Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Мосин, А. Н. Панов, Тела частных и центральные элементы многопараметрических квантований, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 6, 53–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm136>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 15:48:23

УДК 512.66

В. Г. Мосин, А. Н. Панов

Тела частных и центральные элементы многопараметрических квантований

Доказано, что алгебра регулярных функций на квантовых $m \times n$ -матрицах допускает тело частных, и что это тело является телом скрученных рациональных функций.

Дано описание поля центральных элементов в теле рациональных функций на квантовых $m \times n$ -матрицах в одно- и многопараметрическом случаях. В однопараметрическом случае при q общего вида центр является чисто трансцендентным расширением поля $\mathbb{K}$ степени l (где l – наибольший общий делитель чисел m и n), если оба числа m/l и n/l нечетны. Если хотя бы одно из чисел m/l , n/l четно – центр скалярен. В многопараметрическом случае ответ зависит от параметров P, Q, c . Здесь описаны образующие центра и доказана скалярность центра для случая четного n и параметров общего вида.

Аналогичные результаты получены для тела рациональных функций на квантовой борелевской подгруппе группы $GL_{P,Q,c}(n)$.

Библиография: 7 названий.

§ 0. Введение

Квантовые группы [1], [2] являются интересным объектом для алгебраического исследования. Вопрос, которому посвящена статья, состоит в следующем: допускает ли алгебра регулярных функций на квантовой группе тело частных. Другими словами, можно ли говорить о теле рациональных функций на квантовой группе? Если ответ утвердительный, то можно ли дать явное описание этого тела? Эти же вопросы возникают и для тел рациональных функций на квантовых линейных пространствах.

Основным объектом исследования статьи является алгебра $M_{P,Q,c}(m, n)$ регулярных функций на квантовых $m \times n$ -матрицах (см. [3] и определения 1.1, 1.2). В первом параграфе статьи доказывается, что алгебра $M_{P,Q,c}(m, n)$ допускает тело частных (лемма 1.3), которое будем называть телом рациональных функций на квантовых $m \times n$ -матрицах. Для $m = n$ это тело совпадает с телом рациональных функций на квантовой группе $GL_{P,Q,c}(n)$ [3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.1 [4]–[6]. Пусть $\mathbb{K}$ – поле, и $R = \{r_{ij}\}_{i,j=1}^n \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$, $r_{ij} = r_{ji} = r_{ii} = 1$. Алгеброй скрученных многочленов называют алгебру $A(R)$, порожденную над $\mathbb{K}$ элементами $x_1, \dots, x_n$ с соотношениями $x_i x_j = r_{ij} x_j x_i$. Тело частных алгебры $A(R)$ называют телом скрученных рациональных функций.

Основной результат первого параграфа сформулирован в теореме 1.24, в которой доказывается, что тело рациональных функций на квантовых $m \times n$ -матрицах изоморфно некоторому телу скрученных рациональных функций. В работах [5], [6] это было доказано для случая однопараметрического квантования и $m = n$.

Во втором параграфе дается описание поля центральных элементов в теле рациональных функций на квантовых $m \times n$ -матрицах. Известно [1], что центр алгебры регулярных функций на $GL_q(n, \mathbb{K})$ при q общего вида, порождается квантовым определителем. Центр тела частных этой алгебры является чисто трансцендентным расширением поля $\mathbb{K}$ степени n [5], [6]. В предлагаемой работе описывается центр тела рациональных функций на квантовых $m \times n$ -матрицах в одно- и многопараметрическом случаях. В однопараметрическом случае при q общего вида центр является чисто трансцендентным расширением поля $\mathbb{K}$ степени l (где l – наибольший общий делитель чисел m и n), если оба числа m/l , n/l нечетны. В случае, когда хотя бы одно из чисел m/l , n/l четно – центр скалярен. В многопараметрическом случае ответ зависит от P, Q, c . Основные результаты здесь сформулированы в теореме 2.9, где описаны образующие центра, и в теореме 2.12, в которой доказана скалярность центра для случая четного n и параметров общего вида.

В заключительном третьем параграфе результаты предыдущих разделов переносятся нами на тело рациональных функций на квантовой борелевской подгруппе группы $GL_{P,Q,c}(n)$.

Необходимые сведения о многопараметрических квантованиях читатель может найти в обзорной статье [3]. Авторы выражают искреннюю признательность Е. Е. Демидову, приславшему им отписки своих работ.

§ 1. Тело рациональных функций на квантовых $m \times n$ -матрицах

Пусть $\mathbb{K}$ – поле; матрицы $P, Q \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ таковы, что

$$p_{ij}q_{ij} = c^{\text{sgn}(j-i)}, \quad p_{ij}p_{ji} = q_{ij}q_{ji} = p_{ii} = q_{ii} = 1. \quad (1.1)$$

Обозначим $M_{P,Q,c}(n)$ (или коротко $M(n)$) алгебру, порожденную элементами $\{a_i^t\}_{i,t=1}^n$ с соотношениями:

$$\begin{aligned} a_i^t a_j^s - q_{ts} q_{ij}^{-1} a_j^s a_i^t &= (p_{ts}^{-1} - q_{ij}) a_i^s a_j^t \quad \text{для } i < j, t < s \text{ или } i > j, t < s; \\ a_i^t a_j^s &= p_{ts}^{-1} q_{ij}^{-1} a_j^s a_i^t \quad \text{во всех остальных случаях.} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь и везде в дальнейшем наличие совпадающих верхних и нижних индексов не предполагает суммирования.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 [3]. Алгебру $M_{P,Q,c}(n)$ будем называть *алгеброй регулярных функций* на квантовых $n \times n$ -матрицах.

ЗАМЕЧАНИЕ [3]. Алгебра $GL_{P,Q,c}(n)$ регулярных функций на квантовой группе $GL(n)$ – это локализация $M_{P,Q,c}(n)$ по мультипликативному множеству, порожденному определителем. Однопараметрическое квантование Дринфелда–Джимбо получается, если в (1.1) положить $p_{ij} = q_{ij} = q$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Пусть $m \leq n$. Фактор-алгебру алгебры $M_{P,Q,c}(n)$ по идеалу, порожденному элементами a_i^t , $i > m$, будем называть *алгеброй регулярных функций* на квантовых $m \times n$ -матрицах и обозначать $M_{P,Q,c}(m, n)$ (или коротко $M(m, n)$).

ЛЕММА 1.3. Алгебра $M(m, n)$ является нётеровой и не содержит делителей нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M_i^t – подалгебры в $M(m, n)$, порожденная элементами a_j^s , где $(j, s) \leq (i, t)$ в смысле лексикографического порядка. Семейство подалгебр $\{M_i^t\}_{i,t=1}^{m,n}$ упорядочено по включению. Следовательно, к каждой паре соседних подалгебр применима лемма 1.2 из [6]. Доказательство может быть завершено индукцией по цепочке подалгебр аналогично доказательству теоремы 1.3 из [6].

Согласно [7, теорема 3.6.2] любая нётерова алгебра без делителей нуля допускает тело частных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Обозначим $F(m, n)$ тело частных алгебры $M(m, n)$. Соответственно, пусть $F(n) = \text{Fract } M(n)$.

Введем обозначения:

$$r_{ij}^{ts} = \begin{cases} (p_{ts}q_{ij})^{-1}c^{-1} & \text{для } i > j, t > s; \\ (p_{ts}q_{ij})^{-1}c & \text{для } i < j, t < s; \\ (p_{ts}q_{ij})^{-1} & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.3)$$

В этих обозначениях соотношения (1.2) могут быть переписаны следующим образом:

$$\begin{aligned} a_i^t a_j^s - r_{ij}^{ts} a_j^s a_i^t &= (p_{ts}^{-1} - q_{ij}) a_i^s a_j^t & \text{для } i < j, t < s \text{ или } i > j, t < s; \\ a_i^t a_j^s &= r_{ij}^{ts} a_j^s a_i^t & \text{во всех остальных случаях.} \end{aligned} \quad (1.4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Обозначим $A_{P,Q,c}(n)$ (коротко $A(n)$) алгебру, порожденную над $\mathbb{K}$ элементами $\{x_i^t\}_{i,t=1}^n$ с соотношениями $x_i^t x_j^s = r_{ij}^{ts} x_j^s x_i^t$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Для $m \leq n$ определим алгебру $A_{P,Q,c}(m, n)$ (или коротко $A(m, n)$) как фактор-алгебру алгебры $A_{P,Q,c}(n)$ по идеалу, порожденному элементами $x_i^t, i > m$.

Алгебра $A_{P,Q,c}(m, n)$ является алгеброй скрученных многочленов. Согласно [4]–[6] такие алгебры являются нётеровыми алгебрами без делителей нуля и, следовательно, допускают тела частных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Положим $K(m, n) = \text{Fract } A(m, n)$, $K(n) = \text{Fract } A(n)$.

Цель этого параграфа – доказать изоморфность тел $F(m, n)$ и $K(m, n)$; в частности, $F(n)$ и $K(n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8. Будем говорить, что элементы x и y почти перестановочны, если $xy = \gamma yx$ для некоторого $\gamma \in \mathbb{K}^*$.

Мы выделим в алгебре $M(m, n)$ систему попарно почти перестановочных элементов, порождающих тело $F(m, n)$. В качестве такой системы будет взят некоторый набор квантовых миноров матрицы $(a_i^t)_{i,t=1}^{m,n}$, к определению которых мы переходим.

