Общероссийский математический портал

А. С. Садуллаев, О плюригармоническом продолжении вдоль фиксированного направления, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 5, 145–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1361>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 12:36:44

УДК 517.55+517.519

А. Садуллаев

О плюригармоническом продолжении вдоль фиксированного направления

В работе рассматриваются вопросы голоморфного и плюригармонического продолжения функций вдоль фиксированного направления. Устанавливается, что при продолжении плюригармонических функций с граничного пучка прямых обычно возникает многозначность продолжения. Это обстоятельство напрямую связано с одним контрпримером Лебенберга и Слодковского об отсутствии в общем случае потенциала для псевдогогнутых множеств.

Библиография: 10 названий.

Введение

В препринте “Псевдогогнутые множества и аналитические лемнискаты” автором была сделана попытка аппроксимировать заданное псевдогогнутое множество S алгебраическими лемнискатами $L = \{|P_k(z)|^{1/k} < \varepsilon\}$ (терминологию см. в [1], [2]). Этот вопрос, имеющий самостоятельный интерес, важен также в теории рациональных приближений, в спектральной теории банаховых алгебр и др. (см., например, [3]–[5]). В препринте был сообщен следующий результат.

- (*) Если S – ограниченное псевдогогнутое плюриполярное множество в области $D_{1+\varepsilon} = U_{1+\varepsilon} \times \mathbb{C} = \{|z| < 1 + \varepsilon\} \times \mathbb{C}$, то в $D = U \times \mathbb{C} = \{|z| < 1\} \times \mathbb{C}$ оно является полярным множеством некоторой плюригармонической (Ph) функции, т.е. существует плюрисубгармоническая (Psh) в D функция u , плюригармоническая в $D \setminus S$ и такая, что $u|_{D \cap S} = -\infty$.

Однако, как заметили Лебенберг и Слодковский [6], этот результат неверный: для множества $A = \{e^{1+1/w} - z = 0\} \cup \{w = 0\} \subset \mathbb{C}^2$ не существует $u \in \text{Psh}(D) \cap \text{Ph}(D \setminus A)$ такой, что $u|_{A \cap D} = -\infty$. В работе [6] изучены также вопросы о возможности аппроксимации A алгебраическими лемнискатами, их связь с полными плюриполярными множествами. Я глубоко благодарен этим авторам за то, что они своевременно обратили мое внимание на пробел в доказательстве (*).

Предложенное в препринте доказательство (*) опиралось на следующий факт: для специальной аналитической меры $\mu_\xi(w)$, сосредоточенной на $S \cap \{\xi, w\} \in \mathbb{C}^2$, $|\xi| = 1$, рассматривался потенциал

$$U^\mu(\xi, w) = \int \ln |\xi - w| d\mu_\xi(w).$$

Функция U^μ , субгармоническая по w и гармоническая вне носителя $\mu_\xi(w)$ для каждого фиксированного $\xi \in \partial U$, плюригармонически продолжается в $U \times \{|w| > R\}$

с некоторой константой $R > 0$ (см. ниже §3). Кроме того, $\frac{\partial U^\mu(\xi, \mu)}{\partial \xi}$ голоморфно продолжается в $(U \times \mathbb{C}) \setminus S$. Отсюда по аналогии с голоморфными функциями был сделан вывод, что U^μ будет однозначной и, следовательно, плюригармонической в $(U \times \mathbb{C}) \setminus S$. Как выяснилось позже, оказывается, что это заключение неверно.

В связи с этим естественно возникает следующий вопрос.

(**) Пусть $'D \subset \mathbb{C}^{n-1}$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial 'D$ и $E \subset \overline{'D}$ – некоторое подмножество (в зависимости от рассматриваемой задачи в качестве E обычно берут неплюриполярное в $'D$ множество или граничное множество положительной меры и т.п.). Предположим, что функция $u('z, z_n) \in \text{Ph}('D \times U_n) \cap C('D \times U_n)$ при каждом фиксированном $'z^0 \in E$ гармонически продолжается на всю $\mathbb{C}$, за исключением некоторого “тонкого” множества особенностей S_{z^0} , где $U_n = \{|z_n| < r_n\}$, $r_n > 0$. Что можно тогда сказать об однозначности продолжения $u('z, z_n)$ в $'D \times \mathbb{C}$? В случае голоморфных функций этот вопрос хорошо изучен (см. [7]–[9]).

Предлагаемая работа посвящена именно этим вопросам. В ней изучаются различные ситуации, связанные с однозначностью или многозначностью продолжения плюригармонических функций, строится ряд примеров и формулируются некоторые задачи в этом направлении. Кроме того, для полноты изложения в §1 мы формулируем некоторые известные результаты, имеющие непосредственное отношение к рассматриваемой тематике.

