Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Вайдемайер, Пространства Лизоркина–Трибеля векторнозначных функций и точная теория следов для функций из пространств Соболева со смешанной L_p -нормой в параболических задачах, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 6, 3–16

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1362>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 16:45:36

УДК 517.95

П. Вайдемайер

**Пространства Лизоркина–Трибеля векторнозначных
функций и точная теория следов для функций
из пространств Соболева со смешанной
 L_p -нормой в параболических задачах**

Для функции $u = u(y, t) \in L_q(0, T; W_{\underline{p}}^m(\mathbb{R}_+^n))$ с $\partial_t u \in L_q(0, T; L_{\underline{p}}(\mathbb{R}_+^n))$ в статье исследуется задача о следе на гиперповерхности $y_n = 0$, тем самым рассматриваются пространства Соболева со смешанной лебеговой нормой $L_{\underline{p}, q}(\mathbb{R}_+^n \times (0, T)) = L_q(0, T; L_{\underline{p}}(\mathbb{R}_+^n))$, где $\underline{p} = (p_1, \dots, p_n)$ – вектор, $\mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)$. Подобные функциональные пространства полезны при изучении параболических уравнений. В частности, они позволяют использовать интегрирование с различными степенями по пространству и по времени. Показано, что регулярность следа по временной переменной в точности описывается пространством Лизоркина–Трибеля $F_{q, \underline{p}_n}^{1-1/(p_n m_n)}(0, T; L_{\underline{p}}(\mathbb{R}^{n-1}))$, $\underline{p} = (\underline{p}, p_n)$. Аналогичный результат доказан для производных первого порядка от u по пространственным переменным. Эти результаты позволяют найти правильные пространства данных в неоднородных задачах Дирихле и Неймана для параболических уравнений второго порядка в случае решений из $L_q(0, T; W_p^2(\Omega)) \cap W_q^1(0, T; L_p(\Omega))$ при $p \leq q$.

Библиография: 25 названий.

§ 1. Введение

Соболевские пространства с разными степенями суммируемости по пространству и по времени используются в различных работах по эволюционным уравнениям: для параболических уравнений [1], [2], уравнений Навье–Стокса [3]–[5], параболических уравнений Вольтерра [6] и стохастических уравнений с частными производными [7]. Как ни удивительно, теория следов функций из пространств этого типа, по-видимому, не была развита до настоящего времени. Конкретнее, рассмотрим функцию $u \in L_q(0, T; W_p^2(\Omega)) \cap W_q^1(0, T; L_p(\Omega))$ с возможно различными p и q и зададим вопрос о ее следе на $\partial\Omega \times (0, T)$. Этот след обладает некоторой гладкостью по пространственной переменной (изменяющейся вдоль $\partial\Omega$) и по временной переменной. Наличие гладкости дробного порядка по пространственной переменной следует после интегрирования по t из теоремы о следе

$$W_p^2(\Omega) \ni u(\cdot, t) \mapsto u(\cdot, t)|_{\partial\Omega} \in W_p^{2-1/p}(\partial\Omega),$$

известной в теории уравнений, не зависящих от времени. Однако характеристика гладкости следа по t оказывается не столь элементарной. В настоящей работе ответ этой задачи получен при $p \leq q$.

Зафиксируем обозначения: $\Omega_T := \Omega \times (0, T)$, Γ – граница Ω , а $\Gamma_T := \Gamma \times (0, T)$. Кроме того, положим $Q^{n+1}(0, T^{\varkappa}) := \prod_{i=1}^{n+1}(0, T^{\varkappa_i})$ для $\varkappa := (\varkappa_1, \dots, \varkappa_{n+1})$. Штрих будет указывать на $(n-1)$ -мерные величины: к примеру, мы будем записывать $y \in \mathbb{R}^n$ как $y = (y', y_n)$, $y' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Координату t мы будем также считать $(n+1)$ -й координатой. Разностный оператор с шагом h по i -й координате, $1 \leq i \leq n+1$, мы будем обозначать через Δ_i^h . Верхним индексом “ $\cdot$ ” будем обозначать пропуск соответствующей координаты, например,

$$\dot{Q}^{n,n+1}(0, T^{\varkappa}) := \prod_{\substack{i=1 \\ i \notin \{n, n+1\}}}^{n+1} (0, T^{\varkappa_i}).$$

Двойственный показатель к $p \in [1, \infty]$ будем обозначать через p' : $1/p + 1/p' = 1$. Мы будем писать c^* , если хотим подчеркнуть независимость константы c от величины T .

Если D – открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, то $W_{\underline{p}}^{\underline{m}}(D)$, $\underline{m} = (m_1, \dots, m_n)$, $\underline{p} = (p_1, \dots, p_n)$, – пространства Соболева с “чистыми” производными и смешанной нормой Лебега $L_{\underline{p}}(D)$, образованные функциями u с обобщенными производными $\partial_i^{m_i} u \in L_{\underline{p}}(D)$, $i = 1, \dots, n$. Пространство $W_{\underline{p}, q}^{\underline{m}, 1}(D_T)$ состоит из функций $u = u(y, t)$ с $u \in L_q(0, T; W_{\underline{p}}^{\underline{m}}(D))$ и $\partial_t u \in L_q(0, T; L_{\underline{p}}(D))$. Наконец, $W_{p, q}^{2, 1}(D_T) := W_{(p, \dots, p), q}^{(2, \dots, 2), 1}(D_T)$. Через $B_{\underline{p}, \theta}^{\underline{s}}$ мы будем обозначать шкалу пространств Бесова, а через $F_{\underline{p}, \theta}^{\underline{s}}$ – шкалу пространств Лизоркина–Трибеля (в русской математической литературе их обозначают через $L_{\underline{p}, \theta}^{\underline{s}}$). Сведения об этих пространствах можно найти в [8]–[10].

