Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Савченко, О разложении в ряд Лорана детерминанта матрицы скалярных резольвент, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 5, 121–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1360>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 18:21:08

УДК 517.53+517.983

С. В. Савченко

О разложении в ряд Лорана детерминанта матрицы скалярных резольвент

Пусть A – произвольная квадратная матрица, λ – ее собственное значение, $\{\xi_1, \dots, \xi_r\}$ и $\{\eta_1, \dots, \eta_r\}$ – две системы линейно независимых векторов. В работе получено представление матрицы скалярных резольвент, ij -элемент которой по определению равен $(\xi_i, (zE - A)^{-1}\eta_j)$, в виде произведения трех матриц Ξ , $\Delta(z)$ и Ψ^T , среди которых только диагональная матрица $\Delta(z)$ зависит от z и является рациональной функцией переменной z . На основе этого разложения и формулы Бине–Коши предложен метод нахождения главной части ряда Лорана детерминанта матрицы скалярных резольвент в точке $z = \lambda$ и найдены его первые два коэффициента. В случае, когда хотя бы один из них не равен нулю, определено изменение части жордановой нормальной формы, отвечающей λ , при переходе от A к $A + B$, где $B = \sum_{i=1}^r (\cdot, \xi_i)\eta_i$ – оператор ранга r , сопоставленный системам векторов $\{\xi_1, \dots, \xi_r\}$ и $\{\eta_1, \dots, \eta_r\}$, и построен жорданов базис для соответствующего корневого подпространства матрицы $A + B$ из жордановых цепочек матрицы A .

Библиография: 17 названий.

§ 1. Введение

Пусть A – квадратная матрица порядка N и r – натуральное число такое, что $r \leq N$. Для любых двух систем ξ и η линейно независимых векторов $\xi_1, \dots, \xi_r$ и $\eta_1, \dots, \eta_r$ обозначим через $A(\xi, \eta)(z)$ матрицу скалярных резольвент, ij -элемент которой по определению равен $(\xi_i, (zE - A)^{-1}\eta_j)$, где E – единичная матрица. Здесь и везде в дальнейшем мы предполагаем, что $(x, y) = \sum_{n=1}^N x_n y_n$ для любых двух векторов $x = (x_n)_{n=1}^N$ и $y = (y_n)_{n=1}^N$. В работе автора [1] было показано, что матрица скалярных резольвент естественным образом возникает при изучении изменения спектральных свойств фиксированного собственного значения λ при переходе от A к $A + B$, где $B = \sum_{i=1}^r (\cdot, \xi_i)\eta_i$ – оператор ранга r , построенный по системам векторов $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_r\}$ и $\eta = \{\eta_1, \dots, \eta_r\}$. В частности, имеет место тождество

$$\det(zE - A - B) = \det(E - A(\xi, \eta)(z)) \det(zE - A). \quad (1)$$

Пусть

$$\det(E - A(\xi, \eta)(z)) = \sum_{\ell} c_{\ell}(\xi, \eta)(z - \lambda)^{\ell}$$

Работа выполнена при частичной поддержке Фонда содействия отечественной науке.

– разложение первого множителя в тождестве (1), как функции переменного z , в ряд Лорана в точке $z = \lambda$. Обозначим через $n_{A+B}(\lambda)$ и $n_A(\lambda)$ алгебраические кратности собственного значения λ матриц $A + B$ и A соответственно. Тогда

$$n_{A+B}(\lambda) = n_A(\lambda) + \min\{\ell : c_\ell(\xi, \eta) \neq 0\}.$$

Пусть $n_1 \geq \dots \geq n_k$ – порядки жордановых клеток для собственного значения λ матрицы A . В дальнейшем мы будем предполагать, что $r < k$. В кратком сообщении [1] было доказано, что

$$n_{A+B}(\lambda) \geq n_A(\lambda) - n_1 - \dots - n_r,$$

причем если справедливо равенство, то $n_{r+1}, \dots, n_k$ являются порядками жордановых клеток для собственного значения λ возмущенной матрицы $A + B$ (типичность такого изменения жордановой формы была впервые показана в [2]). Другое решение было найдено в [3], что свидетельствует о внимании специалистов к рассматриваемой проблеме. Оба доказательства достаточно технически сложны и содержат явное построение жорданова базиса для собственного значения λ матрицы $A + B$. Более простое решение, свободное от такого построения, недавно было получено автором. По духу оно близко к методам работы [4], где неравенство $n_{A+B}(\lambda) \geq n_A(\lambda) - n_1 - \dots - n_r$ было доказано при помощи ранговых соотношений, и использует неравенство

$$\sigma_m(A, \lambda) - r \leq \sigma_m(A + B, \lambda) \leq \sigma_m(A, \lambda) + r$$

для характеристик Вейра $\sigma_m(A + B, \lambda)$ и $\sigma_m(A, \lambda)$ (последняя величина определяется как наибольшее число p , при котором $n_p \geq m$). Соответствующее доказательство приведено в приложении к настоящей работе. Полученный результат остается справедливым также при добавлении к произвольной матрице r новых строк и r новых столбцов (случай $r = 1$ см. в [5]). Отметим, что в [1] мы не налагали никаких ограничений на норму оператора B . Полное описание возможных изменений всей жордановой формы при достаточно малых возмущениях (произвольного ранга) заинтересованный читатель найдет в работах [6] и [7] (см. также [8]).

В терминах коэффициентов ряда Лорана приведенное выше неравенство означает, что $c_\ell(\xi, \eta) = 0$ при $\ell < -(n_1 + \dots + n_r)$ и условие $c_{-(n_1 + \dots + n_r)}(\xi, \eta) \neq 0$ однозначно определяет изменение жордановой формы для λ при переходе от A к $A + B$: пропадают r самых больших жордановых клеток, а порядки остальных не изменяются. В настоящей работе мы предлагаем метод определения коэффициентов ряда Лорана функции $\det(E - A(\xi, \eta)(z))$, основанный на использовании формулы Бине–Коши и представления матрицы скалярных резольвент $A(\xi, \eta)(z)$ в виде произведения $\Xi \Delta(z) \Psi^T$ (см. §2). Здесь только матрица $\Delta(z)$ зависит (рациональным образом) от переменной z , а элементы первого и третьего множителей равны скалярным произведениям векторов $\xi_1, \dots, \xi_r$ и $\eta_1, \dots, \eta_r$ с элементами жордановых базисов матриц A и A^T соответственно. Эффективность метода проиллюстрирована в §3 при определении (как функции векторов $\xi_1, \dots, \xi_r$ и $\eta_1, \dots, \eta_r$) коэффициента при $(z - \lambda)^{-(n_1 + \dots + n_r)}$ в разложении детерминанта матрицы $A(\xi, \eta)(z)$

в ряд Лорана в точке $z = \lambda$ (см. теорему 1). В §4 показано (см. предложение 1), что $c_{-(n_1+\dots+n_r)}(\xi, \eta)$ совпадает с этим коэффициентом с точностью до знака, и предложена его компактная запись при выполнении некоторого типичного детерминантного условия. Она использует жорданов базис, полученный частичной деформацией исходного жорданова базиса матрицы A . Эта деформация (более точно, ортогонализация по отношению к векторам $\xi_1, \dots, \xi_r$) проведена таким образом, что все новые жордановы цепочки матрицы A с порядковыми номерами от $r+1$ до k образуют жорданов базис матрицы $A + B$. В конце §4 приведено также выражение для коэффициента $c_{-(n_1+\dots+n_r)+1}(\xi, \eta)$. Кроме того, определены все возможные изменения части жордановой формы, соответствующей λ , при переходе от A к $A + B$ и получены условия на элементы матрицы B , при которых эти изменения имеют место, в случае, когда $n_{A+B}(\lambda) = n_A(\lambda) - n_1 - \dots - n_r + 1$ (или, другими словами, $c_{-(n_1+\dots+n_r)}(\xi, \eta) = 0$ и $c_{-(n_1+\dots+n_r)+1}(\xi, \eta) \neq 0$). В частности, показано, что для почти всех систем векторов ξ и η , удовлетворяющих условию $c_{-(n_1+\dots+n_r)}(\xi, \eta) = 0$, при добавлении к A соответствующего оператора B ранга r у λ пропадают r самых больших жордановых клеток, порядок $(r+1)$ -й клетки увеличивается на единицу, а остальные не изменяются. Символически это можно представить следующим образом: $n_1, \dots, n_k \rightarrow n_{r+1} + 1, \dots, n_k$.

Сформулированная выше проблема об изменении спектральных свойств фиксированного собственного значения не является классической с точки зрения обычной теории возмущений (напомним, что мы не налагаем никаких ограничений на норму матрицы B). В ней как правило рассматривается вопрос о поведении собственных значений матрицы $A + \varepsilon B$, близких к λ и не входящих в спектр A (см., например, [9] и [10]). В частности, известно, что они разлагаются в ряды по дробным степеням ε , знаменатели которых совпадают с порядками жордановых клеток $n_1, \dots, n_r$ в случае, когда B является типичным оператором ранга r . Более точно, из каждой разрушенной жордановой клетки порядка n_p , где $p = 1, \dots, r$, образуются n_p простых собственных значений матрицы $A + \varepsilon B$. С точностью до $o(\varepsilon^{1/n_p})$ они расположены в вершинах правильного n_p -угольника, вписанного в окружность с центром в точке $z = \lambda$ и радиуса порядка ε^{1/n_p} .

Достаточные условия на элементы возмущения B для типичного поведения новых собственных значений в окрестности точки $z = \lambda$ содержит теорема 1 работы [11] (ее доказательство, основанное на методе Ньютона, читатель найдет в [12] и [13]), которая безусловно служит примером классического результата теории возмущений. К сожалению, если не выполнено условие $n_r > n_{r+1}$, то прямое применение этой теоремы не позволяет построить теорию возмущений первого порядка для всех $n_1 + \dots + n_r$ отщепившихся от λ собственных значений матрицы $A + \varepsilon B$. Тем не менее, такая задача может быть решена при помощи простой модификации теоремы Лидского, основанной на более пристальном рассмотрении коэффициентов многочлена (2.12) в [11]. Соответствующее утверждение (теорема 2) содержится в §5 настоящей работы. Вместе с теоремой 1 из работы [1] оно дает полную картину изменения спектральных свойств в достаточно малой (непроклотовой!) окрестности собственного значения λ при переходе от A к $A + \varepsilon B$, где ε также достаточно мало, и тем самым полностью решает задачу теории возмущений для оператора B ранга r , удовлетворяющего условиям Лидского.

