Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ю. Планида, Асимптотики собственных элементов лапласиана с сингулярными возмущениями граничных условий на узких и тонких множествах, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 5, 83–120

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1359>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 15:02:02

УДК 517.956

М. Ю. Планида

**Асимптотики собственных элементов лапласиана
с сингулярными возмущениями граничных
условий на узких и тонких множествах**

Изучаются возмущения трехмерной задачи Дирихле в ограниченной области. Первый тип возмущений – смена типа граничного условия на узкой полоске, стягивающейся к замкнутой кривой на границе. Второй тип возмущений осуществляется вырезанием в области тонкого “тороидального” тела, стягивающегося также к замкнутой кривой (но уже лежащей внутри области), и заданием на границе этого тонкого тела граничного условия Неймана. Для этих задач методом согласования асимптотических разложений построены полные асимптотики по малому параметру собственных значений, сходящихся к простым собственным значениям невозмущенной задачи, и соответствующих собственных функций. Малым параметром является соответственно ширина полоски и диаметр сечения тора.

Библиография: 45 названий.

Введение

Построению асимптотик решений эллиптических краевых задач в сингулярно возмущенных областях посвящено достаточно много работ (см., например, [1]–[15] и содержащийся в этих работах обзор литературы). Отдельный интерес представляют асимптотики собственных значений таких краевых задач. Типичными примерами, относящимися к этому классу, являются краевые задачи для оператора Лапласа в ограниченных областях с малыми отверстиями [16]–[20], с узкими щелями [21], с тонкими отростками и каналами связи [22]–[26], со сменой типа граничного условия на малой части границы, стягивающейся в точку [27]–[30], с часто меняющимся типом граничных условий [31]–[35].

В настоящей работе строятся полные асимптотики по малому параметру собственных значений и собственных функций оператора Лапласа для двух типов сингулярных возмущений граничных условий. А именно рассматриваются возмущения трехмерной задачи Дирихле, осуществляемые:

- а) сменой типа граничного условия на узкой полоске, стягивающейся к замкнутой гладкой кривой на границе (на границе узкой полоски задается условие Неймана);

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00693), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1446.2003.1) и Министерства образования РФ (грант № А03-2.8-63).

- б) вырезанием в области тонкого “тороидального” тела, также стягивающегося к замкнутой кривой (но уже лежащей внутри области). На границе этого тонкого тела задается граничное условие Неймана.

Асимптотики строятся методом согласования асимптотических разложений [6]. Малым параметром является соответственно ширина полосы и диаметр сечения тора.

§ 1. Формулировка основных результатов

Всюду далее $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – односвязная ограниченная область с гладкой границей Γ , $\gamma \in C^\infty$ – замкнутая кривая без самопересечений, лежащая либо на Γ , либо в Ω , s – натуральный параметр этой кривой, $0 < \varepsilon \ll 1$, τ – вектор внутренней нормали, $(\cdot, \cdot)_\Omega$ – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, $[\cdot, \cdot]$ – векторное произведение, λ_0 – простое собственное значение краевой задачи Дирихле

$$-\Delta\psi_0 = \lambda_0\psi_0 \text{ в } \Omega, \quad \psi_0 = 0 \text{ на } \Gamma, \quad (1.1)$$

а ψ_0 – соответствующая нормированная в $L_2(\Omega)$ собственная функция.

В работе рассматриваются следующие задачи.

ЗАДАЧА А1. Пусть $\gamma \subset \Gamma$, $\mathbf{R}(s, u)$ – параметрическое уравнение, $\mathbf{n}(s, u)$ – вектор внутренней нормали поверхности Γ . Параметр u определим следующим образом. Через каждую точку кривой γ перпендикулярно к ней проведем нормальную плоскость π . Обозначим $\tilde{\gamma} = \Gamma \cap \pi$, $u = y_1$ – натуральный параметр на $\tilde{\gamma}$, причем $y_1 = 0$ соответствует точкам кривой γ . В окрестности γ введем координаты (y, s) , $y = (y_1, y_2)$, по правилу $x = \mathbf{R}(s, y_1) + y_2\mathbf{n}(s, y_1)$, где y_2 – расстояние до γ вдоль внутренней нормали. Положим $\gamma_\varepsilon = \{(y_1, 0, s) : \varepsilon f_1(s) < y_1 < \varepsilon f_2(s)\}$, $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \setminus \tilde{\gamma}_\varepsilon$, где $f_1(s), f_2(s) \in C^\infty(\gamma)$ (см. рис. 1). Будет исследована следующая краевая задача:

$$-\Delta\psi_\varepsilon = \lambda_\varepsilon\psi_\varepsilon \text{ в } \Omega, \quad \psi_\varepsilon = 0 \text{ на } \Gamma_\varepsilon, \quad \frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial\tau} = 0 \text{ на } \gamma_\varepsilon. \quad (1.2)$$

Рис. 1

ЗАДАЧА А2. Пусть $\gamma \subset \Omega$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ – уравнение кривой, $\mathbf{t}(s)$ – единичный касательный вектор, $\mathbf{n}(s)$ – произвольное бесконечно дифференцируемое векторное поле единичных векторов нормали на кривой. На этой кривой зададим еще одно векторное поле $\mathbf{b}(s)$ по правилу $\mathbf{b}(s) = [\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)]$. В каждой точке кривой будем рассматривать декартову систему координат, определяемую репером $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$. Координаты, связанные с векторами $\mathbf{n}(s)$ и $\mathbf{b}(s)$, обозначим через y_1 и y_2 соответственно. Тогда $x = \mathbf{r}(s) + y_1 \mathbf{n}(s) + y_2 \mathbf{b}(s)$. Обозначим через ω односвязную ограниченную область в $\mathbb{R}^2$ с гладкой границей, содержащую начало координат, $\omega_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^2 : \varepsilon^{-1}y \in \omega\}$, $\sigma_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 : s \in \gamma, y \in \omega_\varepsilon\}$, $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bar{\sigma}_\varepsilon$ (см. рис. 2). Исследуется краевая задача вне тонкого тора:

$$-\Delta \psi^\varepsilon = \lambda^\varepsilon \psi^\varepsilon \quad \text{в } \Omega_\varepsilon, \quad \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial \tau} = 0 \quad \text{на } \partial \sigma_\varepsilon, \quad \psi^\varepsilon = 0 \quad \text{на } \Gamma. \quad (1.3)$$

Рис. 2

Краевые задачи (1.2), (1.3) будем называть *возмущенными*, а задачу Дирихле (1.1) – *предельной*.

В [36]–[38] были рассмотрены вопросы сходимости собственных значений и собственных функций возмущенных задач (1.2), (1.3). В частности, было доказано, что если λ_0 – простое собственное значение предельной задачи (1.1), то существует единственное и простое собственное значение возмущенной задачи, сходящееся при $\varepsilon \rightarrow 0$ к λ_0 , а для нормированных в $L_2(\Omega)$ собственных функций имеет место сходимость в $L_2(\Omega)$ (собственная функция возмущенной задачи (1.3) считается продолженной нулем в Ω).

Обозначим $S_\mu^2 = \{x = (y_1, y_2, s) : s \in \gamma, |y| < \mu\}$. Основным содержанием работы является доказательство следующих утверждений.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть λ_0 – простое собственное значение предельной задачи (1.1), ψ_0 – соответствующая нормированная в $L_2(\Omega)$ собственная функция. Тогда асимптотика собственного значения λ_ε возмущенной задачи (1.2),

сходящегося к λ_0 при $\varepsilon \rightarrow 0$, имеет вид

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{[i/2]} \varepsilon^{2+i} \ln^j \varepsilon \lambda_{2+i,j}, \quad (1.4)$$

$$\lambda_{2,0} = -\frac{\pi}{8} \int_{\gamma} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial \tau} \right)^2 (f_2 - f_1)^2 ds, \quad (1.5)$$

$$\lambda_{2t+2,t} = -\frac{\pi}{8^{t+1}} \int_{\gamma} \frac{\partial \psi_0}{\partial \tau} (f_2 - f_1)^2 \mathcal{D}^t \frac{\partial \psi_0}{\partial \tau} ds, \quad (1.6)$$

где $\mathcal{D}$ – линейный дифференциальный оператор второго порядка:

$$\mathcal{D}u := \left(\alpha(s) \frac{d^2}{ds^2} + \beta(s) \right) [(f_2 - f_1)^2 u], \quad (1.7)$$

$\alpha(s), \beta(s) \in C^\infty(\gamma)$ зависят от геометрии γ и Ω . Асимптотики соответствующей собственной функции ψ_ε в норме W_2^1 имеют вид

$$\psi_\varepsilon(x) = \psi_0(x) + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{[i/2]} \varepsilon^{2+i} \ln^j \varepsilon \psi_{2+i,j}(x) \quad \text{в } \Omega \setminus S_{\varepsilon^{1/2}}^2, \quad (1.8)$$

$$\psi_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{[(i-1)/2]} \varepsilon^i \ln^j \varepsilon v_{i,j} \left(\frac{y}{\varepsilon}; s \right) \quad \text{в } \Omega \cap S_{2\varepsilon^{1/2}}^2, \quad (1.9)$$

где $v_{1,0}$ определяется в (2.7).

Заметим, что в случае, когда γ – плоская кривая (например, $\gamma \subset \Omega \cap \{x_3 = 0\}$), имеем

$$\alpha(s) = -\frac{1}{2}, \quad \beta(s) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\kappa^2(s)}{4} + \lambda_0 \right),$$

где $|\kappa|$ – кривизна кривой γ . Для этого случая первый член асимптотики был построен в [39].

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть λ_0 – простое собственное значение предельной задачи (1.1), ψ_0 – соответствующая нормированная в $L_2(\Omega)$ собственная функция. Тогда асимптотика собственного значения λ^ε возмущенной задачи (1.3), сходящегося к λ_0 при $\varepsilon \rightarrow 0$, имеет вид (1.4), где

$$\begin{aligned} \lambda_{2,0} = & |\omega| \int_{\gamma} \left(\lambda_0 \psi_0^2 - \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial s} \right)^2 \right) \Big|_{y=0} ds \\ & - \int_{\gamma} \nabla_y \psi_0 \Big|_{y=0} M \cdot \left(\nabla_y \psi_0 \Big|_{y=0} + \frac{1}{2} \mathbf{e}(s) \psi_0 \Big|_{y=0} \right) ds, \end{aligned} \quad (1.10)$$

M – положительно определенная симметричная (2×2) -матрица из (3.18), зависящая от области ω , вектор-функция $\mathbf{e}(s) \in C^\infty(\gamma)$ зависит от геометрии кривой γ и введенного на ней векторного поля $\mathbf{n}(s)$. Асимптотики соответствующей собственной функции ψ^ε в норме W_2^1 имеют вид (1.8) в $\Omega_\varepsilon \setminus S_{\varepsilon^{1/2}}^2$ и

$$\psi^\varepsilon(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{[i/2]} \varepsilon^i \ln^j \varepsilon v_{i,j} \left(\frac{y}{\varepsilon}; s \right) \quad \text{в } \Omega_\varepsilon \cap S_{2\varepsilon^{1/2}}^2, \quad (1.11)$$

где $v_{0,0}(y/\varepsilon; s) = \psi_0(x)|_\gamma$, а $v_{1,0}$ определяется в (3.19).

Заметим, что в случае, когда кривая γ плоская, в формуле (1.10) вектор $\mathbf{e}(s) = (0, \kappa(s))$, $|\kappa|$ – кривизна кривой γ . Для этого случая первый член асимптотики был построен в [38], [40].

Отметим, что в силу вариационных соображений в случае контактной задачи (1.2) имеет место неравенство $\lambda_\varepsilon - \lambda_0 < 0$, в то время как для задачи вне тонкой трубки (1.3) из (1.10) следует, что разность $\lambda_\varepsilon - \lambda_0$ не является знакоопределенной величиной. Подобное явление возникало в краевых задачах для оператора Лапласа в двумерных и трехмерных областях с вырезанным малым отверстием в случае, когда на границе отверстия задавалось условие Неймана, а отверстие стягивалось к точке [19], [20].

Структура работы выглядит следующим образом. Во втором и третьем параграфах методом согласования асимптотических разложений строятся первые возмущенные члены асимптотики собственного значения возмущенных задач (1.2) и (1.3) соответственно. Коэффициенты рядов (1.8), (1.9), (1.11) являются сингулярными решениями некоторых модельных задач, не содержащих малый параметр ε . В §4 будут исследованы решения задачи Дирихле с заданными особенностями на кривой γ , необходимые при построении асимптотик собственных функций (1.8). В §5 будут найдены решения уравнения Пуассона в полуплоскости и в $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\omega}$ с растущей правой частью, также необходимые при построении асимптотик собственных функций (1.9) и (1.11). В шестом параграфе доказывается теорема 1.1, а в седьмом – теорема 1.2.

§2. Построение первого члена асимптотики краевой задачи (1.2)

В этом параграфе рассматривается задача А1. Методом согласования асимптотических разложений (на формальном уровне) строится первый член теории возмущений собственного значения краевой задачи (1.2). В рассматриваемом случае гладкая кривая γ лежит на границе Γ области Ω , (y, s) – локальная система координат, заданная в окрестности кривой γ .

В силу граничного условия в (1.1) имеем

$$\psi_0(x(y; s)) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i(y; s), \quad r = |y| \rightarrow 0, \quad (2.1)$$

$$P_1(y; s) = c_{01}(s)y_2, \quad c_{01}(s) = \frac{\partial \psi_0}{\partial y_2} \Big|_{y=0}, \quad (2.2)$$

где $P_i(y; s)$ – однородные полиномы степени i по переменной y с коэффициентами из $C^\infty(\gamma)$.

Так как, очевидно, ψ_0 не удовлетворяет граничному условию Неймана на γ_ε , то в окрестности γ_ε введем внутреннее разложение, зависящее от ε и так называемых “внутренних” переменных $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, где $\xi_i = y_i \varepsilon^{-1}$. Положим $\rho = |\xi|$.

Переписывая (2.1) в переменных ξ , получаем

$$\psi_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j P_j(\xi; s), \quad \varepsilon \rho \rightarrow 0. \quad (2.3)$$

Так как $\psi_\varepsilon \rightarrow \psi_0$ в $L_2(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то, следуя методу согласования асимптотических разложений [6] и учитывая (2.3), приближенное значение собственной функции ψ_ε в малой окрестности кривой γ будем искать в виде

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon(x) &= \varepsilon v_1(\xi; s) + \dots, \\ v_1(\xi; s) &= P_1(\xi; s)(1 + o(1)), \quad \rho \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.4)$$

При малых y оператор Лапласа в переменных (y, s) имеет вид

$$\Delta = \Delta_y + y_2 L_2\left(y, s, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}\right) + L_1\left(y, s, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}\right) \frac{\partial}{\partial s} + L_0(y, s) \frac{\partial^2}{\partial s^2}, \quad (2.5)$$

где $L_p\left(y, s, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}\right)$ – однородные относительно символов дифференцирования $\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}$ полиномы степени p , коэффициенты которых есть функции от (y, s) , бесконечно дифференцируемые в окрестности γ , а $L_0(y, s)$ – некоторая бесконечно дифференцируемая в окрестности γ функция. Подставляя (2.5), (2.4) в (1.2), переходя в полученном равенстве к переменным ξ и выписывая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем следующую краевую задачу:

$$\Delta_\xi v_1 = 0, \quad \xi_2 > 0, \quad v_1 = 0, \quad \xi \in \Gamma_1, \quad \frac{\partial v_1}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \gamma_1, \quad (2.6)$$

где $\gamma_1 = \{\xi : f_1(s) < \xi_1 < f_2(s), \xi_2 = 0\}$, $\Gamma_1 = \{\xi : \xi_2 = 0\} \setminus \bar{\gamma}_1$ (см. рис. 3). Пусть $\zeta = \xi_1 + i \xi_2$, где i – мнимая единица, (ρ, φ) – полярные координаты, соответствующие ξ . Легко видеть, что функция

$$v_1(\xi; s) = c_{01}(s) \operatorname{Im} \sqrt{(\zeta - f_1(s))(\zeta - f_2(s))} \quad (2.7)$$

удовлетворяет (2.6) и имеет на бесконечности асимптотику

$$v_1(\xi; s) = P_1(\xi; s) + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j(s) \rho^{-j} \sin(j\varphi), \quad \rho \rightarrow \infty,$$

Рис. 3

где $\beta_j(s) \in C^\infty(\gamma)$ — некоторые явно вычисляемые функции и, в частности,

$$\beta_1(s) = \frac{c_{01}(s)}{8}(f_2(s) - f_1(s))^2. \quad (2.8)$$

Переписывая асимптотику εv_1 при $\rho \rightarrow \infty$ в переменных x , получаем, что при $r\varepsilon^{-1} \rightarrow \infty$

$$\psi_\varepsilon(x) \approx \varepsilon v_1(\xi; s) = P_1(y; s) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^{j+1} \beta_j(s) r^{-j} \sin(j\varphi).$$

Отсюда в соответствии с методом согласования асимптотических разложений заключаем, что асимптотику собственной функции вне малой окрестности кривой γ следует искать в виде

$$\psi_\varepsilon(x) = \psi_0(x) + \varepsilon^2 \psi_2(x) + \dots, \quad (2.9)$$

$$\psi_2(x) = \beta_1(s) r^{-1} \sin \varphi (1 + o(1)), \quad r \rightarrow 0, \quad (2.10)$$

а собственное значение λ_ε в виде

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \dots. \quad (2.11)$$

Подставляя (2.11) и (2.9) в (1.2), приравнявая коэффициенты при степенях ε^m , $m \leq 2$, и переходя к пределу в описании Γ_ε , получаем краевую задачу (1.1) и краевую задачу для ψ_2 :

$$-\Delta \psi_2 = \lambda_0 \psi_2 + \lambda_2 \psi_0, \quad x \in \Omega, \quad \psi_2 = 0, \quad x \in \Gamma \setminus \gamma. \quad (2.12)$$

В §4 будет доказано следующее утверждение.