Пусть $I = (i_1, \dots, i_\mu)$; $T = (t_1, \dots, t_\mu)$ – упорядоченные наборы натуральных чисел такие, что $I \in [0, n]$; $T \in [0, m]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9. Обозначим через $B_Q(I)$ алгебру, порожденную элементами $\xi_1, \dots, \xi_\mu$ с соотношениями $\xi_k \xi_l = -q_{i_k i_l} \xi_l \xi_k$; $\xi_k^2 = 0$. Через $B_P(T)$ обозначим алгебру, порожденную элементами $\eta_1, \dots, \eta_\mu$ с соотношениями $\eta_k \eta_l = -p_{t_k t_l} \eta_l \eta_k$; $\eta_k^2 = 0$. Аналогично определяются алгебры $B_Q(T)$ и $B_P(I)$. Положим $b_\alpha^\beta = a_{i_\alpha}^{t_\beta}$, и пусть M_I^T – подалгебра, порожденная элементами $\{b_\alpha^\beta\}_{\alpha,\beta=1}^\mu$.

Согласно работе [3], алгебра M_I^T кодействует на $B_Q(I)$ справа и $B_P(T)$ слева. Определены гомоморфизмы δ и δ'

$$\delta: B_P(I) \rightarrow M_I^T \otimes B_P(T) \quad \text{и} \quad \delta': B_Q(T) \rightarrow B_Q(I) \otimes M_I^T$$

как отображения левого и правого кодействий при помощи формул:

$$\delta(\xi_\alpha) = \sum_{\beta=1}^{\mu} b_\alpha^\beta \otimes \eta_\beta, \quad \delta'(\eta_\beta) = \sum_{\alpha=1}^{\mu} \xi_\alpha \otimes b_\alpha^\beta.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.10. *Левым (правым) минором D_I^T (соответственно, $'D_I^T$) будем называть элементы в следующих формулах:*

$$\delta(\xi_1) \cdots \delta(\xi_\mu) = D_I^T \otimes \eta_1 \cdots \eta_\mu, \quad \delta'(\eta_1) \cdots \delta'(\eta_\mu) = \xi_1 \cdots \xi_\mu \otimes 'D_I^T.$$

ЛЕММА 1.11. *Левый квантовый минор совпадает с правым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем проводить доказательство индукцией по μ . Разложим минор D_I^T по первой строке.

$$\begin{aligned} \delta(\xi_1) \cdots \delta(\xi_\mu) &= \left(\sum_{\beta=1}^{\mu} b_1^\beta \otimes \eta_\beta \right) \cdots \left(\sum_{\beta=1}^{\mu} b_\mu^\beta \otimes \eta_\beta \right) \\ &= [b_1^1 B_1^1 + (-p_{t_2 t_1}) b_1^2 B_1^2 + \cdots + (-p_{t_\mu t_1}) \cdots (-p_{t_\mu t_{\mu-1}}) b_1^\mu B_1^\mu] \otimes \eta_1 \cdots \eta_\mu. \end{aligned}$$

Заметим, что в алгебре $B_Q(I) \otimes M_I^T$ имеют место следующие соотношения между элементами $\xi \otimes b_\alpha^\beta$ и $\xi_1 \otimes b_1^k$ для $\beta < k$:

$$\begin{aligned} (\xi_\alpha \otimes b_\alpha^\beta)(\xi_1 \otimes b_1^k) &= (\xi_\alpha \xi_1) \otimes (b_\alpha^\beta b_1^k) \\ &= (-q_{i_\alpha i_1})(p_{t_\beta t_k} q_{i_\alpha i_1})^{-1} (\xi_1 \xi_\alpha) \otimes (b_1^k b_\alpha^\beta) \\ &= -p_{t_\beta t_k} (\xi_1 \otimes b_1^k) (\xi_\alpha \otimes b_\alpha^\beta). \end{aligned}$$

Теперь, переставляя в следующих формулах элементы вида $\xi_1 \otimes b_1^k$ на первое место, получим:

$$\begin{aligned} \delta'(\eta_1) \cdots \delta'(\eta_\mu) &= \left(\sum_{\alpha=1}^{\mu} \xi_\alpha \otimes b_\alpha^1 \right) \cdots \left(\sum_{\alpha=1}^{\mu} \xi_\alpha \otimes b_\alpha^\mu \right) \\ &= \xi_1 \cdots \xi_\mu \otimes [b_1^1 B_1^1 + (-p_{t_2 t_1}) b_1^2 B_1^2 + \cdots + (-p_{t_\mu t_1}) \cdots (-p_{t_\mu t_{\mu-1}}) b_1^\mu B_1^\mu]. \end{aligned}$$

По предположению индукции $B_1^i = 'B_1^i$. Отсюда $D_I^T = 'D_I^T$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.12. Для $i_k \in I, t_k \in T$ положим:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{q}_k(I) &= \prod_{\alpha=k+1}^{\mu} q_{i_\alpha i_k}, & \overleftarrow{q}_k(I) &= \prod_{\alpha=1}^{k-1} q_{i_\alpha i_k}, & q_k(I) &= \prod_{\alpha=1}^{\mu} q_{i_\alpha i_k}; \\ \overrightarrow{q}_k(T) &= \prod_{\alpha=k+1}^{\mu} q_{t_\alpha t_k}, & \overleftarrow{q}_k(T) &= \prod_{\alpha=1}^{k-1} q_{t_\alpha t_k}, & q_k(T) &= \prod_{\alpha=1}^{\mu} q_{t_\alpha t_k}. \end{aligned}$$

Замена q на p дает аналогичные формулы для $\overrightarrow{p}_k(I), \overleftarrow{p}_k(I), p_k(I), \overrightarrow{p}_k(T), \overleftarrow{p}_k(T)$ и $p_k(T)$.

ЛЕММА 1.13.

(1) *Справедливы следующие формулы разложения квантового минора по строкам и столбцам*

$$D_I^T = \sum_{s=1}^{\mu} (-1)^{k+s} \overrightarrow{p}_k(I)^{-1} \overrightarrow{p}_s(T) B_k^s b_k^s = \sum_{s=1}^{\mu} (-1)^{k+s} \overleftarrow{p}_k(I) \overleftarrow{p}_s(T)^{-1} b_k^s B_k^s,$$

$$D_I^T = \sum_{s=1}^{\mu} (-1)^{k+s} \overrightarrow{q}_k(T)^{-1} \overrightarrow{q}_s(I) B_s^k b_s^k = \sum_{s=1}^{\mu} (-1)^{k+s} \overleftarrow{q}_k(T) \overleftarrow{q}_s(I)^{-1} b_s^k B_s^k.$$

(2) *Разложение квантового минора по чужой строке (столбцу) равно нулю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Докажем подробно первую из формул. Остальные доказываются аналогично.

$$\begin{aligned} \delta(\xi_1) \cdots \delta(\xi_k) \cdots \delta(\xi_{\mu}) &= \delta(\xi_1) \cdots \delta(\widehat{\xi_k}) \cdots \delta(\xi_{\mu}) \delta(\xi_k) (-1)^{\mu-k} \overrightarrow{p}_k(I)^{-1} \\ &= (-1)^{\mu-k} \overrightarrow{p}_k(I)^{-1} \left(\sum_{\alpha=1}^{\mu} b_1^{\alpha} \otimes \eta_{\alpha} \right) \cdots \delta(\widehat{\xi_k}) \cdots \left(\sum_{\alpha=1}^{\mu} b_{\mu}^{\alpha} \otimes \eta_{\alpha} \right) \cdot \left(\sum_{\alpha=1}^{\mu} b_k^{\alpha} \otimes \eta_{\alpha} \right) \\ &= (-1)^{\mu-k} \overrightarrow{p}_k(I)^{-1} \left(\sum_{s=1}^{\mu} \overrightarrow{p}_s(T) (-1)^{\mu-s} B_k^s b_k^s \right) \otimes \eta_1 \cdots \eta_{\mu}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$D_I^T = \sum_{s=1}^{\mu} (-1)^{k+s} \overrightarrow{p}_k(I)^{-1} \overrightarrow{p}_s(T) B_k^s b_k^s.$$

(2) Доказательство легко получается из соотношений $\xi_k^2 = 0$ и $\eta_k^2 = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.14. Положим

$$\begin{aligned} (1) \quad \mathbb{U} &= (u_k^s)_{k,s=1}^{\mu}, & \text{где } u_k^s &= (-1)^{k+s} \overleftarrow{p}_k(I) \overleftarrow{p}_s(T)^{-1} B_k^s; \\ (2) \quad \mathbb{V} &= (v_k^s)_{k,s=1}^{\mu}, & \text{где } v_k^s &= (-1)^{k+s} \overrightarrow{q}_k(T)^{-1} \overrightarrow{q}_s(I) B_s^k; \\ (3) \quad \mathbb{H}_I &= \text{diag}(h_1(I), \dots, h_{\mu}(I)), & \text{где } h_k(I) &= \overrightarrow{q}_k(I) \overleftarrow{p}_k(I)^{-1}; \\ (4) \quad \mathbb{H}_T &= \text{diag}(h_1(T), \dots, h_{\mu}(T)), & \text{где } h_k(T) &= \overrightarrow{q}_k(T) \overleftarrow{p}_k(T)^{-1}. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.15. Пусть $\mathbb{B} = (b_k^s)_{k,s=1}^{\mu}$ – матрица из образующих $b_k^s = a_{i_k}^{t_s}$, $\mathbb{E}$ – единичная матрица порядка μ . Тогда

$$\begin{aligned} (1) \quad \mathbb{B} \mathbb{U} &= D_I^T \mathbb{E}, & (3) \quad \mathbb{U} \mathbb{H}_I &= \mathbb{H}_T \mathbb{V}, \\ (2) \quad \mathbb{V} \mathbb{B} &= \mathbb{E} D_I^T, & (4) \quad D_I^T \mathbb{H}_I \mathbb{B} &= \mathbb{B} \mathbb{H}_T D_I^T. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункты (1) и (2) непосредственно следуют из леммы 1.13. Доказательство пункта (3) вытекает из следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned} h_k^{-1}(T) h_s(I) u_k^s &= \overrightarrow{q}_k(T)^{-1} \overleftarrow{p}_k(T) \overrightarrow{q}_s(I) \overleftarrow{p}_s(I)^{-1} (-1)^{k+s} \overleftarrow{p}_s(I) \overleftarrow{p}_k(T)^{-1} B_k^s \\ &= (-1)^{k+s} \overrightarrow{q}_k(T)^{-1} \overleftarrow{q}_s(I) B_s^k = v_k^s. \end{aligned}$$