§1. Голоморфные функции с особенностями на пучке прямых

Известная лемма Хартогса о голоморфном продолжении по одному из направлений имеет множество различных по характеру обобщений. Следующая теорема, доказанная совместно с Е. М. Чиркой, является одним из них ([7], см. также [8]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $f('z, z_n)$ голоморфна в области $D = 'D \times U_n$ и при каждом фиксированном $'a$ из некоторого не плюриполярного множества $E \subset 'D$ функция $f('a, z_n)$ переменного z_n голоморфно продолжается на всю плоскость $\mathbb{C}$, за исключением некоторого дискретного (полярного) множества особенностей S_a . Тогда f голоморфно продолжается в $(D \times \mathbb{C}) \setminus S$, где S – аналитическое (плюриполярное) множество в $D \times \mathbb{C}$.

Трудным в доказательстве теоремы является тот факт, что особые множества $S_{z'}$, $z' \in 'D$, а priori могут произвольно зависеть от параметра z' . Чтобы контролировать и описать их, в работе существенно используются ряды Якоби–Хартогса, свойства функций класса R^0 , введенного А. А. Гончаром, свойства плюрисубгармонических функций и комплексная теория потенциала.

С. Имомкулов и Ж. Хужамов доказали, что теорема 1 распространяется и на случай, когда $'D \subset \mathbb{C}^{n-1}$ – ограниченная область с гладкой границей, $E \subset \partial 'D$ – подмножество положительной меры Лебега, $\text{mes}_{2n-3} E > 0$ и $f('z, z_n) \in \mathcal{O}('D \times U_n) \cap C('D \times U_n)$.

Здесь естественно возникает вопрос о непрерывности продолжения на множестве $(\overline{'D} \times \mathbb{C}) \setminus \overline{S}$, т.е. о наследственности свойства исходной непрерывности $C('D \times U_n)$.

для продолжения. Имеет место

ТЕОРЕМА 2 (А. Садуллаев, С. Имомкулов). Пусть E – открытое подмножество границы $\partial'D$, $f(z, z_n) \in \mathcal{O}(D \times U_n) \cap C((D \cup E) \times U_n)$, причем для каждого фиксированного $a \in E$ функция $f(a, z_n)$ голоморфно продолжается в $\mathbb{C} \setminus S_a$, где S_a – тонкое (дискретное, полярное) множество. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое плотное подмножество $E^\varepsilon \subset E$ такое, что аналитическое продолжение f , которое голоморфно в $(D \times \mathbb{C}) \setminus S$, будет непрерывным в $((D \cup E^\varepsilon) \times \mathbb{C}) \setminus S_\varepsilon$, где S_ε есть ε -окрестность множества S .

ЗАМЕЧАНИЕ. Из этой теоремы очевидно вытекает существование открытого плотного граничного множества $\Gamma \subset E \times \mathbb{C}$ такого, что аналитическое продолжение f будет непрерывным вплоть до Γ .

Доказательство теоремы основано на следующей лемме и на свойствах ограниченных сепаратно-аналитических функций.

ЛЕММА 1. Пусть функция $f(z, z_n)$ голоморфна в области $D \times U_n$ и непрерывна на $(D \cup E) \times U_n$, где $E \subset \partial'D$ – открытое граничное подмножество. Если для каждого $a \in E$ функция $f(a, z_n)$ переменного z_n голоморфно продолжается в W_n , где $W_n \supset U_n$ – некоторая фиксированная плоская область, то для любого заданного компакта $F \subset W_n$ существует открытое подмножество $E^0 \subset E$ такое, что f ограничена на $E^0 \times F$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя конформные отображения, без нарушения общности предположаем, что $W_n = \{|z_n| < R_n\}$ – круг. Разлагаем функцию $f(z, z_n)$ в ряд Хартогса:

$$f(z, z_n) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z) z_n^k.$$

Из условия леммы коэффициенты ряда

$$c_k(z) \in \mathcal{O}(D) \cap C(D \cup E), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Фиксируем числа $0 < t < 1$, $m \in \mathbb{N}$ и положим

$$E_m = \left\{ z \in E : |c_k(z)| \leq \frac{m}{(tR_n)^k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \right\}.$$

Тогда $E_m \subset E_{m+1}$ и из непрерывности функций $c_k(z)$ вытекает, что E_m замкнуто. Так как для любой фиксированной точки $z^0 \in E$ функция $f(z^0, z_n)$ ограничена в круге $|z_n| \leq tR_n$: $|f(z^0, z_n)| \leq M_t$, то по неравенствам Коши $|c_k(z^0)| \leq \frac{M_t}{(tR_n)^k}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Это означает, что $z^0 \in E_m$ для $m \geq M_t$ и, следовательно, $E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$. По теореме Бэра о категориях начиная с некоторого $m \geq m_0$ открытое ядро E_m^0 множества E_m непусто, причем $\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m^0$ всюду плотно в E .