§ 2. Теорема о следе

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Для $\beta \in (0, 1)$ и банахова пространства X *пространство Лизоркина–Трибеля со значениями в X* определяется следующим образом:

$$F_{q, \theta}^{\beta}(0, T; X) := \{g \in L_q(0, T; X) \mid |g|_{F_{q, \theta}^{\beta}(0, T; X)} < \infty\},$$

где

$$|g|_{F_{q, \theta}^{\beta}(0, T; X)} = \left(\int_0^T \left(\int_0^{T-t} h^{-1-\theta\beta} \|g(t+h) - g(t)\|_X^{\theta} dh \right)^{q/\theta} dt \right)^{1/q},$$

и

$$\|g\|_{F_{q, \theta}^{\beta}(0, T; X)} = \|g\|_{L_q(0, T; X)} + |g|_{F_{q, \theta}^{\beta}(0, T; X)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Пространства Лизоркина–Трибеля $F_{q, \theta}^{\beta}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, определяемые с использованием языка анализа Фурье, имеют также конечно-разностную характеристику типа предыдущего определения (см. [8; 2.5.10, теорема]). Это и побудило нас ввести пространства Лизоркина–Трибеля на ограниченной области $(0, T)$ описанным выше образом. Поскольку $\beta < 1$, вместо разностей второго порядка, возможно ожидавшихся читателем, здесь можно использовать разности первого порядка.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $u \in W_{\underline{p},q}^{\underline{m},1}(\mathbb{R}_+^n \times (0,T))$, $\underline{p} = (\underline{p}, p_n)$, $\underline{p} = (p_1, \dots, p_{n-1})$ и $p_i \in (1, \infty)$, $m_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, n$. Зафиксируем $k \in \{0, 1\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Если $m_j(m_n + 1)/(m_n(m_j - k)) =: p_n^*(k) < p_n \leq q < \infty$ и $k < m_j$, то след $\gamma(\partial_j^k u) = \partial_j^k u|_{(\mathbb{R}^{n-1})_T}$ на гиперплоскости $y_n = 0$ удовлетворяет оценке

$$|\gamma(\partial_j^k u)|_{F_{q,p_n}^{1-1/(p_n m_n)-k/m_j}(0,T;L_{\underline{p}}(\mathbb{R}^{n-1}))} \leq c^* |u|_{W_{\underline{p},q}^{\underline{m},1}(\mathbb{R}_+^n \times (0,T))}$$

с постоянной c^* , не зависящей от u и T . Здесь

$$|u|_{W_{\underline{p},q}^{\underline{m},1}(\mathbb{R}_+^n \times (0,T))} := \sum_{i=1}^n |\partial_i^{m_i} u|_{L_{\underline{p},q}(\mathbb{R}_+^n \times (0,T))} + |\partial_t u|_{L_{\underline{p},q}(\mathbb{R}_+^n \times (0,T))}.$$

Объединяя эту теорему с известными “пространственными” результатами о следах функций из $W_{\underline{p}}^{\underline{m}}(\Omega)$, мы получаем следствие, вторая часть которого в точности описывает пространства следов для параболических уравнений второго порядка. Последние результаты были анонсированы в [11].

СЛЕДСТВИЕ 2.4. i) Пусть $\underline{m} = (\underline{m}, m_n)$, а $\underline{p}, q$ такие же, как в теореме 2.3. Если $1 + 1/m_n < p_n \leq q$, то отображение

$$\begin{aligned} W_{\underline{p},q}^{\underline{m},1}((\mathbb{R}_+^n)_T) &\xrightarrow{\gamma_0} L_q(0,T; B_{\underline{p},p_n}^{\underline{m}(1-1/(p_n m_n))}(\mathbb{R}^{n-1})) \\ &\cap F_{q,p_n}^{1-1/(p_n m_n)}(0,T; L_{\underline{p}}(\mathbb{R}^{n-1})), \\ u &\mapsto u|_{y_n=0}, \end{aligned}$$

непрерывно.

ii) Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – множество с компактной границей гладкости $C^{1,1}$ (см. [10]). Пусть j, k такие же, как в теореме 2.3. Если $3/2 < p \leq q$ для $k = 0$ и $3 < p \leq q$ для $k = 1$, то отображения

$$\begin{aligned} W_{p,q}^{2,1}(\Omega_T) &\xrightarrow{\gamma_{j,k}} L_q(0,T; W_p^{2-k-1/p}(\Gamma)) \cap F_{q,p}^{(2-k-1/p)/2}(0,T; L_p(\Gamma)), \\ u &\mapsto \partial_j^k u|_{\Gamma_T}, \end{aligned}$$

непрерывны.

iii) Нормы $\gamma_0, \gamma_{j,k}$ равномерно ограничены при $T \in (0, \infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемая регулярность по времени следует в каждом случае из теоремы 2.3. Регулярность по пространству в i) вытекает из теоремы о следе

$$W_{\underline{p}}^{\underline{m}}(\mathbb{R}_+^n) \ni v \mapsto v|_{y_n=0} \in B_{\underline{p},p_n}^{\underline{m}(1-1/(p_n m_n))}(\mathbb{R}^{n-1})$$

(см. [12; теорема 3]). Результаты ii) получаются из случая полупространства локальным распрямлением границы посредством $C^{1,1}$ -дiffeоморфизма, отображающего границу Ω в гиперплоскость $y_n = 0$. Поскольку это стандартная процедура (ср. [13]), мы опускаем детали. Таким образом, теорема 2.3 обеспечивает регулярность по времени в ii) и iii). Пространственная регулярность в ii) следует из известного результата о следах

$$W_p^{2-k}(\mathbb{R}_+^n) \ni \partial_j^k u(\cdot, t) \mapsto \partial_j^k u(\cdot, t)|_{y_n=0} \in W_p^{2-k-1/p}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Пространственная часть утверждения iii) получается растяжениями по одной переменной t .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. i) Результаты теоремы 2.3 и следствия 2.4, относящиеся к $k = 1$, интерполяционные, так как во внутренних точках у $\partial_j u$ нет даже первой производной по времени.

ii) Теорема и следствие описывают точные пространства следов, поскольку соответствующие отображения взятия следа сюръективны. При $k = 0$ непрерывный оператор продолжения в следствии 2.4, ii), действующий с границы внутрь области, построен в [14]. Непрерывный оператор продолжения для граничных условий Неймана можно построить аналогичным образом.

iii) В [13] было показано, что отображения взятия следа в следствии 2.4, ii) непрерывны также, если описывать временную регулярность в пространствах образа в терминах пространств Соболева–Слободянского W_q^s с тем же индексом s , что и в нашей формулировке, использующей пространства Лизоркина–Трибеля. Однако тогда не удалось бы показать, что отображение следа сюръективно. Задним числом мы видим, что эти пространства не являются точными пространствами следов.

iv) Результаты следствия 2.4, ii) при $p = q$ классические (см. [15; гл. II, лемма 3.4] и [16; теорема 4.2], последняя работа опирается на теорию интерполяции). Свое доказательство автор представил в [17]. Заметим, что при $p = q$ регулярность следов по временной переменной в точности описывается принадлежностью к пространству Соболева–Слободянского, поскольку $F_{p,p}^s = W_p^s$ для нецелого $s > 0$.