Наконец, так как $\mathbb{B} \mathbb{U} \mathbb{H}_I \mathbb{B} = \mathbb{B} \mathbb{H}_T \mathbb{V} \mathbb{B}$, то $D_I^T \mathbb{H}_I \mathbb{B} = \mathbb{B} \mathbb{H}_T D_I^T$, что доказывает пункт (4).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.16. Положим $r_{I_k}^{T_s} = \prod_{\alpha=1}^{\mu} r_{i_{\alpha}k}^{t_{\alpha}s}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.17. Для $i_k \in I$, $t_k \in T$ справедливо следующее соотношение:

$$D_I^T a_{i_k}^{t_s} = r_{I_k}^{T_s} a_{i_k}^{t_s} D_I^T.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу пункта (4) предыдущего предложения имеет место:

$$D_I^T b_k^s = h_k(I)^{-1} h_s(T) b_k^s D_I^T.$$

Покажем, что $h_k(I)^{-1} h_s(T) = r_{I_k}^{T_s}$. Заметим, что так как $p_{ij} q_{ij} = c^{\text{sgn}(i-j)}$, то

$$\overleftarrow{p}_k(I) \overleftarrow{q}_k(I) = \left(\prod_{\alpha=1}^{k-1} p_{i_{\alpha}i_k} \right) \cdot \left(\prod_{\alpha=1}^{k-1} q_{i_{\alpha}i_k} \right) = c^{k-1}.$$

Аналогично, $\overrightarrow{p}_s(T) \overrightarrow{q}_s(T) = c^{s-\mu}$. Тогда:

$$\begin{aligned} h_k(I)^{-1} h_s(T) &= \overrightarrow{q}_k(I)^{-1} \overleftarrow{p}_k(I) \overrightarrow{q}_s(T) \overleftarrow{p}_s(T)^{-1} \\ &= \overrightarrow{q}_k(I)^{-1} [c^{k-1} \overleftarrow{q}_k(I)^{-1}] [c^{s-\mu} \overrightarrow{p}_s(T)^{-1}] \overleftarrow{p}_s(T)^{-1} \\ &= c^{(k-1)+(s-\mu)} q_k(I)^{-1} p_s(T)^{-1}. \end{aligned}$$

Покажем, что это число совпадает с $r_{I_k}^{T_s}$. Если $k \leq s$, то

$$\begin{aligned} r_{I_k}^{T_s} &= \prod_{\alpha=1}^{\mu} r_{i_{\alpha}i_k}^{t_{\alpha}s} \\ &= \left(\prod_{\alpha=1}^{k-1} c(q_{i_{\alpha}i_k} p_{t_{\alpha}t_k})^{-1} \right) \cdot \left(\prod_{\alpha=k}^s (q_{i_{\alpha}i_k} p_{t_{\alpha}t_k})^{-1} \right) \cdot \left(\prod_{\alpha=s+1}^{\mu} c^{-1} (q_{i_{\alpha}i_k} p_{t_{\alpha}t_k})^{-1} \right) \\ &= c^{k-1} c^{s-\mu} \prod_{\alpha=1}^{\mu} (q_{i_{\alpha}i_k} p_{t_{\alpha}t_k})^{-1} = c^{(k-1)+(s-\mu)} q_k(I)^{-1} p_s(T)^{-1}. \end{aligned}$$

Отсюда $h_k(I)^{-1} h_s(T) = r_{I_k}^{T_s}$. Случай $k \geq s$ доказывается аналогично.

Пусть мультииндексы $I = (i_1, \dots, i_{\mu})$, $T = (t_1, \dots, t_{\mu})$, $J = (j_1, \dots, j_{\nu})$ и $S = (s_1, \dots, s_{\nu})$ таковы, что $I, J \in [0, m]$, $T, S \in [0, n]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.18. Положим

- (1) $i < J$, если $i < j$ для любого $j \in J$;
- (2) $I < J$, если $i < J$ для любого $i \in I$;
- (3) $I \prec J$, если $I \setminus J < J \setminus I$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Предполагается, что отношение $\prec$ выполнено и в том случае, когда одно из множеств $I \setminus J$, $J \setminus I$ пусто. Если $I \subset J$, то выполняется как $I \prec J$, так и $J \prec I$. Любые два отрезка натурального ряда сравнимы в смысле отношения $\prec$. Отношение $\prec$ является отношением порядка на множестве отрезков одинаковой длины. В общем случае это не так: не выполнено условие транзитивности.

ЛЕММА 1.19. Пусть мультииндексы I, T и натуральные числа j, s таковы, что выполняется одно из условий: $I < j, T > s$ или $I > j, T < s$. Тогда

$$D_I^T a_j^s = r_{Ij}^{Ts} a_j^s D_I^T.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем подробно первый случай. Второй доказывается аналогично. Так как $I < j, T > s$, то, согласно соотношениям (1.4),

$$a_i^t a_j^s = r_{ij}^{ts} a_j^s a_i^t \quad \text{для любых } i \in I, \quad t \in T.$$

Для любого монома $a_{i_1}^{t_{\sigma(1)}} \cdots a_{i_\mu}^{t_{\sigma(\mu)}}$, входящего в минор D_I^T , справедливо:

$$a_{i_1}^{t_{\sigma(1)}} \cdots a_{i_\mu}^{t_{\sigma(\mu)}} a_j^s = r_\sigma a_j^s a_{i_1}^{t_{\sigma(1)}} \cdots a_{i_\mu}^{t_{\sigma(\mu)}} a_j^s,$$

где

$$r_\sigma = r_{i_1 j}^{t_{\sigma(1)} s} \cdots r_{i_\mu j}^{t_{\sigma(\mu)} s} = \left(\prod_{\alpha=1}^{\mu} q_{i_\alpha j}^{-1} \right) \cdot \left(\prod_{\beta=1}^{\mu} p_{t_\beta s}^{-1} \right) = \prod_{k=1}^{\mu} r_{i_k j}^{t_k s} = r_{Ij}^{Ts}.$$

Видно, что r_σ не зависит от σ . Отсюда $D_I^T a_j^s = r_{Ij}^{Ts} a_j^s D_I^T$, что и требовалось.

ЛЕММА 1.20. Пусть I, T, j, s таковы, что выполняется одно из условий: (1) $j > I, s \in T$, (2) $j < I, s \in T$, (3) $j \in I, s > T$ или (4) $j \in I, s < T$. Тогда

$$D_I^T a_j^s = r_{Ij}^{Ts} a_j^s D_I^T.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем подробное доказательство для случая (1). Остальные доказываются аналогично. Применим индукцию по μ . Если $\mu = 1$, то лемма вытекает из соотношений (1.4). Предположим, что утверждение доказано для всех порядков, меньших μ .

1) Рассмотрим случай $s = t_1$. Здесь $i < j$, и $t_1 = s \leq t$ для любых $i \in I, t \in T$. Отсюда, в силу (1.4), $a_i^t a_j^s = r_{ij}^{ts} a_j^s a_i^t$, и требуемое может быть доказано так же, как и в предыдущей лемме.

2) Пусть теперь $s = t_\alpha$, где $1 < \alpha \leq \mu$. Разложим минор D_I^T по первому столбцу:

$$D_I^T = a_{i_1}^{t_1} A_{i_1}^{t_1} + \cdots + a_{i_\mu}^{t_1} A_{i_\mu}^{t_1},$$

где $A_{i_1}^{t_1}, \dots, A_{i_\mu}^{t_1}$ — алгебраические дополнения элементов первого столбца. Для алгебраических дополнений справедливо предположение индукции:

$$A_{i_k}^{t_1} a_j^s = r_{I \setminus i_k, j}^{T \setminus t_1, s} a_j^s A_{i_k}^{t_1}.$$

Из соотношений (1.4) получаем:

$$a_{i_k}^{t_1} a_j^s - r_{i_k j}^{t_1 s} a_j^s a_{i_k}^{t_1} = (p_{t_1 s}^{-1} - q_{t_1 s}) a_{i_k}^s a_j^{t_1} = (q_{i_k j}^{-1} - p_{i_k j}) a_j^{t_1} a_{i_k}^s.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} D_I^T a_j^s &= \left(\sum_{k=1}^{\mu} a_{i_k}^{t_1} A_{i_k}^{t_1} \right) a_j^s = \sum_{k=1}^{\mu} a_{i_k}^{t_1} r_{I \setminus i_k, j}^{T \setminus t_1, s} a_j^s A_{i_k}^{t_1} \\ &= \sum_{k=1}^{\mu} r_{I \setminus i_k, j}^{T \setminus t_1, s} r_{i_k j}^{t_1 s} a_j^s a_{i_k}^{t_1} A_{i_k}^{t_1} + \sum_{k=1}^{\mu} r_{I \setminus i_k, j}^{T \setminus t_1, s} (p_{t_1 s}^{-1} - q_{t_1 s}) a_{i_k}^{t_1} A_{i_k}^{t_1}. \end{aligned}$$