С другой стороны, для $z^0 \in E_m$ имеет место неравенство

$$|f(z^0, z_n)| \leq m \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|z_n|}{tR_n} \right)^k = \frac{mtR_n}{tR_n - |z_n|},$$

из которого вытекает ограниченность f на множестве $E_m^0 \times \{|z_n| \leq t^2 R_n\}$. Лемма доказана.

Следующий пример показывает, что в общем случае в теореме 2 множество $E^0 \neq E$.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим в бикруге

$$U \times V = \{|z| < 1\} \times \{|w| < 1\}$$

функцию

$$f(z, w) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-z) \frac{e^{k^2(z-1)}}{k^2} w^k.$$

Так как при $|z| \leq 1, |w| \leq 1$

$$\left| (1-z) \frac{e^{k^2(z-1)}}{k^2} w^k \right| \leq \frac{2}{k^2} e^{k^2 \operatorname{Re}(z-1)} \leq \frac{2}{k^2},$$

то ряд сходится равномерно в единичном поликруге и его сумма $f(z, w) \in \mathcal{O}(U \times V) \cap C(\overline{U} \times \overline{V})$. Кроме того, для любого фиксированного $|z^0| = 1$ функция $f(z^0, w)$ голоморфно продолжается на всю плоскость $\mathbb{C}$. Однако

$$f\left(1 - \frac{1}{j}, 2\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(-k^2/j^2)}{j^2 k^2} 2^k \geq \frac{2^j}{j^4} \rightarrow \infty$$

при $j \rightarrow \infty$, что показывает неограниченность $f(z, w)$ вблизи граничной прямой $\{z = 1\}$.

§ 2. Продолжение плюригармонических функций вдоль фиксированного направления

Лемма Хартогса о голоморфном продолжении справедлива и в случае плюригармонических функций: *если функция $u(z, z_n)$ плюригармонична в области $'U \times U_n = 'U \times \{|z_n| < r_n\}$ и при каждом фиксированном $'z^0 \in 'U$ функция $u('z^0, z_n)$ переменного z_n гармонически продолжается в больший круг $|z_n| < R_n, r_n < R_n$, то $u(z, z_n) \in \operatorname{Ph}$ продолжается в $'U \times \{|z_n| < R_n\}$.*

Действительно, функция $f(z, z_n) = u(z, z_n) + iv(z, z_n)$ удовлетворяет всем требованиям основной леммы Хартогса, где $v(z, z_n)$ — сопряженная плюригармоническая функция к $u(z, z_n)$, $v \in \operatorname{Ph}('U \times U_n)$ и $f = u + iv \in \mathcal{O}('U \times U_n)$. При фиксированном $'z^0 \in 'U$ функция $v('z^0, z_n)$ как сопряженная к $u('z^0, z_n)$ гармонически продолжается в круг $|z_n| < R_n$. Следовательно, f голоморфно продолжается в $'U \times \{|z_n| < R_n\}$ и поэтому $u(z, z_n) \in \operatorname{Ph}('U \times \{|z_n| < R_n\})$.

В случае, когда $u(z, z_n)$ имеет особенность по переменной z_n (аналог теоремы 1), такое простое доказательство не проходит, так как сопряженная гармоническая функция в неодносвязную область может продолжаться не однозначным

образом, т.е. функция $f(z, z_n) = u(z, z_n) + iv(z, z_n)$ по направлению z_n может быть многозначной.

Тем не менее, имеет место

ТЕОРЕМА 3 (А. Садуллаев, С. Имомкулов). Пусть $u(z, z_n)$ – плюригармоническая функция в области $'D \times U_n \subset \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ и при каждом фиксированном $'z^0$ из некоторого неплюриполярного множества $E \subset 'D$ функция $u('z^0, z_n)$ перемного z_n продолжается до функции, гармонической на всей плоскости $\mathbb{C}$, за исключением одной особой точки. Тогда $u(z, z_n)$ плюригармонически (может быть, многозначно) продолжается в $('D \times \mathbb{C}) \setminus S$, где S – график некоторой мероморфной функции $S = \{z_n = a(z)\}$. Более того, если E не содержится в счетном объединении локальных множеств нулей плюригармонических функций, то продолжение $u(z, z_n)$ является однозначным.