По поводу других результатов относительно анизотропных пространств со смешанной L_p -нормой сошлемся на Я. С. Бугрова [12] и М. З. Берколайко [18]–[20]. Второй автор рассматривал даже анизотропные пространства Лизоркина–Трибеля (обозначаемые им через $L_{\underline{p},\theta}^s$). Оба изучали задачу для функций во всем пространстве $\mathbb{R}^n$. В то время как Бугров [12] рассмотрел задачу о следе на гиперповерхности $y_\nu = 0$ с $\nu = n$, Берколайко исследовал случай $\nu \neq n$. Он охарактеризовал пространство следов в терминах целых функций экспоненциального типа [18; следствие 1]. При $\nu = 1$ он опять-таки отождествил пространство следов с анизотропным пространством Лизоркина–Трибеля [18; теорема 3], в то время как при $1 < \nu < n$ подобные идентификации не были проведены. Поскольку $L_{\underline{p},2}^m(\mathbb{R}^n) = W_{\underline{p}}^m(\mathbb{R}^n)$ для целых m_j , из его результата следует, что

$$W_{\underline{p}}^m(\mathbb{R}^n) \ni u \mapsto u|_{y_1=0} \in L_{(p_2,\dots,p_n),p_1}^{\underline{p}}(\mathbb{R}^{n-1}), \quad (2.1)$$

где $\underline{p} = (p_2, \dots, p_n)$ и $p_j = \varkappa m_j$ с $\varkappa = 1 - 1/(p_1 m_1)$, при условии, что $\varkappa > 0$, $p_i \in (1, \infty)$. Из (2.1) с n замененным на $n + 1$ и с $\underline{m} = (2, \dots, 2 \mid 1) \in \mathbb{N}^{n+1}$, $\underline{p} = (p, \dots, p \mid q)$ следует результат следствия 2.4, ii) при $k = 0$ с произвольными $p, q \in (1, \infty)$ без каких-либо условий на соотношение между p и q , поскольку первую и n -ю координаты можно переставить. Однако полученный нами результат теоремы 2.3 для $k = 0$, допускающий смешанную L_p -норму по пространственным переменным, по-видимому, не содержится в цитированных выше работах Берколайко, так же как и наши интерполяционные результаты (соответствующие $k = 1$ в теореме и ее следствии). Второе важное различие между теоремой 2.3 и результатами Берколайко заключается в следующем. В нелинейных задачах, где локальное (по времени) решение можно найти методом неподвижной точки, для

этого обычно требуется малость T , и константы в основных неравенствах не должны резко подскакивать при уменьшении T (см. [21], [22]). В нашей постановке ограниченность при $T \downarrow 0$ нормы отображения $\gamma_{j,k}$ не вытекает очевидным образом из анализа, проведенного Берколайко, так как легко видеть, что не существует операторов продолжения $E_T: W_q^1(0, T) \rightarrow W_q^1(0, \infty)$ таких, чтобы $\|E_T\|$ оставалась ограниченной при $T \downarrow 0$. И наконец, подход Берколайко отличается по духу от изложенного здесь: он основан на анализе Фурье и эквивалентностях норм, а мы используем простые интегральные представления и такие несложные результаты, как неравенство Гёльдера и несколько взвешенных неравенств Харди (ср. §3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.3. Используя оператор продолжения из $(0, T)$ в $(0, 2T)$ и плотность гладких функций в $W_{\underline{p}, q}^{m, 1}(\mathbb{R}_+^n \times (0, 2T))$, нам достаточно показать, что

$$|(\partial_j^k f)|_{y_n=0}|_{F_{q, p_n}^{\beta(k)}(0, T; L_{\underline{p}}(\mathbb{R}^{n-1}))} \leq c^* |f|_{W_{\underline{p}, q}^{m, 1}(\mathbb{R}_+^n \times (0, 2T))} \quad (2.2)$$

для $f \in C^2(\overline{\mathbb{R}_+^n} \times [0, 2T])$, где мы полагаем $\beta(k) := 1 - 1/(p_n m_n) - k/m_j$. Заметим для дальнейшего, что в условиях теоремы $0 < \beta(k) < 1$. Мы утверждаем, что достаточно доказать (2.2) для $T = 1$, опираясь на следующее рассуждение об изменении масштаба: если (2.2) доказано для $T = 1$ и задана f указанного выше вида на $[0, 2T]$, то положим $f_T(y, t) := f(T^{1/m_1} y_1, \dots, T^{1/m_n} y_n, Tt)$ и $g_T(y', t) := g(T^{1/m_1} y_1, \dots, T^{1/m_{n-1}} y_{n-1}, Tt)$. Поскольку

$$\begin{aligned} |g_T|_{F_{q, \theta}^{\beta}(0, 1; L_{\underline{p}}(\mathbb{R}^{n-1}))} &= T^{\beta-1/q-\sum_{i=1}^{n-1} 1/(p_i m_i)} |g|_{F_{q, \theta}^{\beta}(0, T; L_{\underline{p}}(\mathbb{R}^{n-1}))}, \\ |f_T|_{W_{\underline{p}, q}^{m, 1}(\mathbb{R}_+^n \times (0, 1))} &= T^{1-1/q-\sum_{i=1}^n 1/(p_i m_i)} |f|_{W_{\underline{p}, q}^{m, 1}(\mathbb{R}_+^n \times (0, T))}, \\ \partial_j^k f_T &= T^{k/m_j} (\partial_j^k f)_T, \quad j \in \{1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

мы сразу видим, что при этом левая часть (2.2) меняется с коэффициентом T^λ , где $\lambda = k/m_j + \beta(k) - 1/q - \sum_{i=1}^{n-1} 1/(p_i m_i)$. Однако $k/m_j + \beta(k) = 1 - 1/(p_n m_n)$, так что λ равна степени T , возникающей в правой части (2.2).

Мы начинаем со следующего интегрального представления, появившегося в ранней работе В. П. Ильина и В. А. Солонникова [23] и уже использовавшегося в [13]:

$$\begin{aligned} \partial^\nu f(x, t) &= \frac{A}{T^r} \int \cdots \int_{Q^{n+1}(0, T\mathbb{Z})} f((x, t) + z) \Pi^{(\nu)}(z, T) dz \\ &+ \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{B}_i \int_0^T v^{-1-r} \int \cdots \int_{Q^{n+1}(0, v\mathbb{Z})} \partial_i^{l_i} f((x, t) + z) \Xi_i^{(\nu)}(\underline{\nu})(z, v) dz dv \quad (2.3) \end{aligned}$$

при $\nu_j \leq l_j - 1$ для некоторых положительных A , $\tilde{B}_i$, r и некоторых ядер $\Pi^{(\nu)}$ и $\Xi_i^{(\nu)}$, удовлетворяющих оценкам

$$|\Pi^{(\nu)}(z, v)| \leq c v^{r-|\mathbb{Z}|- \mathbb{Z} \cdot \nu}, \quad (2.4)$$

$$|\partial_{z_{n+1}}^s \Xi_i^{(\nu)}(z, v)| \leq c z_n^\varepsilon v^{r-|\mathbb{Z}|- \mathbb{Z} \cdot \nu + \varkappa_i l_i - \varepsilon \varkappa_n - s \varkappa_{n+1}} \quad (2.5)$$

при $0 \leq s \leq 1, i = 1, \dots, n+1, \varepsilon \in [0, 1]$. Первая из этих оценок приведена в [23; §3]. Вторая оценка, а также явные формулы для ядер могут быть найдены в [13].