Обозначим $q_{Ij} = \prod_{\alpha=1}^{\mu} q_{i_{\alpha}j}$, $p_{Ts} = \prod_{\beta=1}^{\mu} p_{t_{\beta}s}$. Тогда

$$\prod_{\gamma=1}^{\mu} r_{i_{\gamma}j}^{t_{\gamma}s} = (cq_{i_1j}^{-1}p_{t_1s}^{-1}) \cdots (cq_{i_{\alpha-1}j}^{-1}p_{t_{\alpha-1}s}^{-1})(q_{i_{\alpha}j}^{-1}p_{t_{\alpha}s}^{-1}) \cdots (q_{i_{\mu}j}^{-1}p_{t_{\mu}s}^{-1}) = c^{\alpha-1}q_{Ij}^{-1}p_{Ts}^{-1}.$$

Отсюда

$$r_{I \setminus i_k, j}^{T \setminus t_1, s} = c^{\alpha-2}q_{I \setminus i_k, j}^{-1}p_{T \setminus t_1, s}^{-1}.$$

Так как $i_k < j$, $t_1 < t_{\alpha} = s$, то $r_{i_k j}^{t_1 s} = cq_{i_k j}^{-1}p_{t_1 s}^{-1}$. Поэтому:

$$r_{I \setminus i_k, j}^{T \setminus t_1, s} r_{i_k j}^{t_1 s} = c^{\alpha-1}q_{Ij}^{-1}p_{Ts}^{-1}.$$

Тогда, продолжая прерванные выкладки, получим:

$$D_I^T a_j^s = r_{Ij}^{Ts} D_I^T a_j^s + (p_{t_1 s}^{-1} - q_{t_1 s}) \left(\sum_{k=1}^{\mu} r_{I \setminus i_k, j}^{T \setminus t_1, s} r_{j, I \setminus i_k}^{t_1, T \setminus t_1} a_{i_k}^s A_{i_k}^{t_1} \right) a_j^{t_1}.$$

Покажем, что множитель $r_{I \setminus i_k, j}^{T \setminus t_1, s} r_{j, I \setminus i_k}^{t_1, T \setminus t_1}$ не зависит от k . Действительно,

$$r_{I \setminus i_k, j}^{T \setminus t_1, s} r_{j, I \setminus i_k}^{t_1, T \setminus t_1} = (c^{\alpha-2}q_{I \setminus i_k, j}^{-1}p_{T \setminus t_1, s}^{-1})(q_{j, I \setminus i_k}^{-1}p_{t_1, T \setminus t_1}^{-1}) = c^{\alpha-2}p_{T \setminus t_1, s}^{-1}p_{t_1, T \setminus t_1}^{-1}.$$

Внесем его за скобки. Оставшаяся сумма $\sum a_i^s A_{i_k}^{t_1}$ будет равна нулю как квантовый аналог разложения по чужому столбцу. Окончательно, $D_I^T a_j^s = r_{Ij}^{Ts} a_j^s D_I^T$, что и требовалось.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.21. Положим $r_{IJ}^{TS} = \prod_{\beta=1}^{\nu} r_{Ij_{\beta}}^{Ts_{\beta}} = \prod_{\alpha, \beta=1}^{\mu, \nu} r_{i_{\alpha}j_{\beta}}^{ts_{\beta}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.22. Пусть мультииндексы I, J, T, S удовлетворяют одному из условий: $I \prec J$, $T \prec S$ или $I \succ J$, $T \succ S$. Тогда

$$D_I^T D_J^S = r_{IJ}^{TS} D_J^S D_I^T.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $(r_{IJ}^{TS})^{-1} = r_{JI}^{ST}$, то предложение достаточно доказать для первого случая. Из доказанных выше лемм легко вытекает, что $D_I^T a_j^s = r_{Ij}^{Ts} a_j^s D_I^T$ для любых $j \in J$, $s \in S$. Поэтому для каждого монома, входящего в минор D_J^S справедливо:

$$D_I^T a_{j_1}^{s_{\sigma(1)}} \cdots a_{j_{\nu}}^{s_{\sigma(\nu)}} = R_{\sigma} a_{j_1}^{s_{\sigma(1)}} \cdots a_{j_{\nu}}^{s_{\sigma(\nu)}} D_I^T,$$

где $R_{\sigma} = r_{Ij_1}^{Ts_{\sigma(1)}} \cdots r_{Ij_{\nu}}^{Ts_{\sigma(\nu)}}$, σ — некоторая подстановка. Нам достаточно показать, что R_{σ} не зависит от σ и совпадает с r_{IJ}^{TS} . Отметим, что

- (1) так как $I \prec J$, то для любого j из J либо $j \in I$, либо $I < j$;
- (2) так как $T \succ S$, то для любого s из S либо $s \in T$, либо $T > s$.

Обозначим $\langle I, j \rangle = \#\{i \in I \mid i > j\}$, $\langle s, T \rangle = \#\{t \in T \mid t < s\}$. Тогда для индексов $j \in J$, $s \in S$ коэффициент r_{Ij}^{Ts} равен $k_{Ij}^{Ts} q_{Ij}^{-1} p_{Ts}^{-1}$, где

$$k_{Ij}^{Ts} = \begin{cases} 1, & \text{если } I < j, T > s \\ c^{-\langle I, j \rangle}, & \text{если } j \in I, T > s \\ c^{\langle s, T \rangle}, & \text{если } I < j, s \in T \\ c^{\langle I, j \rangle + \langle s, T \rangle}, & \text{если } j \in I, s \in T \end{cases} = c^{\langle I, j \rangle + \langle s, T \rangle}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} R_\sigma &= \prod_{\alpha=1}^{\nu} r_{Ij_\alpha}^{Ts_{\sigma(\alpha)}} = \prod_{\alpha=1}^{\nu} (c^{\langle I, j_\alpha \rangle + \langle s_{\sigma(\alpha)}, T \rangle} q_{Ij_\alpha}^{-1} p_{Ts_{\sigma(\alpha)}}^{-1}) \\ &= \left(\prod_{j \in J} c^{-\langle I, j \rangle} \right) \cdot \left(\prod_{s \in S} c^{\langle s, T \rangle} \right) q_{Ij}^{-1} p_{Ts}^{-1}. \end{aligned}$$

Следовательно, R_σ не зависит от σ . Полагая $\sigma = 1$, получаем:

$$R_\sigma = R_1 = \prod_{\alpha=1}^{\nu} r_{Ij_\alpha}^{Ts_\alpha} = r_{IJ}^{TS}.$$

Предложение 1.22 позволяет перейти к построению в алгебре $M(m, n)$ системы попарно почти перестановочных элементов. Затем мы докажем, что они порождают тело частных $F(m, n)$.

Обозначим $[i]$ отрезок натурального ряда от 1 до i , и пусть $[i]_t$ означает разность $[i] \setminus [i - \min(i, t)]$. Заметим, что

$$[i]_t = \begin{cases} [i], & \text{если } i \leq t, \\ [i] \setminus [i - t], & \text{если } i \geq t; \end{cases}$$

длина отрезка $[i]_t$ равна $\min(m, n)$, и его правый конец совпадает с i . Обозначим через Y_i^t квантовый минор $D_{[i]_t}^{[t]_i}$ и через $N(m, n)$ — подалгебру в $M(m, n)$, порожденную элементами $\{Y_i^t\}_{i,t=1}^{m,n}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.23.

(1) *Имеют место следующие соотношения между образующими $N(m, n)$:*

$$Y_i^t Y_j^s = r_{IJ}^{TS} Y_j^s Y_i^t, \quad \text{где } I = [i]_t, \quad T = [t]_i, \quad J = [j]_s, \quad S = [s]_j.$$

(2) *Тела частных алгебр $M(m, n)$ и $N(m, n)$ совпадают:*

$$\text{Fract } N(m, n) = \text{Fract } M(m, n) = F(m, n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Покажем, что элементы Y_i^t, Y_j^s удовлетворяют условиям предложения 1.22. Принципиальное значение имеют два варианта.

- (а) Если $I = [i], J = [j]$, то справедливы оба отношения $I \prec J, J \prec I$. В этом случае любое из неравенств $T \prec S$ или $T \succ S$ позволяет применить предложение 1.22.
- (б) Если же, например, $I = [i], J = [j] \setminus [j-s], T = [t] \setminus [t-s], S = [s]$, то $I \prec J, T \succ S$, что опять-таки позволяет применить предложение 1.22.

Все остальные варианты получаются из рассмотренных формальным переобозначением индексов.

(2) Алгебра $M(m, n)$ содержит семейство подалгебр $\{M_i^t\}_{i,t=1}^{m,n}$ (см. доказательство леммы 1.1). Подалгебры M_i^t упорядочены по включению. Предыдущую подалгебру для M_i^t обозначим $'M_i^t$, и пусть $N_i^t = M_i^t \cap N(m, n), 'N_i^t = 'M_i^t \cap N(m, n)$. Будем доказывать равенство $\text{Fract } N_i^t = \text{Fract } M_i^t$ индукцией по порядку M_i^t в фильтрации.