ЛЕММА 2.1. Пусть $a(s) \in C^\infty(\gamma)$. Тогда существует функция $U^{(2)}(x; a) \in C^\infty(\bar{\Omega} \setminus \gamma)$, имеющая при $r \rightarrow 0$ дифференцируемую асимптотику

$$U^{(2)}(x; a(s)) = r^{-1} a(s) \sin \varphi + O(1)$$

и являющаяся решением краевой задачи (2.12) при $\lambda_2 = \Lambda^{(2)}$, где

$$\Lambda^{(2)} = -\pi \int_{\gamma} c_{01}(s) a(s) ds. \quad (2.13)$$

Положим $\psi_2 = U^{(2)}(x; \beta_1(s))$, $\lambda_2 = \Lambda^{(2)}$, где $\beta_1(s)$ определяется в (2.8). Тогда из леммы 2.1 следует, что функция ψ_2 является решением краевой задачи (2.12) и имеет асимптотику (2.10). Из (2.13), (2.8) и (2.2) следует (1.5).

§ 3. Построение первого члена асимптотики краевой задачи (1.3)

В этом параграфе рассматривается задача А2. Методом согласования асимптотических разложений (на формальном уровне) строится первый член теории возмущений собственного значения краевой задачи (1.3). В рассматриваемом случае гладкая кривая γ лежит в области Ω , (y, s) – локальная система координат, заданная в окрестности кривой γ . Обозначим

$$c_{ij}(s) = \frac{\partial^{i+j} \psi_0}{\partial y_1^i \partial y_2^j} \Big|_{y=0}. \quad (3.1)$$

Ясно, что при $r = |y| \rightarrow 0$

$$\psi_0(x(y; s)) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(y; s), \quad (3.2)$$

$$P_0 = c_{00}, \quad P_1 = c_{10}y_1 + c_{01}y_2, \quad P_2 = \frac{c_{20}y_1^2 + 2c_{11}y_1y_2 + c_{02}y_2^2}{2}, \quad (3.3)$$

где, как и в предыдущем параграфе, $P_i(y; s)$ – однородные полиномы степени i по переменной y с коэффициентами из $C^\infty(\gamma)$.

При малых y оператор Лапласа в переменных (y, s) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta = \Delta_y - k_1(s) \frac{\partial}{\partial y_1} - k_2(s) \frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} + Q_2(y; s) L_2 \left(y, s, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \\ + Q_1(y; s) L_1 \left(y, s, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \frac{\partial}{\partial s} + y_1 L_0(y, s) \frac{\partial^2}{\partial s^2}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $Q_i(y; s)$ – однородные полиномы степени i по переменной y с коэффициентами из $C^\infty(\gamma)$, $L_p \left(y, s, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2} \right)$ – однородные относительно символов дифференцирования $\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}$ полиномы степени p , коэффициенты которых есть функции от (y, s) , бесконечно дифференцируемые в окрестности γ , а $L_0(y, s)$ – некоторая бесконечно дифференцируемая в окрестности γ функция, $k_1(s) = n(s)r''(s)$, $k_2(s) = b(s)r''(s)$. Тогда в силу (1.1), (3.1), (3.4)

$$c_{20} + c_{02} = k_1 c_{10} + k_2 c_{01} - c_{00}'' - \lambda_0 c_{00}. \quad (3.5)$$

Как и в предыдущем параграфе, функция ψ_0 не удовлетворяет требуемым граничным условиям на $\partial\sigma_\varepsilon$, поэтому асимптотику ψ^ε в окрестности σ_ε будем строить методом согласования асимптотических разложений в переменных ξ , где $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\xi_i = y_i \varepsilon^{-1}$. Переписывая (3.2) в переменных ξ , получаем

$$\psi_0(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j P_j(\xi; s), \quad \varepsilon \rho \rightarrow 0. \quad (3.6)$$

Согласно методу согласования асимптотических разложений [6] и учитывая (3.6), приближенное значение собственной функции ψ^ε в окрестности σ_ε следует искать в виде

$$\psi^\varepsilon(x) = v_0(\xi; s) + \varepsilon v_1(\xi; s) + \varepsilon^2 v_2(\xi; s) + \dots, \quad (3.7)$$

$$v_i(\xi; s) \sim P_i(\xi; s), \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

Обозначим через l_ξ натуральный параметр на $\partial\omega$, а через ν — внутреннюю нормаль к $\partial\omega$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial\tau} = \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial\nu} - \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i p_i(l_\xi, s) \frac{\partial}{\partial s}, \quad (3.9)$$

где $p_i(l_\xi, s) \in C^\infty(\partial\omega \times \gamma)$.

Подставляя (3.4), (3.7), (3.9) в (1.3), переходя в полученном равенстве к переменным ξ и выписывая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем следующую краевую задачу:

$$\Delta_\xi v_0 = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\omega}, \quad \frac{\partial v_0}{\partial\nu} = 0, \quad \xi \in \partial\omega. \quad (3.10)$$

Очевидно, что функция

$$v_0(\xi; s) \equiv P_0(s) \quad (3.11)$$

удовлетворяет (3.10) и (3.8). Подставляя далее (3.4), (3.7), (3.9) в (1.3), учитывая, что v_0 не зависит от ξ , получаем краевые задачи для v_1 и v_2 :

$$\Delta_\xi v_1 = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\omega}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial\nu} = 0, \quad \xi \in \partial\omega, \quad (3.12)$$

$$\Delta_\xi v_2 = k_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi_1} + k_2 \frac{\partial v_1}{\partial \xi_2} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial s^2} - \lambda_0 v_0, \quad \xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\omega}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial\nu} = 0, \quad \xi \in \partial\omega. \quad (3.13)$$

Исследуем краевые задачи (3.12), (3.13) на разрешимость и построим асимптотики v_1, v_2 при $\rho \rightarrow \infty$. Предварительно докажем следующее утверждение.

ЛЕММА 3.1. *Если $Z_n(\xi; s)$ — произвольный гармонический полином степени n с коэффициентами из $C^\infty(\gamma)$, то существует гармоническая в $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\omega}$ функция $V(\xi; Z_n(\xi; s)) \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \omega)$, удовлетворяющая однородным граничным условиям Неймана на $\partial\omega$, асимптотика которой при $\rho \rightarrow \infty$ имеет вид*

$$V(\xi; Z_n(\xi; s)) = Z_n(\xi; s) + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j(s) \sin(j\varphi) + b_j(s) \cos(j\varphi)) \rho^{-j}, \quad (3.14)$$

где $a_j, b_j \in C^\infty(\gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функцию V будем искать в виде $V(\xi; Z_n(\xi; s)) = Z_n(\xi; s) + \tilde{v}(\xi; s)$. Тогда для $\tilde{v}$ получаем краевую задачу

$$\Delta_\xi \tilde{v} = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\omega}, \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \nu} = -\frac{\partial Z_n}{\partial \nu}, \quad \xi \in \partial\omega. \quad (3.15)$$

Из формулы Грина следует, что

$$\int_{\partial\omega} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \nu} dl_\xi = 0.$$

Следовательно, существует решение краевой задачи (3.15), имеющее при $\rho \rightarrow \infty$ асимптотику

$$\tilde{v}(\xi; s) = \sum_{j=1}^{\infty} (a_j(s) \sin(j\varphi) + b_j(s) \cos(j\varphi)) \rho^{-j},$$

где $a_j, b_j \in C^\infty(\gamma)$. Таким образом, существует искомая функция V с асимптотикой на бесконечности (3.14). Лемма доказана.

Непосредственно из данной леммы следует

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Существуют функции $V(\xi; \xi_1)$, $V(\xi; \xi_2)$, гармонические в области $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\omega}$ и удовлетворяющие однородным граничным условиям Неймана на $\partial\omega$, асимптотика которых при $\rho \rightarrow \infty$ имеет вид*

$$V(\xi; \xi_i) = \xi_i + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^2 m_{ij} \frac{\partial \ln \rho}{\partial \xi_j} + O(\rho^{-2}). \quad (3.16)$$

Покажем, что матрица $M = (m_{ij})_{i,j=1,2}$ положительно определена и симметрична. Обозначим

$$z_i = V(\xi; \xi_i) - \xi_i. \quad (3.17)$$

Из формулы Грина следует

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \omega} \nabla z_j \cdot \nabla z_p d\xi &= - \int_{\partial\omega} z_j \frac{\partial z_p}{\partial \nu} dl_\xi = - \int_{\partial\omega} (\xi_j + z_j) \frac{\partial z_p}{\partial \nu} dl_\xi - \int_{\partial\omega} \xi_j \frac{\partial \xi_p}{\partial \nu} dl_\xi \\ &= - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial S_R} \left\{ (\xi_j + z_j) \frac{\partial z_p}{\partial \rho} - z_p \frac{\partial}{\partial \rho} (\xi_j + z_j) \right\} dl_\xi - \int_{\omega} \nabla \xi_j \cdot \nabla \xi_p d\xi. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (3.16), (3.17) получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \omega} \nabla z_j \cdot \nabla z_p d\xi &= -\frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial S_R} \sum_{i=1}^2 m_{pi} \left\{ \xi_j \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \xi_i} \right) - \frac{\partial \ln \rho}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_j}{\partial \rho} \right\} dl_\xi \\ &\quad - \delta_p^j |\omega| = m_{pj} - \delta_p^j |\omega|, \end{aligned}$$

где δ_p^j – символ Кронекера. Таким образом,

$$M = E|\omega| + ((\nabla z_j, \nabla z_p)_{\mathbb{R}^2 \setminus \omega})_{j,p=1,2}, \quad (3.18)$$

где E – единичная матрица, а матрица M симметричная и зависит от области ω . В силу критерия Сильвестра о положительной определенности квадратичных форм и неравенства Коши–Буняковского матрица M положительно определенная.

В силу следствия 3.1 и (3.3) функция

$$v_1(\xi; s) = c_{10}(s)V(\xi; \xi_1) + c_{01}(s)V(\xi; \xi_2) \quad (3.19)$$

является решением краевой задачи (3.12) и при $\rho \rightarrow \infty$ имеет асимптотику

$$v_1(\xi; s) = P_1^{(0)}(\xi; s) + \sum_{j=1}^{\infty} (A_j(s) \sin j\varphi + B_j(s) \cos j\varphi) \rho^{-j}, \quad (3.20)$$

а следовательно, удовлетворяет (3.8), причем в силу (3.19), (3.16)

$$A_1 = \frac{1}{2\pi}(c_{10}m_{12} + c_{01}m_{22}), \quad B_1 = \frac{1}{2\pi}(c_{10}m_{11} + c_{01}m_{21}). \quad (3.21)$$

Заметим, что из (3.17) и (3.19) следует

$$v_1(\xi; s) = P_1(\xi; s) + c_{10}z_1 + c_{01}z_2. \quad (3.22)$$

Рассмотрим краевую задачу (3.13). Положим

$$v_2 = \frac{k_1}{2}\xi_1 v_1 + \frac{k_2}{2}\xi_2 v_1 - \frac{\rho^2}{4}(c''_{00} + \lambda_0 c_{00}) + \tilde{v}_2. \quad (3.23)$$

Так как $\frac{\partial v_1}{\partial \nu} = 0$ на $\partial\omega$, то в силу (3.23), (3.13), (3.12), (3.11) краевая задача для $\tilde{v}_2(\xi; s)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta_\xi \tilde{v}_2 &= 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\omega}, \\ \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial \nu} &= -\frac{k_1}{2}v_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial \nu} - \frac{k_2}{2}v_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial \nu} + \frac{1}{4} \frac{\partial \rho^2}{\partial \nu} (c''_{00} + \lambda_0 c_{00}), \quad \xi \in \partial\omega. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Заметим, что из (3.3), (3.5), (3.8) и правой части (3.23) следует, что асимптотика $\tilde{v}_2$ при $\rho \rightarrow \infty$ должна иметь вид $\tilde{v}_2(\xi; s) = Z_2(\xi; s) + o(\rho^2)$. Будем искать $\tilde{v}_2$ в виде

$$\tilde{v}_2(\xi; s) = V(\xi; Z_2(\xi; s)) + \hat{v}_2(\xi; s), \quad \hat{v}_2(\xi; s) = o(\rho), \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (3.25)$$

Из (3.25) и (3.24) следует, что краевая задача для $\hat{v}_2(\xi; s)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta_\xi \hat{v}_2 &= 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\omega}, \\ \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial \nu} &= -\frac{k_1}{2}v_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial \nu} - \frac{k_2}{2}v_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial \nu} + \frac{1}{4} \frac{\partial \rho^2}{\partial \nu} (c''_{00} + \lambda_0 c_{00}), \quad \xi \in \partial\omega. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Известно (см., например, [41]), что существует решение $\hat{v}_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \omega)$ краевой задачи (3.26) с асимптотикой при $\rho \rightarrow \infty$

$$\hat{v}_2(\xi; s) = G(s) \ln \rho + \sum_{j=1}^{\infty} \rho^{-j} (\tilde{a}_j(s) \sin(j\varphi) + \tilde{b}_j(s) \cos(j\varphi)), \quad (3.27)$$

где

$$G(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\omega} \frac{\partial \widehat{v}_2}{\partial \nu} dl_\xi. \quad (3.28)$$

С другой стороны, в силу краевого условия в (3.26) имеем

$$\int_{\partial\omega} \frac{\partial \widehat{v}_2}{\partial \nu} dl_\xi = -\frac{k_1}{2} \int_{\partial\omega} v_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial \nu} dl_\xi - \frac{k_2}{2} \int_{\partial\omega} v_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial \nu} dl_\xi + \frac{c''_{00} + \lambda_0 c_{00}}{4} \int_{\partial\omega} \frac{\partial \rho^2}{\partial \nu} dl_\xi. \quad (3.29)$$

Интегрируя по частям $\Delta_\xi \rho^2$ по области ω , получаем

$$\int_{\partial\omega} \frac{\partial \rho^2}{\partial \nu} dl_\xi = 4|\omega|. \quad (3.30)$$

Из (3.22) следует, что

$$\int_{\partial\omega} v_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial \nu} dl_\xi = \int_{\partial\omega} P_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial \nu} dl_\xi + \int_{\partial\omega} (c_{10} z_1 + c_{01} z_2) \frac{\partial \xi_1}{\partial \nu} dl_\xi, \quad (3.31)$$

где функции z_i гармонические в $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\omega}$ и удовлетворяют на $\partial\omega$ краевому условию $\frac{\partial z_i}{\partial \nu} = -\frac{\partial \xi_i}{\partial \nu}$ в силу (3.17). Интегрируя по частям $\xi_1 \Delta_\xi z_i$ по области $S_R \setminus \omega$ и учитывая асимптотики z_i при $\rho \rightarrow \infty$ (см. (3.16), (3.17)), выводим

$$\int_{\partial\omega} z_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial \nu} dl_\xi = m_{11} - |\omega| + O(R^{-1}), \quad \int_{\partial\omega} z_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial \nu} dl_\xi = m_{21} + O(R^{-1}).$$