Мы используем представление (2.3) с $\partial_j^k f, k = 0, 1$ (т.е. $\underline{\nu} = k\underline{e}_j$, где $\underline{e}_j - j$ -й стандартный базисный вектор в $\mathbb{R}^{n+1}$), и $T = 1$. Разбивая в сумму $\int_0^1 (\dots) dv = \int_0^h (\dots) dv + \int_h^1 (\dots) dv$ интеграл во второй строчке (2.3), получаем

$$\partial_j^k f(\cdot) = H_1(\cdot) + \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{B}_i(H_2^{(i)}(\cdot) + H_3^{(i)}(\cdot)),$$

где

$$\begin{aligned} H_1(\cdot) &:= A \int \dots \int_{Q^{n+1}(0,1)} f(\cdot + z) \Pi^{(k\underline{e}_j)}(z, 1) dz, \\ H_2^{(i)}(\cdot) &:= \int_0^h v^{-1-r} \int \dots \int_{Q^{n+1}(0, v\underline{e}_j)} \partial_i^{l_i} f(\cdot + z) \Xi_i^{(k\underline{e}_j)}(z, v) dz dv, \\ H_3^{(i)}(\cdot) &:= \int_h^1 v^{-1-r} \int \dots \int_{Q^{n+1}(0, v\underline{e}_j)} \partial_i^{l_i} f(\cdot + z) \Xi_i^{(k\underline{e}_j)}(z, v) dz dv. \end{aligned}$$

Пусть $\underline{l} = (\underline{m}, 1) \in \mathbb{N}^{n+1}$ и $\varkappa_i = 1/l_i, i = 1, \dots, n+1$. Оценим $H_1, H_2^{(i)}, H_3^{(i)}$ отдельно. Начнем с H_1 . Обозначив для краткости $(\gamma H_1)(y', t) := H_1(y', 0, t)$, при $h \leq 1 - t$ мы получаем

$$\|\Delta_{n+1, h}(\gamma H_1)(\cdot, t)\|_{\underline{p}, \mathbb{R}^{n-1}} \leq ch^{1/p'_n} \left(\int_0^h \|\partial_t(\gamma H_1)(\cdot, t+s)\|_{\underline{p}_n, \mathbb{R}^{n-1}}^{p_n} ds \right)^{1/p_n} \quad (2.6)$$

(используем соотношение

$$|\Delta_{n+1, h}(\gamma H_1)(\cdot, t)| \leq \int_0^h |\partial_t(\gamma H_1)(\cdot, t+s)| ds$$

и неравенство Гёльдера). Однако

$$\begin{aligned} \|\partial_t(\gamma H_1)(\cdot, t+s)\|_{\underline{p}, \mathbb{R}^{n-1}} &\leq c \left\| \Pi^{(k\underline{e}_j)}(\cdot, 1) \right\|_{\infty, Q^{n+1}(0,1)} \left| \tilde{Q}^{n+1}(0, 1) \right|^{n, n+1} \\ &\quad \times \int_0^1 \int_0^1 \|\partial_t f(\cdot, z_n, z_{n+1} + t+s)\|_{\underline{p}, \mathbb{R}^{n-1}} dz_n dz_{n+1} \end{aligned}$$

по определению H_1 и интегральному неравенству Минковского. Используя оценку ядра (2.4) и применяя неравенство Гёльдера к последнему интегралу, мы можем продолжить следующим образом:

$$\dots \leq c \left(\int_0^1 \int_0^1 \|\partial_t f(\cdot, z_n, z_{n+1} + t+s)\|_{\underline{p}, \mathbb{R}^{n-1}}^{p_n} dz_n dz_{n+1} \right)^{1/p_n}.$$

Подставив эту оценку в (2.6), поскольку $t + s \leq t + h \leq 1$, получим

$$\begin{aligned} & \|\Delta_{n+1,h}(\gamma H_1)(\cdot, t)\|_{\underline{p}, \mathbb{R}^{n-1}} \\ & \leq ch^{1/p'_n} \left(\int_0^h ds \right)^{1/p_n} \left(\int_0^2 \int_0^1 \|\partial_t f(\cdot, z_n, \rho)\|_{\underline{p}, \mathbb{R}^{n-1}}^{p_n} dz_n d\rho \right)^{1/p_n}. \end{aligned}$$

Применив к интегралу по ρ неравенство Гёльдера с $s = q/p_n$ и подставив возникшее выражение в определение полунормы $F_{q,p_n}^{\beta(k)}$, будем иметь

$$\begin{aligned} & |\gamma H_1|_{F_{q,p_n}^{\beta(k)}(0,1;L_{\underline{p}}(\mathbb{R}^{n-1}))} \\ & \leq c \left(\int_0^1 \left(\int_0^{1-t} h^{-1-p_n\beta(k)} h^{p_n} dh \right)^{q/p_n} dt \right)^{1/q} \|\partial_t f\|_{\underline{p}, p_n, q, \mathbb{R}^{n-1} \times (0,1) \times (0,2)}. \end{aligned}$$

Интеграл сходится, поскольку $\beta(k) < 1$, что доказывает оценку γH_1 . Теперь обратимся к $H_2^{(i)}$. Используем неравенство треугольника и отдельно оценим слагаемые в выражении

$$\|\gamma H_2^{(i)}(\cdot, t+h) - \gamma H_2^{(i)}(\cdot, t)\|_{\underline{p}, \mathbb{R}^{n-1}}.$$

Начнем с подготовительной оценки. Зафиксировав $\tau \in \{t, t+h\}$, в силу оценки ядра (2.5) (с $s = 0$, $\underline{v} = k\underline{e}_j$, $\varepsilon \in (0,1)$) и поскольку $\varkappa_i l_i - k\varkappa_j = 1 - k\varkappa_j = \beta(k) + \varkappa_n/p_n$, мы получим

$$\begin{aligned} |\gamma H_2^{(i)}(y', \tau)| & \leq c \int_0^h v^{-1-|\underline{z}|-\varepsilon\varkappa_n+\beta(k)+\varkappa_n/p_n} \\ & \times \int \cdots \int_{Q^{n+1}(0, v\underline{z})} z_n^\varepsilon |\partial_i^{l_i} f((y', 0, \tau) + z)| dz dv, \end{aligned} \quad (2.7)$$

