x, y)a \, db, \quad (48)$$

$$\begin{aligned} f_n(D^{(i)}x(a), D^{(j)}y(b)) \\ = \begin{cases} (-1)^i \binom{n}{i} f_0(D^{(0)}x(a), D^{(0)}y(b)), & \text{если } n = i + j, \\ 0, & \text{если } n \neq i + j, \end{cases} \end{aligned} \quad (49)$$

где (x, y) – форма Киллинга алгебры Ли $g_{\mathbb{Z}}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, является 2-коциклом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим, что система отображений f_n удовлетворяет условиям (7)–(9).

Во-первых,

$$\begin{aligned} f_n(DD^{(i)}x(a), D^{(j)}y(b)) &= \frac{1}{i!} f_n(D^{(i+1)}x(a), D^{(j)}y(b)) \\ &= (i+1)f_n(D^{(i+1)}x(a), D^{(j)}y(b)) = (i+1)(-1)^{i+1} \binom{n}{i+1} f_0(D^{(0)}x(a), D^{(0)}y(b)) \\ &= -n(-1)^i \binom{n-1}{i} f_0(D^{(0)}x(a), D^{(0)}y(b)) = -nf_{n-1}(D^{(i)}x(a), D^{(j)}y(b)). \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} f_n(D^{(i)}x(a), D^{(j)}y(b)) &= (-1)^i \binom{n}{i} f_0(D^{(0)}x(a), D^{(0)}y(b)) \\ &= (-1)^i \binom{n}{i} (x, y)a \, db = (-1)^{i+1} \binom{n}{i} (y, x)b \, da \\ &= (-1)^{i+1} \binom{n}{i} f_0(D^{(0)}y(b), D^{(0)}x(a)) \\ &= (-1)^{i+j+1} (-1)^j \binom{n}{n-i} f_0(D^{(0)}y(b), D^{(0)}x(a)) \\ &= (-1)^{n+1} (-1)^j \binom{n}{j} f_0(D^{(0)}y(b), D^{(0)}x(a)) \\ &= (-1)^{n+1} f_n(D^{(j)}y(b), D^{(i)}x(a)). \end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned} f_m(D^{(i)}x(a), D^{(j)}y(b) \oslash D^{(k)}z(c)) \\ = f_m\left(D^{(i)}x(a), (-1)^j \binom{n}{j} D^{(j+k-n)}[y(b), z(c)]\right) \\ = (-1)^{i+j} \binom{m}{i} \binom{n}{j} f_0(D^{(0)}x(a), D^{(0)}[y(b), z(c)]). \end{aligned} \quad (50)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} & f_n(D^{(j)}y(b), D^{(i)}x(a) \circledast D^{(k)}z(c)) \\ &= f_n\left(D^{(j)}y(b), (-1)^i \binom{m}{i} D^{(i+k-m)}[x(a), z(c)]\right) \\ &= (-1)^{i+j} \binom{m}{i} \binom{n}{j} f_0(D^{(0)}y(b), D^{(0)}[x(a), z(c)]), \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} f_{m+n-r}(D^{(i)}x(a) \circledast D^{(j)}y(b), D^{(k)}z(c)) \\ &= \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} f_{m+n-r}\left((-1)^i \binom{r}{i} D^{(i+j-r)}[x(a), y(b)], D^{(k)}z(c)\right) \\ &= \sum_{r=0}^m (-1)^{j-r} \binom{r}{i} \binom{m}{r} \binom{m+n-r}{i+j-r} f_0(D^{(0)}[x(a), y(b)], D^{(0)}z(c)). \end{aligned} \quad (52)$$

Так как

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^m (-1)^{j-r} \binom{r}{i} \binom{m}{r} \binom{m+n-r}{i+j-r} \\ &= (-1)^{i+j} \binom{m}{i} \sum_{r=0}^m (-1)^{r-i} \binom{m-i}{r-i} \binom{m+n-r}{i+j-r} = (-1)^{i+j} \binom{m}{i} \binom{n}{j}, \end{aligned}$$

то выражение (50) равно сумме выражений (51) и (52), так как отображение f_0 является 2-коциклом на алгебре Ли $g(A)$.

Возвращаемся к доказательству теоремы 10.

Построим центральное расширение $\overline{C}_g(A)$ конформной алгебры Ли $C_g(A)$ с центром $\Omega_{A/k}^1/dA$:

$$\overline{C}_g(A) = C_g(A) \oplus \Omega_{A/k}^1/dA,$$

операции $\circledast$ в алгебре $\overline{C}_g(A)$ задаются следующим образом:

$$(D^{(i)}x(a), \tau_1) \circledast (D^{(j)}y(b), \tau_2) = D^{(i)}x(a) \circledast D^{(j)}y(b) + f_n(D^{(i)}x(a), D^{(j)}y(b)),$$

где $D^{(i)}x(a), D^{(j)}y(b) \in C_g(A)$; $\tau_1, \tau_2 \in \Omega_{A/k}^1/dA$; f_n — система 2-коциклов (48) и (49); $\circledast$ — билинейные произведения, определенные в алгебре $C_g(A)$.