Тогда

$$\int_{\partial\omega} (c_{10} z_1 + c_{01} z_2) \frac{\partial \xi_1}{\partial \nu} dl_\xi = c_{10} m_{12} + c_{01} m_{22} - |\omega| c_{10} + O(R^{-1}). \quad (3.32)$$

Из формулы Грина, примененной к области ω , и (3.3) следует, что

$$\int_{\partial\omega} P_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial \nu} dl_\xi = \int_{\partial\omega} \xi_1 \left(c_{10} \frac{\partial \xi_1}{\partial \nu} + c_{01} \frac{\partial \xi_2}{\partial \nu} \right) dl_\xi = c_{10} |\omega|. \quad (3.33)$$

Таким образом, в силу (3.31)–(3.33) имеем

$$\int_{\partial\omega} v_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial \nu} dl_\xi = c_{10} m_{11} + c_{01} m_{21} + O(R^{-1}). \quad (3.34)$$

Аналогично можно показать, что

$$\int_{\partial\omega} v_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial \nu} dl_\xi = c_{10} m_{21} + c_{01} m_{22} + O(R^{-1}). \quad (3.35)$$

Таким образом, из (3.29), (3.30), (3.34), (3.35) выводим

$$\begin{aligned} \int_{\partial\omega} \frac{\partial \widehat{v}_2}{\partial \nu} dl_\xi &= -\frac{k_1}{2} (c_{10} m_{11} + c_{01} m_{21}) - \frac{k_2}{2} (c_{10} m_{12} + c_{01} m_{22}) \\ &\quad + |\omega| (c''_{00} + \lambda_0 c_{00}) + O(R^{-1}). \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$ в последнем равенстве, в силу (3.28) имеем

$$G = -\frac{k_1}{4\pi} (c_{10} m_{11} + c_{01} m_{21}) - \frac{k_2}{4\pi} (c_{10} m_{12} + c_{01} m_{22}) + \frac{1}{2\pi} |\omega| (c''_{00} + \lambda_0 c_{00}). \quad (3.36)$$

Таким образом, из (3.23), (3.25), (3.27) следует, что краевая задача (3.13) имеет решение v_2 с асимптотикой

$$v_2(\xi; s) = P_2(\xi; s) + G(s) \ln \rho + O(1), \quad \rho \rightarrow \infty, \quad (3.37)$$

а следовательно, удовлетворяет (3.8).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Отметим, что при переписывании асимптотики функции $\varepsilon^2 v_2$ при $\rho \rightarrow \infty$ в переменных x возникает слагаемое $(-\varepsilon^2 \ln \varepsilon G(s))$. Чтобы его уничтожить, введем во внутреннем разложении дополнительное слагаемое $\varepsilon^2 \ln \varepsilon v_{2,1}$ с асимптотикой

$$v_{2,1}(\xi; s) = G(s) + o(1). \quad (3.38)$$

Следовательно, главные члены асимптотики ψ^ε надо строить в виде

$$\psi^\varepsilon(x) = v_0(\xi; s) + \varepsilon v_1(\xi; s) + \varepsilon^2 \ln \varepsilon v_{2,1}(\xi; s) + \varepsilon^2 v_2(\xi; s) + \dots \quad (3.39)$$

Подставляя (3.39), (3.4), (3.9) в (1.3), переходя в полученном равенстве к переменным ξ и выписывая коэффициенты при $\varepsilon^2 \ln \varepsilon$, получаем следующую краевую задачу:

$$\Delta_\xi v_{2,1} = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\omega}, \quad \frac{\partial v_{2,1}}{\partial \nu} = 0, \quad \xi \in \partial \omega. \quad (3.40)$$

Очевидно, что

$$v_{2,1}(\xi; s) \equiv G(s) \quad (3.41)$$

является решением краевой задачи (3.40) и имеет асимптотику (3.38). Подставляя в (3.39) вместо v_i их асимптотики на бесконечности (3.11), (3.20), (3.37), (3.41) и переписывая последние в переменных y , получаем, что при $r\varepsilon^{-1} \rightarrow \infty$

$$\psi^\varepsilon(\xi; s) = \sum_{j=0}^2 P_j(y; s) + \varepsilon^2 (r^{-1} (A_1 \sin \varphi + B_1 \cos \varphi) + G(s) \ln r) + O(\varepsilon^2 + \varepsilon^3 r^{-1}).$$

Следуя методу согласования асимптотических разложений, будем искать собственные элементы вне малой окрестности кривой γ в виде (2.9), (2.11), причем

$$\psi_2(x) = r^{-1} (A_1(s) \sin \varphi + B_1(s) \cos \varphi) + G(s) \ln r + O(1), \quad r \rightarrow 0. \quad (3.42)$$

Подставляя (2.11) и (2.9) в (1.3), приравнявая коэффициенты при степенях ε^m , $m \leq 2$, и переходя к пределу в описании Ω_ε , получаем краевую задачу (1.1) и краевую задачу для ψ_2 :

$$-\Delta \psi_2 = \lambda_0 \psi_2 + \lambda_2 \psi_0, \quad x \in \Omega \setminus \gamma, \quad \psi_2 = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (3.43)$$

В §4 будет доказано следующее утверждение.

ЛЕММА 3.2. Пусть $a(s), b(s), g(s) \in C^\infty(\gamma)$. Тогда существуют функции $U^{(0)}(x; g), U^{(1)}(x; a, b) \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \gamma)$, имеющие при $r \rightarrow 0$ дифференцируемые асимптотики

$$U^{(0)}(x; g(s)) \sim g(s) \ln r, \quad U^{(1)}(x; a(s), b(s)) \sim r^{-1} (a(s) \sin \varphi + b(s) \cos \varphi)$$

и являющиеся решениями краевой задачи (3.43) при $\lambda_2 = \Lambda^{(0)}$ и $\lambda_2 = \Lambda^{(1)}$ соответственно, где

$$\Lambda^{(0)} = 2\pi \int_\gamma c_{00} g \, ds, \quad (3.44)$$

$$\Lambda^{(1)} = -2\pi \int_\gamma (c_{10} b + c_{01} a) \, ds. \quad (3.45)$$

Положим

$$\psi_2(x) = U^{(0)}(x; G(s)) + U^{(1)}(x; A_1(s), B_1(s)),$$

где A_1, B_1 — коэффициенты из (3.20), а G — коэффициент из (3.36). Тогда функция ψ_2 является решением краевой задачи (3.43) при

$$\lambda_2 = \Lambda^{(1)} + \Lambda^{(0)} \quad (3.46)$$

и при $r \rightarrow 0$ имеет асимптотику (3.42). Из (3.44)–(3.46), (3.36) и (3.21) следует (1.10).

§4. Решения задачи Дирихле с особенностями на кривой γ

Обозначим через $M_{p,q}(y, s, D), R_{p,q}(y, s, D)$ полиномы, однородные относительно y и относительно символа дифференцирования D , с коэффициентами из $C^\infty(\gamma)$. Степень их однородности относительно y равна p , а относительно D равна q . Положим

$$\begin{aligned} R_{i,0}(y, s, D) &= M_{i,2}(y, s, D_s) + M_{i,1}(y, s, D_s), \\ R_{i,1}(y, s, D) &= M_{i,1}(y, s, D_{sy}) + M_{i,1}(y, s, D_y), \\ R_{i,2}(y, s, D) &= M_{i,2}(y, s, D_y), \end{aligned}$$

где $D_y = \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2} \right)$, $D_s = \frac{\partial}{\partial s}$, $D_{sy} = \left(\frac{\partial^2}{\partial s \partial y_1}, \frac{\partial^2}{\partial s \partial y_2} \right)$. С учетом введенных обозначений оператор Лапласа в локальных переменных (в обеих задачах А1 и А2) можно записать в виде

$$\Delta = \Delta_y - \sum_{i=1}^{\infty} R_{i,2}(y, s, D) - \sum_{i=0}^{\infty} R_{i,1}(y, s, D) - \sum_{i=0}^{\infty} R_{i,0}(y, s, D). \quad (4.1)$$

В этом параграфе исследуются решения задачи Дирихле с заданными особенностями на кривой γ .

Вначале для случая, когда кривая γ лежит на границе области Ω (т.е. для случая А1), рассмотрим следующую краевую задачу:

$$-(\Delta + \lambda_0)U = F + \Lambda\psi_0, \quad x \in \Omega, \quad U = 0, \quad x \in \Gamma \setminus \gamma, \quad (4.2)$$

где F — функция, имеющая особенность на γ . Будем исследовать краевую задачу (4.2), следуя [6].

Обозначим через $Z_i(y; s)$ однородные гармонические полиномы степени i по переменной y с коэффициентами из $C^\infty(\gamma)$; $P_i(y; s), Q_i(y; s)$ — однородные полиномы степени i по переменной y с коэффициентами из $C^\infty(\gamma)$; $\Phi(i, j)$ — функции вида $\Phi(i, j) = r^i Z_j$.

Доказательство следующих трех утверждений имеется в [6].

ЛЕММА 4.1. *Для любого натурального k и любого целого α такого, что $(\alpha+2)(\alpha+2+2k) \neq 0$, уравнение $\Delta_y u = \Phi(\alpha, k)$ имеет решение $u = \Phi(\alpha+2, k)$. Если же $(\alpha+2)(\alpha+2+2k) = 0$, то это уравнение имеет решение $u = \Phi(\alpha+2, k) \ln r$.*

Для любого натурального k и любого целого β уравнение $\Delta_y u = \Phi(\beta, k) \ln r$ имеет решение $u = \Phi(\beta+2, k)(\ln r + a)$, где a — некоторая явно вычисляемая постоянная.

ЛЕММА 4.2. Для любого $Q_k(y; s)$ справедливо единственное представление

$$Q_k(y; s) = \sum_{j=0}^{[k/2]} \Phi(2j, k - 2j).$$

ЛЕММА 4.3. Для любых $Z_k(y; s)$, $Q_j(y; s)$, $k > j$, справедливо равенство

$$Z_k(y; s)Q_j(y; s) = \sum_{l=0}^j \Phi(2l, k + j - 2l).$$

С учетом лемм 4.2, 4.3 непосредственными вычислениями легко проверить следующие равенства:

$$\begin{aligned} R_{q,2}(y, s, D)\Phi(i, j) &= (i + 2j) \sum_{l=0}^q \Phi(2l + i - 2, q + j - 2l) \\ &\quad + \sum_{l=0}^q \Phi(2l + i - 4, q + j + 2 - 2l) + (i + 2j) \sum_{l=0}^q \Phi(2l + i, q + j - 2 - 2l), \\ R_{q,1}(y, s, D)\Phi(i, j) &= \sum_{l=0}^q \Phi(2l + i - 2, q + 1 + j - 2l) \\ &\quad + (i + 2j) \sum_{l=0}^q \Phi(2l + i, q + j - 2 - 2l), \\ R_{q,0}(y, s, D)\Phi(i, j) &= \sum_{l=0}^q \Phi(2l + i, q + j - 2l), \\ R_{q,2}(y, s, D)(\Phi(i, j) \ln r) &= \ln r R_{q,2}(y, s, D)\Phi(i, j) + R_{q,2}(y, s, D)\Phi(i, j), \\ R_{q,1}(y, s, D)(\Phi(i, j) \ln r) &= \ln r R_{q,1}(y, s, D)\Phi(i, j) + R_{q,1}(y, s, D)\Phi(i, j), \\ R_{q,0}(y, s, D)(\Phi(i, j) \ln r) &= \ln r R_{q,0}(y, s, D)\Phi(i, j), \\ R_{q,2}(y, s, D)(\Phi(i, j) \varphi) &= \varphi R_{q,2}(y, s, D)\Phi(i, j) + R_{q,2}(y, s, D)\Phi(i, j), \\ R_{q,1}(y, s, D)(\Phi(i, j) \varphi) &= \varphi R_{q,1}(y, s, D)\Phi(i, j) + R_{q,1}(y, s, D)\Phi(i, j), \\ R_{q,0}(y, s, D)(\Phi(i, j) \varphi) &= \varphi R_{q,0}(y, s, D)\Phi(i, j). \end{aligned} \tag{4.3}$$

С учетом (4.3) и леммы 4.3 непосредственными вычислениями легко доказать следующее утверждение.

ЛЕММА 4.4. Для любого натурального k и любого целого β уравнение $\Delta_y u = \Phi(\beta, k)\varphi$ имеет решение $u = \Phi(\beta + 2, k)(\varphi + b)$, где b — некоторая явно вычисляемая постоянная.

Пусть $\tilde{\mathcal{A}}_k$ — множество рядов вида

$$\tilde{U}(y; s) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(y; s), \tag{4.4}$$

где u_i обращаются в нуль при $y_2 = 0$, $y \neq 0$, и имеют вид

$$u_0(y; s) = r^{-2k} Z_k(y; s),$$

$$u_i(y; s) = \sum_{j=0}^i \Phi(-2k + 2j - 2, k + i - 2j + 2), \quad 1 \leq i \leq k, \quad (4.5)$$

$$u_{k+i}(y; s) = \sum_{j=0}^k \Phi(-2k + 2j - 2, 2k + i - 2j + 2) + \ln r \sum_{j=0}^{[i/2]} \Phi(2j, i - 2j) + \sum_{j=0}^{[i/2]} \Phi(2j, i - 2j) + \varphi \sum_{j=0}^{[i/2]} \Phi(2j, i - 2j), \quad i \geq 1. \quad (4.6)$$

Заметим, что из условия $u_0 = 0$ при $y_2 = 0$ следует, что $Z_k(y; s) = a(s)r^k \sin(k\varphi)$, где $a \in C^\infty(\gamma)$. Далее, обозначим через $\mathcal{A}_k$ множество функций из $C^\infty(\bar{\Omega} \setminus \gamma)$, обращающихся в нуль на $\Gamma \setminus \gamma$ и имеющих дифференцируемые асимптотики из $\mathcal{A}_k$.

ЛЕММА 4.5. Для любого натурального k и любых $Z_k(y; s) = a(s)r^k \sin(k\varphi)$, где $a \in C^\infty(\gamma)$, и $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{A}}_k$ существует асимптотическое (при $r \rightarrow 0$) решение $\tilde{U} \in \tilde{\mathcal{A}}_k$ уравнения

$$-(\Delta + \lambda_0)\tilde{U} = \tilde{F}, \quad (4.7)$$

имеющее главный член $Z_k r^{-2k}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы проводится по индукции. Для коэффициентов ряда (4.4) в силу (4.3) и предположения индукции получаются уравнения

$$\Delta_y u_i(y; s) = \sum_{j=0}^i \Phi(-2k + 2j - 4, k + i - 2j + 2), \quad 1 \leq i \leq k,$$

$$\Delta_y u_{k+i}(y; s) = \sum_{j=0}^k \Phi(-2k + 2j - 4, 2k + i - 2j + 2) + \ln r \sum_{j=1}^{[i/2]} \Phi(2j - 2, i - 2j) + \sum_{j=0}^{[i/2]} \Phi(2j - 2, i - 2j) + \varphi \sum_{j=1}^{[i/2]} \Phi(2j - 2, i - 2j), \quad i \geq 1.$$

Тогда в силу лемм 4.1, 4.4 существуют решения $\tilde{u}_i$, удовлетворяющие уравнению (4.7) и имеющие структуру (4.5), (4.6). Заметим, что правая часть уравнения для u_{k+1} не содержит $\ln r$, но содержит член $\Phi(-2, 1)$. Поэтому из леммы 4.1 следует, что в решении $\tilde{u}_{k+1}$ появится член $Z_1 \ln r$. При $y_2 = 0$, $y \neq 0$, из определения $\Phi(i, j)$ следует, что

$$\tilde{u}_i(y; s) = \begin{cases} \alpha_i^{(1)}(s)y_1^{-(k-i)}, & y_1 > 0, \\ \alpha_i^{(1)}(s)(-1)^{k-i}|y_1|^{-(k-i)}, & y_1 < 0, \end{cases} \quad 1 \leq i \leq k,$$

$$\tilde{u}_{k+i}(y; s) = \begin{cases} \alpha_i^{(2)}(s)y_1^i + \alpha_i^{(3)}(s)y_1^i \ln y_1, & y_1 > 0, \\ (-1)^i(\alpha_i^{(2)}(s)|y_1|^i + \alpha_i^{(3)}(s)|y_1|^i \ln |y_1|), & y_1 < 0, \end{cases} \quad i \geq 1.$$

Тогда функции

$$\begin{aligned} u_i &= \tilde{u}_i - \alpha_i^{(1)} r^{-(k-i)} \cos((k-i)\varphi), & 1 \leq i \leq k, \\ u_{k+i} &= \tilde{u}_{k+i} - \alpha_i^{(2)} r^i \cos(i\varphi) - \alpha_i^{(3)} (r^i \cos(i\varphi) \ln r - \varphi r^i \sin(i\varphi)), & i \geq 1, \end{aligned}$$

равны нулю при $y_2 = 0$ и удовлетворяют (4.5), (4.6). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. При $k = 1$ и $\tilde{F} = 0$ в формальном асимптотическом решении возникновение логарифмического члена происходит следующим образом:

$$\tilde{U}(y; s) = a(s)r^{-1} \sin \varphi + \dots + \tilde{\mathcal{D}}(a(s))y_2 \ln r + \dots,$$

где $\tilde{\mathcal{D}} = \alpha(s) \frac{d^2}{ds^2} + \beta(s)$, $\alpha(s), \beta(s) \in C^\infty(\gamma)$ зависят от геометрии γ и Ω (см. (1.7)).