§ 2. Каноническое разложение матрицы скалярных резольвент

Пусть A – произвольная квадратная матрица порядка N с комплексными элементами, d – количество всех жордановых клеток в ее жордановой форме и $n_1, \dots, n_p, \dots, n_d$ – их порядки (мы считаем, что клетка с номером p соответствует собственному значению λ_p). Возьмем любой жорданов базис $\{\xi_n^{(p)}\}_{n=1}^{n_p} \prod_{p=1}^d$ матрицы A и дуальный к нему жорданов базис $\{\eta_n^{(p)}\}_{n=1}^{n_p} \prod_{p=1}^d$ транспонированной матрицы A^T :

$$\begin{aligned} & \xi_1^{(1)}, \dots, \xi_{n_1}^{(1)}; \dots; \xi_1^{(p)}, \dots, \xi_{n_p-n+1}^{(p)}, \dots, \xi_{n_p}^{(p)}; \dots; \xi_1^{(d)}, \dots, \xi_{n_d}^{(d)}; \\ & \underbrace{\eta_{n_1}^{(1)}, \dots, \eta_1^{(1)}}_{\lambda_1}; \dots; \underbrace{\eta_{n_p}^{(p)}, \dots, \eta_n^{(p)}, \dots, \eta_1^{(p)}}_{\lambda_p}; \dots; \underbrace{\eta_{n_d}^{(d)}, \dots, \eta_1^{(d)}}_{\lambda_d}. \end{aligned}$$

Здесь $(A - \lambda_p E)\xi_n^{(p)} = \xi_{n-1}^{(p)}$ и $(A^T - \lambda_p E)\eta_n^{(p)} = \eta_{n-1}^{(p)}$ при $n = 1, \dots, n_p$ (мы считаем, что $\xi_0^{(p)} = 0$ и $\eta_0^{(p)} = 0$). Дуальность означает, что $(\xi_{n'}^{(p')}, \eta_n^{(p)}) = \delta_{n', n_p+1-n} \delta_{p', p}$, где $\delta_{\cdot, \cdot}$ – символ Кронекера. Простое построение дуального жорданова базиса можно найти в начале § 1 работы [11]. Оно использует очевидное равенство $K^T(K^{-1})^T = E$, справедливое для любой невырожденной матрицы K , и тот факт, что если $A = KJK^{-1}$, где J – жорданова нормальная форма матрицы A , то $A^T = (K^{-1})^T J^T K^T$. В дальнейшем, рассматривая фиксированное собственное значение λ матрицы A геометрической кратности k , мы будем считать, что ему соответствуют k первых жордановых цепочек в ее жордановом базисе (т.е. $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = \lambda$).

ЛЕММА 1. Пусть ξ и η – любые два вектора из $\mathbb{C}^N$. Тогда

$$(\xi, (zE - A)^{-1}\eta) = \sum_{p=1}^d \sum_{m=1}^{n_p} (\eta_m^{(p)}, \eta) \sum_{s=1}^{n_p+1-m} (z - \lambda_p)^{-(n_p+2-m-s)} (\xi_s^{(p)}, \xi). \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть λ – любое собственное значение матрицы A и q – его (спектральный) индекс (по определению он равен порядку наибольшей по размеру жордановой клетки для λ). Обозначим через Q_{-1} проектор на соответствующее корневое подпространство $L_A(\lambda)$ вдоль прямой суммы всех других корневых подпространств матрицы A и положим $Q_{-\ell} = (A - \lambda E)^{\ell-1} Q_{-1}$ (заметим, что $Q_{-\ell} = 0$ при $\ell > q$). Тогда

$$(zE - A)^{-1} = \sum_{\ell=1}^q Q_{-\ell} (z - \lambda)^{-\ell} + R(z),$$

где $R(z)$ – аналитическая в точке $z = \lambda$ операторная функция (она совпадает с суммой выражений $\sum_{\ell=1}^q Q_{-\ell} (z - \lambda)^{-\ell}$, соответствующих другим корневым подпространствам матрицы A). Этот факт вытекает из следующей простой выкладки:

$$\begin{aligned} & (zE - A) \sum_{\ell=1}^q Q_{-\ell} (z - \lambda)^{-\ell} \\ &= (z - \lambda) \sum_{\ell=1}^q Q_{-\ell} (z - \lambda)^{-\ell} - (A - \lambda E) \sum_{\ell=1}^q Q_{-\ell} (z - \lambda)^{-\ell} = Q_{-1} \end{aligned}$$

(здесь мы используем равенство $(A - \lambda E)Q_{-\ell} = Q_{-\ell-1}$).

Проектор Q_{-1} допускает представление

$$Q_{-1} = \sum_{p=1}^k \sum_{m=1}^{n_p} (\eta_m^{(p)}, \cdot) \xi_{n_p-m+1}^{(p)}.$$

Поэтому

$$\sum_{\ell=1}^q Q_{-\ell} (z - \lambda)^{-\ell} = \sum_{p=1}^k \sum_{m=1}^{n_p} (\eta_m^{(p)}, \cdot) \sum_{\ell=1}^{n_p+1-m} (z - \lambda)^{-\ell} \xi_{n_p+2-m-\ell}^{(p)}.$$

Полученное тождество можно переписать следующим образом:

$$\sum_{\ell=1}^q Q_{-\ell} (z - \lambda)^{-\ell} = \sum_{p=1}^k \sum_{m=1}^{n_p} (\eta_m^{(p)}, \cdot) \sum_{s=1}^{n_p+1-m} (z - \lambda)^{-(n_p+2-m-s)} \xi_s^{(p)}.$$

Суммирование этого выражения по всем различным λ из спектра A дает разложение резольвенты матрицы A на простейшие дроби. Подставляя его вместо $(zE - A)^{-1}$ в $(\xi, (zE - A)^{-1}\eta)$, получаем тождество (2). Лемма доказана.

Пусть $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_r\}$ и $\eta = \{\eta_1, \dots, \eta_r\}$ — две системы векторов. В дальнейшем нам понадобятся матрицы

$$\begin{aligned} \Xi_m^{(p)} &= \begin{pmatrix} (\xi_1^{(p)}, \xi_1) & \dots & (\xi_{n_p-m+1}^{(p)}, \xi_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\xi_1^{(p)}, \xi_r) & \dots & (\xi_{n_p-m+1}^{(p)}, \xi_r) \end{pmatrix}, \\ \Delta_m^{(p)}(z) &= \begin{pmatrix} (z - \lambda_p)^{-n_p+m-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & (z - \lambda_p)^{-1} \end{pmatrix}, \\ \Psi_m^{(p)} &= \begin{pmatrix} (\eta_m^{(p)}, \eta_1) & \dots & (\eta_m^{(p)}, \eta_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\eta_m^{(p)}, \eta_r) & \dots & (\eta_m^{(p)}, \eta_r) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(по определению количество столбцов в матрице $\Psi_m^{(p)}$ равно $n_p - m + 1$, и, таким образом, размеры матриц $\Xi_m^{(p)}$ и $\Psi_m^{(p)}$ совпадают).

Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} (\eta_m^{(p)}, \eta_j) \sum_{s=1}^{n_p+1-m} (z - \lambda_p)^{-(n_p+2-m-s)} (\xi_s^{(p)}, \xi_i) \\ = i j\text{-элемент произведения } \Xi_m^{(p)} \Delta_m^{(p)}(z) \Psi_m^{(p)T}. \end{aligned}$$

Любым двум матрицам $M = (m_{ij})$ и $C = (c_{ij})$ порядка $r \times m$ и $r \times n$ соответственно сопоставим матрицу $D = M \circ C$ порядка $r \times (n + m)$ по следующему правилу: $d_{ij} = m_{ij}$, если $j = 1, \dots, m$, и $d_{ij} = c_{ij-m}$, если $j = m + 1, \dots, m + n$. Другими словами, матрица $M \circ C$ получается последовательным добавлением столбцов

матрицы C к столбцам матрицы M (заметим, что вводимая таким образом операция $\circ$ не имеет ничего общего с произведением Адамара матриц, для которого также часто используется символ $\circ$).

Пусть $\Xi^{(p)} = \Xi_1^{(p)} \circ \dots \circ \Xi_{n_p}^{(p)}$ и $\Psi^{(p)} = \Psi_1^{(p)} \circ \dots \circ \Psi_{n_p}^{(p)}$. Обозначим через $\Delta^{(p)}(z)$ прямую сумму $\Delta_1^{(p)}(z) \oplus \dots \oplus \Delta_{n_p}^{(p)}(z)$ диагональных матриц $\Delta_m^{(p)}(z)$. Таким образом, каждая из матриц $\Xi^{(p)}$, $\Psi^{(p)}$ и $\Delta^{(p)}(z)$ состоит из n_p серий. Каждая m -я серия соответственно имеет вид $\Xi_m^{(p)}$, $\Psi_m^{(p)}$ и $\Delta_m^{(p)}(z)$. Нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{n_p} (\eta_m^{(p)}, \eta_j) \sum_{s=1}^{n_p+1-m} (z - \lambda_p)^{-(n_p+2-m-s)} (\xi_s^{(p)}, \xi_i) \\ &= ij\text{-элемент произведения } \Xi^{(p)} \Delta^{(p)}(z) \Psi^{(p)T}. \end{aligned}$$

Пусть $\Xi = \Xi^{(1)} \circ \dots \circ \Xi^{(d)}$, $\Psi = \Psi^{(1)} \circ \dots \circ \Psi^{(d)}$ и $\Delta(z) = \Delta^{(1)}(z) \oplus \dots \oplus \Delta^{(d)}(z)$ – прямая сумма всех диагональных матриц $\Delta^{(p)}(z)$. Тогда в силу леммы 1 (в ее утверждении нужно заменить ξ на ξ_i , а η на η_j) имеем

$$A(\xi, \eta)(z) = \Xi \Delta(z) \Psi^T. \quad (3)$$

Представление (3) будем называть *правым каноническим разложением* матрицы скалярных резольвент: в нем первый множитель отвечает скалярным произведениям векторов $\xi_1, \dots, \xi_r$ с векторами из жорданова базиса матрицы A , третий – скалярным произведениям векторов $\eta_1, \dots, \eta_r$ с векторами из дуального жорданова базиса матрицы A^T , а средний – резольвенте жордановой нормальной формы этих матриц. Очевидно, тождество (2) можно также переписать в следующем виде:

$$(\xi, (zE - A)^{-1} \eta) = \sum_{p=1}^d \sum_{s=1}^{n_p} (\xi_s^{(p)}, \xi) \sum_{m=1}^{n_p+1-s} (z - \lambda_p)^{-(n_p+2-m-s)} (\eta_m^{(p)}, \eta).$$