Если $M_i^t = M_1^1$, то $N_1^1 = M_1^1 = \mathbb{K}[a_1^1]$. Следовательно, $\text{Fract } N_1^1 = \text{Fract } M_1^1$. Докажем совпадение тел частных алгебр N_i^t и M_i^t в предположении, что это уже доказано для всех предыдущих подалгебр. Разложим Y_i^t по последней строке. Элемент в правом нижнем углу минора Y_i^t равен a_i^t . Поэтому $Y_i^t = a_i^t A_i^t + A'$, где A_i^t – алгебраическое дополнение элемента a_i^t в миноре Y_i^t , A' – сумма остальных элементов строки. Отсюда $a_i^t = (Y_i^t - A')(A_i^t)^{-1}$. Заметим, что $A_i^t, A' \in 'M_i^t$. Так как по предположению индукции

$$\text{Fract } 'M_i^t = \text{Fract } 'N_i^t,$$

то $A_i^t, A' \in 'N_i^t$, и, поэтому, $a_i^t \in \text{Fract } N_i^t$. Алгебра M_i^t порождена a_i^t и $'M_i^t$. Следовательно, $\text{Fract } N_i^t = \text{Fract } M_i^t$. Предложение доказано.

ТЕОРЕМА 1.24. *Тела $F(m, n)$ и $K(m, n)$ изоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим систему элементов $\{y_i^t\}_{i,t=1}^{m,n}$ в алгебре $A(m, n)$. По определению, $y_i^t = x_i^{t-i+1} \cdots x_i^t$ для $i \leq t$ и $y_i^t = x_{i-t+1}^1 \cdots x_i^t$ для $i \geq t$. Обозначим $'A(m, n)$ подалгебру, порожденную элементами $\{y_i^t\}_{i,t=1}^{m,n}$. Заметим, что $y_i^t = y_{i-1}^{t-1} x_i^t$. Отсюда $x_i^t = (y_{i-1}^{t-1})^{-1} y_i^t$, и, следовательно,

$$\text{Fract } 'A(m, n) = \text{Fract } A(m, n) = K(m, n).$$

Элементы $\{y_i^t\}$ почти перестановочны: $y_i^t y_j^s = r_{IJ}^{TS} y_j^s y_i^t$, где $I = [i]_t, T = [t]_i, J = [j]_s, S = [s]_j$. Соответствие $y_i^t \rightarrow Y_i^t$ продолжается до изоморфизма алгебр $A(m, n)$ на $N(m, n)$ и дальше, до изоморфизма тел $\text{Fract } A(m, n) = K(m, n)$ на $\text{Fract } N(m, n) = F(m, n)$. Теорема доказана.

§ 2. Центр тела $F(m, n)$

Цель этого параграфа – дать описание центра тела $F(m, n)$ (в частности, будет описан центр тела $F(n)$). Нам понадобятся некоторые сведения о структуре центра тел скрученных рациональных функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Рассмотрим алгебру скрученных многочленов $A(R)$, определенную во введении. Через $K(R)$ обозначим тело частных алгебры $A(R)$ и через $C(R)$ – центр тела $K(R)$.

Каждый элемент a из $A(R)$ можно записать в виде суммы $a = a_1 + \dots + a_k$, где $a_i = \alpha_i x_1^{l_1(i)} \dots x_n^{l_n(i)}$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$ и $l_1(i), \dots, l_n(i)$ – натуральные числа. Мономы можно сравнивать в смысле лексикографического порядка наборов их степеней $(l_1(i), \dots, l_n(i))$. Обозначим $\langle a \rangle$ старший член разложения a и сумму мономов. Если $\langle a \rangle = \alpha x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n}$, то набор $l = (l_1, \dots, l_n)$ будем называть степенью элемента a и обозначать $l = \deg a$. Заметим, что $\langle ab \rangle = \langle a \rangle \langle b \rangle$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2 [6, Определение 2.9]. Пусть $c = b^{-1}a \in C(R)$. Элемент $\langle c \rangle = \langle b \rangle^{-1} \langle a \rangle$ будем называть *старшим членом* элемента c .

ЛЕММА 2.3. *Старший член $\langle c \rangle$ не зависит от представления элемента в виде произведения $c = b^{-1}a$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Если $c = b^{-1}a = a_1 b_1^{-1}$, то $ab_1 = ba_1$. Тогда $\langle ab_1 \rangle = \langle ba_1 \rangle$. Отсюда $\langle a \rangle \langle b_1 \rangle = \langle b \rangle \langle a_1 \rangle$, и, следовательно, $\langle b \rangle^{-1} \langle a \rangle = \langle a_1 \rangle \langle b_1 \rangle^{-1}$.

(2) Если $c = b^{-1}a = b_2^{-1}a_2$, то $\langle b \rangle^{-1} \langle a \rangle = \langle b_2 \rangle^{-1} \langle a_2 \rangle$. Тогда, согласно предыдущему пункту, $\langle b_2 \rangle^{-1} \langle a_2 \rangle = \langle a_1 \rangle \langle b_1 \rangle^{-1}$. Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Центр $C(R)$ порождается мономами $x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n}$ такими, что $\gamma_i \in \mathbb{Z}$, и $q_{i1}^{\gamma_1} \dots q_{in}^{\gamma_n} = 1$ для любого i .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Разобьем доказательство на несколько шагов. Покажем сначала, что если $c \in C(R)$, то и $\langle c \rangle \in C(R)$.

Пусть $c = b^{-1}a \in C(R)$, $a, b \in A(R)$. Представим a и b в виде сумм мономов $a = a_1 + \dots + a_k$, $b = b_1 + \dots + b_l$, и пусть $\langle a \rangle = a_1$, $\langle b \rangle = b_1$. Любые два монома почти перестановочны. В частности, существуют ненулевые числа α_{ij} , β_{ij} , ξ_{ij} такие, что $x_i a_j = \alpha_{ij} a_j x_i$; $x_i b_j = \beta_{ij} b_j x_i$; $b_i a_j = \xi_{ij} a_j b_i$. Так как $b^{-1}a \in C(R)$, то он перестановочен со всеми образующими $x_1, \dots, x_n$. Тогда

$$(x_i b x_i^{-1})^{-1} (x_i a x_i^{-1}) = b^{-1} a,$$

откуда

$$(\beta_{i1} b_1 + \dots + \beta_{il} b_l)^{-1} (\alpha_{i1} a_1 + \dots + \alpha_{ik} a_k) = (b_1 + \dots + b_l)^{-1} (a_1 + \dots + a_k).$$

Согласно лемме 2.3, из этого равенства следует равенство старших членов: $(\beta_{ij} b_1)^{-1} (\alpha_{ij} a_1) = b_1^{-1} a_1$. Следовательно, $\beta_{i1} = \alpha_{i1}$ для любого i . Это равносильно тому, что $b_1^{-1} a_1 \in C(R)$.

(2) Покажем теперь, что $C(R)$ порождается мономами. Переставим мономы $a_2, \dots, a_k$; $b_2, \dots, b_l$ в суммах $a = a_1 + \dots + a_k$, $b = b_1 + \dots + b_l$ так, чтобы выполнялось $\alpha_{i1} = \dots = \alpha_{is} = \beta_{i1} = \dots = \beta_{it}$ для любых i . Предположим, что эта цепочка не может быть продолжена никакими из чисел $\alpha_{i,s+1}, \dots, \alpha_{ik}$; $\beta_{i,t+1}, \dots, \beta_{il}$. Так как $\alpha_{is} = \dots = \alpha_{is}$ для любого i , то и $\xi_{i1} = \dots = \xi_{is}$ для любого i . Обозначим $\xi_i = \xi_{i1} = \dots = \xi_{is}$. Тогда

$$(b_1 + \dots + b_l) a_j = a_j (\xi_1 b_1 + \dots + \xi_t b_t) \quad \text{для } i \leq j \leq s.$$

Рассмотрим в $K(R)$ два элемента $g = (b_1 + \dots + b_t)^{-1} b^{-1} a (\xi_1 b_1 + \dots + \xi_t b_t)$, $h = (b_1 + \dots + b_t)^{-1} b^{-1} a (a_1 + \dots + a_s)$. Элемент $g \in C(R)$, так как

$$g = [(b_1 + \dots + b_t)^{-1} b^{-1} a (b_1 + \dots + b_t)] [(b_1 + \dots + b_t)^{-1} (\xi_1 b_1 + \dots + \xi_t b_t)],$$

и оба элемента в квадратных скобках лежат в $C(R)$. Элемент h лежит в $C(R)$, поскольку он перестановочен со всеми образующими $x_1, \dots, x_n$. Разность $g - h$ также принадлежит $C(R)$ и

$$\begin{aligned} g - h &= (b_1 + \dots + b_t)^{-1} b^{-1} a (\xi_1 b_1 + \dots + \xi_t b_t) \\ &\quad - (b_1 + \dots + b_t)^{-1} b^{-1} a (a_1 + \dots + a_s) \\ &= (b_1 + \dots + b_t)^{-1} (b_1 + \dots + b_l)^{-1} [(a_1 + \dots + a_k) (\xi_1 b_1 + \dots + \xi_t b_t) \\ &\quad - (b_1 + \dots + b_l) (a_1 + \dots + a_s)] \\ &= (b_1^2 + \dots + b_l b_t)^{-1} [(a_1 + \dots + a_k) (\xi_1 b_1 + \dots + \xi_t b_t) \\ &\quad - (a_1 + \dots + a_s) (\xi_1 b_1 + \dots + \xi_t b_l)] \\ &= (b_1^2 + \dots + b_l b_t)^{-1} [(a_{s+1} + \dots + a_k) (\xi_1 b_1 + \dots + \xi_t b_t) \\ &\quad - (a_1 + \dots + a_s) (\xi_{t+1} b_{t+1} + \dots + \xi_l b_l)]. \end{aligned}$$

Нами уже показано, что если элемент принадлежит центру, то его старший член также принадлежит центру. Поэтому $\langle g - h \rangle \in C(R)$. Старший член имеет вид $\langle g - h \rangle = \gamma b_1^{-2} a_\mu b_\nu$, где $\gamma \in \mathbb{K}$, а μ, ν удовлетворяют одному из условий: $s + 1 \leq \mu \leq k$, $1 \leq \nu \leq t$ или $1 \leq \mu \leq s$, $t + 1 \leq \nu \leq l$. Заметим, что $\langle g - h \rangle = \gamma \xi_{1\mu}^{-1} (b_1^{-1} a_\mu) (b_1^{-1} b_\nu)$.