ЛЕММА 4.6. Для любых $Z_j(y; s) = a(s)r^j \sin(j\varphi)$, где $a \in C^\infty(\gamma)$, и $F \in \mathcal{A}_j$ существует постоянная Λ и существует функция $U \in \mathcal{A}_j$, которая является решением (4.2), а главный член ее асимптотики при $r \rightarrow 0$ имеет вид $Z_j r^{-2j}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{F}$ – асимптотика F при $r \rightarrow 0$, $\chi(t)$ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, тождественно равная единице при $t < 1$ и нулю при $t > 2$, а R – достаточно малое фиксированное положительное число. Будем искать функцию $U(x)$ в виде

$$U(x) = u_N(x) = \chi(rR^{-1})\tilde{U}_N(x) + \tilde{u}_N(x),$$

где ряд $\tilde{U}$ удовлетворяет утверждению леммы 4.5, $\tilde{U}_N$ – его частичная сумма до членов $O(r^N)$ включительно, а $\tilde{u}_N(x)$ – некоторая достаточно гладкая функция. Тогда для $\tilde{u}_N(x)$ получаем краевую задачу

$$-(\Delta + \lambda_0)\tilde{u}_N = \Lambda(N)\psi_0 + G_N, \quad x \in \Omega, \quad \tilde{u}_N = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (4.8)$$

$$G_N = \Delta \chi \tilde{U}_N + 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{U}_N}{\partial x_i} + \chi(\Delta + \lambda_0)\tilde{U}_N + F. \quad (4.9)$$

Первые два слагаемых в сумме (4.9) принадлежат классу $C^\infty(\bar{\Omega})$, так как $\Delta \tilde{U}_N \in C^\infty(\bar{\Omega} \setminus \gamma)$, а носители функций $\Delta(\chi(rR^{-1}))$, $\frac{\partial \chi(rR^{-1})}{\partial x_i}$ отделены от γ . Далее, в силу выражений для членов ряда $\tilde{U}$ вытекает, что $(\Delta + \lambda_0)\tilde{U}_N + F = O(r^{N-2} \ln r)$ при $r \rightarrow 0$. Следовательно, $G_N \in C^{N-3}(\bar{\Omega})$. Так как λ_0 – собственное значение предельной задачи, то равенство $(G_N + \Lambda(N)\psi_0, \psi_0)_\Omega = 0$ является необходимым и достаточным условием разрешимости (4.8), т.е. $\Lambda(N) = -(G_N, \psi_0)_\Omega$. При таком выборе $\Lambda(N)$ краевая задача (4.8) разрешима, причем функция $\tilde{u}_N \in C^{N-1}(\bar{\Omega})$. Разлагая функцию $\tilde{u}_N$ по формуле Тейлора, получаем

$$\tilde{u}_N(x) = \sum_{j=1}^{N-2} Q_j(y; s) + O(r^{N-1}), \quad r \rightarrow 0.$$

Покажем, что функцию $u_N(x)$ можно выбрать не зависящей от N . Пусть $N_1 \geq N \geq 4$. Тогда очевидно, что $\tilde{u}_{N_1}(x) - \tilde{u}_N(x) \in C^3(\overline{\Omega})$. Функция $\chi(rR^{-1})(\tilde{U}_{N_1}(x) - \tilde{U}_N(x))$ принадлежит классу $C^N(\overline{\Omega})$ в силу леммы 4.5. Таким образом, получили, что разность $u_{N,N_1} = u_{N_1}(x) - u_N(x) \in C^3(\overline{\Omega})$. Так как каждая из функций u_{N_1} и u_N удовлетворяет (4.2), то u_{N,N_1} является решением этой краевой задачи с $\Lambda = \Lambda(N_1) - \Lambda(N)$ и $F = 0$. Следовательно, $\Lambda(N_1) = \Lambda(N)$ и u_{N,N_1} является собственной функцией. Заметим, что решение (4.8) определено с точностью до собственной функции ψ_0 . Поэтому для определенности при $N \geq 4$ на u_N наложим условие

$$\int_{\Omega} u_{4,N} \psi_0 dx = 0.$$

Тогда получаем, что u_N не зависит от N . Из произвола в выборе N следует, что $U \in \mathcal{A}_k$. Таким образом, лемма 4.6 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.1. В рассматриваемом случае $F = 0$, $Z_1(y; s) = a(s)r \sin \varphi$. Из леммы 4.6 следует, что существует функция $U = U^{(2)} \in \mathcal{A}_1$, которая является решением (2.12), а главный член ее асимптотики при $r \rightarrow 0$ имеет вид $Z_1 r^{-2}$. Вычислим $\Lambda = \Lambda^{(2)}$. Умножим обе части равенства в (2.12) на ψ_0 , возьмем интеграл по $\Omega \setminus S_\mu^2$ от обеих частей. Интегрируя полученное равенство по частям, выводим

$$\Lambda^{(2)} = \int_{\Omega \cap \partial S_\mu^2} \psi_0 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial r} dS - \int_{\Omega \cap \partial S_\mu^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} U^{(2)} dS.$$

Подставляя в последнее равенство главные члены асимптотик $\psi_0 \sim c_0 r \sin \varphi$ и $U^{(2)} \sim ar^{-1} \sin \varphi$ при $r \rightarrow 0$ и переходя к пределу при $\mu \rightarrow 0$, получаем (2.13). Лемма 2.1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. В силу замечания 4.1 и доказательства леммы 4.6 легко видеть, что асимптотика построенной в лемме 2.1 функции имеет вид

$$U^{(2)}(y; s) = a(s)r^{-1} \sin \varphi + \dots + \tilde{\mathcal{D}}(a(s))y_2 \ln r + \dots,$$

где выделен первый появляющийся логарифмический член.

Теперь рассмотрим случай, когда кривая γ лежит в области Ω (т.е. задачу A2). Будем изучать сингулярные на γ решения краевых задач

$$-(\Delta + \lambda_0)U = F + \Lambda\psi_0, \quad x \in \Omega \setminus \gamma, \quad U = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (4.10)$$

где F — функция, имеющая особенность на γ .

При $k \geq 1$ обозначим через $\tilde{\mathcal{B}}_k$ множество рядов вида (4.4)–(4.6), где последняя сумма в (4.6) отсутствует. Заметим, что на эти члены не налагается требование обращения в нуль при $y_2 = 0$. Пусть, далее, $\tilde{\mathcal{B}}_0$ — множество рядов вида (4.4), где

$$u_0(y; s) = g(s) \ln r, \\ u_n(y; s) = \ln r \sum_{j=0}^{[n/2]} \Phi(2j, n-2j) + \sum_{j=1}^{[n/2]} \Phi(2j, n-2j).$$

Аналогично лемме (4.5) доказываются следующие утверждения.

ЛЕММА 4.7. Для любых $g(s) \in C^\infty(\gamma)$ существует асимптотическое (при $r \rightarrow 0$) решение $\tilde{U} \in \tilde{\mathcal{B}}_0$ уравнения (4.7) с $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{B}}_0$, имеющее главный член $g(s) \ln r$.

ЛЕММА 4.8. Для любого натурального k и любых Z_k и $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{B}}_k$ существует асимптотическое (при $r \rightarrow 0$) решение $\tilde{U} \in \tilde{\mathcal{B}}_k$ уравнения (4.7), имеющее главный член $Z_k r^{-2k}$.

Обозначим через $\mathcal{B}_k$ множество функций из $C^\infty(\bar{\Omega} \setminus \gamma)$, обращающихся в нуль на Γ и имеющих дифференцируемые асимптотики из $\tilde{\mathcal{B}}_k$, а через $\mathcal{B}_k^{(0)}$ при $k \geq 1$ — множество функций, представимых в виде $U^{(1)} + U^{(2)}$, где $U^{(1)} \in \mathcal{B}_k$, $U^{(2)} \in \mathcal{B}_0$. С учетом лемм 4.7, 4.8 аналогично лемме 4.6 доказываются следующие утверждения.

ЛЕММА 4.9. Для любых Z_k и $F \in \mathcal{B}_k^{(2)}$ существует постоянная Λ и существует функция $U \in \mathcal{B}_k^{(2)}$, которая является решением (4.10), а главный член ее асимптотики при $r \rightarrow 0$ имеет вид $Z_k r^{-2k}$.

ЛЕММА 4.10. Для любых $g \in C^\infty(\gamma)$ и $F \in \mathcal{B}^{(0)}$ существует постоянная Λ и существует функция $U \in \mathcal{B}^{(0)}$, которая является решением (4.10), а главный член ее асимптотики при $r \rightarrow 0$ имеет вид $g(s) \ln r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.2. С учетом лемм 4.9, 4.10 доказательство леммы 3.2 проводится интегрированием по частям совершенно аналогично доказательству леммы 2.1.

§ 5. Внутренние разложения для краевых задач (1.2), (1.3)

Обозначим $\mathbb{R}_{+, \xi}^2 = \{\xi : \xi_2 > 0\}$. Рассмотрим краевую задачу

$$\Delta_\xi V = F, \quad \xi \in \mathbb{R}_{+, \xi}^2, \quad V = 0, \quad \xi \in \Gamma_1, \quad \frac{\partial V}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \gamma_1, \quad (5.1)$$

где F растет при $\rho \rightarrow \infty$.

При $q \geq 1$ через $\tilde{\mathcal{F}}_q$ обозначим множество рядов вида

$$\tilde{V}(\xi; s) = \sum_{j=-q}^{\infty} H_{-j}(\xi; s) + \ln \rho \sum_{j=1}^{q-2} Q_j(\xi; s),$$

где H_q — однородные функции, представимые в виде $H_q(\xi; s) = Q_{q+2i}(\xi; s) \rho^{-2i}$ при некотором целом i , коэффициенты однородных полиномов $Q_j(\xi; s)$ из $C^\infty(\gamma)$, а через $\mathcal{F}_q^{(0)}$ обозначим множество функций v обладающих следующими свойствами:

- k1) $v \in C^\infty(\{\xi : \xi_2 \geq 0, \xi \neq (f_1(s), 0), \xi \neq (f_2(s), 0)\})$;
- k2) при $\rho \rightarrow \infty$ функция v имеет дифференцируемые по ξ и s асимптотики из $\tilde{\mathcal{F}}_q$, т.е. для любых целых неотрицательных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ справедлива оценка

$$\left| \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} (v - V_N)}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \partial \xi_2^{\alpha_2} \partial s^{\alpha_3}} \right| < C_{N, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \rho^{-N-1-\alpha_1-\alpha_2},$$

где V_N — частичная сумма членов в асимптотике v на бесконечности до членов $O(\rho^{-N})$ включительно;

k3) для любого $R > 0$ функция $\chi(\rho R)v(\xi; s)$, рассматриваемая как отображение γ в $L_2(\mathbb{R}_{+, \xi}^2)$, является бесконечно дифференцируемым по $s \in \gamma$.

Пусть, далее, $\eta = (\eta_1, \eta_2)$, $\eta_1 = \frac{2}{f_2 - f_1} \left(\xi_1 - \frac{f_1 + f_2}{2} \right)$, $\eta_2 = \frac{2}{f_2 - f_1} \xi_2$. Обозначим через $\mathcal{F}_q^{(1)}$ множество функций v , обладающих следующими свойствами:

- l1) справедливы свойства k1) и k2);
- l2) функция $v(\xi; s) = 0$ на γ_1 ;
- l3) для любого $R > 0$ функция $\chi(\rho(\eta)R)v(\xi(\eta); s)$, рассматриваемая как отображение γ в $W_2^1(\mathbb{R}_{+, \eta}^2)$, является бесконечно дифференцируемой по $s \in \gamma$.

И наконец, обозначим через $\mathcal{F}_q^{(-1)}$ множество функций v , обладающих следующими свойствами:

- m1) справедливы свойства k1) и k2);
- m2) существуют R такие, что функции $\chi(\rho(\eta)R)v(\xi(\eta); s)$ могут быть представлены в виде $g_0(\eta; s) + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial g_i(\eta; s)}{\partial \eta_i}$;
- m3) функция $g_2 = 0$ на $\tilde{\gamma}_1$;
- m4) функции g_i , рассматриваемые как отображение γ в $L_2(\mathbb{R}_{+, \eta}^2)$, являются бесконечно дифференцируемыми по $s \in \gamma$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Из определений $\mathcal{F}_q^{(1)}$, $\mathcal{F}_q^{(-1)}$ следует, что если $v \in \mathcal{F}_{q+2}^{(1)}$, то

$$\begin{aligned} R_{i,2}(\xi, s, D)v(\xi; s) &\in \mathcal{F}_q^{(-1)}, \\ R_{i,1}(\xi, s, D)v(\xi; s) &\in \mathcal{F}_{q+1}^{(-1)}, \\ R_{i,0}(\xi, s, D)v(\xi; s) &\in \mathcal{F}_{q+2}^{(-1)}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 5.1. Пусть $G \in \mathcal{F}_q^{(0)}$, а ряд $\tilde{V} \in \tilde{\mathcal{F}}_{q+2}$ является асимптотическим (при $\rho \rightarrow \infty$) решением краевой задачи

$$\Delta_\xi \tilde{V} = G, \quad \xi \in \mathbb{R}_{+, \xi}^2, \quad \tilde{V} = 0, \quad \xi_2 = 0. \quad (5.2)$$

Тогда существует решение $v \in \mathcal{F}_{q+2}^{(1)}$ краевой задачи

$$\Delta_\xi v = G, \quad \xi \in \mathbb{R}_{+, \xi}^2, \quad v = 0, \quad \xi \in \Gamma_1, \quad \frac{\partial v}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \gamma_1, \quad (5.3)$$

имеющее при $\rho \rightarrow \infty$ бесконечно дифференцируемые асимптотики

$$v(\xi; s) = \tilde{V}(\xi; s) + \sum_{i=1}^{\infty} a_i(s) \rho^{-i} \sin(i\varphi). \quad (5.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решение краевой задачи (5.3) при достаточно малых R (а именно таких, что $R^{-1} > f_2 - f_1$) будем искать в виде

$$v(\xi; s) = v_N(\xi; s) = (1 - \chi(\rho R))\tilde{V}_N(\xi; s) + w_N^{(0)}(\xi; s), \quad (5.5)$$

где $\tilde{V}_N$ — частичная сумма формального асимптотического решения $\tilde{V}$. Тогда для $w_N^{(0)}$ получаем краевую задачу

$$\Delta_\xi w_N^{(0)} = \tilde{G}_N, \quad \xi \in \mathbb{R}_{+, \xi}^2, \quad w_N^{(0)} = 0, \quad \xi \in \Gamma_1, \quad \frac{\partial w_N^{(0)}}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \gamma_1. \quad (5.6)$$

Так как $G \in \mathcal{F}_q^{(0)}$, то легко видеть, что в силу свойства k2) функция $\tilde{G}_N$ имеет при $\rho \rightarrow \infty$ бесконечно дифференцируемую по s и ξ асимптотику $\tilde{G}_N = O(\rho^{-N-1})$, а в силу свойства k3) функция $\tilde{G}_N$, рассматриваемая как отображение γ в $L_2(\mathbb{R}_{+, \xi}^2)$, является бесконечно дифференцируемой по $s \in \gamma$. В свою очередь, будем искать решение краевой задачи (5.6) в виде $w_N^{(0)} = w_N^{(1)} + w_N^{(2)}$, где

$$\begin{aligned} \Delta_\xi w_N^{(1)} &= \tilde{G}_N, \quad \xi \in \mathbb{R}_{+, \xi}^2, \quad w_N^{(1)} = 0, \quad \xi_2 = 0, \\ \Delta_\xi w_N^{(2)} &= 0, \quad \xi \in \mathbb{R}_{+, \xi}^2, \quad w_N^{(2)} = 0, \quad \xi \in \Gamma_1, \quad \frac{\partial w_N^{(2)}}{\partial \xi_2} = -\frac{\partial w_N^{(1)}}{\partial \xi_2}, \quad \xi \in \gamma_1. \end{aligned}$$

Из явной формулы решения задачи Дирихле в полуплоскости, упомянутых выше свойств $\tilde{G}_N$ и теоремы Лебега следует существование функции $w_N^{(1)} \in W_2^2(\mathbb{R}_{+, \xi}^2)$, обладающей свойством l3) и имеющей асимптотику

$$w_N^{(k)} = \sum_{i=1}^{N-2} \tilde{a}_i(s) \rho^{-i} \sin(i\varphi) + O(\rho^{-N+1}), \quad \rho \rightarrow \infty \quad (5.7)$$

($k = 1$). В свою очередь, из формулы Келдыша–Седова (см., например, [42]) следует существование функции $w_N^{(2)}$, обладающей свойством l3), асимптотика которой при $\rho \rightarrow \infty$ имеет вид (5.7) ($k = 2$). Тогда функция $w_N^{(0)}$ также обладает свойством l3) и при $\rho \rightarrow \infty$ имеет асимптотику (5.7) ($k = 0$).