Поэтому вместо матрицы $\Xi_m^{(p)}$ можно взять матрицу

$$\begin{pmatrix} (\xi_s^{(p)}, \xi_1) & \dots & (\xi_s^{(p)}, \xi_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\xi_s^{(p)}, \xi_r) & \dots & (\xi_s^{(p)}, \xi_r) \end{pmatrix},$$

а вместо матрицы $\Psi_m^{(p)}$ – матрицу

$$\begin{pmatrix} (\eta_1^{(p)}, \eta_1) & \dots & (\eta_{n_p-s+1}^{(p)}, \eta_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\eta_1^{(p)}, \eta_r) & \dots & (\eta_{n_p-s+1}^{(p)}, \eta_r) \end{pmatrix}.$$

Прделав все указанные выше объединения, мы получим новые матрицы Ξ и Ψ , для которых также будет справедливо тождество (3). Теперь мы будем называть его

левым каноническим разложением матрицы скалярных резольвент (слово “левый” означает, что при выводе соответствующего разложения используется представление скалярной резольвенты $(\xi, (zE - A)^{-1}\eta)$, в котором $(\xi_s^{(p)}, \xi)$ находится слева от последнего знака суммы). Оно совпадает с правым каноническим разложением для $A(\xi, \eta)(z)$ тогда и только тогда, когда матрица A является диагонализуемой. Понятно, что если мы применим операцию транспонирования к обеим частям тождества (3), то получим левое каноническое разложение матрицы скалярных резольвент $A^T(\eta, \xi)(z)$, отвечающей эквивалентной (в смысле изменения жордановой формы) задаче возмущения матрицы A^T оператором B^T .

Канонические разложения и формула Бине–Коши (см. [14; гл. I, формулу (16)]) позволяют найти ряд Лорана определителя матрицы скалярных резольвент в любой точке z . В нашей работе мы ограничимся вычислением двух его первых коэффициентов в случае $z = \lambda$, где λ – фиксированное собственное значение матрицы A .

§3. Ряд Лорана детерминанта матрицы скалярных резольвент и его старший член

Используя представление детерминанта в виде суммы произведений элементов матрицы, нетрудно показать, что порядок полюса $\det A(\xi, \eta)(z)$ в точке $z = \lambda$ не больше чем rq . Следующая теорема дает полную информацию о степени первого члена в разложении $\det A(\xi, \eta)(z)$ в ряд Лорана в точке $z = \lambda$ и коэффициенте при нем.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_r\}$ и $\eta = \{\eta_1, \dots, \eta_r\}$ – две системы векторов и

$$n_1 \geq \dots \geq n_h > n_{h+1} = \dots = n_r = \dots = n_g > n_{g+1} \geq \dots \geq n_k \quad (4)$$

– порядки жордановых клеток для собственного значения λ матрицы A (здесь мы предполагаем $k \geq r$). Тогда порядок полюса функции $\det A(\xi, \eta)(z)$ в точке $z = \lambda$ не больше чем $n_1 + \dots + n_r$ и коэффициент при $(z - \lambda)^{-(n_1 + \dots + n_r)}$ в ее разложении в ряд Лорана в точке $z = \lambda$ совпадает с суммой

$$\sum_{h+1 \leq p_{h+1} < \dots < p_r \leq g} \det \begin{pmatrix} (\xi_1^{(1)}, \xi_1) & \dots & (\xi_1^{(h)}, \xi_1) & (\xi_1^{(p_{h+1})}, \xi_1) & \dots & (\xi_1^{(p_r)}, \xi_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\xi_1^{(1)}, \xi_r) & \dots & (\xi_1^{(h)}, \xi_r) & (\xi_1^{(p_{h+1})}, \xi_r) & \dots & (\xi_1^{(p_r)}, \xi_r) \end{pmatrix} \times \det \begin{pmatrix} (\eta_1^{(1)}, \eta_1) & \dots & (\eta_1^{(h)}, \eta_1) & (\eta_1^{(p_{h+1})}, \eta_1) & \dots & (\eta_1^{(p_r)}, \eta_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\eta_1^{(1)}, \eta_r) & \dots & (\eta_1^{(h)}, \eta_r) & (\eta_1^{(p_{h+1})}, \eta_r) & \dots & (\eta_1^{(p_r)}, \eta_r) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим более подробно правое каноническое разложение матрицы скалярных резольвент $A(\xi, \eta)(z) = \Xi \Delta(z) \Psi^T$. Очевидно, столбец матрицы Ξ с номером b принадлежит какой-то серии $\Xi_m^{(p)}$ и внутри ее однозначно определяется номером s , отсчитываемым от ее левого конца (в этом случае он состоит из скалярных произведений вида $(\xi_s^{(p)}, \xi_i)$). Столбец с тем же номером b в матрице Ψ принадлежит серии $\Psi_m^{(p)}$ и, хотя также находится на расстоянии s от

ее левого конца, не зависит от s (его элементами являются скалярные произведения вида $(\eta_m^{(p)}, \eta_j)$). Таким образом, номеру b можно взаимно однозначно сопоставить тройку чисел (p, m, s) . Понятно также, что b -й столбец произведения матриц $\Xi\Delta(z)$ получается из b -го столбца матрицы Ξ умножением на некоторую степень $(z - \lambda_p)^{-1}$. Обозначим ее показатель через ℓ . Очевидно, числа s и ℓ связаны соотношением $\ell = n_p - m - s + 2$.

Пусть M – число столбцов в матрице Ξ (оно равно $\sum_{p=1}^d n_p(n_p + 1)/2$). В силу формулы Бине–Коши, примененной к произведению матриц $\Xi\Delta(z)$ и Ψ^T , определитель матрицы $\Xi\Delta(z)\Psi^T$ равен

$$\sum_{1 \leq b_1=(p_1, m_1, s_1) < b_2=(p_2, m_2, s_2) < \dots < b_r=(p_r, m_r, s_r) \leq M} (z - \lambda_{p_1})^{-\ell_1} \dots (z - \lambda_{p_r})^{-\ell_r} \times \det \begin{pmatrix} (\xi_{s_1}^{(p_1)}, \xi_1) & \dots & (\xi_{s_r}^{(p_r)}, \xi_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\xi_{s_1}^{(p_1)}, \xi_r) & \dots & (\xi_{s_r}^{(p_r)}, \xi_r) \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} (\eta_{m_1}^{(p_1)}, \eta_1) & \dots & (\eta_{m_r}^{(p_r)}, \eta_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\eta_{m_1}^{(p_1)}, \eta_r) & \dots & (\eta_{m_r}^{(p_r)}, \eta_r) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Таким образом, первая матрица в этой сумме не зависит от вторых координат индексов $b_1, \dots, b_r$, определяющих ее, а вторая матрица не содержит их третьих координат.

Покажем, что многие слагаемые в сумме (6) на самом деле или равны нулю, или взаимно уничтожаются. Для этого предположим сначала, что какие-то два столбца с индексами, скажем $b_i = (p_i, m_i, s_i)$ и $b_j = (p_j, m_j, s_j)$, принадлежат одной и той же m -й серии фрагмента $\Xi^{(p)}$: $p_i = p_j = p$ и $m_i = m_j = m$. Тогда во второй матрице в (6) совпадают два столбца, соответствующие индексам b_i и b_j . В этом случае ее определитель равен нулю и, следовательно, равно нулю соответствующее слагаемое в (6). Поэтому в дальнейшем можно считать, что столбцы с индексами $b_1 < \dots < b_r$ принадлежат различным сериям матрицы Ξ .

Предположим теперь, что при некоторых $b_i = (p_i, m_i, s_i) < b_j = (p_j, m_j, s_j)$ справедливы условия

$$p_i = p_j \text{ и } s_i \leq n_p - m_j + 1, \text{ где } p = p_i = p_j. \quad (7)$$

Тогда можно рассмотреть последовательность $b'_1 < \dots < b'_i < \dots < b'_j < \dots < b'_r$ такую, что

$$b'_i = (p, m_i, s_j) \text{ и } b'_j = (p, m_j, s_i), \quad (8)$$

а все остальные ее $r - 2$ члена совпадают с соответствующими элементами исходной последовательности $b_1 < \dots < b_r$. Очевидно, матрица

$$\begin{pmatrix} (\xi_{s_1}^{(p_1)}, \xi_1) & \dots & (\xi_{s_j}^{(p)}, \xi_1) & \dots & (\xi_{s_i}^{(p)}, \xi_1) & \dots & (\xi_{s_r}^{(p_r)}, \xi_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\xi_{s_1}^{(p_1)}, \xi_r) & \dots & (\xi_{s_j}^{(p)}, \xi_r) & \dots & (\xi_{s_i}^{(p)}, \xi_r) & \dots & (\xi_{s_r}^{(p_r)}, \xi_r) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

отвечающая новой последовательности $b'_1 < \dots < b'_r$, получается из матрицы

$$\begin{pmatrix} (\xi_{s_1}^{(p_1)}, \xi_1) & \dots & (\xi_{s_i}^{(p)}, \xi_1) & \dots & (\xi_{s_j}^{(p)}, \xi_1) & \dots & (\xi_{s_r}^{(p_r)}, \xi_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\xi_{s_1}^{(p_1)}, \xi_r) & \dots & (\xi_{s_i}^{(p)}, \xi_r) & \dots & (\xi_{s_j}^{(p)}, \xi_r) & \dots & (\xi_{s_r}^{(p_r)}, \xi_r) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

соответствующей исходной последовательности $b_1 < \dots < b_r$, перестановкой двух столбцов. Поэтому их определители отличаются только знаком (если $s_j = s_i$, то эти определители равны нулю). Кроме того, соответствующие последовательностям $b_1 < \dots < b_r$ и $b'_1 < \dots < b'_r$ матрицы скалярных произведений с векторами $\eta_1, \dots, \eta_r$ в (6) совпадают и $\ell'_i + \ell'_j = (n_p - m_i - s_j + 2) + (n_p - m_j - s_i + 2) = (n_p - m_i - s_i + 2) + (n_p - m_j - s_j + 2) = \ell_i + \ell_j$. Таким образом, слагаемые в (6), отвечающие этим последовательностям, взаимно уничтожаются.