Ясно, что пара $(\overline{C}_g(A), \psi)$ — центральное расширение конформной алгебры Ли $C_g(A)$ в том случае, если

$$\psi(D^{(i)}x(a), \tau) = D^{(i)}x(a).$$

Так как пара $(st_C(g, A), \varphi)$ — универсальное центральное расширение алгебры $C_g(A)$, то существует единственный гомоморфизм

$$\rho: st_C(g, A) \rightarrow \overline{C}_g(A),$$

который, очевидно, задается условием

$$\rho(D^{(i)}u_\alpha(a)) = (D^{(i)}E_\alpha(a), 0).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \rho\eta(a\,db) &= \rho(D^{(0)}t_{\alpha_1}(a, b)) = \rho(D^{(0)}h_{\alpha_1}(a, b) - D^{(0)}h_{\alpha_1}(1, ab)) \\ &= \rho(D^{(0)}u_{\alpha_1}(a) \oplus D^{(0)}u_{-\alpha_1}(b) - D^{(0)}u_{\alpha_1} \oplus D^{(0)}u_{-\alpha_1}(ab)) \\ &= (D^{(0)}E_{\alpha_1}(a), 0) \oplus (D^{(0)}E_{-\alpha_1}(b), 0) \\ &\quad - (D^{(0)}E_{\alpha_1}(1), 0) \oplus (D^{(0)}E_{-\alpha_1}(ab), 0) \\ &= D^{(0)}E_{\alpha_1}(a) \oplus D^{(0)}E_{-\alpha_1}(b) + f_0(D^{(0)}E_{\alpha_1}(a), D^{(0)}E_{-\alpha_1}(b)) \\ &\quad - D^{(0)}E_{\alpha_1}(1) \oplus D^{(0)}E_{-\alpha_1}(ab) - f_0(D^{(0)}E_{\alpha_1}(1), D^{(0)}E_{-\alpha_1}(ab)) \\ &= D^{(0)}H_{\alpha_1}(ab) + (E_{\alpha_1}, E_{-\alpha_1})a\,db - D^{(0)}H_{\alpha_1}(ab) - (E_{\alpha_1}, E_{-\alpha_1})d(ab) \\ &= (E_{\alpha_1}, E_{-\alpha_1})a\,db \neq 0, \end{aligned}$$

так как $(E_{\alpha_1}, E_{-\alpha_1}) \neq 0$. Отсюда следует, что η – инъекция, что завершает доказательство теоремы 10.

СЛЕДСТВИЕ 12. Если $C_g(A) = k[D] \otimes_k g(A)$ – конформная алгебра Ли, построенная по алгебре Ли $g(A)$, $\text{st}_C(g, A)$ – универсальное центральное расширение алгебры Ли $g(A)$, то

$$\text{st}_C(g, A) \cong k[D] \otimes_k \text{st}_g(A).$$

Список литературы

1. Милнор Дж. Введение в алгебраическую К-теорию. М.: Мир, 1974.
2. Steinberg R. Générateurs, relations et revêtements de groupes algébriques // Colloques sur la théorie des groupes algébriques. Bruxelles: Centre Belge Rech Math, 1962. P. 113–127.
3. Bloch S. The dilogarithm and extensions of Lie algebras // Algebraic K-theory. Proc. Conf. Evanston, 1980. Berlin: Springer, 1981. P. 1–23. (Lecture Notes in Math. V. 854.)
4. Kassel C. Kähler differentials and coverings of complex simple Lie algebras extended over a commutative algebra // J. Pure Appl. Algebra. 1984. V. 34. P. 265–275.
5. Kassel C., Loday J.-L. Extensions centrales d'algèbres de Lie // Ann. Inst. Fourier. (Grenoble). 1982. V. 32. P. 119–142.
6. Yun Gao. On the Steinberg Lie algebras $\text{st}_2(R)$ // Comm. Algebra. 1993. V. 21. №10. P. 3691–3706.
7. Yun Gao. Steinberg Lie algebras and skew-dihedral homology // J. Algebra. 1996. V. 179. P. 261–34.
8. Михалёв А. В., Пинчук И. А. Универсальное центральное расширение одной особой супералгебры Ли с невырожденной формой Киллинга // Универсальная алгебра и ее приложения. Волгоград: Перемена, 2000. С. 201–221.
9. Михалёв А. В., Пинчук И. А. Универсальные центральные расширения супералгебр Ли // Формальные степенные ряды и алгебраическая комбинаторика. Тезисы 12-й Международной конференции. М.: Макс Пресс, 2000. С. 49–50.
10. Михалёв А. В., Пинчук И. А. Универсальные центральные расширения супералгебр Ли // Труды сем. им. И. Г. Петровского. №22. М.: МГУ, 2002. С. 261–282.
11. Mikhalev A. V., Pinchuk I. A. Universal central extensions of the matrix Lie superalgebras $\text{sl}(m, n, A)$ // Contemp. Math. 2000. V. 264. P. 111–125.

12. *Bokut L. A., Fong Y., Ke W.-F.* Gröbner–Shirshov bases and composition lemma for associative conformal algebras: an example // *Contemp. Math.* 2000. V. 264. P. 63–90.
13. *Kac V.* Vertex algebras for beginners. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996. (Univ. Lecture Ser. V. 10.)
14. *Roitman M.* On free conformal and vertex algebras // *J. Algebra.* 1999. V. 217. P. 496–527.
15. *Zelmanov E.* Conformal algebras // *The concise handbook of algebra.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002. P. 326–330.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
Московский государственный
областной университет
E-mail: mikhalev@cmitmath.msu.ru,
mikhalev@shade.msu.ru,
irenepin@yandex.ru

Поступила в редакцию
31.07.2003