В случае $s + 1 \leq \mu \leq k$, $1 \leq \nu \leq t$ элемент $b_1^{-1} a_\nu \in C(R)$, и, следовательно, $b_1^{-1} a_\mu \in C(R)$. Поэтому $\beta_{i1} = \beta_{i\mu}$ для любого i . Это противоречит выбору числа s . В случае $1 \leq \mu \leq s$, $t + 1 \leq \nu \leq l$ элемент $b_1^{-1} a_\mu \in C(R)$, и, следовательно, $b_1^{-1} a_\nu \in C(R)$. Поэтому $\beta_{i1} = \beta_{i\nu}$ для любого i . Это противоречит выбору числа t .

В любом случае получаем противоречие. Следовательно, $s = k$, $t = l$. В этом случае все мономы $b_1^{-1} a_1, \dots, b_1^{-1} a_k, b_1^{-1} b_2, \dots, b_1^{-1} b_l$ лежат в $C(R)$ и

$$\begin{aligned} c &= b^{-1} a = (b_1 + \dots + b_l)^{-1} (a_1 + \dots + a_k) \\ &= (1 + b_1^{-1} b_2 + \dots + b_1^{-1} b_l)^{-1} (b_1^{-1} a_1 + \dots + b_1^{-1} a_k). \end{aligned}$$

(3) Осталось выяснить, при каких условиях моном $x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n}$ лежит в центре. Из равенства

$$x_i \cdot x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n} = \left(\prod_{j=1}^n r_{ij}^{\gamma_j} \right) x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n} \cdot x_i$$

получаем утверждение теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 2.5. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $r_{ij} = q^{s_{ij}}$, $s_{ij} \in \mathbb{C}$ и q — не корень из 1. Тогда, если $\det S \neq 0$, то центр тела $K(R)$ скалярен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поле $C(R)$ порождается мономами вида $x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n}$, $\gamma_i \in \mathbb{Z}$. Элемент $x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n}$ принадлежит центру тогда и только тогда, когда

$$q^{\sum_{j=1}^n s_{ij} \gamma_j} = 1.$$

По условию, q не есть корень из 1. Следовательно, $\sum_{j=1}^n s_{ij} \gamma_j = 0$. Так как $\det S \neq 0$, то $\gamma_1 = \dots = \gamma_n = 0$, и центр скалярен.

Перейдем теперь к задаче нахождения центра тела $K(m, n)$. Нам понадобятся следующие обозначения.

ОБОЗНАЧЕНИЯ 2.6. Положим

- (1) $\Delta_1 = Y_m^1, \dots, \Delta_n = Y_m^n, \Delta_{n+1} = Y_{m-1}^n, \dots, \Delta_{n+m-1} = Y_1^n,$
- (2) $d_1 = y_m^1, \dots, d_n = y_m^n, d_{n+1} = y_{m-1}^n, \dots, d_{n+m-1} = y_1^n.$

Здесь Y_i^j из обозначений предложения 1.23, y_i^j из обозначений теоремы 1.24.

ЗАМЕЧАНИЕ. Элементы Y_i^j переходят в y_i^j при изоморфизме $F(m, n)$ на $K(m, n)$.

Тело $K(m, n)$ является телом скрученных рациональных функций. Центр этого тела порождается мономами. Пусть $z = \prod_{i,t=1}^{m,n} (x_i^t)^{\alpha_{it}}$, где $\alpha_{it} \in \mathbb{Z}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. Пусть c не корень из 1. Тогда если z принадлежит центру тела $K(m, n)$, то $\alpha_{it} = \alpha_{i+1,t+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$\Omega(i, j) = \sum_{j < \mu, s < \nu} \alpha_{\mu, \nu} - \sum_{j > \mu, s > \nu} \alpha_{\mu, \nu};$$

$A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$; $A_1, \dots, A_n$ — суммы элементов столбцов матрицы A ; $B_1, \dots, B_n$ — суммы элементов строк матрицы A . Из соотношений между образующими в алгебре $A(m, n)$ получаем:

$$x_j^s z = p_{j1}^{-A_1} \dots p_{jn}^{-A_n} \cdot q_{s1}^{-B_1} \dots p_{sm}^{-B_m} \cdot c^{\Omega(j,s)} \cdot z x_j^s.$$

Обозначим $P_j = p_{j1}^{-A_1} \dots p_{jn}^{-A_n}$; $Q_s = q_{s1}^{-B_1} \dots p_{sm}^{-B_m}$. Тогда, так как z лежит в центре $K(m, n)$, то

$$P_j Q_s = c^{-\Omega(j,s)}. \quad (2.1)$$

Определитель $\begin{vmatrix} P_j Q_s & P_j Q_{s+1} \\ P_{j+1} Q_s & P_{j+1} Q_{s+1} \end{vmatrix}$ равен нулю. Заменяя элементы определителя по формулам (2.1), получим:

$$0 = \begin{vmatrix} c^{-\Omega(j,s)} & c^{-\Omega(j,s+1)} \\ c^{-\Omega(j+1,s)} & c^{-\Omega(j+1,s+1)} \end{vmatrix} = c^{-\Omega(j,s)-\Omega(j+1,s+1)} - c^{-\Omega(j,s+1)-\Omega(j+1,s)}.$$

Отсюда

$$c^{\Omega(j+1,s)+\Omega(j+1,s+1)-\Omega(j,s+1)-\Omega(j+1,s)} = 1.$$

Показатель степени $\Omega(j+1, s) + \Omega(j+1, s+1) - \Omega(j, s+1) - \Omega(j+1, s)$ равен $\alpha_{js} - \alpha_{j+1,s+1}$. Следовательно, $c^{\alpha_{js}-\alpha_{j+1,s+1}} = 1$. Так как c не корень из 1, то $\alpha_{js} = \alpha_{j+1,s+1}$.

Обозначим

- (1) Λ_k — множество пар (i, t) таких, что $t - i = k - m, 0 \leq k \leq m + n - 1$;
- (2) $\rho_j^s(k) = \prod_{(i,t) \in \Lambda_k} r_{ij}^{ts}.$

ЗАМЕЧАНИЕ. В этих обозначениях $d_k = \prod_{(i,t) \in \Lambda_k} x_i^t$.

ТЕОРЕМА 2.8. Пусть c не корень из 1. Тогда центр тела $F(m, n)$ порождается элементами $\Delta_1^{\alpha_1} \dots \Delta_{m+n-1}^{\alpha_{m+n-1}}$, где $(\alpha_1, \dots, \alpha_{m+n-1})$ — целочисленное решение системы

$$\prod_{k=1}^{m+n-1} (\rho_j^s(k))^{\alpha_k} = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тело $F(m, n)$ изоморфно $K(m, n)$. Из предложения 2.7 центр тела $K(m, n)$ порождается мономами $d_1^{\alpha_1} \dots d_{m+n-1}^{\alpha_{m+n-1}}$. С другой стороны,

$$x_j^s d_k = \rho_j^s(k) d_k x_j^s.$$

Отсюда

$$x_j^s d_1^{\alpha_1} \dots d_{m+n-1}^{\alpha_{m+n-1}} = \prod_{k=1}^{m+n-1} (\rho_j^s(k))^{\alpha_k} d_1^{\alpha_1} \dots d_{m+n-1}^{\alpha_{m+n-1}} x_j^s,$$

что доказывает теорему.

СЛЕДСТВИЕ 2.9. Пусть выполняются следующие условия: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $q \in \mathbb{C}$, q — не корень из 1; $q_{ij} = q^{\alpha_{ij}}$, $p_{ij} = q^{\beta_{ij}}$, $c = q^\gamma$, $\gamma \in \mathbb{C}$; $(\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$, $(\beta_{ij})_{i,j=1}^n$ — кососимметричные $\mathbb{C}$ -матрицы, $\alpha_{ij} + \beta_{ji} = \text{sgn}(j - i)$. Тогда

- (1) существует число $\xi_j^s(k) \in \mathbb{C}$ такое, что $\rho_j^s(k) = q^{\xi_j^s(k)}$;
- (2) центр тела частных $F(m, n)$ порождается мономами $\Delta_1^{\alpha_1} \dots \Delta_{m+n-1}^{\alpha_{m+n-1}}$, где $(\alpha_1, \dots, \alpha_{m+n-1})$ — целочисленное решение системы линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{m+n-1} \xi_j^s(k) \alpha_k = 0, \quad j \in [1, m], s \in [1, n].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия, наложенные на α_{ij} , β_{ij} , гарантируют выполнение соотношений (1.1). Остальное непосредственно вытекает из только что доказанной теоремы.

Наша следующая цель — доказать скалярность центра в общей точке.

ОБОЗНАЧЕНИЯ 2.10.