Нетрудно проверить, что применение введенной выше операции “штрих” к $b'_1 < \dots < b'_r$ при тех же i и j дает исходную последовательность $b_1 < \dots < b_r$. Очевидно, для различных пар нижних индексов (i, j) , удовлетворяющих условию (7), при помощи правила (8) из $b_1 < \dots < b_r$ получаются различные последовательности $b'_1 < \dots < b'_r$. На множестве пар (i, j) установим соотношение порядка по следующему правилу: $(i', j') \leq (i, j)$, если $j' < j$ или $j' = j$, но $i' \leq i$. Среди всех пар нижних индексов последовательности $b_1 < \dots < b_r$, удовлетворяющих условию (7), выберем максимальную пару индексов и по правилу (8) сопоставим ей последовательность $b'_1 < \dots < b'_r$. Тогда все слагаемые в сумме (6), соответствующие последовательностям $b_1 < \dots < b_r$, обладающим свойством (7) при некоторых i и j , распадаются на различные пары взаимно уничтожающихся членов. Очевидно, что они не дают вклад в сумму (6). Поэтому их можно не рассматривать и в дальнейшем иметь дело с редуцированной суммой, которую мы будем обозначать через (6').

Покажем теперь, что для любого слагаемого в редуцированной сумме (6') справедливо неравенство

$$\sum_{i:p_i=p} \ell_i \leq n_p - m_c + 1,$$

где $c = \min\{i : p_i = p\}$. Пусть $t = \max\{i : p_i = p\}$. Тогда неравенство $\ell_t \leq n_p - m_t + 1$ очевидно. Предположим, что справедливость неравенства $\ell_{n+1} + \dots + \ell_t \leq n_p - m_{n+1} + 1$ доказана для какого-то $n+1 > c$. Пусть $b_n = (p, m_n, s_n) < b_{n+1} = (p, m_{n+1}, s_{n+1})$. Тогда $s_n \geq n_p - m_{n+1} + 2$ и, следовательно, $n_p - m_n - \ell_n + 1 \geq n_p - m_{n+1} + 1$. Это неравенство и наше предположение позволяют сделать следующий шаг:

$$\ell_n + \dots + \ell_t \leq n_p - m_{n+1} + 1 + \ell_n \leq n_p - m_n + 1.$$

Повторяя это рассуждение необходимое число раз, получим оценку для $\ell_c + \dots + \ell_t$.

Теперь мы можем утверждать, что при упорядочении (4) неравенство

$$\sum_{i:p_i \leq k} \ell_i \leq n_1 + \dots + n_r$$

справедливо для каждого слагаемого редуцированной суммы (6'). Другими словами, порядок его полюса в точке $z = \lambda$ не больше чем $n_1 + \dots + n_r$. Он равен в точности этому числу, если и только если $b_i = (i, 1, 1)$ при $i = 1, \dots, h$ и $b_i = (p_i, 1, 1)$ при $i = h+1, \dots, r$, где числа p_i удовлетворяют неравенству

$h + 1 \leq p_{h+1} < \dots < p_r \leq g$ (если все порядки жордановых клеток равны друг другу, то мы считаем, что $h = 0$ и $g = k$). Это означает, что коэффициент при $(z - \lambda)^{-(n_1 + \dots + n_r)}$ в разложении в ряд Лорана определителя матрицы $A(\xi, \eta)(z)$ в точке $z = \lambda$ совпадает с суммой (5). Теорема доказана.

Покажем, что для любой матрицы A существуют наборы векторов $\xi_1, \dots, \xi_r$ и $\eta_1, \dots, \eta_r$, для которых сумма (5) не равна нулю. Без ограничения общности можно считать, что матрица A совпадает со своей жордановой нормальной формой $J(A)$. В качестве ее жорданова базиса выберем стандартный базис пространства $\mathbb{C}^N$ (по определению любой его вектор имеет только одну ненулевую координату, которая равна единице). Тогда $\{\xi_n^{(p)}\}_{n=1}^{n_p} \}_{p=1}^d$ и $\{\eta_n^{(p)}\}_{n=1}^{n_p} \}_{p=1}^d$ образуют две полные системы ортогональных векторов. Положим $\xi_1 = \xi_1^{(1)}, \dots, \xi_r = \xi_1^{(r)}$ и $\eta_1 = \eta_1^{(1)}, \dots, \eta_r = \eta_1^{(r)}$. В этом случае в (5) только слагаемое с $p_{h+1} = h + 1, \dots, p_r = r$ отлично от нуля и, следовательно, сама сумма (5) не равна нулю. Этот пример позволяет утверждать также, что выражение для коэффициента при $(z - \lambda)^{-(n_1 + \dots + n_r)}$ не может быть сведено к сумме с меньшим числом слагаемых. В следующем параграфе мы покажем, что сумма (5) не равна нулю для почти всех наборов векторов $\xi_1, \dots, \xi_r$ и $\eta_1, \dots, \eta_r$ и, таким образом, ее отличие от нуля является типичным условием.

§ 4. Ряд Лорана функции $\det(E - A(\xi, \eta)(z))$ и изменение спектральных свойств

Доказанная выше теорема 1 позволяет получить информацию о старшем члене разложения в ряд Лорана функции $\det(E - A(\xi, \eta)(z))$, которая является первым множителем в тождестве (1), связывающем характеристические многочлены матриц A и $A + B$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть ξ и η — две системы, состоящие из r векторов, и $n_1 \geq \dots \geq n_k$ — порядки жордановых клеток для собственного значения λ матрицы A . Предположим, что $k \geq r$. Тогда порядок полюса функции $\det(E - A(\xi, \eta)(z))$ в точке $z = \lambda$ не больше чем $n_1 + \dots + n_r$ и коэффициент $c_{-(n_1 + \dots + n_r)}(\xi, \eta)$ при $(z - \lambda)^{-(n_1 + \dots + n_r)}$ в ее разложении в ряд Лорана в точке $z = \lambda$ совпадает с точностью до знака с суммой (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $\det(E - A(\xi, \eta)(z))$ допускает следующее представление:

$$\det(E - A(\xi, \eta)(z)) = 1 - \text{Tr } A(\xi, \eta)(z) + \dots + (-1)^r \det A(\xi, \eta)(z). \quad (11)$$

В этом представлении $(m + 1)$ -е слагаемое с точностью до знака совпадает с суммой всех главных миноров порядка m матрицы $A(\xi, \eta)(z)$. Очевидно, что любая главная подматрица порядка m матрицы $A(\xi, \eta)(z)$ сама является матрицей скалярных резольвент. Поэтому к ней может быть применена теорема 1 (с заменой r на m). Таким образом, порядок полюса любого главного минора порядка $m \leq r$ матрицы $A(\xi, \eta)(z)$ в точке $z = \lambda$ не больше чем $n_1 + \dots + n_m$. В свою очередь, это означает, что порядок полюса определителя матрицы $E - A(\xi, \eta)(z)$ в точке

(при $i = 1$ мы считаем, что сумма $\sum_{s=1}^{i-1}$ равна нулю). Существование и единственность решения этой системы гарантируется условием (12). Соответствующая рекуррентная процедура возможна в силу того, что при $p = r + 1, \dots, k$ длина p -й жордановой цепочки не больше чем длина любой из r первых цепочек, при помощи которых деформируется исходный жорданов базис.

Очевидно, при указанном выборе коэффициентов $\alpha_{i,m}^{(p)}$ векторы $\xi_n^{(p)'}$ при $n = 1, \dots, n_p$ и $p = r + 1, \dots, k$ ортогональны векторам $\xi_1, \dots, \xi_r$. Пусть $\{\eta_n^{(p)'}\}_{n=1}^{n_p} \stackrel{d}{p=1}$ — дуальный к $\{\xi_n^{(p)'}\}_{n=1}^{n_p} \stackrel{d}{p=1}$ жорданов базис транспонированной матрицы A^T . Тогда в соответствующей сумме (5) только определитель в (12) будет отличен от нуля среди всех ее левых определителей. Это означает, что она сведется к одному слагаемому

$$\det \begin{pmatrix} (\xi_1^{(1)'}, \xi_1) & \dots & (\xi_1^{(r)'}, \xi_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\xi_1^{(1)'}, \xi_r) & \dots & (\xi_1^{(r)'}, \xi_r) \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} (\eta_1^{(1)'}, \eta_1) & \dots & (\eta_1^{(r)'}, \eta_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\eta_1^{(1)'}, \eta_r) & \dots & (\eta_1^{(r)'}, \eta_r) \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Отличие от нуля коэффициента $c_{-(n_1+\dots+n_r)}(\xi, \eta)$ допускает теперь простую геометрическую интерпретацию: в линейной оболочке $\langle \eta_1^{(1)'}, \dots, \eta_1^{(r)'} \rangle$ векторов $\eta_1^{(1)'}, \dots, \eta_1^{(r)'}$ не существует ненулевого вектора, ортогонального пространству $\langle \eta_1, \dots, \eta_r \rangle$ (напомним, что отличие от нуля первого определителя предполагается с самого начала).

Пусть $B = \sum_{i=1}^r (\cdot, \xi_i) \eta_i$ — оператор ранга r , построенный по системам векторов $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_r\}$ и $\eta = \{\eta_1, \dots, \eta_r\}$. Так как векторы $\xi_n^{(p)'}$ при $n = 1, \dots, n_p$ и $p = r + 1, \dots, k$ ортогональны векторам $\xi_1, \dots, \xi_r$, то все они принадлежат ядру оператора B . Поэтому

$$(A + B - \lambda E) \xi_n^{(p)'} = \xi_{n-1}^{(p)'}. \quad (14)$$

В дальнейшем любую последовательность векторов $\xi_1^{(p)'}, \dots, \xi_{n_p}^{(p)'}$, удовлетворяющих условию (14) при любом $n = 1, \dots, n_p$, мы будем называть $(A+B, \lambda)$ -цепочкой длины n_p . Так как $\xi_0^{(p)'} = 0$, то λ является собственным значением матрицы $A+B$, а первый член этой последовательности — соответствующим ему собственным вектором. Кроме того, остальные ее элементы также принадлежат корневому подпространству $L_{A+B}(\lambda)$ матрицы $A+B$ для λ .

Обозначим через $n_{A+B}(\lambda)$ и $n_A(\lambda)$ алгебраические кратности собственного значения λ матриц $A+B$ и A соответственно. В силу тождества (1) и предложения 1 справедливо неравенство

$$n_{A+B}(\lambda) \geq n_A(\lambda) - n_1 - \dots - n_r,$$

причем знак равенства в нем имеет место тогда и только тогда, когда отлична от нуля сумма (5). Предположим, что она не равна нулю и, следовательно, $n_{A+B}(\lambda) = n_A(\lambda) - n_1 - \dots - n_r$. В силу принятых соглашений о порядке следования жордановых клеток справедливо равенство $n_A(\lambda) = n_1 + \dots + n_k$. Поэтому в нашем случае $n_{A+B}(\lambda) = n_{r+1} + \dots + n_k$. Таким образом, число векторов в системе

вектор η_{Π}^* , для которого $(A - \lambda E)\eta_{\Pi}^* = \eta_{\Pi}$. В силу условия (12), прибавляя, если надо, линейную комбинацию векторов $\xi_1^{(1)'}, \dots, \xi_1^{(r)'}$, можно считать, что вектор η_{Π}^* ортогонален векторам $\xi_1, \dots, \xi_r$ из представления оператора B . Поэтому $(A + B - \lambda E)(\xi - \eta_{\Pi}^*) = (A - \lambda E)(\xi - \eta_{\Pi}^*) + B(\xi - \eta_{\Pi}^*) = -\eta_{\Pi} + \eta = \eta$.