так что

$$\begin{aligned} \|\gamma H_2^{(i)}(\cdot, \tau)\|_{\underline{p}, \mathbb{R}^{n-1}} & \leq c \int_0^h v^{-1-|\underline{z}|-\varepsilon\varkappa_n+\beta(k)+\varkappa_n/p_n} \left| \check{Q}^{n,n+1}(0, v\underline{z}) \right| \\ & \times \int_0^{v^{\varkappa_{n+1}}} \int_0^{v^{\varkappa_n}} z_n^\varepsilon \|\partial_i^{l_i} f(\cdot, z_n, \tau + z_{n+1})\|_{\underline{p}, \mathbb{R}^{n-1}} dz_n dz_{n+1} dv. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Степень v в последнем интеграле равна $-2 - \varkappa_n/p'_n - \varepsilon\varkappa_n + \beta(k)$, так как

$$\left| \check{Q}^{n,n+1}(0, v\underline{z}) \right| = v^{|\underline{z}|-\varkappa_{n+1}-\varkappa_n} = v^{|\underline{z}|-1-\varkappa_n}.$$

Перепишем теперь подынтегральное выражение следующим образом:

$$\left\{ v^{-(2+\varkappa_n)/p'_n+\delta_1} \right\} \left\{ v^{-2/p_n+\delta_2} z_n^\varepsilon \|\partial_i^{l_i} f(\cdot, z_n, \tau + z_{n+1})\|_{\underline{p}, \mathbb{R}^{n-1}} \right\},$$

где

$$\delta_1 + \delta_2 = \beta(k) - \varepsilon\varkappa_n. \quad (2.9)$$

По неравенству Гёльдера (с p'_n, p_n) в интеграле по z_n, z_{n+1} и v , поскольку $\varkappa_n + \varkappa_{n+1} = \varkappa_n + 1$, мы получим

$$\begin{aligned} \text{левая часть (2.8)} &\leq c \left(\int_0^h v^{-1+p'_n \delta_1} dv \right)^{1/p'_n} \left(\int_0^h \int_0^{v^{\varkappa_{n+1}}} \int_0^{v^{\varkappa_n}} v^{-2+p_n \delta_2} \right. \\ &\quad \times z_n^{\varepsilon p_n} \|\partial_i^{l_i} f(\cdot, z_n, \tau + z_{n+1})\|_{\underline{p}, \mathbb{R}^{n-1}}^{p_n} dz_n dz_{n+1} dv \Big)^{1/p_n} \\ &= ch^{\delta_1} \left(\int_0^h \int_0^v I(v, \tau + z_{n+1}) dz_{n+1} dv \right)^{1/p_n}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

если $\delta_1 > 0$, где мы пользуемся тем, что $\varkappa_{n+1} = 1$, и где

$$I(v, \rho) := v^{-2+p_n \delta_2} \int_0^{v^{\varkappa_n}} z_n^{\varepsilon p_n} \|\partial_i^{l_i} f(\cdot, z_n, \rho)\|_{\underline{p}, \mathbb{R}^{n-1}}^{p_n} dz_n. \quad (2.11)$$

Мы установили подготовительную оценку. По определению полунормы $F_{q, p_n}^{\beta(k)}$, неравенству треугольника и (2.10) с $\tau = t$ и $\tau = t + h$ получаем

$$|\gamma H_2^{(i)}|_{F_{q, p_n}^{\beta(k)}(0, 1; L_{\underline{p}}(\mathbb{R}^{n-1}))} \leq c(J_0 + J_1),$$

где $J_m, m = 0, 1$, по определению есть интеграл

$$\left(\int_0^1 \int_0^{1-t} h^{-1-p_n \beta(k)+p_n \delta_1} \int_0^h \int_0^v I(v, t + mh + z_{n+1}) dz_{n+1} dv dh \right)^{q/p_n} dt \Big)^{1/q}.$$

Обозначим показатель степени h в последнем интеграле через $-\lambda$, т.е. $\lambda = 1 + p_n \beta(k) - p_n \delta_1$, и пусть $s := q/p_n$. Чтобы оценить J_0 и J_1 , мы используем следующий критерий: *неотрицательная* функция $f = f(t)$ принадлежит $L_s(0, 1)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_0^1 f(t) \varphi(t) dt \leq c \|\varphi\|_{L_{s'}(0, 1)} \quad \forall \text{ неотрицательной функции } \varphi \in L_{s'}(0, 1),$$

где s' — показатель, сопряженный s . Рассмотрим выражение

$$\int_0^1 \int_0^{1-t} h^{-\lambda} \int_0^h \int_0^v I(v, t + mh + z_{n+1}) dz_{n+1} dv dh \varphi(t) dt.$$

Оно равно

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_0^{1-t} h^{-\lambda} \int_0^h \int_{mh}^{mh+v} I(v, t + a) da dv \varphi(t) dh dt \\ &= \int_0^1 h^{-\lambda} \left\{ \int_0^{1-h} \int_0^h \int_{mh}^{mh+v} I(v, t + a) \varphi(t) da dv dt \right\} dh. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Теперь рассмотрим выражение в фигурных скобках в последнем интеграле. Меняя порядок интегрирования и делая замену $\rho = t + a$, получаем

$$\begin{aligned} \{ \dots \} &= \int_0^h \int_{mh}^{mh+v} \int_a^{1-h+a} I(v, \rho) \varphi(\rho - a) d\rho da dv \\ &\leq \int_0^h \int_{mh}^{mh+v} \int_0^2 I(v, \rho) \varphi^0(\rho - a) d\rho da dv, \end{aligned}$$

где мы обозначаем через φ^0 продолжение φ нулем на $I := [-2, 2]$. Заменяем теперь порядок интегрирований по $d\rho$ и da и заметим, что

$$\int_{mh}^{mh+v} \varphi^0(\rho - a) da \stackrel{(v \leq h)}{\leq} \int_0^{2h} \varphi^0(\rho - a) da = \int_{\rho-2h}^{\rho} \varphi^0(s) ds \leq 2h M_I(\varphi^0)(\rho),$$

где M_I – максимальный оператор Харди–Литтлвуда на I , определенный формулой

$$M_I(\varphi^0)(\rho) := \max_{\xi < \rho, \xi \in I} \frac{1}{\rho - \xi} \int_{\xi}^{\rho} |\varphi^0| ds.$$