Покажем, что функция v_N не зависит от N . Пусть $N_1 \geq N \geq 4$, $v^{(N, N_1)} = v_N - v_{N_1}$. Тогда для $v^{(N, N_1)}$ получаем краевую задачу

$$\Delta_\xi v^{(N, N_1)} = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}_{+, \xi}^2, \quad v^{(N, N_1)} = 0, \quad \xi \in \Gamma_1, \quad \frac{\partial v^{(N, N_1)}}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \gamma_1.$$

Функция $v^{(N, N_1)}$ убывает при $\rho \rightarrow \infty$. Тогда в силу единственности решения этой краевой задачи функция $v^{(N, N_1)} \equiv 0$ при $\xi_2 \geq 0$ (см., например, [42]) и, значит, v_N не зависит от N . Из произвола в выборе N , формул (5.5) и (5.7) (при $k = 0$) и теорем о повышении гладкости следует, что $v \in \mathcal{F}_{q+2}^{(1)}$. Лемма доказана.

В переменных η рассмотрим следующую краевую задачу:

$$(\Delta_\eta - 1)\tilde{\phi} = -g_0 + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial g_i}{\partial \eta_i}, \quad \eta \in \mathbb{R}_{+, \eta}^2, \quad \tilde{\phi} = 0, \quad \eta \in \tilde{\Gamma}_1, \quad \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \eta_2} = g_2, \quad \eta \in \tilde{\gamma}_1, \quad (5.8)$$

где $\tilde{\Gamma}_1 = \{\eta : |\eta_1| > 1, \eta_2 = 0\}$, $\tilde{\gamma}_1 = \{\eta : |\eta_1| < 1, \eta_2 = 0\}$. Пусть $W_{2,0}^1(\mathbb{R}_{+, \eta}^2; \tilde{\Gamma}_1)$ — замыкание в норме $W_2^1(\mathbb{R}_{+, \eta}^2)$ функций из $C^\infty(\{\eta : \eta_2 \geq 0\})$, обращающихся в нуль в окрестности $\tilde{\Gamma}_1$. Пусть $g_i(\eta) \in L_2(\mathbb{R}_{+, \eta}^2)$. Решение краевой задачи (5.8) будем рассматривать в смысле обобщенных функций (см. [43]–[45]). То есть под решением будем понимать элемент $\tilde{\phi} \in W_{2,0}^1(\mathbb{R}_{+, \eta}^2; \tilde{\Gamma}_1)$, удовлетворяющий интегральному равенству

$$(\nabla_\eta \tilde{\phi}, \nabla_\eta w)_{\mathbb{R}_{+, \eta}^2} + (\tilde{\phi}, w)_{\mathbb{R}_{+, \eta}^2} = (g_0, w)_{\mathbb{R}_{+, \eta}^2} + \sum_{i=1}^2 \left(g_i, \frac{\partial w}{\partial \eta_i} \right)_{\mathbb{R}_{+, \eta}^2} \quad (5.9)$$

при любом $w \in W_{2,0}^1(\mathbb{R}_{+, \eta}^2; \tilde{\Gamma}_1)$. При любых фиксированных g_i правая часть (5.9) есть линейный ограниченный функционал, заданный на $W_{2,0}^1(\mathbb{R}_{+, \eta}^2; \tilde{\Gamma}_1)$. Поэтому из теоремы Рисса следует существование и единственность решения краевой задачи (5.8). Кроме того, если $g_i \in C^\infty(\{\eta : \eta_2 \geq 0, \eta \neq (-1, 0), \eta \neq (1, 0)\})$ и $g_2 = 0$ на $\tilde{\gamma}_1$, то из теорем о повышении гладкости решений эллиптических краевых задач следует, что $\tilde{\phi} \in C^\infty(\{\eta : \eta_2 \geq 0, \eta \neq (-1, 0), \eta \neq (1, 0)\})$ удовлетворяет однородному граничному условию Неймана на $\tilde{\gamma}_1$ в обычном (классическом) смысле. Таким образом, подставляя $w = \tilde{\phi}$ в (5.9), получаем справедливость следующего утверждения.

ЛЕММА 5.2. Пусть g_i обладают свойствами m3), m4). Тогда существует решение $\tilde{\phi} \in W_2^1(\mathbb{R}_{+, \eta}^2)$ краевой задачи (5.8) с однородными граничными условиями. Функция $\tilde{\phi}$, рассматриваемая как отображение γ в $W_2^1(\mathbb{R}_{+, \eta}^2)$, является бесконечно дифференцируемой по $s \in \gamma$.

ЛЕММА 5.3. Пусть $F \in \mathcal{F}_q^{(-1)}$, а ряд $\tilde{V} \in \tilde{\mathcal{F}}_{q+2}$ является формальным асимптотическим решением (при $\rho \rightarrow \infty$) краевой задачи (5.2) с $G = F$. Тогда существует решение $V \in \mathcal{F}_{q+2}^{(1)}$ краевой задачи (5.1), имеющее при $\rho \rightarrow \infty$ дифференцируемую асимптотику (5.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При достаточно малых R рассмотрим краевую задачу

$$(\Delta_\xi - 1)\phi = \chi F, \quad \xi_2 > 0, \quad \phi = 0, \quad \xi \in \Gamma_1, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \gamma_1. \quad (5.10)$$

Так как функция $F \in \mathcal{F}_q^{(-1)}$, то, переписывая краевую задачу (5.10) в переменных η , с учетом свойства m2) получаем краевую задачу (5.8) для $\tilde{\phi}(\eta; s) = \phi(\xi(\eta); s)$. Из леммы 5.2 следует существование решения $\tilde{\phi}$, удовлетворяющего свойству l2) и однородному граничному условию Неймана на $\tilde{\gamma}_1$. Переписывая $\tilde{\phi}$ в переменных ξ , получаем, что существует решение $\phi(\xi; s) = \tilde{\phi}(\eta; s)$ краевой задачи (5.10), обладающее свойствами l2), l3).

При достаточно малых $R > 0$ будем искать решение V в виде

$$V(\xi; s) = \chi(\rho R)\phi(\xi; s) + \tilde{v}(\xi; s). \quad (5.11)$$

Тогда для $\tilde{v}$ получаем краевую задачу

$$\Delta_\xi \tilde{v} = \tilde{F}, \quad \xi_2 > 0, \quad \tilde{v} = 0, \quad \xi \in \Gamma_1, \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \gamma_1, \quad (5.12)$$

где $\tilde{F} \in \mathcal{F}_q^{(0)}$. Так как $\tilde{F}$ удовлетворяет условиям леммы 5.1, то существует решение $\tilde{v} \in \mathcal{F}_{q+2}^{(1)}$ краевой задачи (5.12), имеющее при $\rho \rightarrow \infty$ дифференцируемую асимптотику (5.4).

Из теорем о повышении гладкости, (5.11) и лемм 5.1 и 5.2 следует принадлежность $V \in \mathcal{F}_{q+2}^{(1)}$.

Теперь рассмотрим краевую задачу

$$\Delta_\xi V = F(\xi; s), \quad \xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\omega}, \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \nu} = h(l_\xi, s), \quad \xi \in \partial\omega, \quad (5.14)$$

где F растет при $\rho \rightarrow \infty$, $h(l_\xi, s) \in C^\infty(\partial\omega \times \gamma)$.

При $q \geq 1$ обозначим через $\tilde{\mathcal{G}}_q$ множество рядов вида

$$\tilde{V}(\xi; s) = \sum_{j=-q}^{\infty} H_{-j}(\xi; s) + \ln \rho \sum_{j=0}^{q-2} Q_j(\xi; s),$$

где H_q — однородные функции, представимые в виде $H_q(\xi; s) = Q_{q+2i}(\xi; s)\rho^{-2i}$ при некотором целом i , коэффициенты однородных полиномов $Q_j(\xi; s)$ из $C^\infty(\gamma)$. Пусть $\mathcal{G}_q$ — множество функций v , обладающих следующими свойствами:

- n1) $v \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \omega)$;
- n2) v имеет при $\rho \rightarrow \infty$ дифференцируемые по ξ и s асимптотики из $\tilde{\mathcal{G}}_q$, т.е. для любых целых неотрицательных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ справедлива оценка

$$\left| \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} (v - V_N)}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \partial \xi_2^{\alpha_2} \partial s^{\alpha_3}} \right| < C_{N, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \rho^{-N-1-\alpha_1-\alpha_2},$$

где V_N — частичная сумма членов в асимптотике v на бесконечности до членов $O(\rho^{-N})$ включительно.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Из определения $\mathcal{G}_q$ следует, что если функция $v \in \mathcal{G}_{q+2}$, то

$$\begin{aligned} R_{i,2}(\xi, s, D)v(\xi; s) &\in \mathcal{G}_q, \\ R_{i,1}(\xi, s, D)v(\xi; s) &\in \mathcal{G}_{q+1}, \\ R_{i,0}(\xi, s, D)v(\xi; s) &\in \mathcal{G}_{q+2}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 5.4. Пусть $F \in \mathcal{G}_j$, а ряд $\tilde{V} \in \tilde{\mathcal{G}}_{j+2}$ является асимптотическим (при $\rho \rightarrow \infty$) решением уравнения (5.13). Тогда существует решение $V \in \mathcal{G}_{j+2}$ краевой задачи (5.13), (5.14), имеющее при $\rho \rightarrow \infty$ дифференцируемые асимптотики

$$V(\xi; s) = \tilde{V}(\xi; s) + g(s) \ln \rho + \sum_{i=0}^{\infty} Z_i(\xi; s) \rho^{-2i}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решение краевой задачи (5.13), (5.14) при достаточно малых R будем искать в виде

$$V(\xi; s) = v_N(\xi; s) = (1 - \chi(\rho R)) \tilde{V}_N(\xi; s) + w_N(\xi; s), \quad (5.15)$$

где $\tilde{V}_N$ — частичная сумма формального асимптотического решения $\tilde{V}$. Тогда для w_N получаем краевую задачу

$$\Delta_\xi w_N = G_N, \quad \xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\omega}, \quad \frac{\partial w_N}{\partial \nu} = h(l_\xi, s), \quad \xi \in \partial\omega, \quad (5.16)$$

где

$$G_N = \Delta_\xi \tilde{V}_N + 2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \chi}{\partial \xi_i} \frac{\partial \tilde{V}_N}{\partial \xi_i} + F_{N+1}$$

и, следовательно, имеет при $\rho \rightarrow \infty$ бесконечно дифференцируемую по s и ξ асимптотику $G_N = O(\rho^{-N-1})$. Так как $\partial\omega \in C^\infty$, $G_N \in C^{N-2}(\overline{\mathbb{R}^2} \setminus \omega)$, то функцию G_N можно гладко продолжить в ω . Тогда $G_N \in C^{N-2}(\mathbb{R}^2)$. Будем искать решение краевой задачи (5.16) в виде $w_N = w_N^{(1)} + w_N^{(2)}$, где

$$\begin{aligned} \Delta_\xi w_N^{(1)} &= G_N, \quad \xi \in \mathbb{R}^2, \\ \Delta_\xi w_N^{(2)} &= 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\omega}, \quad \frac{\partial w_N^{(2)}}{\partial \nu} = h(l_\xi, s) - \frac{\partial w_N^{(1)}}{\partial \nu}, \quad \xi \in \partial\omega. \end{aligned}$$

Так как $N \geq 4$, $G_N \in C^{N-2}(\mathbb{R}^2)$ и $G_N = O(\rho^{-N-1})$ при $\rho \rightarrow \infty$, то, представляя решение $w_N^{(1)}$ в виде логарифмического потенциала, получаем, что $w_N^{(1)} \in C^{N-2}(\mathbb{R}^2)$,

$$V(\xi; s) = \sum_{j=1}^{N-3} Z_j(\xi; s) \rho^{-2j} + O(\rho^{-N+2}), \quad \rho \rightarrow \infty.$$

Представляя решение $w_N^{(2)}$ в виде потенциала простого слоя (см., например, [41]), получаем, что $w_N^{(2)} \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \omega)$,

$$w_N^{(2)}(\xi; s) = g(s) \ln \rho + \sum_{j=1}^{\infty} Z_j(\xi; s) \rho^{-2j}, \quad \rho \rightarrow \infty.$$

Из формулы (5.15) следует, что краевая задача (5.13), (5.14) имеет решение $v_N \in C^{N-2}(\mathbb{R}^2 \setminus \omega)$. Аналогично тому, как это было сделано в лемме 5.1, доказывается независимость v_N от N . Учитывая, что F обладает свойством п2), а также явные формулы для $w_N^{(1)}$, $w_N^{(2)}$, получаем, что $V \in \mathcal{G}_{j+2}$.

§ 6. Доказательство теоремы 1.1

Будем строить асимптотику λ_ε в виде (1.4), а асимптотики ψ_ε в виде (1.8) при $x \in \Omega \setminus S_{\varepsilon^{1/2}}^2$ и в виде (1.9) при $x \in \Omega \cap S_{\varepsilon^{1/2}}^2$. Подставляя (1.4), (1.8), (1.9), (4.1) в (1.2), получаем краевые задачи для коэффициентов рядов (1.8), (1.9):

$$-(\Delta + \lambda_0)\psi_{2+k,q} = \lambda_{2+k,q}\psi_0 + \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{j=0}^q \lambda_{k-i,q-j}\psi_{2+i,j} \quad \text{в } \Omega, \quad (6.1)$$

$$\psi_{2+k,q} = 0 \quad \text{на } \Gamma \setminus \gamma;$$

$$\begin{aligned} \Delta_\xi v_{1+k,q} &= -\lambda_0 v_{k-1,q} - \sum_{i=0}^{k-4} \sum_{j=0}^q \lambda_{k-i-2,q-j} v_{1+i,j} \\ &+ \sum_{i=1}^{k-2q} R_{i,2}(\xi, s, D) v_{k-i+1,q} + \sum_{i=0}^{k-2q-1} R_{i,1}(\xi, s, D) v_{k-i,q} \\ &+ \sum_{i=0}^{k-2q-2} R_{i,0}(\xi, s, D) v_{k-i-1,q} \quad \text{при } \xi_2 > 0, \\ v_{1+k,q} &= 0 \quad \text{на } \Gamma_1, \quad \frac{\partial v_{1+k,q}}{\partial \xi_2} = 0 \quad \text{на } \gamma_1. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Здесь и далее будем считать равными нулю $\lambda_{k,q}$, $\psi_{k,q}$, $v_{k,q}$, индексы у которых не являются членами рядов (1.4), (1.8), (1.9). На суммах $U(x, \varepsilon)$ вида (1.8) определим операторы $\mathcal{K}_{q,m}$, $\mathcal{K}_q$ и K_N следующим образом. Коэффициенты ряда $U(x, \varepsilon)$ разложим в ряды при $r \rightarrow 0$ и перейдем к переменным ξ . В полученных рядах оставим только члены вида $\varepsilon^q \ln^m \varepsilon \Phi(\xi)$. Этот ряд обозначим $\mathcal{K}_{q,m}(U(x, \varepsilon))$ и положим $K_N = \sum_{q \leq N} \sum_m \mathcal{K}_{q,m}$ (N может быть равно и бесконечности).