Предположим, что $\eta_{\Pi} \neq 0$ и пусть $a = \min\{p : (\eta_1^{(p)'}, \eta) \neq 0 \text{ и } 1 \leq p \leq k\}$. В силу построения вектора η справедливо неравенство $r + 1 \leq a \leq k$. Поэтому вектор $\xi - \eta_{\Pi}^*$ порождает $(A + B, \lambda)$ -цепочку длины $n_a + 1$. В частности, если $n_{A+B}(\lambda) = n_A(\lambda) - n_1 - \dots - n_r + 1$, то вместе с $(A + B, \lambda)$ -цепочками $\xi_1^{(p)'}, \dots, \xi_{n_p}^{(p)'}$, где $p = r + 1, \dots, a - 1, a + 1, \dots, k$, она образует жорданов базис корневого подпространства $L_{A+B}(\lambda)$ матрицы $A + B$. В этом случае $n_{r+1}, \dots, n_{a-1}, n_a + 1, n_{a+1}, \dots, n_k$ являются порядками жордановых клеток матрицы $A + B$ для собственного значения λ .

Пусть теперь $(\eta_1^{(p)'}, \eta) = 0$ при любом $p = r + 1, \dots, k$. Тогда $\eta_{\Pi} = 0$ и, следовательно, $\xi - \eta_{\Pi}^*$ является собственным вектором матрицы $A + B$, соответствующим собственному значению λ . Поэтому если $n_{A+B}(\lambda) = n_A(\lambda) - n_1 - \dots - n_r + 1$, то этот собственный вектор вместе с системой $\{\xi_n^{(p)'}\}_{n=1}^{n_p} \quad n_p = k$ образует жорданов базис для корневого подпространства $L_{A+B}(\lambda)$. В этом случае $n_{r+1}, \dots, n_k, 1$ — порядки жордановых клеток матрицы $A + B$ для λ . Отметим (см. (6) и (11)), что при выполнении неравенства (12) и условия $n_r \geq 2$ соответствующее выражение для $c_{-(n_1+\dots+n_r)+1}(\xi, \eta)$ совпадает с точностью до знака с суммой произведений

$$\det \begin{pmatrix} (\xi_1^{(1)'}, \xi_1) & \dots & (\xi_1^{(r)'}, \xi_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\xi_1^{(1)'}, \xi_r) & \dots & (\xi_1^{(r)'}, \xi_r) \end{pmatrix} \times \sum_{p=1}^r \det \begin{pmatrix} (\eta_1^{(1)'}, \eta_1) & \dots & (\eta_2^{(p)'}, \eta_1) & \dots & (\eta_1^{(r)'}, \eta_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\eta_1^{(1)'}, \eta_r) & \dots & (\eta_2^{(p)'}, \eta_r) & \dots & (\eta_1^{(r)'}, \eta_r) \end{pmatrix}$$

и

$$\det \begin{pmatrix} (\eta_1^{(1)'}, \eta_1) & \dots & (\eta_1^{(r)'}, \eta_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\eta_1^{(1)'}, \eta_r) & \dots & (\eta_1^{(r)'}, \eta_r) \end{pmatrix} \times \sum_{p=1}^r \det \begin{pmatrix} (\xi_1^{(1)'}, \xi_1) & \dots & (\xi_2^{(p)'}, \xi_1) & \dots & (\xi_1^{(r)'}, \xi_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\xi_1^{(1)'}, \xi_r) & \dots & (\xi_2^{(p)'}, \xi_r) & \dots & (\xi_1^{(r)'}, \xi_r) \end{pmatrix}.$$

Это выражение будет полезно при определении возможных изменений жордановой формы при выполнении условия $n_{A+B}(\lambda) = n_A(\lambda) - n_1 - \dots - n_r + 2$.

Откажемся теперь от условия (12) и будем считать, что каждый левый определитель в сумме (5) равен нулю. Тогда при $g = r$ и $n_r \geq 2$ коэффициент $c_{-(n_1+\dots+n_r)+1}(\xi, \eta)$ равен последнему произведению в полученном выше выражении (в нем теперь только нужно убрать штрихи). Поэтому его отличие от нуля влечет неравенство

$$\det \begin{pmatrix} (\eta_1^{(1)}, \eta_1) & \dots & (\eta_1^{(r)}, \eta_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\eta_1^{(1)}, \eta_r) & \dots & (\eta_1^{(r)}, \eta_r) \end{pmatrix} \neq 0$$

и, следовательно, случай $g = r$ и $n_r \geq 2$ сводится к рассмотренному выше при помощи замены A и B на A^T и B^T . Случай $g = r$ и $n_r = 1$ будет разобран ниже.

Пусть $g \geq r + 1$ (т.е. $n_{r+1} = n_r$) и все определители в сумме (5) равны нулю. Рассмотрим сначала случай, когда $n_h = n_r + 1$. Пусть f — наибольшее целое число такое, что $n_f > n_h$. Тогда если $n_{g+1} < n_r - 1$, то коэффициент $c_{-(n_1+\dots+n_r)+1}(\xi, \eta)$ с точностью до знака равен сумме, полученной из (5) заменой условия $h + 1 \leq p_{h+1} < \dots < p_r \leq g$ под знаком суммы на условие $f + 1 \leq p_{f+1} < \dots < p_{h-1} < h + 1 \leq p_h < p_{h+1} < \dots < p_r \leq g$. При $c_{-(n_1+\dots+n_r)+1}(\xi, \eta) \neq 0$ без ограничения общности можно считать, что

$$\det \begin{pmatrix} (\xi_1^{(1)}, \xi_1) & \dots & (\xi_1^{(h-1)}, \xi_1) & (\xi_1^{(h+1)}, \xi_1) & \dots & (\xi_1^{(r+1)}, \xi_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\xi_1^{(1)}, \xi_r) & \dots & (\xi_1^{(h-1)}, \xi_r) & (\xi_1^{(h+1)}, \xi_r) & \dots & (\xi_1^{(r+1)}, \xi_r) \end{pmatrix} \neq 0. \quad (16)$$

Так как по условию определитель

$$\det \begin{pmatrix} (\xi_1^{(1)}, \xi_1) & \dots & (\xi_1^{(r-1)}, \xi_1) & (\xi_1^{(r)}, \xi_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\xi_1^{(1)}, \xi_r) & \dots & (\xi_1^{(r-1)}, \xi_r) & (\xi_1^{(r)}, \xi_r) \end{pmatrix}$$

равен нулю, то существует нетривиальная линейная комбинация $c_1 \xi_1^{(1)} + \dots + c_h \xi_1^{(h)} + \dots + c_{r-1} \xi_1^{(r-1)} + c_r \xi_1^{(r)}$, ортогональная векторам $\xi_1, \dots, \xi_r$. В силу неравенства (16) имеем $c_h \neq 0$. Предположим, что $c_r \neq 0$. Так как по условию определитель

$$\det \begin{pmatrix} (\xi_1^{(1)}, \xi_1) & \dots & (\xi_1^{(r-1)}, \xi_1) & (\xi_1^{(r+1)}, \xi_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\xi_1^{(1)}, \xi_r) & \dots & (\xi_1^{(r-1)}, \xi_r) & (\xi_1^{(r+1)}, \xi_r) \end{pmatrix}$$

равен нулю, то найдется нетривиальная линейная комбинация $b_1 \xi_1^{(1)} + \dots + b_h \xi_1^{(h)} + \dots + b_{r-1} \xi_1^{(r-1)} + b_{r+1} \xi_1^{(r+1)}$, ортогональная векторам $\xi_1, \dots, \xi_r$. Опять в силу неравенства (16) имеем $b_h \neq 0$. Умножим линейную комбинацию $b_1 \xi_1^{(1)} + \dots + b_h \xi_1^{(h)} + \dots + b_{r-1} \xi_1^{(r-1)} + b_{r+1} \xi_1^{(r+1)}$ на c_h , а $c_1 \xi_1^{(1)} + \dots + c_h \xi_1^{(h)} + \dots + c_{r-1} \xi_1^{(r-1)} + c_r \xi_1^{(r)}$ — на $-b_h$ и сложим их. Очевидно, полученный вектор будет нетривиальной комбинацией векторов $\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_1^{(h-1)}, \xi_1^{(h+1)}, \dots, \xi_1^{(r+1)}$, ортогональной векторам $\xi_1, \dots, \xi_r$. Но это противоречит условию (16). Поэтому $c_r = 0$.

Повторяя проведенные выше рассуждения, можно показать, что $c_p = 0$ при $p = h+1, \dots, r$. Таким образом, линейная комбинация $c_1 \xi_1^{(1)} + \dots + c_h \xi_1^{(h)}$ ортогональна векторам $\xi_1, \dots, \xi_r$. Поэтому она является собственным вектором для собственного значения λ матрицы $A + B$. Условие (16) позволяет ортогонализировать с сохранением структуры (A, λ) -цепочки векторы $c_1 \xi_n^{(1)} + \dots + c_h \xi_n^{(h)}$, где $n = 2, \dots, n_h$, по отношению к векторам $\xi_1, \dots, \xi_r$ при помощи векторов $\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_1^{(h-1)}, \xi_1^{(h+1)}, \dots, \xi_1^{(r+1)}$ точно так же, как это было сделано раньше с использованием условия (12) (это возможно, так как $n_h - 1 = n_{r+1}$). В результате мы получим $(A + B, \lambda)$ -цепочку длины n_h , первый член которой будет совпадать с собственным

вектором $c_1\xi_1^{(1)} + \dots + c_h\xi_1^{(h)}$. Кроме того, указанную выше процедуру ортогонализации можно применить к жордановым цепочкам, порожденным векторами $\xi_{n_p}^{(p)}$, где $p = r + 2, \dots, k$. Это дает нам $(A + B, \lambda)$ -цепочки длины $n_{r+2}, \dots, n_k$. Так как $n_{A+B}(\lambda) = n_A(\lambda) - n_1 - \dots - n_r + 1 = n_h + n_{r+2} + \dots + n_k$, то все вместе они образуют жорданов базис корневого подпространства $L_{A+B}(\lambda)$. Поэтому при введенных выше условиях $n_h, n_{r+2}, \dots, n_k$ является рядом порядков жордановых клеток для собственного значения λ матрицы $A + B$.