Выберем δ_1 и δ_2 из соотношений $p_n \delta_1 = p_n \beta(k) - 1 - p_n \varepsilon \varkappa_n$ и $p_n \delta_2 = 1$. Тогда выполнено (2.9) и, в частности, $\delta_1 > 0$ для малых положительных ε , поскольку $p_n > p_n^*(k)$ по условию. В силу наших обозначений $\lambda = 2 + p_n \varepsilon \varkappa_n$. Согласно проведенным выше рассуждениям и выбирая подходящий порядок интегрирования, мы получаем

$$\begin{aligned} \text{выражение в (2.12)} &= \int_0^1 h^{-2-\varepsilon p_n \varkappa_n} \{ \dots \} dh \\ &\leq c \int_0^2 \int_0^1 h^{-1-\varepsilon p_n \varkappa_n} \int_0^h I(v, \rho) dv dh M_I(\varphi^0)(\rho) d\rho \\ &= c \int_0^2 \int_0^1 h^{-1-\varepsilon p_n \varkappa_n} \int_0^h v^{-1} \int_0^{v \varkappa_n} z_n^{\varepsilon p_n} \\ &\quad \times \|\partial_i^{l_i} f(\cdot, z_n, \rho)\|_{\underline{p}, \mathbb{R}^{n-1}}^{p_n} dz_n dv dh M_I(\varphi^0)(\rho) d\rho, \end{aligned}$$

где мы воспользовались (в другую сторону) выражением (2.11) для $I(v, \rho)$ и учли, что $p_n \delta_2 = 1$. Этот интеграл можно оценить сверху величиной

$$\int_0^2 \int_0^1 \|\partial_i^{l_i} f(\cdot, z_n, \rho)\|_{\underline{p}, \mathbb{R}^{n-1}}^{p_n} dz_n M_I(\varphi^0)(\rho) d\rho,$$

дважды используя взвешенное неравенство Харди (лемма 3.1, i)) с $r = s = T = 1$. Применим теперь неравенство Гёльдера (с $s = q/p$, s') к интегралу по ρ и используем тот факт, что $M_I: L_{s'}(I) \rightarrow L_{s'}(I)$ – ограниченный оператор при $1 < s' \leq \infty$ (см. лемму 3.5). Поскольку $\|\varphi^0\|_{L_{s'}(I)} = \|\varphi\|_{L_{s'}(0,1)}$, последний интеграл не превосходит $c \|\partial_i^{l_i} f\|_{\underline{p}, p_n, q, \mathbb{R}_+^n \times (0,2)}^{p_n} \|\varphi\|_{L_{s'}(0,1)}$, что и приводит к требуемому результату для $H_2^{(i)}$.

Обратимся, наконец, к $H_3^{(i)}$. Мы снова используем (2.6) и замечаем, что простая замена $\Xi_i^{(k\varepsilon_j)}$ (в определении $H_3^{(i)}$) на $\partial_{z_{n+1}} \Xi_i^{(k\varepsilon_j)}$ дает правильное выражение для $\partial_t(\gamma H_3^{(i)})$ (интегрируем по частям, после чего граничные члены обращаются в нуль [13; с. 18]). Оценив $\partial_{z_{n+1}} \Xi_i^{(k\varepsilon_j)}$ в соответствии с (2.5), получаем

$$\begin{aligned} |\partial_t(\gamma H_3^{(i)})(y', t + s)| &\leq c \int_h^1 v^{-1-|\mathbf{z}|-\varepsilon} \varkappa_n + \beta(k) + \varkappa_n/p_n - 1 \\ &\times \int \cdots \int_{Q^{n+1}(0, v\mathbf{z})} z_n^\varepsilon |\partial_i^{l_i} f((y', 0, t + s) + z)| dz dv \end{aligned}$$

(степень v здесь на 1 меньше, чем в (2.7), поскольку $\partial_{z_{n+1}} \Xi_i^{(k\varepsilon_j)}$ влечет появление (в (2.5)) дополнительного сомножителя $v^{-\varkappa_{n+1}} = v^{-1}$). Из последней оценки получаем (см. (2.8))

$$\begin{aligned} \|\partial_t(\gamma H_3^{(i)})(\cdot, t + s)\|_{\underline{B}, \mathbb{R}^{n-1}} &\leq c \int_h^1 v^{-3-\varkappa_n-\varepsilon} \varkappa_n + \beta(k) + \varkappa_n/p_n \\ &\times \int_0^v \int_0^{v^{\varkappa_{n+1}}} z_n^\varepsilon \|\partial_i^{l_i} f(\cdot, z_n, t + s + z_{n+1})\|_{\underline{B}, \mathbb{R}^{n-1}} dz_n dz_{n+1} dv. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Перепишем подынтегральное выражение следующим образом:

$$\{v^{-(2+\varkappa_n)/p'_n-1+\delta_1}\} \{v^{-2/p_n+\delta_2} z_n^\varepsilon \|\partial_i^{l_i} f(\cdot, z_n, t + s + z_{n+1})\|_{\underline{B}, \mathbb{R}^{n-1}}\},$$

где δ_1 и δ_2 те же, что и в (2.9). Выберем $\delta_1 = \beta(k) + \delta$, $\delta_2 = -\varepsilon \varkappa_n - \delta$ с достаточно малым $\delta > 0$ так, чтобы $1 - \delta_1 > 0$. По неравенству Гёльдера (с p'_n, p_n) и поскольку $\varkappa_n + \varkappa_{n+1} = \varkappa_n + 1$, в интеграле по z_n, z_{n+1} и v мы получаем

$$\begin{aligned} \text{левая часть (2.13)} &\leq c \left(\int_h^1 v^{-1-p'_n(1-\delta_1)} dv \right)^{1/p'_n} J^{1/p_n} \\ &\leq c \left(\int_h^\infty v^{-1-p'_n(1-\delta_1)} dv \right)^{1/p'_n} J^{1/p_n} = ch^{-(1-\delta_1)} J^{1/p_n} \\ &= ch^{-(1-\beta(k)-\delta)} J^{1/p_n} \end{aligned} \quad (2.14)$$

в силу нашего выбора δ_1 и δ_2 , где

$$\begin{aligned} J &= \int_h^1 v^{-2-p_n(\varepsilon \varkappa_n + \delta)} \\ &\times \int_0^{v^{\varkappa_{n+1}}} \int_0^{v^{\varkappa_n}} z_n^{\varepsilon p_n} \|\partial_i^{l_i} f(\cdot, z_n, t + s + z_{n+1})\|_{\underline{B}, \mathbb{R}^{n-1}}^{p_n} dz_n dz_{n+1} dv \\ &=: \int_h^1 v^{-p_n \delta} \varrho(v, t + s) dv, \end{aligned} \quad (2.15)$$