Обозначим через $\Psi_\varepsilon(x)$ ряд вида (1.8). Из определения K_N , $\mathcal{A}_i$ и $\tilde{\mathcal{F}}_q$ вытекает справедливость следующего утверждения.

ЛЕММА 6.1. Пусть $\psi_{2+k,q} \in \mathcal{A}_{k+1-2q}$. Тогда

$$\begin{aligned} K_\infty(\Psi_\varepsilon(x)) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{[(i-1)/2]} \varepsilon^i \ln^j \varepsilon V_{i,j}(\xi; s), \\ V_{i,j} &\in \tilde{\mathcal{F}}_{i-2j}, \quad V_{i,j}(\xi_1, 0; s) = 0, \quad \xi_1 \neq 0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Если к тому же $\psi_{2+k,q}$ — решения (6.1), то ряды $V_{i,j}$ являются формальными асимптотическими решениями уравнений (6.2) при $\rho \rightarrow \infty$, где в правой части функции $v_{i,j}$ заменены на ряды $V_{i,j}$.

Будем искать $\psi_{2+k,q}$, $\lambda_{2+k,q}$ соответственно в виде

$$\psi_{2+k,q}(x) = \sum_{j=2q}^k \Psi_{2+k,q}^{(j)}, \quad \lambda_{2+k,q}(x) = \sum_{j=2q}^k \Lambda_{2+k,q}^{(j)}. \quad (6.4)$$

Далее будем считать равными нулю $\Psi_{k,q}^{(m)}$, $\Lambda_{k,q}^{(n)}$, индексы у которых не являются членами (6.4).

ЛЕММА 6.2. Если $\Psi_{2+k,q}^{(t)} \in \mathcal{A}_{k+1-t}$, то функция $\psi_{2+k,q}$, определенная равенством (6.4), принадлежит $\mathcal{A}_{k+1-2q}$. Если к тому же $\Psi_{2+k,q}^{(t)}$ являются решениями краевых задач

$$\begin{aligned} -(\Delta + \lambda_0)\Psi_{2+k,q}^{(t)} &= \Lambda_{2+k,q}^{(t)}\psi_0 + \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{j=0}^q \sum_{m+n=t} \Lambda_{k-i,q-j}^{(m)} \Psi_{2+i,j}^{(n)} \quad \text{при } x \in \Omega, \\ \Psi_{2+k,q}^{(t)} &= 0 \quad \text{при } x \in \Gamma \setminus \gamma, \end{aligned} \quad (6.5)$$

то $\psi_{2+k,q}$ являются решениями краевых задач (6.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathcal{A}_q \subset \mathcal{A}_{q+1}$, то из (6.4) следует первое утверждение. Суммируя (6.5) по t от $2q$ до k , получаем справедливость второго утверждения леммы.

Обозначим

$$\begin{aligned} \psi^{(N)}(x, \varepsilon) &= \psi_0(x) + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{1}{2} \min\{N, i\} \rfloor} \varepsilon^{2+i} \ln^j \varepsilon \psi_{2+i,j}^{(N)}(x), \\ \psi^{(-1)}(x, \varepsilon) &= \psi_0(x), \quad \psi_{2+k,j}^{(N)}(x) = \sum_{t=2j}^{\min\{N, k\}} \Psi_{2+k,j}^{(t)}(x). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Так как $\Psi_{2+k,q}^{(j)} \in \mathcal{A}_{k+1-j}$, то из определений K_N , $\psi^{(N)}(x, \varepsilon)$ следует, что $K_N(\psi^{(N-1)}) = K_N(\Psi_\varepsilon)$.

Из лемм 6.1 и 6.2 вытекает справедливость следующего утверждения.

ЛЕММА 6.3. Пусть $\Psi_{2+k,q}^{(j)} \in \mathcal{A}_{k+1-j}$. Тогда ряды $V_{i,j}$ в (6.3) имеют вид

$$V_{i,j}(\xi; s) = \tilde{V}_{i,j}(\xi; s) + \sum_{t=1}^{\infty} a_t^{(i,j)}(s) \rho^{-t} \sin(t\varphi),$$

$a_t^{(i,j)}(s) \rho^{-t} \sin(t\varphi)$ — главный член асимптотики $\Psi_{t+i,j}^{(i-1)}$ в нуле,

$$\tilde{V}_{i,j}(\xi; s) = \varepsilon^{-i} \ln^{-j} \mathcal{H}_{i,j}(\psi^{(i-2)}(x, \varepsilon)), \quad \tilde{V}_{i,j} \in \tilde{\mathcal{F}}_{i-2j},$$

и, в частности,

$$\tilde{V}_{1,0}(\xi; s) = c_{01}(s) \xi_2, \quad \tilde{V}_{2t+1,t}(\xi; s) = d_t(s) \xi_2, \quad t > 0,$$

где $d_t(s) y_2 \ln r$ — первый логарифмический член в асимптотике $\psi_{2t,t-1}(x) = \Psi_{2t,t-1}^{(2t-2)}(x)$ на γ .

Если к тому же $\Psi_{2+k,q}^{(t)}$ являются решениями (6.5), то ряды $\tilde{V}_{1+k,q}$ являются формальными асимптотическими решениями (6.2) при $\rho \rightarrow \infty$, где в правой части функции $v_{1+i,j}$ заменены на $V_{1+i,j}$.

Обозначим через $\hat{v}_N(\xi, s, \varepsilon)$ частичную сумму ряда (1.9).

ТЕОРЕМА 6.1. *Существуют ряды (1.4), (1.8) и (1.9) такие, что*

- 1) *выполняются равенства (1.5), (1.6);*
- 2) *функции $\psi_{2+i,q} \in \mathcal{A}_{i+1-2q}$ являются решениями (6.1);*
- 3) *функции $v_{i,q} \in \mathcal{F}_{i-2q}^{(1)}$ являются решениями (6.2);*
- 4) *для любого $N > 0$ выполняется равенство*

$$K_N(\Psi_\varepsilon(x)) = \widehat{v}_N(\xi, s, \varepsilon), \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (6.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ранее было доказано, что существует решение $v_{1,0} = v_1$ краевой задачи (6.2), определенное равенством (2.7), с асимптотикой

$$v_{1,0}(\xi; s) = \widetilde{V}_{1,0}(\xi; s) + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(s) \rho^{-i} \sin(i\varphi), \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (6.7)$$

Из определения $\mathcal{F}_q^{(1)}$ и $v_{1,0}$ следует, что $v_{1,0} \in \mathcal{F}_1^{(1)}$.

Выберем главные члены $a_i^{(1,0)}(s) \rho^{-i} \sin(i\varphi)$ асимптотик $\Psi_{i+1,0}^{(0)}(x)$ равными $\beta_i(s) \rho^{-i} \sin(i\varphi)$ из (6.7). Тогда из (6.7) и леммы 6.3 следует, что

$$v_{1,0}(\xi; s) = V_{1,0}(\xi; s), \quad \rho \rightarrow \infty.$$

С другой стороны, в силу леммы 4.6 существуют постоянные $\Lambda_{i+1,0}^{(0)}$ и функции $\Psi_{i+1,0}^{(0)} \in \mathcal{A}_i$ с заданными главными членами асимптотик такие, что (6.5) выполняется при $t = 0$. Таким образом, построен ряд $\psi^{(0)}(x, \varepsilon)$. При этом в силу леммы 2.1 имеем $\Psi_{2,0}^{(0)} = U^{(2)}(x; \beta_1(s))$, а потому справедливо (1.5) для $\Lambda_{2,0}^{(0)} = \lambda_{2,0}$. Так как $K_1(\psi^{(0)}) = K_1(\Psi_\varepsilon)$ (замечание 6.1), то (6.6) выполняется для $N = 1$.

Дальнейшее доказательство проводится по индукции. Пусть существует ряд $\psi^{(N-2)}(x, \varepsilon)$, коэффициенты которого являются решением краевых задач (6.5), функции $v_{i,j}$ при $i \leq N-1$ и $j \leq [(i-1)/2]$ являются решениями краевых задач (6.2) и такие, что выполняется равенство

$$K_{N-1}(\psi^{(N-2)}) = \widehat{v}_{N-1}. \quad (6.8)$$

Так как $\widetilde{V}_{N,q} \in \widetilde{\mathcal{F}}_{N-2q}$, то в силу замечания 5.1 и леммы 5.3 существует решение $v_{N,q} \in \mathcal{F}_{N-2q}^{(1)}$ краевой задачи (6.2) с асимптотикой

$$v_{N,q}(\xi; s) = \widetilde{V}_{N,q}(\xi; s) + \sum_{i=1}^{\infty} a_i(s) \rho^{-i} \sin(i\varphi), \quad \rho \rightarrow \infty.$$

Выберем главные члены $a_i^{(N,q)}(s) \rho^{-i} \sin(i\varphi)$ асимптотик $\Psi_{i+N,q}^{(N-1)}(x)$ равными $a_i(s) \rho^{-i} \sin(i\varphi)$. Тогда из леммы 6.3 следует, что

$$v_{N,q}(\xi; s) = V_{N,q}(\xi; s), \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (6.9)$$

С другой стороны, в силу леммы 4.6 существуют постоянные $\Lambda_{i+N,q}^{(N-1)}$ и функции $\Psi_{i+N,q}^{(N-1)} \in \mathcal{A}_i$ с заданными главными членами асимптотик такие, что (6.5) выполняется при $t = N - 1$. Таким образом, существует ряд $\psi^{(N-1)}(x, \varepsilon)$, коэффициенты которого являются решением краевых задач (6.5), функции $v_{i,j}$ при $i \leq N$ и $j \leq [(i-1)/2]$ являются решениями краевых задач (6.2), причем в силу (6.8), (6.9) справедливо равенство $K_N(\psi^{(N-1)}) = \widehat{v}_N$. Из замечания 6.1 и произвола в выборе N вытекает справедливость (6.6) для любого N .

Осталось показать справедливость (1.6).

Краевые задачи (6.1) и (6.2) для $\psi_{2t,t-1} = \Psi_{2t,t-1}^{(2t-2)}$, $\lambda_{2t,t-1} = \Lambda_{2t,t-1}^{(2t-2)}$ и $v_{1+2t,t}$ имеют вид

$$\begin{aligned} -\Delta \psi_{2t,t-1} &= \lambda_0 \psi_{2t,t-1} + \lambda_{2t,t-1} \psi_0, \quad x \in \Omega, \quad \psi_{2t,t-1} = 0, \quad x \in \Gamma \setminus \gamma, \\ \Delta_\xi v_{2t+1,t} &= 0, \quad \xi_2 > 0, \quad v_{2t+1,t} = 0, \quad \xi \in \Gamma_1, \quad \frac{\partial v_{2t+1,t}}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \gamma_1. \end{aligned}$$

С другой стороны, в силу замечания 4.2

$$\psi_{2t,t-1}(x) = a_t(s) r^{-1} \sin \varphi + \dots + d_t(s) y_2 \ln r + \dots, \quad d_t(s) = \widetilde{\mathcal{D}}(a_t(s)), \quad (6.10)$$

причем из (2.10) и (2.8) имеем

$$a_1(s) = \frac{c_{01}(s)}{8} (f_2(s) - f_1(s))^2. \quad (6.11)$$

И наконец, в силу леммы 6.3

$$\widetilde{V}_{1+2t,t}(\xi; s) = d_t(s) \xi_2, \quad t > 0.$$

Следовательно,

$$v_{1+2t,t} = d_t \operatorname{Im} \sqrt{(\zeta - f_1)(\zeta - f_2)} = d_t \xi_2 + \frac{d_t (f_2 - f_1)^2}{8} \rho^{-1} \sin \varphi + O(\rho^{-2}) \quad (6.12)$$

при $\rho \rightarrow \infty$. В свою очередь, из (6.10)–(6.12) вытекает, что

$$\psi_{2t+2,t}(x) = \frac{d_t(s)(f_2(s) - f_1(s))^2}{8} r^{-1} \sin \varphi + o(r^{-1}), \quad d_0(s) = c_{01}(s). \quad (6.13)$$

Из (6.10), (6.13) следует, что

$$d_t(s) = \frac{1}{8^t} \mathcal{D}^t c_{01}(s),$$

где $\mathcal{D}^t$ – линейный дифференциальный оператор второго порядка, определенный в (1.7). В силу леммы 2.1, (6.13) и последнего равенства приходим к (1.6). Теорема доказана.

Обоснуем построенные асимптотики. В [36], [37] было доказано следующее утверждение.

ЛЕММА 6.4. Пусть λ_0 – простое собственное значение предельной задачи (1.1). Тогда

- а) для нормированных в $L_2(\Omega)$ собственных функций имеет место сходимость $\phi_\varepsilon \rightarrow \psi_0$ в $W_2^1(\Omega)$;
- б) при λ , близких к λ_0 , для решений краевой задачи

$$-\Delta u_\varepsilon = \lambda u_\varepsilon + f \quad \text{в } \Omega, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \tau} = 0 \quad \text{на } \gamma_\varepsilon, \quad u_\varepsilon = 0 \quad \text{на } \Gamma_\varepsilon$$

имеет место представление

$$u_\varepsilon = \frac{\phi_\varepsilon}{\lambda_\varepsilon - \lambda} \int_{\Omega} \phi_\varepsilon f \, dx + \tilde{u}_\varepsilon, \quad (6.14)$$

где $\tilde{u}_\varepsilon$ – голоморфная по λ функция, ортогональная ϕ_ε в $L_2(\Omega)$, причем справедлива равномерная по ε и λ оценка

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C_1 \|f\|_{L_2(\Omega)}. \quad (6.15)$$

Пусть $\hat{\lambda}_{\varepsilon,N}$, $\hat{v}_N$ – соответственно частичные суммы рядов (1.4), (1.9), построенных в теореме 6.1.

ЛЕММА 6.5. Пусть $F^N = \chi(rt\varepsilon^{-1/2})(\Delta + \hat{\lambda}_{\varepsilon,N})\hat{v}_N$, t – произвольная фиксированная положительная постоянная. Тогда существует решение $\Phi^N \in W_2^1(\Omega) \cap C^\infty(\bar{\Omega} \setminus \partial\gamma_\varepsilon)$ краевой задачи

$$(\Delta - 1)\Phi^N = F^N, \quad x \in \Omega, \quad \Phi^N = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon, \quad \frac{\partial \Phi^N}{\partial \tau} = 0, \quad x \in \gamma_\varepsilon, \quad (6.16)$$

и имеет место оценка

$$\|\Phi^N\|_{L_2(\Omega)} < C\varepsilon^{N_1}, \quad (6.17)$$

где $N_1 = (N - 1)/2$ растет неограниченно вместе с N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f_i \in L_2(\Omega)$ с носителями, сосредоточенными в окрестности кривой γ . Предварительно рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} (\Delta - 1)\Phi^N &= -f_0 + \frac{1}{J} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f_i}{\partial y_i} + \frac{1}{J} \frac{\partial f_3}{\partial s}, \quad x \in \Omega, \\ \Phi^N &= 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon, \quad \frac{\partial \Phi^N}{\partial \tau} = -f_2, \quad x \in \gamma_\varepsilon, \end{aligned} \quad (6.18)$$

где J – якобиан перехода от переменных x к переменным (y, s) , $W_{2,0}^1(\Omega; \Gamma_\varepsilon)$ – замыкание в норме $W_2^1(\Omega)$ функций из $C^\infty(\bar{\Omega})$, обращающихся в нуль в окрестности Γ_ε . Под решением краевой задачи (6.18) понимается элемент $\Phi^N \in W_{2,0}^1(\Omega; \Gamma_\varepsilon)$, удовлетворяющий интегральному равенству

$$(\nabla \Phi^N, \nabla w)_\Omega + (\Phi^N, w)_\Omega = (f_0, w)_\Omega + \sum_{i=1}^2 \left(\frac{f_i}{J}, \frac{\partial w}{\partial y_i} \right)_\Omega + \left(\frac{f_3}{J}, \frac{\partial w}{\partial s} \right)_\Omega \quad (6.19)$$

при любом $w \in W_{2,0}^1(\Omega; \Gamma_\varepsilon)$. Правая часть этого равенства есть линейный ограниченный функционал, заданный на $W_{2,0}^1(\Omega; \Gamma_\varepsilon)$. Поэтому из теоремы Рисса следует существование и единственность решения краевой задачи (6.18). Если теперь $g_i \in C^\infty(\bar{\Omega} \setminus \partial\gamma_\varepsilon)$ и $g_2 = 0$ на γ_ε , то из теорем о повышении гладкости решений эллиптических краевых задач следует, что $\Phi^N \in W_2^1(\Omega) \cap C^\infty(\bar{\Omega} \setminus \partial\gamma_\varepsilon)$ удовлетворяет однородному граничному условию Неймана на γ_ε в обычном (классическом) смысле. Полагая $w = \Phi^N$ в (6.19), получаем оценку

$$\|\Phi^N\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C \sum_{i=0}^3 \|f_i\|_{L_2(\Omega)}, \quad (6.20)$$

где постоянная C не зависит от ε .