ЗАМЕЧАНИЕ. Множество $E \subset \mathbb{C}^n$ называется локальным множеством нулей плюригармонических функций, если для каждой точки $z^0 \in E$ существуют окрестность $B \ni z^0$ и функция $u \in \text{Ph}(B)$, $u \not\equiv 0$, такая, что $u|_{E \cap B} = 0$. Любое подмножество $E \subset \mathbb{C}^n$ положительной меры (или хаусдорфовой размерности $> 2n - 1$) не является счетным объединением локальных множеств нулей Ph функций. Наоборот, любая гиперплоскость является нулем некоторой Ph функции, хотя она и не является плюриполярной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Заметим, что производная

$$\frac{\partial u}{\partial z_n} = \frac{\partial u}{\partial x_n} - i \frac{\partial u}{\partial y_n}$$

является голоморфной в $U = 'D \times U_n$ функцией, причем для $'z \in E$ она голоморфна на всей плоскости $\mathbb{C}$, за исключением, быть может, одной точки. Действительно, так как $u(z, z_n) \in \text{Ph}('D \times U_n)$, то локально для любого поликруга $'U \subset 'D$ существует голоморфная в $'U \times U_n$ функция $f(z, z_n)$ такая, что $u(z, z_n) = f(z, z_n) + \bar{f}(z, z_n)$. Отсюда следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial z_n} = \frac{\partial(f + \bar{f})}{\partial z_n} = \frac{\partial f}{\partial z_n} \in \mathcal{O}('U \times U_n).$$

Вторая часть утверждения получается так же просто.

По теореме 1 $\partial u / \partial z_n$ голоморфно продолжается в $('D \times \mathbb{C}) \setminus S$, где $S = \{z_n = a(z)\}$ – аналитический график, $1/a(z) \in \mathcal{O}('D)$. Пусть

$$F(z, z_n) = \int_0^{z_n} \frac{\partial u}{\partial z_n} dz_n, \quad (1)$$

где интеграл берется по любому спрямляемому пути, принадлежащему $\mathbb{C} \setminus \{a(z)\}$ и соединяющему точки 0 и z_n ; $F(z, z_n)$ представляет собой многозначную аналитическую функцию.

Теперь воспользуемся следующим очевидным фактом: если $u(z)$, $z = x + iy$, — гладкая функция в области $D \subset \mathbb{C}$ и $\gamma \subset D$ — спрямляемая кривая, соединяющая $z', z'' \in D$, то

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial z} dz &= \int_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy - i \int_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial y} dx - \frac{\partial u}{\partial x} dy \\ &= u(z'') - u(z') - i \int_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial y} dx - \frac{\partial u}{\partial x} dy. \end{aligned} \quad (2)$$

Отсюда и согласно (1)

$$\operatorname{Re} F(z, z_n) = u(z, z_n) - u(z, 0).$$

Следовательно, функция $u(z, z_n) = \operatorname{Re} F(z, z_n) - u(z, 0)$ является многозначной плюригармонической функцией в $(D \times \mathbb{C}) \setminus S$, что доказывает первую часть теоремы 3.

Переходим к доказательству ее второй части. Для этого достаточно показать однозначность $u(z, z_n)$ при любом фиксированном $z \in D$. Предположим противное, что u не является однозначной (по направлению z_n). Тогда согласно (2) функция

$$\operatorname{Re} \oint_{|z_n - a_n(z)|=\delta} \frac{\partial u(z, z_n)}{\partial z_n} dz_n = \operatorname{Re} \oint_{|z_n|=\delta} \frac{\partial u(z, z_n + a(z))}{\partial z_n} dz_n, \quad (3)$$

определенная и плюригармоническая по z вне полярного множества $P = \{a(z) = \infty\}$, не равна тождественно нулю. Однако при $z \in E \setminus P$ она равна нулю в связи с однозначностью $u(z, z_n)$, что противоречит тому, что E не является объединением нулей Ph функций. Полученное противоречие доказывает теорему.

Следующий пример показывает, что в общем случае, когда E является лишь неплюриполярным множеством, продолжение будет многозначным.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим в поликруге $U \times V = \{z : |z| < 1\} \times \{w : |w| < 1\}$ функцию $u(z, w) = \operatorname{Re}[z \ln(w - 1)]$. Ясно, что $u(z, w)$ плюригармонична в $U \times V$. Кроме того, вещественный интервал $E = (-1, 1)$ является неполярным множеством в U , причем для любого фиксированного $z = x \in E$ функция $u(x, w) = x \ln |w - 1|$ и по переменной w она гармонически продолжается на всю плоскость $\mathbb{C}$, за исключением точки $w = 1$. Однако $u(z, w)$ не является однозначной функцией в $(U \times \mathbb{C}) \setminus \{w = 1\}$.