- (1) Пусть $\mathcal{X} = (\chi_{ij})_{i,j=1}^m$ — матрица с элементами $\chi_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \leq j; \\ 0, & \text{если } i > j. \end{cases}$
- (2) $\overline{\mathcal{X}} = (\overline{\chi}_{ij})_{i,j=1}^m$ — матрица с элементами $\overline{\chi}_{ij} = 1 - \chi_{ij}$.
- (3) $\mathcal{S} = (\text{sgn}(j - i))_{i,j=1}^m$.
- (4) $\mathcal{T} = (\tau_{ij}^{ts})_{1 \leq i, j \leq m, 1 \leq t, s \leq n}$ — матрица с элементами $\tau_{ij}^{ts} = \chi_{ij} \chi_{ts} - \chi_{ji} \chi_{st}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Элемент τ_{ij}^{ts} равен 1, если $i < j$, $t < s$; равен -1 , если $i > j$, $t > s$, и равен 0 в остальных случаях. Матрицу $\mathcal{T}$ можно рассматривать как блочную матрицу $\mathcal{T} = (T^{ts})_{t,s=1}^n$ с блоками T^{ts} размера $m \times m$. Каждый блок совпадает с $\mathcal{X}$, если $t < s$, и совпадает с $-\mathcal{X}^T$, если $t > s$; и $X^{tt} = 0$.

ТЕОРЕМА 2.11. Пусть выполняются условия следствия 2.9. Тогда, если n чётно, то центр тела $F(m, n)$ скалярен для чисел $\{\alpha_{ij}\}$, $\{\beta_{ij}\}$, γ общего вида.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что тело $F(m, n)$ изоморфно $K(m, n)$. Образующие $K(m, n)$ связаны соотношениями $x_i^t x_j^s = r_{ij}^{ts} x_j^s x_i^t$. В нашем случае

$$r_{ij}^{ts} = \begin{cases} q^{\gamma - \alpha_{ij} - \beta_{ts}} & \text{для } i < j, t < s; \\ q^{-\gamma - \alpha_{ij} - \beta_{ts}} & \text{для } i > j, t > s; \\ q^{\alpha_{ij} - \beta_{ts}} & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Построим матрицу $\Phi = (\varphi_{ij}^{ts})_{1 \leq i, j \leq m, 1 \leq t, s \leq n}$, компонентами которой служат элементы, удовлетворяющие условию $r_{ij}^{ts} = q^{\varphi_{ij}^{ts}}$. В обозначениях (2.10) компоненты φ_{ij}^{ts} выражаются так:

$$\begin{aligned}\varphi_{ij}^{ts} &= \gamma \tau_{ij}^{ts} - \alpha_{ij} - \beta_{ts} = \gamma \tau_{ij}^{ts} - \alpha_{ij} + (\alpha_{ts} - \gamma \operatorname{sgn}(s - t)) \\ &= \gamma(\tau_{ij}^{ts} - \operatorname{sgn}(s - t)) - \alpha_{ij} + \alpha_{ts}.\end{aligned}$$

Обозначим $\Psi = (\psi_{ij}^{ts})_{1 \leq i, j \leq m, 1 \leq t, s \leq n}$ матрицу с элементами $\psi_{ij}^{ts} = \tau_{ij}^{ts} - \operatorname{sgn}(s - t)$. Через $\tilde{A}$ обозначим матрицу $(\tilde{\alpha}_{ij}^{ts})_{1 \leq i, j \leq m, 1 \leq t, s \leq n}$ с компонентами $\tilde{\alpha}_{ij}^{ts} = \alpha_{ij} - \alpha_{ts}$. Тогда $\varphi_{ij}^{ts} = \gamma \psi_{ij}^{ts} - \tilde{\alpha}_{ij}^{ts}$. Отсюда $\Phi = \gamma \Psi - \tilde{A}$. Непосредственное вычисление показывает, что $\det \Psi \neq 0$ для четного n . С другой стороны,

$$\det \Phi = |\gamma \Psi - \tilde{A}| = |\Psi| |\gamma - \tilde{A} \Psi^{-1}|.$$

Если γ не собственное значение матрицы $\tilde{A} \Psi^{-1}$, то $\det \Phi \neq 0$. Отсюда, по доказанному выше, центр тела $F(m, n)$ скалярен.

СЛЕДСТВИЕ 2.12. *Для четного n центр тела $F(n)$ скалярен для чисел $\{\alpha_{ij}\}$, $\{\beta_{ij}\}$, γ общего вида.*

Следующая теорема дает описание центра в случае однопараметрического квантования Дринфельда–Джимбо.

ТЕОРЕМА 2.13. *Пусть $l = (m, n)$ – наибольший общий делитель чисел m и n , $m = m_1 l$, $n = n_1 l$. Предположим, что q общего вида (q – переменная или $q \in \mathbb{K}^*$, q не корень из 1). Тогда*

- (1) *центр $F(m, n)$ скалярен, если хотя бы одно из чисел m_1 или n_1 четно;*
- (2) *если же оба числа m_1, n_1 нечетны, то центр тела $F(m, n)$ является чисто трансцендентным расширением поля $\mathbb{K}$ степени l ; в качестве образующих можно взять элементы $z_0, \dots, z_{l-1}$, где*

$$z_k = \prod_{t=0}^{m_1+n_1-1} \Delta_{k+lt}^{\varepsilon(t)}, \quad \varepsilon(t) - \text{вычет } t \text{ по mod } 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Заметим, что в случае однопараметрического квантования $\alpha_{ij} = \beta_{ij} = \operatorname{sgn}(j - i)$, $\gamma = 2$. Так же, как и в предыдущей теореме, введем матрицу $\Phi = (\varphi_{ij}^{ts})$, где $r_{ij}^{ts} = q^{\varphi_{ij}^{ts}}$. В нашем случае

$$\varphi_{ij}^{ts} = 2(\tau_{ij}^{ts} - \operatorname{sgn}(s - t)) - \operatorname{sgn}(j - i) + \operatorname{sgn}(s_t) = 2\tau_{ij}^{ts} - \operatorname{sgn}(j - i) - \operatorname{sgn}(s - t).$$

Матрица Φ является блочной матрицей $\Phi = \{\Phi^{st}\}_{s,t=1}^n$ с блоками $\Phi^{tt} = \mathcal{S}_m$, $\Phi^{ts} = -E_m$ для $t < s$ и $\Phi^{ts} = E_m$ для $t > s$. Здесь E_m – единичная $m \times m$ -матрица. Непосредственное вычисление показывает, что характеристический многочлен матрицы $\mathcal{S}_n$ равен $D_n = \frac{1}{2}[(\lambda - 1)^2 + (\lambda + 1)^2]$. Многочлен D_n имеет n различных корней, которые получаются из корней n -й степени из -1 преобразованием $\lambda' = (\lambda + 1)/(\lambda - 1)$. Матрица $\mathcal{S}_n - \lambda E_n$ элементарными преобразованиями λ -матриц приводится к виду $\operatorname{diag}(1, \dots, 1, D_n(\lambda))$. Матрица Φ получается

Вычитая из каждого уравнения последующее и заменяя последнее уравнение на равносильное ему уравнение $\alpha_0 + \alpha_n = 0$, получим:

$$\begin{cases} \alpha_{m-1} + \alpha_{m+n-1} = 0, \\ \alpha_0 + \alpha_n = 0. \end{cases}$$

То есть

$$\alpha_i + \alpha_{i+n} = 0 \quad \text{для} \quad 0 \leq i \leq m-1. \quad (2.3)$$

Элемент лежит в центре тогда и только тогда, когда он коммутирует со всеми образующими. Поэтому, выполнение (2.2), (2.3) равносильно центральности z .

с) Наконец, z коммутирует с x_1^1 , когда выполнено:

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_{m-1} + \alpha_{m+1} + \cdots + \alpha_n = 0.$$

Из условия $\sum_{i=1}^{m+n-1} \alpha_i = 0$ получаем $\alpha_0 + \alpha_m = 0$. Таким образом, для $t = 0$ также выполняется (2.2).

Продолжим последовательность чисел $\{\alpha_i\}_{i=0}^{m+n-1}$ на $\mathbb{Z}$ так, чтобы $\alpha_k = \alpha_r$, если $k \equiv r \pmod{m+n}$. Покажем, что продолженная последовательность удовлетворяет условиям (2.2), (2.3) для любых i и t . Пусть $\alpha_k = \alpha_r$, если $k \equiv r \pmod{m+n}$, $r \in [0, m+n-1]$. Тогда $k+n \equiv r+n \pmod{m+n}$. Если $r < m$, то $0 \leq r+n < m+n$ и $\alpha_k = \alpha_r$, $\alpha_{k+n} = \alpha_{r+n}$. Из $\alpha_r + \alpha_{r+n} = 0$ следует $\alpha_k + \alpha_{k+n} = 0$. Если $r \geq m$, то $k+n \equiv r+n \equiv r-m \pmod{m+n}$. Тогда $\alpha_k = \alpha_r$, $\alpha_{k+n} = \alpha_{r-m}$. Из $\alpha_{r-m} + \alpha_r = 0$ получаем $\alpha_k + \alpha_{k+n} = 0$, что доказывает выполнение (2.3) для любого целого k . Аналогично доказывается выполнение (2.2) для любого целого t .