Рассмотрим теперь краевую задачу (6.16). Так как $v_{k,q} \in \mathcal{F}_{k-2q}^{(1)}$ являются решениями краевых задач (6.2), то, учитывая замечание 5.1, определение множества $\mathcal{F}_j^{(1)}$ и определение оператора Δ (см. (4.1)), имеем

$$F^N = -f_0 + \frac{1}{J} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f_i}{\partial y_i} + \frac{1}{J} \frac{\partial f_3}{\partial s},$$

где

$$\begin{aligned} f_0 &= \chi(rt\varepsilon^{-1/2}) \sum_{i=1}^N \sum_{q=0}^{[(i-1)/2]} (\ln^q \varepsilon r^{i+2q} \mathcal{P}^{(1)}(D) v_{N-i+1,q} + S(\varepsilon, \ln \varepsilon) v_{i,q}), \\ f_1 &= \chi(rt\varepsilon^{-1/2}) \sum_{i=1}^N \sum_{q=0}^{[(i-1)/2]} \ln^q \varepsilon r^{i+2q+1} \mathcal{P}^{(2)}(D) v_{N-i+1,q}, \\ f_2 &= \chi(rt\varepsilon^{-1/2}) \sum_{i=1}^N \sum_{q=0}^{[(i-1)/2]} \ln^q \varepsilon r^{i+2q+1} Q(\varepsilon, y, s) \frac{\partial v_{N-i+1,q}}{\partial y_2}, \\ f_3 &= \chi(rt\varepsilon^{-1/2}) \sum_{i=1}^N \sum_{q=0}^{[(i-1)/2]} \ln^q \varepsilon r^{i+2q} \mathcal{P}^{(3)}(D) v_{N-i+1,q}, \end{aligned} \quad (6.21)$$

$\mathcal{P}^{(k)}(D) = \mathcal{P}^{(k)}(D, y, s, \varepsilon)$ – полиномы первого порядка относительно символа дифференцирования $D = \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial s} \right)$ с бесконечно дифференцируемыми по y и s коэффициентами, $Q(\varepsilon, y, s)$ – бесконечно дифференцируемая по y и s функция, $S(\varepsilon, \ln \varepsilon)$ – многочлен по ε и $\ln \varepsilon$, причем максимальная степень по $\ln \varepsilon$ равна $[(N-1)/2]$. Так как $v_{k,q}$ удовлетворяют однородному граничному условию Неймана на γ_ε , то $f_2 = 0$ на γ_ε . Так как $f_i \in L_2(\Omega)$ с носителями, сосредоточенными в окрестности кривой γ , то краевая задача (6.16) разрешима. Из (6.21) с учетом того, что носитель $\chi(rt\varepsilon^{-1/2})$ лежит в области $r < 2t^{-1}\varepsilon^{1/2}$, получаем

$$\|f_i\|_{L_2(\Omega)} = O(\varepsilon^{(N-1)/2}), \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (6.22)$$

Из (6.20), (6.22) следует справедливость (6.17).

Обозначим через $\widehat{\Psi}_{\varepsilon,N}$ частичную сумму ряда (1.8), построенного в теореме 6.1,

$$\widehat{\psi}_\varepsilon(x) = (1 - \chi(rt\varepsilon^{-1/2})) \widehat{\Psi}_{\varepsilon,N}(x) + \chi(rt\varepsilon^{-1/2}) \widehat{v}_N(y\varepsilon^{-1}, s, \varepsilon) + \Phi^N(x, \varepsilon), \quad (6.23)$$

где Φ^N – решение краевой задачи (6.16).

ТЕОРЕМА 6.2. Функция $\widehat{\psi}_\varepsilon \in W_2^1(\Omega) \cap C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \partial\gamma_\varepsilon)$ является решением краевой задачи

$$-(\Delta + \lambda_{\varepsilon,N})\widehat{\psi}_\varepsilon = \widehat{f}_\varepsilon, \quad x \in \Omega, \quad \widehat{\psi}_\varepsilon = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon, \quad \frac{\partial \widehat{\psi}_\varepsilon}{\partial \tau} = 0, \quad x \in \gamma_\varepsilon, \quad (6.24)$$

где $\|\widehat{f}_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} < c_{N_2}\varepsilon^{N_2}$, $\|\widehat{\psi}_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} = 1 + o(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, N_2 растёт неограниченно вместе с N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению функция $\widehat{\psi}_\varepsilon \in W_2^1(\Omega) \cap C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \partial\gamma_\varepsilon)$ и удовлетворяет граничным условиям в (6.24). Верно равенство $\|\widehat{\psi}_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} = 1 + o(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Подставляя $\widehat{\psi}_\varepsilon$ в уравнение (6.24), получаем

$$\begin{aligned} \widehat{f}_\varepsilon &= - \sum_{j=1}^3 f_{\varepsilon,j}(x), \\ f_{\varepsilon,1}(x) &= \Delta \chi(rt\varepsilon^{-1/2})(\widehat{v}_N - \widehat{\Psi}_{\varepsilon,N}) + 2 \sum_{j=1}^3 \chi(rt\varepsilon^{-1/2})_{x_j}(\widehat{v}_N - \widehat{\Psi}_{\varepsilon,N})_{x_j}, \\ f_{\varepsilon,2}(x) &= (1 - \chi(rt\varepsilon^{-1/2}))(\Delta + \widehat{\lambda}_{\varepsilon,N})\widehat{\Psi}_{\varepsilon,N}, \\ f_{\varepsilon,3}(x) &= (1 + \widehat{\lambda}_{\varepsilon,N})\phi. \end{aligned}$$

Так как $\psi_{2+i,j} \in \mathcal{A}_{i+1-2j}$, то в силу (6.6) при $t^{-1}\varepsilon^{1/2} < r < 2t^{-1}\varepsilon^{1/2}$ имеем

$$\begin{aligned} \widehat{v}_N &= K_N(\widehat{\Psi}_{\varepsilon,N}) + O(\varepsilon\rho^{-N} + \varepsilon^{N-1}\rho), \quad \rho \rightarrow \infty, \\ \widehat{\Psi}_{\varepsilon,N} &= K_N(\widehat{\Psi}_{\varepsilon,N}) + O(r^{N+1} + \varepsilon^{N-1}r), \quad r \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\widehat{\Psi}_{\varepsilon,N} - \widehat{v}_N = O(r^{N+1} + \varepsilon^{N-1}r + \varepsilon\rho^{-N} + \varepsilon^{N-1}\rho) \quad (6.25)$$

при $r \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow \infty$. Так как $\text{supp } f_{\varepsilon,1} \subset S_{2t^{-1}\varepsilon^{1/2}}^2 \setminus S_{t^{-1}\varepsilon^{1/2}}^2$, то из (6.25) вытекает, что $\|f_{\varepsilon,1}\|_{L_2(\Omega)} = O(\varepsilon^{N_3})$, где N_3 растёт неограниченно вместе с N .

В силу того что $\psi_{i+2,j} \in \mathcal{A}_{i+1-2j}$ являются решениями краевых задач (6.1) и $\psi_{i+2,j} = O(r^{i+1-2j})$ при $r \rightarrow 0$, имеем

$$f_{\varepsilon,2}(x) = (1 - \chi(rt\varepsilon^{-1/2}))\varepsilon^{N+1} \sum_{i=2}^N \sum_{q=0}^{[i/2]} S_{i,q}^{(1)}(\varepsilon, \ln \varepsilon) \psi_{i,q},$$

где $S_{i,q}^{(k)}$ — многочлены от ε и $\ln \varepsilon$. Так как $\text{supp } f_{\varepsilon,2} \subset \Omega \setminus S_{t^{-1}\varepsilon^{1/2}}^2$, то $\|f_{\varepsilon,2}\|_{L_2(\Omega)} = O(\varepsilon^{N_4})$, где N_4 растёт неограниченно вместе с N .

Так как $\text{supp } f_{\varepsilon,3} \subset \Omega \cap S_{2t^{-1}\varepsilon^{1/2}}^2$, то из леммы 6.5 следует, что $\|f_{\varepsilon,3}\|_{L_2(\Omega)} = O(\varepsilon^{N_1})$, где N_1 растёт неограниченно вместе с N .

Из оценок для $f_{\varepsilon,j}$ получаем, что $\|\widehat{f}_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} < c_{N_2}\varepsilon^{N_2}$, где N_2 растёт неограниченно вместе с N . Теорема доказана.

Из (6.14), (6.15) легко выводится оценка

$$\|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leq \frac{C}{|\lambda_\varepsilon - \lambda|} \|f\|_{L_2(\Omega)}. \quad (6.26)$$

Применяя (6.26) к $u_\varepsilon = \widehat{\psi}_\varepsilon$, $\lambda = \widehat{\lambda}_{\varepsilon,N}$, $f = \widehat{f}_\varepsilon$, в силу теоремы 6.2 имеем, что $|\lambda_\varepsilon - \widehat{\lambda}_{\varepsilon,N}| = O(\varepsilon^{N_2})$. Отсюда в силу произвола в выборе N следует, что асимптотический ряд (1.4), удовлетворяющий утверждению теоремы 6.1, совпадает с асимптотикой собственного значения λ_ε , сходящегося к λ_0 при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Из леммы 6.4 следует, что $\widehat{\psi}_\varepsilon$ может быть представлена в виде

$$\widehat{\psi}_\varepsilon = \widehat{c}_\varepsilon \phi_\varepsilon + \widetilde{u}_\varepsilon, \quad \|\widetilde{u}_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C_1 \|\widehat{f}_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}, \quad (6.27)$$

где ϕ_ε — нормированная в $L_2(\Omega)$ собственная функция краевой задачи (1.2). Обозначим $\widetilde{\psi}_\varepsilon = \widehat{c}_\varepsilon \phi_\varepsilon$. Так как ψ_ε — собственная функция, соответствующая λ_ε , а в силу (6.27) и теоремы 6.2 $\|\widehat{\psi}_\varepsilon - \widetilde{\psi}_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} = O(\varepsilon^{N_2})$, где N_2 растет неограниченно вместе с N , то из произвола в выборе N следует справедливость (1.8) в $\Omega \setminus S_{t-1\varepsilon^{1/2}}^2$ и справедливость (1.9) в $\Omega \cap S_{2t-1\varepsilon^{1/2}}^2$. Полагая $t = 2$, получаем, что асимптотика (1.8) справедлива в $\Omega \setminus S_{\varepsilon^{1/2}}^2$, а полагая $t = 1/2$, получаем, что асимптотика (1.9) справедлива в $\Omega \cap S_{2\varepsilon^{1/2}}^2$. Теорема 1.1 доказана.

§ 7. Доказательство теоремы 1.2

Будем строить асимптотику λ^ε в виде (1.4), а асимптотики ψ^ε — в виде (1.8) при $\Omega_\varepsilon \setminus S_{\varepsilon^{1/2}}^2$ и (1.11) при $\Omega_\varepsilon \cap S_{2\varepsilon^{1/2}}^2$. Подставляя (1.4), (1.8), (1.11), (4.1) в (1.3), получаем краевые задачи для коэффициентов рядов (1.8), (1.11):

$$-(\Delta + \lambda_0)\psi_{2+k,q} = \lambda_{2+k,q}\psi_0 + \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{j=0}^q \lambda_{k-i,q-j}\psi_{2+i,j} \quad \text{в } \Omega \setminus \gamma, \quad (7.1)$$

$$\psi_{2+k,q} = 0 \quad \text{на } \Gamma,$$

$$\begin{aligned} \Delta_\xi v_{1+k,q} &= -\lambda_0 v_{k-1,q} - \sum_{i=0}^{k-3} \sum_{j=0}^q \lambda_{k-i-1,q-j} v_{i,j} + \sum_{i=1}^{k-2q+1} R_{i,2}(\xi, s, D) v_{k-i+1,q} \\ &+ \sum_{i=0}^{k-2q} R_{i,1}(\xi, s, D) v_{k-i,q} + \sum_{i=0}^{k-2q-1} R_{i,0}(\xi, s, D) v_{k-i-1,q} \quad \text{в } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\omega}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial v_{1+k,q}}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^{k-1} p_i(l_\xi, s) \frac{\partial v_{k-i,q}}{\partial s} \quad \text{на } \partial\omega.$$

Здесь и далее будем считать равными нулю $\lambda_{k,q}$, $\psi_{k,q}$, $v_{k,q}$, индексы у которых не являются членами рядов (1.4), (1.8), (1.11).

Из определения K_N , $\mathcal{B}_i^{(0)}$ и $\widetilde{\mathcal{G}}_i$ вытекает следующий аналог леммы 6.1.

ЛЕММА 7.1. Пусть $\psi_{2+k,q} \in \mathcal{B}_{k+1-2q}^{(0)}$. Тогда

$$K_\infty(\Psi_\varepsilon(x)) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{[i/2]} \varepsilon^i \ln^j \varepsilon V_{i,j}(\xi; s), \quad \text{где } V_{i,j} \in \widetilde{\mathcal{G}}_{i-2j}. \quad (7.3)$$

Если к тому же $\psi_{2+k,q}$ – решения (7.1), то ряды $V_{i,j}$ являются формальными асимптотическими решениями уравнений (7.2) при $\rho \rightarrow \infty$, где в правой части функции $v_{i,j}$ заменены на ряды $V_{i,j}$.

Будем искать $\psi_{2+k,q}$, $\lambda_{2+k,q}$ в виде

$$\psi_{2+k,q}(x) = \sum_{j=2q}^{k+1} \Psi_{2+k,q}^{(j)}, \quad \lambda_{2+k,q}(x) = \sum_{j=2q}^{k+1} \Lambda_{2+k,q}^{(j)}. \quad (7.4)$$

Далее будем считать равными нулю $\Psi_{k,q}^{(m)}$, $\Lambda_{k,q}^{(n)}$, индексы у которых не являются членами (7.4). С учетом определения множества $\mathcal{B}_i^{(0)}$ аналогично лемме 6.2 доказывается

ЛЕММА 7.2. Если $\Psi_{2+k,q}^{(t)} \in \mathcal{B}_{k+1-t}^{(0)}$, то функция $\psi_{2+k,q}$, определенная равенством (7.4), принадлежит $\mathcal{B}_{k+1-2q}^{(0)}$. Если к тому же $\Psi_{2+k,q}^{(t)}$ являются решениями краевых задач

$$\begin{aligned} -(\Delta + \lambda_0)\Psi_{2+k,q}^{(t)} &= \Lambda_{2+k,q}^{(t)}\psi_0 + \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{j=0}^q \sum_{m+n=t} \Lambda_{k-i,q-j}^{(m)} \Psi_{2+i,j}^{(n)} \quad \text{при } x \in \Omega \setminus \gamma, \\ \Psi_{2+k,q}^{(t)} &= 0 \quad \text{при } x \in \Gamma, \end{aligned} \quad (7.5)$$

то $\psi_{2+k,q}$ являются решениями краевых задач (7.1).

Обозначим

$$\begin{aligned} \psi^{(N)}(x, \varepsilon) &= \psi_0(x) + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{[\frac{1}{2}\min\{N,i\}]} \varepsilon^{2+i} \ln^j \varepsilon \psi_{2+i,j}^{(N)}(x), \\ \psi^{(-1)}(x, \varepsilon) &= \psi_0(x), \quad \psi_{2+k,j}^{(N)}(x) = \sum_{t=2j}^{\min\{N,k+1\}} \Psi_{2+k,j}^{(t)}(x). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Так как $\Psi_{2+k,q}^{(j)} \in \mathcal{B}_{k+1-j}$, то из определений K_N , $\psi^{(N)}(x, \varepsilon)$ следует, что $K_N(\psi^{(N-1)}) = K_N(\Psi_\varepsilon)$.