ЗАДАЧА. Доказательство теоремы 3 с небольшим изменением остается в силе, когда для фиксированного $z^0 \in E$ особое множество S_{z^0} функции $u(z^0, z_n)$ конечное. Однако мы не знаем, справедлива ли теорема 3 (вторая часть ее утверждения) в случае, когда S_{z^0} , $z^0 \in E$, — счетное или полярное множество. Исключение составляет лишь случай, когда $E \subset D$ — всюду плотное неплюриполярное множество в D .

В самом деле, из теоремы 1 вытекает, что $\partial u / \partial z_n \in \mathcal{O}({}'U \times \mathbb{C} \setminus S)$, где S – аналитическое (плюриполярное) множество. Покажем, как в теореме 3, что $\forall 'z^0 \in {}'U$ функция $u('z^0, z_n)$ однозначна в $\mathbb{C} \setminus S_{'z^0}$. От противного, пусть для точки $'z^0 \in {}'U$ она неоднозначна. Тогда существует цикл (замкнутая кривая) $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus S_{'z^0}$ такой, что

$$\operatorname{Re} \oint_{\gamma} \frac{\partial u('z, z_n)}{\partial z_n} dz_n \neq 0. \quad (4)$$

Так как S – замкнутое множество, то существует окрестность $'V \ni 'z^0$ такая, что $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus S_{'z}$, $'z \in 'V$. Но тогда функция

$$\vartheta('z) = \operatorname{Re} \oint_{\gamma} \frac{\partial u('z, z_n)}{\partial z_n} dz_n,$$

плюригармоническая в $'V$, по условиям теоремы равна нулю на $E \cap 'V$. Отсюда $\vartheta \equiv 0$, ибо E плотно в $'V$, что противоречит (4).

§ 3. Граничный вариант

В отличие от голоморфных функций положительные результаты о плюригармоническом продолжении функций с граничного пучка прямых не так сильны. Используя граничные свойства Psh функций и их связь с голоморфными функциями, можно дать способ продолжения Ph функций с граничного подмножества: пусть $'D \subset \mathbb{C}^{n-1}$ – ограниченная область с гладкой границей, $E \subset \partial 'D$ – подмножество положительной меры Лебега, $\operatorname{mes}_{2n-3} E > 0$ и $u('z, z_n) \in \operatorname{Ph}('D \times U_n) \cap C(('D \cup E) \times U_n)$. Если при каждом фиксированном $'z^0 \in E$ функция $u('z^0, z_n)$ переменного z_n имеет тонкое (дискретное, полярное) множество особенностей, то производная $\partial u('z, z_n) / \partial z_n$ голоморфно продолжается в $('D \times \mathbb{C}) \setminus S$, где S – аналитическое или соответственно плюриполярное множество в $'D \times \mathbb{C}$ (см. доказательство теоремы 3). Теперь уже с помощью $\partial u('z, z_n) / \partial z_n$ строится Ph продолжение по формуле

$$u('z, z_n) = \operatorname{Re} \int_0^{z_n} \frac{\partial u}{\partial z_n} dz_n + u('z, 0). \quad (5)$$

Однако, как мы видели выше, интеграл в правой части (5) не обязан быть однозначным и для однозначности функции $u('z, z_n)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{Re} \oint_{\gamma} \frac{\partial u('z, z_n)}{\partial z_n} dz_n = 0 \quad (6)$$

по любому циклу γ , лежащему в $\{'z\} \times \mathbb{C}$ и не пересекающему особое множество S .

В некоторых случаях равенство (6) удается все же установить. Например, когда особое множество S является ограниченным графиком: $z_n = a('z)$, и когда $E = \partial 'D$ при $n = 2$ или $E \subset \partial 'D$ – строго псевдовыпуклый открытый кусок при $n > 2$.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим в поликруге

$$U \times V = \left\{ |z| < 1 \right\} \times \left\{ |w| < \frac{1}{2} \right\}$$

функцию $u(z, w) = \operatorname{Re} f(z, w)$, где

$$f(z, w) = \exp\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 \ln(w-1).$$

Тогда $u(z, w)$ плюригармонична в $U \times V$ и при каждом фиксированном $\xi \neq 0$, $|\xi| = 1$, имеет место равенство

$$u(\xi, w) = \exp\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)^2 \ln|w-1|$$

и поэтому $u(\xi, w)$ гармонична в $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Это получается оттого, что для таких ξ

$$\operatorname{Im} \exp\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)^2 = 0.$$

Функция $u(z, w)$ бесконечно гладкая вплоть до границы области $U \times V$, за исключением множества $\{1\} \times V$. Однако она однозначно не продолжается в область $(U \times \mathbb{C}) \setminus \{w = 1\}$, хотя функция $u(z, w)$ однозначна на $(\partial U \setminus \{1\}) \times (\mathbb{C} \setminus \{1\})$.