Предположим теперь, что $n_h > n_r + 1$ или $n_h = n_r + 1$, но все рассмотренные выше определители вида (16) равны нулю. Тогда $c_{-(n_1+\dots+n_r)+1}(\xi, \eta) = 0$, если $n_{g+1} < n_r - 1$. Пусть $n_{g+1} = n_r - 1$. Тогда если $n_{g+1} \geq 1$ (другими словами, $n_r \geq 2$), то коэффициент $c_{-(n_1+\dots+n_r)+1}(\xi, \eta)$ с точностью до множителя $(-1)^r$ равен сумме, полученной из (5) заменой условия $h + 1 \leq p_{h+1} < \dots < p_r \leq g$ под знаком суммы на условие $h + 1 \leq p_{h+1} < \dots < p_{r-1} \leq g < p_r \leq x$, где число x определяется неравенством $n_g > n_{g+1} = \dots = n_x > n_{x+1}$. Если $n_r = 1$, то мы считаем, что $g = k$ и $x = d$. Заметим также, что в этом случае вектор $\xi_1^{(p_r)}$ в r -м столбце заменяется на вектор $\xi_n^{(p_r)}$, у которого индекс n теперь не обязан быть равным единице и принимает все возможные значения от 1 до n_{p_r} . Кроме того, при $n_r = 1$ вычитается сумма произведений миноров порядка $r - 1$ правых и левых множителей в сумме (5), содержащих все индексы от 1 до h . Этот вклад дает предпоследнее слагаемое в представлении (11).

Пусть $c_{-(n_1+\dots+n_r)+1}(\xi, \eta) \neq 0$. Тогда без ограничения общности можно считать, что при $n_r \geq 2$

$$\det \begin{pmatrix} (\xi_1^{(1)}, \xi_1) & \dots & (\xi_1^{(r-1)}, \xi_1) & (\xi_1^{(g+1)}, \xi_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\xi_1^{(1)}, \xi_r) & \dots & (\xi_1^{(r-1)}, \xi_r) & (\xi_1^{(g+1)}, \xi_r) \end{pmatrix} \neq 0, \quad (17a)$$

а при $n_r = 1$ или

$$\det \begin{pmatrix} (\xi_1^{(1)}, \xi_1) & \dots & (\xi_1^{(r-1)}, \xi_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\xi_1^{(1)}, \xi_{r-1}) & \dots & (\xi_1^{(r-1)}, \xi_{r-1}) \end{pmatrix} \neq 0, \quad (17b)$$

или

$$\det \begin{pmatrix} (\xi_1^{(1)}, \xi_1) & \dots & (\xi_1^{(r-1)}, \xi_1) & (\xi_n^{(s)}, \xi_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\xi_1^{(1)}, \xi_r) & \dots & (\xi_1^{(r-1)}, \xi_r) & (\xi_n^{(s)}, \xi_r) \end{pmatrix} \neq 0 \quad (17c)$$

для некоторых $k < s \leq d$ и $1 \leq n \leq n_s$. Так как по предположению определитель

$$\det \begin{pmatrix} (\xi_1^{(1)}, \xi_1) & \dots & (\xi_1^{(r-1)}, \xi_1) & (\xi_1^{(p)}, \xi_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\xi_1^{(1)}, \xi_r) & \dots & (\xi_1^{(r-1)}, \xi_r) & (\xi_1^{(p)}, \xi_r) \end{pmatrix}$$

равен нулю при любом $p = r, \dots, g$, то для любого такого p существует нетривиальная линейная комбинация $c_1^{(p)}\xi_1^{(1)} + \dots + c_{r-1}^{(p)}\xi_1^{(r-1)} + c_r^{(p)}\xi_1^{(p)}$ векторов

$\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_1^{(r-1)}, \xi_1^{(p)}$, ортогональная векторам $\xi_1, \dots, \xi_r$. В силу любого из условий (17) имеем $c_r^{(p)} \neq 0$ при каждом $p = r, \dots, g$. При $n_r \geq 2$ условие (17a) позволяет также ортогонализировать с сохранением структуры (A, λ) -цепочки векторы $c_1^{(p)}\xi_n^{(1)} + \dots + c_{r-1}^{(p)}\xi_n^{(r-1)} + c_r^{(p)}\xi_n^{(p)}$, где $n = 2, \dots, n_r$ и $p = r, \dots, g$, по отношению к векторам $\xi_1, \dots, \xi_r$ при помощи векторов $\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_1^{(r-1)}, \xi_1^{(g+1)}$ тем же методом, как это было сделано выше с использованием условия (12) (это возможно в силу равенства $n_{g+1} = n_r - 1$). В итоге, для каждого $p = r, \dots, g$ получим $(A + B, \lambda)$ -цепочку длины n_r , собственный вектор которой совпадает с $c_1^{(p)}\xi_1^{(1)} + \dots + c_{r-1}^{(p)}\xi_1^{(r-1)} + c_r^{(p)}\xi_1^{(p)}$. Кроме того, мы можем применить указанную процедуру ортогонализации к векторам $\xi_n^{(p)}$, где $n = 1, \dots, n_p$ и $p = g + 2, \dots, k$. Это дает нам $(A + B, \lambda)$ -цепочки длины $n_{g+2}, \dots, n_k$. При выполнении условия $c_{-(n_1+\dots+n_r)+1}(\xi, \eta) \neq 0$, которое при $c_{-(n_1+\dots+n_r)}(\xi, \eta) = 0$ эквивалентно равенству $n_{A+B}(\lambda) = n_A(\lambda) - n_1 - \dots - n_r + 1$, все построенные выше $(A + B, \lambda)$ -цепочки образуют жорданов базис корневого подпространства $L_{A+B}(\lambda)$. Поэтому $n_r, \dots, n_g, n_{g+2}, \dots, n_k$ будет рядом порядков жордановых клеток для собственного значения λ матрицы $A + B$ (при $k = g + 1$ этот ряд примет вид $n_r, \dots, n_{k-1}$, а при $n_r = 1$ число λ будет полупростым собственным значением матрицы $A + B$ кратности $k - r + 1$).

Полученные результаты позволяют судить об иерархии типичностей в изменении жордановой нормальной формы для фиксированного собственного значения λ при возмущении ранга r . Теперь ясно, что второе место в этой иерархии будет занимать изменение, при котором пропадают r самых больших жордановых клеток в жордановой форме для λ , а порядок $(r + 1)$ -й по размеру жордановой клетки увеличивается ровно на единицу: $n_1, \dots, n_k \rightarrow n_{r+1} + 1, \dots, n_k$. Действительно, для типичных векторов $\eta_1, \dots, \eta_r$, обращающих в нуль второй множитель в (13), их линейная комбинация $\eta = \beta_1\eta_1 + \dots + \beta_r\eta_r$, ортогональная векторам $\eta_1^{(1)'}, \dots, \eta_1^{(r)'}$, удовлетворяет условиям $(\eta, \eta_1^{(r+1)'}) \neq 0$ (т.е. $a = r + 1$) и $(\eta, \eta_2^{(1)'}) \neq 0$ при $n_1 \geq 2$ (заметим, что если эти скалярные произведения равны нулю, то $(\hat{\eta}, \eta_1^{(r+1)'}) = \beta_1\gamma_1$ и $(\hat{\eta}, \eta_2^{(1)'}) = \beta_r\gamma_2$, например, для линейной комбинации $\hat{\eta} = \beta_1(\eta_1 + \gamma_1\xi_{n_{r+1}}^{(r+1)'}) + \dots + \beta_r(\eta_r + \gamma_2\xi_{n_1-1}^{(1)'})$, которая также ортогональна векторам $\eta_1^{(1)'}, \dots, \eta_1^{(r)'}$). Первое неравенство означает, что увеличиваться будет именно $(r + 1)$ -я цепочка длины n_{r+1} , а второе гарантирует, что величина этого увеличения будет равна единице.

При $n_{A+B}(\lambda) = n_A(\lambda) - n_1 - \dots - n_r + 1$ можно сформулировать следующий закон: чем меньше порядок n_p , где $p = r + 1, \dots, k$, тем менее типичным будет увеличение на единицу размера какой-нибудь жордановой клетки порядка n_p . В частности, самым нетипичным изменением при таком условии будет образование $k - r + 1$ собственных векторов для собственного значения λ матрицы $A + B$ (т.е. переход $n_1, \dots, n_k \rightarrow n_{r+1}, \dots, n_k, 1$). Из предложенного выше построения также следует, что теперь (мы здесь также предполагаем, что $L_A(\lambda) \neq \mathbb{C}^N$) типичным явлением будет нарушение включения корневых подпространств $L_{A+B}(\lambda) \subset L_A(\lambda)$, выполненного всегда, когда справедливо равенство $n_{A+B}(\lambda) = n_A(\lambda) - n_1 - \dots - n_r$. С другой стороны, такое включение будет иметь место, если все левые определители в сумме (5) равны нулю.

§ 5. Ряд Лорана функции $\det(E - A(\xi, \eta)(z))$ и детерминанты Лидского

Для любой матрицы B ранга r и любого набора чисел $1 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_r \leq k$ обозначим через $\mathbf{B}_{p_1, \dots, p_r}$ главную подматрицу матрицы

$$\begin{pmatrix} (B\xi_1^{(1)}, \eta_1^{(1)}) & \dots & (B\xi_1^{(k)}, \eta_1^{(1)}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (B\xi_1^{(1)}, \eta_1^{(k)}) & \dots & (B\xi_1^{(k)}, \eta_1^{(k)}) \end{pmatrix}, \quad (18)$$

образованную пересечением строк и столбцов с номерами $p_1, \dots, p_r$. Нетрудно проверить, что если транспонировать вторую матрицу в неравенстве (5) и затем умножить ее на первую матрицу слева, то мы получим матрицу $\mathbf{B}_{1, \dots, h, p_{h+1}, \dots, p_r}$. Таким образом, условие отличия от нуля суммы (5) можно переписать следующим образом:

$$\sum_{h+1 \leq p_{h+1} < \dots < p_r \leq g} \det \mathbf{B}_{1, \dots, h, p_{h+1}, \dots, p_r} \neq 0. \quad (19)$$

В частности, если $k = r$, то точка $z = \lambda$ остается в спектре возмущенного оператора $A + B$ тогда и только тогда, когда матрица (18) является вырожденной. В этом случае существует или собственный вектор матрицы A для λ , принадлежащий ядру $\text{Ker } B$ оператора B , или собственный вектор матрицы A^T для λ , входящий в $\text{Ker } B^T$.