а $\varrho(v, t+s)$ мы определяем как интеграл с предшествующей строчки. Из (2.6), (2.14) и (2.15) получаем

$$\begin{aligned} & |\gamma H_3^{(i)}|_{F_{q,p_n}^{\beta(k)}(0,1;L_{\underline{p}}(\mathbb{R}^{n-1}))} \\ & \leq c \left(\int_0^1 \left(\int_0^{1-t} h^{-\lambda} \int_h^1 v^{-p_n} \delta \int_0^h \varrho(v, t+s) ds dv dh \right)^{q/p_n} dt \right)^{1/q}, \end{aligned}$$

где $\lambda = 1 + p_n \beta(k) - p_n/p'_n + p_n(1 - \beta(k) - \delta) = 2 - p_n \delta$. По лемме 3.4, ii) с $T = \gamma = 1$, $\varepsilon = p_n \delta$ последний интеграл не превосходит

$$c \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \varrho(v, \tau) dv \right)^{q/p_n} d\tau \right)^{1/q}.$$

По определению $\varrho(v, \tau)$ это выражение равно

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^1 \left(\int_0^{1-t} v^{-2-\varepsilon p_n} \varkappa_n \int_0^{v^{\varkappa_n+1}} \int_0^{v^{\varkappa_n}} z_n^{\varepsilon p_n} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times \|\partial_i^{l_i} f(\cdot, z_n, \tau + z_{n+1})\|_{\underline{p}, \mathbb{R}^{n-1}}^{p_n} dz_n dz_{n+1} dv \right)^{q/p_n} d\tau \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Применяя лемму 3.4, i) с $T = 1$, $\gamma = \varkappa_n$, оцениваем этот интеграл через

$$c \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \|\partial_i^{l_i} f(\cdot, z_n, \tau)\|_{\underline{p}, \mathbb{R}^{n-1}}^{p_n} dz_n \right)^{q/p_n} d\tau \right)^{1/q},$$

что совпадает с искомым результатом для $H_3^{(i)}$. Таким образом, мы доказали (2.2) и теорему в целом.

§ 3. Вспомогательные утверждения, использованные в доказательстве

Сформулируем несколько исходных неравенств.

ЛЕММА 3.1. Пусть $1 \leq s \leq r < \infty$, $f \in L_s(0, T^\gamma)$, $0 < \varepsilon, \gamma < \infty$, $0 < T \leq \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \left\| x^{-1/r-\varepsilon\gamma} \int_0^{x^\gamma} y^{\varepsilon-1/s'} f(y) dy \right\|_{L_r(0,T,dx)} \leq c^*(\dots) \|f\|_{L_s(0,T^\gamma)}, \\ \text{ii)} \quad & \left\| x^{-1/r+\varepsilon\gamma} \int_{x^\gamma}^{T^\gamma} y^{-\varepsilon-1/s'} f(y) dy \right\|_{L_r(0,T,dx)} \leq c^*(\dots) \|f\|_{L_s(0,T^\gamma)}, \end{aligned}$$

где $c^*(\dots) = c^*(\varepsilon, \gamma, r, s) = \gamma^{-1/r} (\mu/\varepsilon)^\mu$, $\mu = 1 - 1/s + 1/r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. книгу О. В. Бесова, В. П. Ильина и С. М. Никольского [24; п. 2.15] для случая $T = \infty$. Применяя этот результат к $\tilde{f} := f\chi_{(0,T^\gamma)}$, получаем неравенство для конечного T .

Неравенство, сформулированное в следующей лемме, является центральным в теории следов в $L_{p,q}$ -пространствах.

ЛЕММА 3.2. *Предположим, что $\gamma > 0$, и пусть*

$$K[f](x) := \int_0^{T^\gamma} k(x, y) f(y) dy$$

– интегральный оператор с неотрицательным ядром $k(x, y)$ такой, что $K: L_1(0, T^\gamma) \rightarrow L_1(0, T)$ – непрерывное отображение. Тогда для $1 \leq s < \infty$ неравенство

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^T \left(\int_0^{T-t} x^{-1} \int_0^x K[\varrho(\cdot, t+a)](x) da dx \right)^s dt \right)^{1/s} \\ & \leq c \left(\int_0^T \left(\int_0^{T^\gamma} \varrho(y, \tau) dy \right)^s d\tau \right)^{1/s} \end{aligned}$$

выполняется для всех неотрицательных $\varrho(y, \tau)$ с конечной правой частью. Здесь $c = s\|K\|$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. i) Заметим, что K действует по первой переменной ϱ , в то время как усреднение da – по второй.

ii) Решающий момент – использование (в правой части) $\|\cdot\|_{L_s(d\tau, L_1(dy))}$ -нормы, а не $\|\cdot\|_{L_1(dy, L_s(d\tau))}$ -нормы. Это усложняет задачу, так как первая норма меньше (в силу интегрального неравенства Минковского).

По предыдущей лемме с K , равным взвешенному интегральному оператору Харди из леммы 3.1, i), и соответственно леммы 3.1, ii) с $r = s = 1$, мы получаем следующий результат.

ЛЕММА 3.4. *В условиях двух предыдущих лемм*

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \left(\int_0^T \left(\int_0^{T-t} x^{-2-\varepsilon\gamma} \int_0^x \int_0^{x^\gamma} y^\varepsilon \varrho(y, t+a) dy da dx \right)^s dt \right)^{1/s} \\ & \leq c^* \left(\int_0^T \left(\int_0^{T^\gamma} \varrho(y, \tau) dy \right)^s d\tau \right)^{1/s}, \\ \text{ii)} \quad & \left(\int_0^T \left(\int_0^{T-t} x^{-2+\varepsilon\gamma} \int_0^x \int_{x^\gamma}^{T^\gamma} y^{-\varepsilon} \varrho(y, t+a) dy da dx \right)^s dt \right)^{1/s} \\ & \leq c^* \left(\int_0^T \left(\int_0^{T^\gamma} \varrho(y, \tau) dy \right)^s d\tau \right)^{1/s}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.2. Мы используем в рассуждении двойственное пространство: выберем $\varphi \in L_{s'}(0, T)$. Тогда по теореме Фубини

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_0^{T-t} x^{-1} \int_0^x K[\varrho(\cdot, t+a)](x) da dx \varphi(t) dt \right| \\ & \leq \int_0^T x^{-1} \int_0^x \int_0^{T-x} K[\varrho(\cdot, t+a)](x) |\varphi(t)| dt da dx. \end{aligned} \quad (3.1)$$