В связи с этим примером и со сказанным выше естественно возникает следующий вопрос.

(***) Пусть $'D \subset \mathbb{C}^{n-1}$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial'D$ и $E = \partial'D$ при $n = 2$ или $E \subset \partial'D$ – строго псевдовыпуклый кусок при $n > 2$. Предположим, что $u(z, w) \in \operatorname{Ph}('D \times U_n) \cap C('D \times U_n)$ и при каждом фиксированном $z^0 \in E$ функция $u(z^0, w)$ гармонически продолжается на всю плоскость $\mathbb{C}$, за исключением одной точки (или конечного числа точек). Будет ли тогда $u(z, w) \in \operatorname{Ph}((D \times \mathbb{C}) \setminus S)$, где S – аналитическое множество?

В случае, когда особое множество S_{z^0} счетное, эта гипотеза имеет отрицательный ответ.

Для подтверждения этого факта мы воспользуемся процитированным в начале работы контрпримером Левенберга и Слодковского: для множества $S = \{(z, w) \in U \times \mathbb{C}, e^{1+1/w} = z\} \cup U \times \{0\}$, где $U = \{|z| < 1\}$ – единичный круг, не существует функции $u(z, w)$, обладающей следующими двумя свойствами:

- а) $u(z, w) \in \operatorname{Ph}((U \times \mathbb{C}) \setminus S) \cap \operatorname{Psh}(U \times \mathbb{C})$;
- б) $S = \{u(z, w) = -\infty\}$.

Отметим, что множество S ограничено, $S \subset \{|z| < 1\} \times \{|w| < 1\}$ и $S \setminus \{w = 0\}$ голоморфно эквивалентно кругу $|t| < 1$:

$$\left(e^{\frac{t-1}{t+1}}, -\frac{1+t}{2}\right): U \rightarrow S \setminus \{w = 0\}$$

биголоморфно. Кроме того, $S = \overline{A} \cap (U \times \mathbb{C})$, где $A = \{e^{1+1/w} = z\}$ – аналитическое множество. A является образом множества $A' = \{e^{1+w} = z\}$ при отображении $w \rightarrow 1/w$,

$$A = \left\{w = \frac{1}{-1 + \ln|z| + i \arg z + 2k\pi i}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\right\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. $\overline{A} = \{\exp(1 + 1/w) = z\} \cup \{w = 0\}$ является полным плюриполярным псевдогогнутым множеством в $\mathbb{C}^2$, а компакт $\overline{S} = \overline{A} \cap (\overline{U} \times \mathbb{C})$ полиномиально выпуклый.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Плюриполярность и псевдогогнутость $\overline{A}$ очевидны. Доказательство полноты A и полиномиальная выпуклость $\overline{S}$ вытекает из следующих двух фактов.

1) Для любого аналитического множества $A = \{z \in \mathbb{C}^n : f(z) = 0\}$, где $f(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$, существует Psh функция из класса $L : u(z) \leq \text{const} + \ln(1 + |z|)$, $z \in \mathbb{C}^n$, такая, что $A = \{u(z) = -\infty\}$.

В самом деле, пусть $A_j = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z, A) \leq 1/j\}$, где ρ – расстояние в $\mathbb{C}^n$, и B_j – шар $\{|z| < \exp 2^j\}$, $j = 1, 2, \dots$. Положим

$$M_j = \|f\|_{B_j}, \quad u_j(z) = \alpha_j \ln \frac{|f(z)|}{M_j}$$

и выбираем $\alpha_j > 0$ так, чтобы $u_j(z) > -1/2^j$ при $z \in B_j \setminus A_j$.

Пусть

$$\vartheta_j(z) = \begin{cases} \max \left\{ u_j(z), \frac{1}{2^j} \ln |z| - 1 \right\} & \text{при } z \in B_j, \\ \frac{1}{2^j} \ln |z| - 1 & \text{при } z \notin B_j \end{cases}$$

и $u(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \vartheta_j$. Тогда u является Psh функцией в $\mathbb{C}^n$, ибо $\vartheta_j < 0$ в B_j . При фиксированном j_0 в области $B_{j_0} \setminus A_{j_0}$ имеем

$$u(z) = \sum_{j=1}^{j_0-1} \vartheta_j(z) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \vartheta_j(z) \geq \sum_{j=1}^{j_0-1} \vartheta_j(z) - \sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \neq -\infty.$$

Если $z^0 \in A$, то

$$u(z^0) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^j} \ln |z^0| - 1 \right] = -\infty.$$

Кроме того, так как

$$u(z) = \sum_{j=1}^{j_0-1} \vartheta_j + \sum_{j=j_0}^{\infty} \vartheta_j \leq \sum_{j=1}^{j_0-1} \frac{\ln |z|}{2^j} \leq \ln |z|, \quad z^0 \in B_{j_0},$$

то $u(z) \in L$.