Нетрудно показать, что

$$A(\varepsilon \xi, \eta)(z) = A(\xi, \varepsilon \eta)(z) = \varepsilon A(\xi, \eta)(z).$$

Поэтому для старшего коэффициента $c_{-(n_1 + \dots + n_r)}(\xi, \eta)(\varepsilon)$ разложения в ряд Лорана функции $\det(E - A(\varepsilon \xi, \eta)(z))$ в точке $z = \lambda$ справедливо тождество:

$$c_{-(n_1 + \dots + n_r)}(\xi, \eta)(\varepsilon) = \varepsilon^r c_{-(n_1 + \dots + n_r)}(\xi, \eta)(1) = \varepsilon^r c_{-(n_1 + \dots + n_r)}(\xi, \eta).$$

Следовательно, если сумма (5) не равна нулю, то $n_{A+\varepsilon B}(\lambda) = n_A(\lambda) - n_1 - \dots - n_r$ для любого $\varepsilon \neq 0$. Мы видели выше, что в этом случае корневое подпространство $L_{A+B}(\lambda)$ принадлежит ядру оператора B . Поэтому корневое подпространство $L_{A+\varepsilon B}(\lambda)$ не зависит от $\varepsilon \neq 0$ и совпадает с $L_{A+B}(\lambda)$. Кроме того, жорданов базис, построенный для собственного значения λ матрицы $A+B$, годится для любого $\varepsilon \neq 0$. В частности, это означает, что $n_{r+1}, \dots, n_k$ являются порядками жордановых клеток для собственного значения λ матрицы $A + \varepsilon B$ при любом $\varepsilon \neq 0$.

Для того чтобы построить теорию возмущений для новых $n_1 + \dots + n_r$ собственных значений матрицы $A + \varepsilon B$, отщепившихся от λ , нам понадобятся некоторые обозначения из работы Лидского [11]. Предположим, что порядки жордановых клеток $n_1 \geq \dots \geq n_k$ принимают ровно t значений $v_1 > \dots > v_t$ (в частности, $v_1 = n_1 = q$). Для любого $1 \leq s \leq t$ обозначим через q_s наибольший номер p , при котором $n_p = v_s$ (таким образом, $v_s = n_{q_s} > n_{q_s+1} = v_{s+1}$). Определим число m условием $n_{q_m} = n_r$. Таким образом, в старых обозначениях имеем $q_{m-1} = h$ и $q_m = g$ (в частности, $g - h$ равно числу жордановых клеток порядка n_r матрицы A

для λ). Положим $r_s = q_s - q_{s-1}$ (здесь $q_0 = 0$). Пусть E_{q_s, r_s} — квадратная матрица порядка q_s , имеющая вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{r_s} \end{pmatrix},$$

где E_{r_s} — единичная матрица порядка r_s .

Следующая теорема дает информацию о тех собственных значениях матрицы $A + \varepsilon B$, которые не принадлежат спектру A и расположены вблизи точки $z = \lambda$. Она является прямым следствием доказательства теоремы 1 работы [11] и того факта, что коэффициент при σ^{g-h} многочлена $\det(\mathbf{B}_{1, \dots, g} - \sigma E_{g, g-h})$ степени $g-h$ с точностью до знака совпадает с $\det \mathbf{B}_{1, \dots, h}$, а при σ^{g-r} — с суммой

$$\sum_{h+1 \leq p_{h+1} < \dots < p_r \leq g} \det \mathbf{B}_{1, \dots, h, p_{h+1}, \dots, p_r}.$$

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что $\det \mathbf{B}_{1, \dots, q_s} \neq 0$ при $s = 1, \dots, m-1$ и выполнено условие (19). Тогда при достаточно малых ε в достаточно малой проколотой окрестности точки $z = \lambda$ находятся ровно $n_1 + \dots + n_r$ собственных значений матрицы $A + \varepsilon B$, каждое из которых допускает следующее представление:*

$$\lambda_n^{(p)}(\varepsilon) = \lambda + \varepsilon^{1/n_p} e^{2\pi i n/n_p} \sigma_p^{1/n_p} + o(\varepsilon^{1/n_p}), \quad p = 1, \dots, r, \quad n = 1, \dots, n_p, \quad (20)$$

где при любом $s = 1, \dots, m$ числа

$$\sigma_{q_{s-1}+1}, \dots, \sigma_{\min\{q_s, r\}}$$

совпадают с ненулевыми решениями уравнения

$$\det(\mathbf{B}_{1, \dots, q_s} - \sigma E_{q_s, r_s}) = 0.$$

Если, кроме того, все числа $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ различны, то все собственные значения (20) являются простыми при достаточно малом ε и разлагаются в степенные ряды по степеням ε^{1/n_p} .

Пусть $B = \sum_{i=1}^r (\cdot, \xi_i) \eta_i$ — представление оператора B ранга r при помощи двух систем $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_r\}$ и $\eta = \{\eta_1, \dots, \eta_r\}$ линейно независимых векторов. Тогда условие $\det \mathbf{B}_{1, \dots, q_s} \neq 0$ в теореме 2 влечет типичное изменение жордановой формы для λ при переходе от A к его возмущению $A + \sum_{p=1}^{q_s} (\cdot, \xi_{i_p}) \eta_{i_p}$ некоторым усеченным оператором $\sum_{p=1}^{q_s} (\cdot, \xi_{i_p}) \eta_{i_p}$ ранга q_s . Обратное, строго говоря, неверно.

Для каждого $s = 0, \dots, r$ также можно определить усеченный оператор $B_s = \sum_{i=1}^s (\cdot, \xi_i) \eta_i$ ранга s (таким образом, $B_0 = 0$ и $B_r = B$). Имеет смысл рассматривать переход от $A + B_s$ к $A + B_{s+1}$ при $s = 0, \dots, r-1$. Понятно, что эти два возмущения отличаются друг от друга оператором ранга один $(\cdot, \xi_{s+1}) \eta_{s+1}$. Очевидно, для типичного оператора B ранга r при переходе от $A + B_s$ к $A + B_{s+1}$ у фиксированного собственного значения λ пропадает самая большая жорданова клетка, а порядки остальных не изменяются. В этом случае можно говорить о

каскаде типичных изменений спектральных свойств λ . Само по себе равенство $n_{A+B}(\lambda) = n_A(\lambda) - n_1 - \dots - n_r$ влечет только понижение геометрической кратности λ на единицу при переходе от $A + B_s$ к $A + B_{s+1}$ для любого $s = 0, \dots, r-1$. Типичное изменение жордановой формы теперь можно гарантировать только при $s = r-1$ (т.е. при переходе от $A + B_{r-1}$ к $A + B$).

В заключение отметим, что рассуждения, сделанные в [11; § 4], позволяют распространить полученные результаты на случай изолированного собственного значения λ конечной кратности оператора A , действующего в гильбертовом пространстве, если соответствующее корневое подпространство является нормально отщепляющимся (см. [15]).

Приложение: изменение характеристики Вейра при возмущении ранга r

Пусть A — произвольная матрица. Для любого собственного значения λ и натурального числа m положим

$$\sigma_m(A, \lambda) = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda E)^m - \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda E)^{m-1}.$$

Пусть q — порядок максимальной по размеру жордановой клетки матрицы A для λ (другими словами, индекс собственного значения λ). Тогда $\sigma_1(A, \lambda) \geq \sigma_2(A, \lambda) \geq \dots \geq \sigma_q(A, \lambda) > 0$ и $\sigma_m(A, \lambda) = 0$ при $m > q$. Последовательность чисел $\sigma_1(A, \lambda), \dots, \sigma_q(A, \lambda)$ называется *характеристикой Вейра* собственного значения λ матрицы A (она впервые была введена в [16]). Очевидно, она однозначно определяет часть жордановой нормальной формы A , соответствующую λ .

ЛЕММА 2. Пусть A — произвольная квадратная матрица и B — оператор ранга r . Тогда для любого собственного значения λ матрицы A и натурального числа m справедливо неравенство:

$$\sigma_m(A, \lambda) - r \leq \sigma_m(A + B, \lambda) \leq \sigma_m(A, \lambda) + r. \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждый оператор ранга r может быть представлен в виде суммы r операторов ранга один. Кроме того, очевидно, $A = (A + B) - B$ и $\operatorname{rank}(-B) = \operatorname{rank} B$. Поэтому для доказательства леммы достаточно рассмотреть только левую часть неравенства и показать ее справедливость для случая $r = 1$.

По определению последовательность векторов $\xi_1, \dots, \xi_m$ является (A, λ) -цепочкой, если $(A - \lambda E)\xi_n = \xi_{n-1}$ при $n = 1, \dots, m$ (мы считаем, что $\xi_0 = 0$). В этом случае мы будем говорить, что она порождена вектором ξ_m , имеет длину m и ξ_1 является ее собственным вектором. В силу определения величины $\sigma_m(A, \lambda)$ неравенство $\sigma_m(A, \lambda) \geq \ell$ равносильно существованию ℓ различных (A, λ) -цепочек длины m , собственные векторы которых линейно независимы. Обозначим их через $\xi_1^{(p)}, \dots, \xi_m^{(p)}$, где $p = 1, \dots, \ell$.

Любой оператор B ранга один имеет вид $(\cdot, \xi)\eta$, где ξ и η — некоторые ненулевые векторы (они могут совпадать). Пусть h — такое наибольшее число, что $(\xi_n^{(1)}, \xi) = \dots = (\xi_n^{(\ell)}, \xi) = 0$ при любом $n = 0, \dots, h-1$. Если $h = m+1$,

то последовательность векторов $\xi_1^{(p)}, \dots, \xi_m^{(p)}$ будет $(A + B, \lambda)$ -цепочкой длины m при любом $p = 1, \dots, \ell$ и, следовательно, $\sigma_m(A + B, \lambda) \geq \ell$.