Из лемм 7.1, 7.2 вытекает следующий аналог леммы 6.3.

ЛЕММА 7.3. Пусть $\Psi_{2+k,q}^{(j)} \in \mathcal{B}_{k+1-j}^{(0)}$. Тогда ряды $V_{i,j}$ в (7.3) имеют вид

$$V_{i,j}(\xi; s) = \tilde{V}_{i,j}(\xi; s) + (1 - \delta_i^{2j})(1 - \delta_i^{2j+1})(g^{(i,j)}(s) \ln \rho + \tilde{g}^{(i,j)}(s)) \\ + (1 - \delta_i^{2j}) \sum_{t=1}^{\infty} Z_t^{(i,j)}(\xi; s) \rho^{-2t},$$

$Z_t^{(i,j)}(y; s) r^{-2t}$ — главный член асимптотики $\Psi_{t+i,j}^{(i-1)}$ в нуле, $g^{(i,j)}(s) \ln r + \tilde{g}^{(i,j)}(s)$ — главные члены асимптотики $\Psi_{i,j}^{(i-1)}$ в нуле,

$$\tilde{V}_{i,j}(\xi; s) = \varepsilon^{-i} \ln^{-j} \mathcal{H}_{i,j}(\psi^{(i-2)}(x, \varepsilon)), \quad \tilde{V}_{i,j} \in \tilde{\mathcal{G}}_{i-2j},$$

и, в частности, $\tilde{V}_{0,0}(\xi; s) = P_0(s)$, $\tilde{V}_{1,0}(\xi; s) = P_1(\xi; s)$, $\tilde{V}_{2,1}(\xi; s) = g^{(2,0)}(s)$.

Если к тому же $\Psi_{2+k,q}^{(t)}$ являются решениями (7.5), то ряды $\tilde{V}_{1+k,q}$ являются формальными асимптотическими решениями (7.2) при $\rho \rightarrow \infty$, где в правой части функции $v_{1+i,j}$ заменены на $V_{1+i,j}$.

Обозначим через $\hat{v}_N(\xi, s, \varepsilon)$ частичную сумму ряда (1.11).

ТЕОРЕМА 7.1. Существуют ряды (1.4), (1.8) и (1.11) такие, что

- 1) выполняется равенство (1.10);
- 2) функции $\psi_{2+i,q} \in \mathcal{B}_{i+1-2q}^{(0)}$ являются решениями (7.1);
- 3) функции $v_{i,q} \in \mathcal{G}_{i-2q}$ являются решениями (7.2);
- 4) для любого $N \geq 0$ выполняется равенство (6.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В §3 было доказано, что существуют решения $v_{0,0} = v_0$, $v_{1,0} = v_1$ краевых задач (7.2), определенные равенствами (3.11), (3.19) с асимптотиками при $\rho \rightarrow \infty$

$$v_{0,0}(\xi; s) = \tilde{V}_{0,0}(\xi; s), \quad v_{1,0}(\xi; s) = \tilde{V}_{1,0}(\xi; s) + \sum_{i=1}^{\infty} Z_i(\xi; s) \rho^{-2i}, \quad (7.6)$$

причем $Z_1(\xi; s) = \rho(A_1(s) \sin \varphi + B_1(s) \cos \varphi)$, где A_1, B_1 определяются в (3.21). Из определений $\mathcal{G}_q$ и $v_{i,j}$ следует, что $v_{0,0} \in \mathcal{G}_0$, $v_{1,0} \in \mathcal{G}_1$. Выберем главные члены $Z_i^{(1,0)}(y; s) r^{-2i}$ асимптотик $\Psi_{i+1,0}^{(0)}(x)$ равными $Z_i(y; s) r^{-2i}$ из (7.6). Из (7.6) и леммы 7.3 следует, что

$$v_{0,0}(\xi; s) = V_{0,0}(\xi; s), \quad v_{1,0}(\xi; s) = V_{1,0}(\xi; s), \quad \rho \rightarrow \infty.$$

С другой стороны, в силу леммы 4.9 существуют постоянные $\Lambda_{i+1,0}^{(0)}$ и функции $\Psi_{i+1,0}^{(0)} \in \mathcal{B}_i^{(0)}$ с заданными главными членами асимптотик такие, что (7.5) выполняется при $t = 0$. В силу леммы 3.2 имеем

$$\Psi_{2,0}^{(0)} = U^{(1)}(x; A_1(s), B_1(s)), \\ \Lambda_{2,0}^{(0)} = -2\pi \int_{\gamma} (c_{10} B_1 + c_{01} A_1) ds. \quad (7.7)$$

Таким образом, построен ряд $\psi^{(0)}(x, \varepsilon)$. Так как $K_1(\psi^{(0)}) = K_1(\Psi_\varepsilon)$ (замечание 7.1), то (6.6) выполняется для $N = 1$.

Так как $\tilde{V}_{2,0} \in \tilde{\mathcal{G}}_2$, то в силу леммы 5.3 существует решение $v_{2,0} \in \mathcal{G}_2$ задачи (7.2) с асимптотикой

$$v_{2,0}(\xi; s) = \tilde{V}_{2,0}(\xi; s) + g^{(2,0)}(s) \ln \rho + \tilde{g}^{(2,0)}(s) + \sum_{i=1}^{\infty} Z_i(\xi; s) \rho^{-2i}, \quad \rho \rightarrow \infty, \quad (7.8)$$

где $\tilde{g}^{(2,0)}(s) \in C^\infty(\gamma)$ — произвольная функция. По построению $\tilde{v} = v_2 - v_{2,0}$ является гармонической функцией, удовлетворяющей однородным граничным условиям Неймана на $\partial\omega$, с асимптотикой $\tilde{v} = X_2 + X_1 + (G(s) - g(s)) \ln \rho + O(1)$ при $\rho \rightarrow \infty$, где v_2 построена в §3, $X_k(\xi; s)$ — гармонический полином степени k . Из леммы 3.1 следует, что $\tilde{v} = X_2 + X_1 + O(1)$ при $\rho \rightarrow \infty$. Следовательно, $g^{(2,0)}(s) = G(s)$.

Выберем главный член асимптотики $\Psi_{2,0}^{(1)}(x)$ равным $G(s) \ln r$ и главные члены $Z_i^{(2,0)}(y; s) r^{-2i}$ асимптотик $\Psi_{i+2,0}^{(1)}(x)$ равными $Z_i(y; s) r^{-2i}$ из (7.8). Далее, в силу лемм 4.9, 4.10 существуют постоянные $\Lambda_{i+2,0}^{(1)}$ при $i \geq 0$ и функции $\Psi_{i+2,0}^{(1)} \in \mathcal{B}_i^{(0)}$ с заданными главными членами асимптотик и такие, что (7.5) выполняется при $t = 1$. В силу леммы 3.2 имеем $\Psi_{2,0}^{(1)} = U^{(0)}(x; G(s))$, $\Psi_{2,0}^{(1)} = G(s) \ln r + \tilde{G}(s) + o(1)$ при $r \rightarrow 0$ и

$$\Lambda_{2,0}^{(1)} = 2\pi \int_{\gamma} c_{00} G ds. \quad (7.9)$$

Выбирая теперь в (7.8) $\tilde{g}^{(2,0)}(s) = \tilde{G}(s)$, в силу леммы 7.3 получаем

$$v_{2,0}(\xi; s) = V_{2,0}(\xi; s), \quad \rho \rightarrow \infty.$$

Из (7.7), (7.9) следует (1.10).

Легко видеть, что $v_{2,1}(\xi; s) = \tilde{V}_{2,1}(\xi; s) = G(s)$ является решением краевой задачи (7.2). Таким образом, построен ряд $\psi^{(1)}(x, \varepsilon)$. Так как $K_2(\psi^{(1)}) = K_2(\Psi_\varepsilon)$ (замечание 7.1), то (6.6) выполняется для $N = 2$.

Дальнейшее доказательство проводится по индукции аналогично теореме 6.1.

В работах [36], [38] доказаны следующие утверждения.

ЛЕММА 7.4. Пусть λ_0 — простое собственное значение предельной задачи (1.1). Тогда

- а) для нормированных в $L_2(\Omega_\varepsilon)$ собственных функций имеет место сходимость $\|\phi^\varepsilon - \psi_0\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon)} \rightarrow 0$;
- б) при λ , близких к λ_0 , для решений краевой задачи

$$-\Delta u^\varepsilon = \lambda u^\varepsilon + f \quad \text{в } \Omega_\varepsilon, \quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \tau} = 0 \quad \text{на } \partial\sigma_\varepsilon, \quad u^\varepsilon = 0 \quad \text{на } \Gamma$$

справедлива равномерная по ε и λ оценка

$$\|u^\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{C}{|\lambda^\varepsilon - \lambda|} \|f\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}.$$

Пусть $\widehat{\lambda}_{\varepsilon,N}$, $\widehat{\Psi}_{\varepsilon,N}$, $\widehat{v}_N$ — соответственно частичные суммы рядов (1.4), (1.8), (1.11), построенных в теореме 7.1. Обозначим

$$\widehat{\psi}^\varepsilon(x) = (1 - \chi(rt\varepsilon^{-1/2}))\widehat{\Psi}_{\varepsilon,N}(x) + \chi(rt\varepsilon^{-1/2})\widehat{v}_N(y\varepsilon^{-1}, s, \varepsilon),$$

t — произвольная фиксированная положительная постоянная. Аналогично теореме 6.2 доказывается

ТЕОРЕМА 7.2. *Функция $\widehat{\psi}^\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega}_\varepsilon)$ является решением краевой задачи*

$$-(\Delta + \lambda_{\varepsilon,N})\widehat{\psi}^\varepsilon = \widehat{f}_\varepsilon, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad \frac{\partial \widehat{\psi}^\varepsilon}{\partial \tau} = 0, \quad x \in \partial\sigma_\varepsilon, \quad \widehat{\psi}^\varepsilon = 0, \quad x \in \Gamma,$$

где $\|\widehat{f}_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} < c_N \varepsilon^{N_1}$, $\|\widehat{\psi}^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} = 1 + o(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, N_1 растёт неограниченно вместе с N .

Обоснование асимптотик полностью аналогично обоснованию асимптотик краевой задачи (1.3), только вместо теоремы 6.1 используется теорема 7.1, а вместо леммы 6.4 — лемма 7.4.

В заключение автор хотела бы выразить благодарность Р. Р. Гадылышину и Д. И. Борисову за постоянное внимание к работе и полезные замечания.

Список литературы

1. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
2. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972.
3. Марченко В. А., Хруслев Е. Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев: Наукова думка, 1974.
4. Санчес-Паленсиа Е. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
5. Батхалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. М.: Наука, 1984.
6. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
7. Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: Изд-во МГУ, 1990.
8. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярном возмущении области. Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1981.
9. Ильин А. М. Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. I. Двумерный случай // Матем. сб. 1976. Т. 99(141). С. 514–537.
10. Ильин А. М. Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. II. Область с малым отверстием // Матем. сб. 1977. Т. 103(145). С. 265–284.
11. Федоряк М. В. Задача Дирихле для оператора Лапласа во внешности тонкого тела вращения // Труды сем. им. С. Л. Соболева. № 1. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1980. С. 113–131.
12. Ильин А. М. Исследование асимптотики решения эллиптической краевой задачи в области с малым отверстием // Труды сем. им. И. Г. Петровского. № 6. М.: Изд-во МГУ, 1981. С. 57–82.
13. Чечкин Г. А. Усреднение краевых задач с сингулярным возмущением граничных условий // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 6. С. 99–150.

14. *Аргатов И. И., Назаров С. А.* Асимптотическое решение задачи Синьорини с препятствием на тонком продолговатом множестве // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 10. С. 3–32.
15. *Назаров С. А., Паукито М. В.* Дискретные модели и осреднение в задачах теории упругости. Л.: ЛГУ, 1984.
16. *Самарский А. А.* О влиянии закрепления на собственные частоты замкнутых объемов // Докл. АН СССР. 1948. Т. 63. С. 631–634.
17. *Swanson C. A.* Asymptotic variational formulae for eigenvalues // Canad. Math. Bull. 1963. V. 6. № 1. P. 15–25.
18. *Днестровский Ю. Н.* Об изменении собственных чисел при изменении границы областей // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1964. № 9. С. 61–74.
19. *Ozawa S.* Singular variation of domains and eigenvalues of the Laplacian // Duke Math. J. 1981. V. 48. P. 767–778.
20. *Мазья В. Г., Назаров С. П., Пламеневский Б. А.* Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. С. 347–371.
21. *Гадильшин Р. Р., Ильин А. М.* Асимптотика собственных значений задачи Дирихле в области с узкой щелью // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 4. С. 25–48.
22. *Jimbo S.* The singularity perturbed domain and the characterization for the eigenfunctions with Neumann boundary condition // J. Differential Equations. 1989. V. 77. P. 322–350.
23. *Hempel R., Seco L., Simon B.* The essential spectrum of Neumann Laplacians on some bounded singular domains // J. Funct. Anal. 1991. V. 102. P. 448–483.
24. *Гадильшин Р. Р.* Асимптотика второй собственной частоты для системы двух тел, соединенных тонкой перемычкой // ТМФ. 1993. Т. 97. № 1. С. 68–77.
25. *Гадильшин Р. Р.* О собственных частотах тел с тонкими отростками. II. Асимптотики // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 1. С. 20–34.
26. *Arrieta J. M.* Neumann eigenvalue problems on exterior perturbations of the domain // J. Differential Equations. 1995. V. 118. P. 54–103.
27. *Гадильшин Р. Р.* Расщепление кратного собственного значения в краевой задаче для мембраны, закрепленной на малом участке границы // Сиб. матем. журн. 1993. Т. 34. № 3. С. 43–61.
28. *Гадильшин Р. Р.* Асимптотика собственного значения сингулярно возмущенной эллиптической задачи с малым параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 4. С. 640–652.
29. *Гадильшин Р. Р.* Расщепление кратного собственного значения задачи Дирихле для оператора Лапласа при сингулярном возмущении граничного условия // Матем. заметки. 1992. Т. 52. № 4. С. 42–55.
30. *Гадильшин Р. Р.* О возмущении спектра лапласиана при смене типа граничного условия на малой части границы // ЖВМиМФ. 1996. Т. 36. № 7. С. 77–88.
31. *Гадильшин Р. Р.* Об асимптотике собственных значений для периодически закрепленной мембраны // Алгебра и анализ. 1998. Т. 10. № 1. С. 3–19.
32. *Гадильшин Р. Р.* Асимптотики собственных значений краевой задачи с быстроосциллирующими граничными условиями // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 4. С. 540–551.
33. *Борисов Д. И.* О краевой задаче в цилиндре с частой сменой типа граничных условий // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 7. С. 37–68.
34. *Borisov D. I.* On a model boundary value problem for Laplacian with frequently alternating type of boundary condition // Asymptot. Anal. 2003. V. 35. № 1. P. 1–26.
35. *Борисов Д. И.* Асимптотики и оценки собственных элементов лапласиана с частой непериодической сменой граничных условий // Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67. № 6. С. 23–70.
36. *Планида М. Ю.* О сходимости решений сингулярно возмущенных краевых задач для лапласиана // Матем. заметки. 2002. Т. 71. № 6. С. 867–877.
37. *Планида М. Ю.* Об асимптотике собственных значений для цилиндра, теплоизолированного на узкой полосе // ЖВМиМФ. 2003. Т. 43. № 3. С. 422–432.

38. *Планида М. Ю.* Об асимптотике собственных значений лапласиана в области с граничным условием Неймана на вырезанной тонкой трубке // ЖВМиМФ. 2004. Т. 44. № 4. С. 717–730.
39. *Планида М. Ю.* Асимптотики собственных элементов оператора Лапласа со сменой типа граничного условия на узкой уплощенной полосе // Матем. заметки. 2004. Т. 75. С. 236–252.
40. *Planida M. Yu.* Asymptotics for eigenvalues of Laplacian with Neumann boundary condition on a thin tube cut out // C.R. Acad. Sci. Ser. Mechan. 2003. V. 331. P. 531–536.
41. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
42. *Лаверентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
43. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
44. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1977.
45. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.

Башкирский государственный
педагогический университет, Уфа
E-mail: planida@bspu.ru

Поступила в редакцию
17.05.2004