2) Из описания полиномиальных оболочек в терминах Psh функций (см. [9]) легко следует, что для любой плюрисубгармонической в шаре или поликруге $U \subset \mathbb{C}^n$ функции $u(z) \in \text{Psh}(U)$ открытое множество $G = \{u(z) < \alpha\}$, $\alpha \in (-\infty, \infty)$, является полиномиально выпуклым, т.е. для любого компакта $K \subset G$ его полиномиально выпуклая оболочка $\hat{K} \subset G$.

Теперь для доказательства полноты множества A согласно 1) мы находим $u(z, w) \in L$ такую, что $\{\exp(1+w) - z = 0\} = \{u(z, w) = -\infty\}$, и полагаем $\vartheta(z, w) = u(z, 1/w) + 2 \ln |w|$. Функция $u(z, w)$ плюрисубгармонична в $\mathbb{C}^2 \setminus \{w = 0\}$ и $u(z, w) \leq \text{const} + \ln(1 + \sqrt{|z|^2 + |w|^2})$, так как $u(z, w) \in L$. Отсюда в окрестности $w = 0$ имеем

$$\vartheta(z, w) = u\left(z, \frac{1}{w}\right) + 2 \ln |w| \leq \text{const} + \ln(|w| + \sqrt{1 + |zw|^2}) + \ln |w|,$$

что показывает плюрисубгармоничность ϑ в $\mathbb{C}^2$.

Ясно, что

$$\{\vartheta(z, w) = -\infty\} = \{e^{1+1/w} - z = 0\} \cup \{w = 0\}.$$

Это означает, что A — полное плюриполярное множество и согласно 2) компакт $\overline{S} = \overline{A} \cap (\overline{U} \times \mathbb{C})$ — полиномиально выпуклый. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь аналитическую меру $d\mu = \frac{1}{2\pi} d\varphi \otimes d\mu_\xi(w)$, сосредоточенную на границе $\partial S \setminus \{w = 0\}$. Аналитичность меры μ означает, что функции

$$a_k(\xi) = \int w^k d\mu_\xi(w), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

голоморфно продолжаются в единичный круг $|z| < 1$. Мы предполагаем также, что $\mu_\xi(w)$ непрерывно зависит от ξ , точнее, что $a_k(\xi)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, — непрерывные функции.

В качестве μ можно взять, например, меру

$$\mu = \frac{|\xi - z^0|^2}{1 - |z^0|^2} v, \quad (7)$$

где $\xi = e^{i\psi} \in \partial U$, а v — представляющая мера алгебры полиномов $P(\partial S)$ для фиксированной точки $(z^0, w^0) \in S$, $w^0 \neq 0$ (см. [10]). Другой способ: если мы параметризуем $\partial S \setminus \{w = 0\}$ как кривую $\{\xi = e^{i\psi}, w = 1/(-1 + i\psi), -\infty < \psi < \infty\}$ и используем конформное отображение

$$\Phi = \left(\exp\left(\frac{t-1}{t+1}\right), -\frac{1+t}{2} \right) : U \rightarrow S \setminus \{w = 0\}.$$

Взяв на окружности $\partial U = \{t = e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ представляющую для алгебры полиномов $\{P(t)\}$ меру $\frac{1}{2\pi} d\varphi$ (относительно точки 0) и взяв ее образ v на $\partial S \setminus \{w = 0\}$, мы получим представляющую меру относительно точки $(e^{-1}, -1/2) \in S$. Тогда, преобразуя v как в (7), мы имеем аналитическую меру μ , бесконечно гладко зависящую от $\xi \in \partial U$.