Предположим теперь, что $h \leq m$. Без ограничения общности можно считать, что $(\xi_h^{(\ell)}, \xi) \neq 0$. Тогда при любом $p = 1, \dots, \ell - 1$ существует (единственное) число $\alpha_h^{(p)}$, для которого $(\xi_h^{(p)} - \alpha_h^{(p)} \xi_h^{(\ell)}, \xi) = 0$, и, следовательно, (A, λ) -цепочки, порожденные векторами

$$\xi_h^{(1)} - \alpha_h^{(1)} \xi_h^{(\ell)}, \dots, \xi_h^{(\ell-1)} - \alpha_h^{(\ell-1)} \xi_h^{(\ell)},$$

ортогональны вектору ξ . Аналогичным образом определим число $\alpha_{h+1}^{(p)}$ так, чтобы $(\xi_{h+1}^{(p)} - \alpha_{h+1}^{(p)} \xi_{h+1}^{(\ell)} - \alpha_{h+1}^{(p)} \xi_h^{(\ell)}, \xi) = 0$ при $p = 1, \dots, \ell - 1$. При таком выборе коэффициентов (A, λ) -цепочки, порожденные векторами

$$\xi_{h+1}^{(1)} - \alpha_{h+1}^{(1)} \xi_{h+1}^{(\ell)} - \alpha_{h+1}^{(1)} \xi_h^{(\ell)}, \dots, \xi_{h+1}^{(\ell-1)} - \alpha_{h+1}^{(\ell-1)} \xi_{h+1}^{(\ell)} - \alpha_{h+1}^{(\ell-1)} \xi_h^{(\ell)},$$

будут также ортогональны вектору ξ . Применяя эту процедуру ортогонализации необходимое число раз, мы получим $\ell - 1$ различных (A, λ) -цепочек длины m , ортогональных ξ . Последнее условие означает, что они являются также $(A + B, \lambda)$ -цепочками длины m . Так как эти цепочки порождены векторами

$$\xi_m^{(1)} - \sum_{i=h}^m \alpha_i^{(1)} \xi_{m+i}^{(\ell)}, \dots, \xi_m^{(\ell-1)} - \sum_{i=h}^m \alpha_i^{(\ell-1)} \xi_{m+i}^{(\ell)},$$

то их собственные векторы линейно независимы. Поэтому $\sigma_m(A + B, \lambda) \geq \ell - 1$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $r = 1$ неравенство (21) является также прямым следствием матричной теоремы 2 работы [17]. Однако наше доказательство, основанное на довольно простой и естественной процедуре ортогонализации, влечет справедливость неравенства (21) даже в случае бесконечномерного банахова пространства.

Пусть $n_A(\lambda)$ — алгебраическая кратность собственного значения λ матрицы A . Хорошо известно [14], что она равна размерности соответствующего корневого подпространства $L_A(\lambda)$: $n_A(\lambda) = \dim L_A(\lambda)$. В частности, это означает, что

$$n_A(\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_m(A, \lambda) = \sum_{m=1}^q \sigma_m(A, \lambda). \quad (22)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть A — произвольная квадратная матрица, λ — ее собственное значение и $n_1 \geq \dots \geq n_k$ — порядки его жордановых клеток. Тогда для любого оператора B ранга $r < k$ справедливо неравенство

$$n_{A+B}(\lambda) \geq n_A(\lambda) - n_1 - \dots - n_r,$$

причем равенство в нем имеет место тогда и только тогда, когда последовательность $n_{r+1}, \dots, n_k$ является рядом порядков жордановых клеток для собственного значения λ матрицы $A + B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $J(A, \lambda)$ – диаграмма Жордана, состоящая из k столбцов со звездочками * высоты $n_1, \dots, n_k$. Очевидно, $\sigma_m(A, \lambda)$ совпадает с количеством звездочек * в m -й строке этой диаграммы. Поэтому сумма

$$\sum_{m=1}^q \min\{r, \sigma_m(A, \lambda)\}$$

равна числу звездочек * в ее r первых столбцах. Другими словами, справедливо равенство

$$\sum_{m=1}^q \min\{r, \sigma_m(A, \lambda)\} = n_1 + \dots + n_r.$$

Понятно, что левую часть в (21) можно заменить на разность

$$\sigma_m(A, \lambda) - \min\{r, \sigma_m(A, \lambda)\}.$$

Тогда новый вариант леммы 2 и равенство (22) позволяют доказать следующее неравенство:

$$\begin{aligned} n_{A+B}(\lambda) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_m(A+B, \lambda) \geq \sum_{m=1}^{\infty} (\sigma_m(A, \lambda) - \min\{r, \sigma_m(A, \lambda)\}) \\ &= \sum_{m=1}^q \sigma_m(A, \lambda) - \sum_{m=1}^q \min\{r, \sigma_m(A, \lambda)\} = n_A(\lambda) - n_1 - \dots - n_r. \end{aligned} \quad (23)$$

Предположим теперь, что $n_{A+B}(\lambda) = n_A(\lambda) - n_1 - \dots - n_r$. Тогда неравенство в (23) превращается в равенство

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sigma_m(A+B, \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} (\sigma_m(A, \lambda) - \min\{r, \sigma_m(A, \lambda)\}). \quad (24)$$

Так как в силу леммы 2 имеем $\sigma_m(A+B, \lambda) \geq \sigma_m(A, \lambda) - \min\{r, \sigma_m(A, \lambda)\}$, то из (24) следует, что

$$\sigma_m(A+B, \lambda) = \sigma_m(A, \lambda) - \min\{r, \sigma_m(A, \lambda)\}$$

при любом m . Это условие равносильно удалению ровно $\min\{r, \sigma_m(A, \lambda)\}$ звездочек * из m -й строки диаграммы Жордана $J(A, \lambda)$ при любом m . Полученная таким образом диаграмма Жордана соответствует следующему изменению самой жордановой формы: у собственного значения λ пропадают r самых больших жордановых клеток, а порядки остальных не изменяются. Следствие доказано.

Для того чтобы удалить жорданову клетку из части жордановой формы, соответствующей собственному значению λ , достаточно заменить нуль в ее левом нижнем углу на единицу (очевидно, ранг такого преобразования равен единице).

Поэтому полученное в следствии 1 неравенство – точное: всегда существует такое возмущение B ранга r , что $n_{A+B}(\lambda) = n_A(\lambda) - n_1 - \dots - n_r$.

Из [17; теорема 2] следует, что при $r = 1$ неравенства (21) являются единственными нетривиальными ограничениями при построении жордановых диаграмм для собственного значения λ новой матрицы $A + B$. Очевидно, это утверждение остается справедливым и в случае произвольного r . Таким образом, мы можем очень просто описать все возможные изменения жордановой нормальной формы при выполнении условия

$$n_{A+B}(\lambda) = n_A(\lambda) - n_1 - \dots - n_r + \gamma, \quad (25)$$

где γ – произвольное натуральное число. Действительно, пусть $J_r(A, \lambda)$ – усеченная диаграмма, полученная удалением первых r столбцов из $J(A, \lambda)$. Тогда добавляя γ звездочек $*$ к столбцам диаграммы $J_r(A, \lambda)$ (в том числе и к пустым) так, чтобы длина любой ее строки (в том числе и пустой) увеличилась бы не более чем на $2r$, мы получаем все возможные диаграммы Жордана $J(A + B, \lambda)$ при возмущении оператором B ранга r , удовлетворяющим равенству (25). Очевидно, при $\gamma \leq 2r$ условие на длину строки выполнено автоматически. В частности, если $\gamma = 1$, то мы будем иметь следующие последовательности порядков жордановых клеток для λ , рассматриваемого как собственное значение новой матрицы $A + B$:

$$n_{r+1} + 1, \dots, n_k; n_{r+1}, n_{r+2} + 1, \dots, n_k; \dots; n_{r+1}, \dots, n_k + 1; n_{r+1}, \dots, n_k, 1.$$

При $n_1 > \dots > n_k$ все эти последовательности останутся различными даже после упорядочения элементов по невозрастанию. В противном случае часть из них будет дублировать остальные. Например, если $n_1 = \dots = n_k = q$, то неэквивалентными будут всего две последовательности: $q + 1, q, \dots, q$ и $q, \dots, q, 1$.

Список литературы

1. Савченко С. В. Об изменении спектральных свойств матрицы при возмущении достаточно низкого ранга // Функциональный анализ и приложения. 2004. Т. 38. № 1. С. 85–88.
2. Hörmander L., Melin A. A remark on perturbations of compact operators // Math. Scand. 1994. V. 75. P. 255–262.
3. Moro J., Dopico F. M. Low rank perturbation of Jordan structure // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2003. V. 25. № 2. P. 495–506.
4. Elsner L., Olesky D. D., van den Driessche P. Low rank perturbations and the spectrum of a tridiagonal sign pattern // Linear Algebra Appl. 2003. V. 374. P. 219–230.
5. Savchenko S. V. On the Perron roots of principal submatrices of co-order one of irreducible nonnegative matrices // Linear Algebra Appl. 2003. V. 361. P. 257–277.
6. Маркус А. С., Парилус Е. Э. Об изменении жордановой структуры матрицы при малых возмущениях // Матем. исследования. 1980. Т. 54. С. 98–109.
7. Den Boer H., Thijsse G. Ph. A. Semi-stability of sums of partial multiplicities under additive perturbation // Integral Equations Operator Theory. 1980. V. 3. P. 23–42.
8. Matsaev V., Olshevsky V. Cyclic dimensions, kernel multiplicities, and Cohberg–Kaashoek numbers // Linear Algebra Appl. 1996. V. 239. P. 161–174.
9. Kato T. Perturbation theory for linear operators. Berlin: Springer, 1980.
10. Baumgärtel H. Analytic perturbation theory for matrices and operators. Basel: Birkhäuser, 1985.
11. Лидский В. Б. К теории возмущений несамосопряженных операторов // ЖВМ и МФ. 1966. Т. 6. № 1. С. 52–60.

12. *Moro J., Dopico F. M.* First order eigenvalue perturbation theory and the Newton diagram // Proceedings of the Second Conference on Applied Mathematics and Scientific Computing. Dubrovnik, 2001. New York: Kluwer Acad. Publ., 2003. P. 143–175.
13. *Moro J., Burke J. V., Overton M. L.* On the Lidskii–Vishik–Lyusternik perturbation theory for eigenvalues of matrices with arbitrary Jordan structure // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 1997. V. 18. P. 793–817.
14. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967.
15. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Основные положения о дефектных и корневых числах и индексах линейных операторов // УМН. 1957. Т. 12. №2. С. 43–118.
16. *Weyr E.* Zur Theorie der bilinearen Formen // Monatsh. Math. 1890. V. 1. P. 163–236.
17. *Thompson R. C.* Invariant factors under rank one perturbations // Canad. J. Math. 1980. V. 32. №1. P. 240–245.

Институт теоретической физики
им. Л. Д. Ландау РАН
E-mail: sav@icp.ac.ru

Поступила в редакцию
16.06.2004