После очевидной замены переменных внутренних интеграл по t в правой части (3.1) преобразуется к виду

$$\int_a^{T-x+a} K[\varrho(\cdot, \tau)](x) |\varphi(\tau - a)| d\tau.$$

Более того, $T - x + a \leq T$ для $a \leq x$, так что, меняя подходящим образом порядок интегрирования, для выражения в (3.1) получаем оценку

$$\int_0^T \int_0^T K[\varrho(\cdot, \tau)](x) \left\{ x^{-1} \int_0^x |\varphi^0(\tau - a)| da \right\} dx d\tau, \quad (3.2)$$

где φ^0 есть продолжение φ нулем на $I := [-T, T]$. Выражение в фигурных скобках (равномерно по x) поточечно оценивается через значения максимальной функции Харди–Литтлвуда $M_I(\varphi^0)(\tau)$ (см. следующую лемму). Таким образом, с учетом наших предположений относительно K выражение (3.2) не превосходит величины

$$\|K\| \int_0^T \|\varrho(\cdot, \tau)\|_{L_1(0, T\gamma)} M_I(\varphi^0)(\tau) d\tau.$$

Применим теперь неравенство Гёльдера (с s, s') к интегралу по τ и используем ограниченность оператора $M_I: L_{s'}(I) \rightarrow L_{s'}(I)$ при $1 < s' \leq \infty$ (см. следующую лемму). Поскольку $\|\varphi^0\|_{L_{s'} I} = \|\varphi\|_{L'_s(0, T)}$, это приводит нас к требуемому результату.

ЛЕММА 3.5. *Для $I = [a, b]$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, рассмотрим максимальный оператор Харди–Литтлвуда на I , определенный формулой*

$$M_I(\varphi)(\tau) := \max_{\xi < \tau, \xi \in I} \frac{1}{\tau - \xi} \int_{\xi}^{\tau} |\varphi|, \quad \tau \in I.$$

Тогда M_I ограничен в $L_p(I)$ при $1 < p \leq \infty$ и

$$\|M_I\|_{L_p(I) \rightarrow L_p(I)} \leq \frac{p}{p-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $1 < p < \infty$ см. [24; гл. X, 398], а случай $p = \infty$ тривиален.

Автор признателен рецензенту, привлечшему его внимание к работам Берколайко, и Кате Хансен-Матиссек (Гейдельбергский университет) за перевод этих работ.

Список литературы

1. Крылов Н. В. Параболические уравнения в пространствах L_p со смешанными нормами // Алгебра и анализ. 2002. Т. 14. № 4. С. 91–106.
2. von Wahl W. The equation $u' + A(t)u = f$ in a Hilbert space and L^p -estimates for parabolic equations // J. London Math. Soc. 1982. V. 25. P. 483–497.
3. Iwashita H. L_q – L_r estimates for solutions of the nonstationary Stokes equations in an exterior domain and the Navier–Stokes initial value problem in L_q spaces // Math. Ann. 1989. V. 285. P. 265–288.
4. Sohr H. The Navier–Stokes equations. Basel: Birkhäuser, 2001.
5. von Wahl W. The equations of Navier–Stokes and abstract parabolic equations. Braunschweig: Vieweg, 1985.

6. Clément P., Prüss J. Global existence for a semilinear parabolic Volterra equation // Math. Z. 1992. V. 209. P. 17–26.
7. Krylov N. V. SPDE's in $L_q(0, \tau; L_p)$ spaces // Electron. J. Probab. 2000. V. 5. P. 1–29.
8. Triebel H. Theory of function spaces. Basel: Birkhäuser, 1983.
9. Schmeisser H.-J., Triebel H. Fourier analysis and function spaces. Chichester: Wiley, 1987.
10. Kufner A., John O., Fučík S. Function spaces. Leyden: Noordhoff Int. Publ., 1977.
11. Weidemaier P. Maximal regularity for parabolic equations with inhomogeneous boundary conditions in Sobolev spaces with mixed L_p -norm // Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. 2002. V. 8. P. 47–51.
12. Бугров Я. С. Функциональные пространства со смешанной нормой // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1971. Т. 35. № 5. С. 1137–1158.
13. Weidemaier P. On the trace theory for functions in Sobolev spaces with mixed L_p -norm // Czechoslovak Math. J. 1994. V. 44. P. 7–20.
14. Weidemaier P. Existence results in L_p - L_q -spaces for second order parabolic equations with inhomogeneous boundary conditions // Progress in partial differential equations / ed. H. Amann, et al., Proc. Pont-à-Mousson 1997. V. 2. Harlow, UK: Longman, 1998. P. 189–200.
15. Ладженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, Физматлит, 1967.
16. Grisvard P. Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications. II // J. Math. Pures Appl. 1966. V. 45. P. 207–290.
17. Weidemaier P. The trace theorem $W_p^{2,1}(\Omega_T) \ni f \mapsto \nabla_x f \in W_p^{1-1/p, 1/2-1/(2p)}(\partial\Omega_T)$ revisited // Comment. Math. Univ. Carolin. 1991. V. 32. P. 307–314.
18. Берколайко М. З. О следах обобщенных пространств дифференцируемых функций со смешанной нормой // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277. № 2. С. 270–274.
19. Берколайко М. З. Следы функций из обобщенных пространств Соболева со смешанной нормой на произвольном координатном подпространстве. I // Исследования по геометрии и математическому анализу. Труды Института математики. Т. 7. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1987. С. 30–44.
20. Берколайко М. З. Следы функций из обобщенных пространств Соболева со смешанной нормой на произвольном координатном подпространстве. II // Исследования по геометрии “в целом” и математическому анализу. Труды Института математики. Т. 9. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1987. С. 34–41.
21. Weidemaier P. Local existence for a parabolic problem with fully nonlinear boundary condition arising in nonlinear heat conduction; an L^p -approach // Semigroup theory and evolution equations. Proc. Delft 1989 / ed. P. Clément et al. New York: M. Dekker, 1991. P. 519–522. (Lecture Notes in Pure and Appl. Math. V. 135.)
22. Weidemaier P. Local existence for parabolic problems with fully nonlinear boundary condition; an L^p -approach // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 1991. V. 160. P. 207–222.
23. Ильин В. П., Солонников В. А. О некоторых свойствах дифференцируемых функций многих переменных // Труды МИАН. 1962. Т. 66. С. 205–226.
24. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, Физматлит, 1975.
25. Харди Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Г. Неравенства. М.: ИЛ, 1948.

Fraunhofer Institut für Kurzzeitdynamik,
Freiburg, Germany
E-mail: weide@emi.fhg.de

Поступила в редакцию
02.08.2000 и 22.07.2002