ТЕОРЕМА 4. *Потенциал меры μ*

$$U^\mu(\xi, w) = \int \ln |\eta - w| d\mu_\xi(\eta) \quad (8)$$

обладает следующими свойствами:

- а) $U^\mu(\xi, w)$ плюригармонически продолжается в $U \times \{|w| > 1\}$, причем продолжение непрерывно вплоть до $\overline{U} \times \{|w| > 1\}$;
 б) функция

$$\frac{\partial U^\mu}{\partial w} = \int \frac{d\mu_\xi(\eta)}{\eta - w}$$

голоморфно продолжается в $(U \times \mathbb{C}) \setminus S$;

- в) функция $U^\mu(\xi, w)$ продолжается в $(U \times \mathbb{C}) \setminus S$ до многозначной Ph функции, которая не является однозначной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение б) доказано в [10]. Докажем а). Для $|w| > 1$ имеем

$$\begin{aligned} U^\mu(\xi, w) &= \ln |w| + \int \ln \left| 1 - \frac{\eta}{w} \right| d\mu_\xi(\eta) = \ln |w| - \operatorname{Re} \int \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta^k}{w^k} d\mu_\xi(\eta) \\ &= \ln |w| - \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{w^k} \int \eta^k d\mu_\xi(\eta) = \ln |w| - \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(\xi)}{w^k}. \end{aligned} \quad (9)$$

Так как мера μ аналитическая, то $a_k(\xi) = \int \eta^k d\mu_\xi(\eta)$ голоморфно продолжается внутрь U . Обозначим эти продолжения опять через a_k , $k = 0, 1, 2, \dots$. Ясно, что $|a_k(z)| \leq 1$, ибо $\operatorname{supp} \mu_\xi \subset \partial S$, $S \subset \{|z| \leq 1, |w| \leq 1\}$. Кроме того, $a_k(z) \in \mathcal{O}(U) \cap C(\overline{U})$. Из равномерной сходимости ряда (9) на компактных подмножествах $\overline{U} \times \{|w| > 1\}$ получаем, что

$$U^\mu(z, w) \in \operatorname{Ph}(U \times \{|w| > 1\}) \cap C(\overline{U} \times \{|w| > 1\}).$$

Докажем теперь в). Если $U^\mu(z, w)$ однозначна в $U \times \mathbb{C}$, то она как реальная часть первообразной от голоморфной в $(U \times \mathbb{C}) \setminus S$ функции $\partial U^\mu / \partial z$ была бы в этой области плюригармонической, причем $U^\mu(z, w) \rightarrow -\infty$ при $(z, w) \rightarrow S$. Значит, тогда $U^\mu(z, w) \in \operatorname{Psh}(U \times C)$ и $S = \{U^\mu(z, w) = -\infty\}$, а это противоречило бы процитированному выше утверждению Левенберга–Слодковского.

ПРИМЕР 4. Функция $u(z, w) = U^\mu(z, 1/w) + \ln |w|$ обладает тем свойством, что $u(z, w)$ плюригармонична в единичном поликруге $\{|z| < 1\} \times \{|w| < 1\}$, непрерывна в $\{|z| \leq 1\} \times \{|w| < 1\}$ и для любой фиксированной точки z^0 , $|z^0| = 1$, она гармонична вне дискретного множества в $\mathbb{C}_w$. Однако она не является однозначной в $U \times \mathbb{C}$.

Список литературы

1. Садуллаев А. Плюрисубгармонические меры и емкости на комплексных многообразиях // УМН. 1981. Т. 36. № 4. С. 53–105.
2. Садуллаев А. Плюрисубгармонические функции // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 8. М.: ВИНТИ, 1985. С. 65–113.
3. Чирка Е. М. Разложение в ряды и скорость рациональных приближений для голоморфных функций с аналитическими особенностями // Матем. сб. 1974. Т. 93. № 2. С. 314–324.
4. Садуллаев А. Рациональные аппроксимации и плюриполярные множества // Матем. сб. 1982. Т. 119. № 1. С. 96–118.
5. Auget B. Analytic multivalued functions in Banach algebras and uniform algebras // Adv. Math. 1982. V. 44. P. 18–60.

6. *Levenberg N., Slodkowski Z.* Pseudoconcave pluripolar sets in $\mathbb{C}^2$ // *Math. Ann.* 1998. V. 312. P. 429–443.
7. *Садуллаев А., Чирка Е. М.* О продолжении функций с полярными особенностями // *Матем. сб.* 1987. Т. 132. №3. С. 383–390.
8. *Казарян М. В.* О голоморфном продолжении функций со специальными особенностями в $\mathbb{C}^n$ // *Докл. АН АрмССР.* 1983. Т. 76. №2. С. 13–17.
9. *Хёрмандер Л.* Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М.: Мир, 1968.
10. *Садуллаев А.* Псевдогогнутые множества и аналитические меры // *Комплексный анализ в современной математике.* М.: Фазис, 2001. С. 33–45.

Ургенчский государственный университет
им. Аль-Хорезми, г. Ургенч, Узбекистан

Поступила в редакцию
07.06.2004