Так как числа m_1, n_1 нечетны, то система

$$\begin{cases} \alpha_k + \alpha_{k+n} = 0, \\ \alpha_t + \alpha_{t+m} = 0, \end{cases} \quad k, t \in \mathbb{Z},$$

равносильна тому, что для любого целого j выполнено $\alpha_j + \alpha_{j+l} = 0$. Поэтому

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha_0 & = -\alpha_l & = \cdots = -\alpha_{(m_1+n_1-1)l}, \\ \alpha_1 & = -\alpha_{l+1} & = \cdots = -\alpha_{1+(m_1+n_1-1)l}, \\ & \dots\dots\dots & \\ \alpha_{l-1} & = -\alpha_{2l-1} & = \cdots = -\alpha_{m+n-1}. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Система (2.4) допускает фундаментальную систему решений $f_0, \dots, f_{l-1}$, где $f_k = (\alpha_1^{(k)}, \dots, \alpha_{m+n-1}^{(k)})$ – это вектор с компонентами

$$1 = \alpha_k^{(k)} = -\alpha_{k+l}^{(k)} = \dots = (-1)^{m_1+n_1-1} \alpha_{k+(m_1+n_1-1)l}^{(k)},$$

$$\alpha_i^{(k)} = 0 \text{ для остальных } i.$$

Мономы, построенные по этим фундаментальным решениям, совпадают с $z_0, \dots, z_{l-1}$ и являются системой образующих центра тела $F(m, n)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.14 [5], [6]. В случае однопараметрического квантования для общего q центр тела $F(n)$ является чисто трансцендентным расширением поля $\mathbb{K}$ степени n . В качестве системы образующих можно взять систему элементов

$$\Delta_0 \Delta_n^{-1} = (\text{Det}_q)^{-1}, \Delta_1 \Delta_{n+1}^{-1}, \dots, \Delta_{n-1} \Delta_{2n-1}^{-1}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.15. Пусть $R = (r_{ij})_{i,j=1}^n$, $r_{ij} = q^{\text{sgn}(j-i)}$, $q \in \mathbb{K}^*$, q общего вида. Тогда

- (1) алгебра скрученных многочленов $A(R)$ изоморфна алгебре $M(1, n)$, и, соответственно, изоморфны их тела частных;
- (2) центр тела $K(R)$ скалярен для четного n . Для нечетного $n = 2k + 1$ центр порождается единственным элементом $x_1 x_2^{-1} x_3 \cdots x_{2k}^{-1} x_{2k+1}$.

§3. Тело рациональных функций на квантовой борелевской подгруппе

В этом параграфе мы перенесем полученные результаты на тело рациональных функций на квантовой борелевской подгруппе группы $GL_{P,Q,c}(n)$. Рассмотрим в алгебре $M(n)$ идеал, порожденный элементами a_i^t , $i < t$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Алгеброй регулярных функций $\mathfrak{B}(n)$ на квантовой борелевской подгруппе будем называть локализацию фактор-алгебры $M(n)/I$ по мультипликативному подмножеству, порожденному определителем.

Аналогично лемме 1.3 можно доказать, что $\mathfrak{B}(n)$ является нётеровой алгеброй без делителей нуля и, следовательно, допускает тело частных. Обозначим его $B(n)$. Наша цель – описать тело $B(n)$ и его центр.

Нам понадобятся обозначения из §1: $\Delta_1 = Y_1^n, \dots, \Delta_{n-1} = y_n^{n-1}$. Обозначим, кроме того, главные миноры: $\delta_1 = Y_1^1, \dots, \delta_n = Y_n^n$. Заметим, что δ_n совпадает с квантовым определителем. Сохраним обозначения $\Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}, \delta_1, \dots, \delta_n$ для образов этих элементов в $\mathfrak{B}(n)$ и обозначим $'K(n)$ подполе в $K(n)$, порожденное элементами x_i^t , $i \geq t$.

ТЕОРЕМА 3.2.

- (1) Тело $\mathfrak{B}(n)$ изоморфно подтелу $'K(n)$ в $K(n)$. В частности, $B(n)$ является телом скрученных рациональных функций.
- (2) Если c не корень из 1, то центр $B(n)$ порождается мономами

$$\Delta_1^{\alpha_1} \cdots \Delta_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \delta_1^{\beta_1} \cdots \delta_n^{\beta_n},$$

содержащимися в центре.

- (3) В случае однопараметрического квантования и общего q центр является чисто трансцендентным расширением поля $\mathbb{K}$ степени $[(n-1)/2]$, и в качестве образующих можно взять систему элементов

$$z_0 = \delta_n = \text{Det}_q, \quad z_k = \Delta_k \delta_k \Delta_{n-k}^{-1} \delta_{n-k}^{-1} \quad \text{для} \quad 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

(2) Обозначим образы элементов $\Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}; \delta_1, \dots, \delta_n$ при рассмотренном выше изоморфизме через $D_1, \dots, D_{n-1}; d_1, \dots, d_n$. Тело $B(n)$ является телом скрученных рациональных функций. Следовательно, его центр порождается мономами, (см. предложение 2.4). Пусть

$$z = \prod_{i,t=1}^n (x_i^t)^{\alpha_{it}}, \quad \alpha_{it} \in \mathbb{Z}, \quad \alpha_{it} = 0 \quad \text{для} \quad i < t.$$

$$x_j^s z = z x_j^s \quad \text{для } j \geq s.$$

(3) Рассмотрим однопараметрический случай. Выясним, при каком наборе показателей $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_1, \dots, \beta_n)$ моном $u = D_1^{\alpha_1} \dots D_{n-1}^{\alpha_{n-1}} d_1^{\beta_1} \dots d_n^{\beta_n}$ лежит в центре.

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} = 0, \\ \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-2} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{n/2} = 0, \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} &= 0, \\ \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-2} &= 0, \\ \dots\dots\dots &\dots\dots\dots \\ \alpha_{(n-1)/2} + \alpha_{(n+1)/2} &= 0. \end{array} \right.$$

Кроме того, моном u коммутирует с $x_2^1, x_3^2, \dots, x_n^{n-1}$ тогда и только тогда, когда набор показателей удовлетворяет следующим системам уравнений, соответственно, для четного и нечетного n :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-2} - \beta_1 = 0, \\ \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-3} - \beta_2 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ -\beta_{n/2} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ -\alpha_1 - \dots - \alpha_{n-2} - \beta_{n-1} = 0, \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-2} - \beta_1 = 0, \\ \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-3} - \beta_2 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{(n-1)/2} - \beta_{(n-1)/2} = 0, \\ -\alpha_{(n+1)/2} - \beta_{(n+1)/2} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ -\alpha_1 - \dots - \alpha_{n-2} - \beta_{n-1} = 0. \end{array} \right.$$

Отсюда получаем $\alpha_i = \beta_i$ для $1 \leq i \leq n-1$ и $\alpha_{n/2} = \beta_{n/2}$ (в случае, когда n чётно). Итак, если моноом z централен, то он разлагается в произведение элементов $z_k = D_k d_k D_{n-k}^{-1} d_{n-k}^{-1}$ и d_n . Здесь k меняется от 1 до $[(n-1)/2]$.

б) Осталось показать, что элементы $\mathfrak{z}_k$ принадлежат центру тела $'K(n)$. Обозначим через $I = (1, \dots, k)$, $I' = (k+1, \dots, n-k)$, $I'' = (n-k+1, \dots, n)$ соответствующие мультииндексы. Элементарный перебор всех возможных вариантов показывает, что образующие x_i^t , $i \geq t$, перестановочны с любым из элементов $\mathfrak{z}_k$.

б1) Если $i, t \in I$, то элемент x_i^t коммутирует с элементами d_k, d_{n-k} , и

$$x_i^t D_k = q^{-1} D_k x_i^t, \quad x_i^t D_{n-k} = q^{-1} D_{n-k} x_i^t.$$

б2) Если $i \in I'$, $t \in I$, то элемент x_i^t коммутирует с элементами d_{n-k}, D_{n-k} , и

$$x_i^t D_k = q^{-1} D_k x_i^t, \quad x_i^t d_k = q d_k x_i^t.$$

б3) Если $i, t \in I'$, то x_i^t коммутирует с $D_k, d_k, D_{n-k}, d_{n-k}$.

б4) Если $i \in I''$, $t \in I$, то элемент x_i^t коммутирует с элементами D_k, D_{n-k} , и

$$x_i^t d_k = q d_k x_i^t, \quad x_i^t d_{n-k} = q d_{n-k} x_i^t.$$

б5) Если $i \in I''$, $t \in I'$, то элемент x_i^t коммутирует с элементами d_k, D_{n-k} , и

$$x_i^t D_k = q D_k x_i^t, \quad x_i^t d_{n-k} = q d_{n-k} x_i^t.$$

б6) Если $i, t \in I''$, то элемент x_i^t коммутирует с элементами d_k, d_{n-k} , и

$$x_i^t D_k = q D_k x_i^t, \quad x_i^t D_{n-k} = q D_{n-k} x_i^t.$$

Итак, элементы $\mathfrak{z}_k$ принадлежат центру тела $'K(n)$. Центральность элемента d_n очевидна, и, таким образом, теорема доказана.

Список литературы

1. Решетилин Н. Ю., Таштадзян Л. А., Фаддеев Л. Д. Квантование групп и алгебр Ли // Алгебра и анализ. 1990. Т. 1. №1. С. 193–226.
2. Drinfeld V. G. Quantum groups // Proc. of the International Congress of Mathematicians. V. 1, 1986. P. 789–820.
3. Демидов Е. Е. О некоторых аспектах теории квантовых групп // УМН. 1993. Т. 48. №6. С. 39–74.
4. Демидов Е. Е. Модули над квантовой группой Вейля // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1993. №1. С. 53–56.
5. Панов А. Н. Тела скрученных рациональных функций на $GL_q(n, K)$ // Функц. анализ. 1994. Т. 1. №2. С. 75–77.
6. Панов А. Н. Тела скрученных рациональных функций и тело рациональных функций на $GL_q(K)$ // Алгебра и анализ. 1995. Т. 7. №1. С. 153–169.
7. Диксмье Ж. Универсальные обертывающие алгебры. М.: Мир, 1978.

Самарский государственный университет

Поступила в редакцию
03.08.1995