Общероссийский математический портал

Л. Б. Голинский, И. Е. Егорова, О предельных множествах для дискретного спектра комплексных якобиевых матриц, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 6, 43–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1364>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 11:39:14

УДК 517.5

Л. Б. Голинский, И. Е. Егорова

О предельных множествах для дискретного спектра комплексных якобиевых матриц

Изучается дискретный спектр комплексных якобиевых матриц, которые являются компактными возмущениями дискретного лапласиана. Найдена точная в смысле порядка скорость стабилизации матричных элементов, при которой дискретный спектр конечен. Построен пример якобиевой матрицы, дискретный спектр которой имеет единственную предельную точку. Эти результаты представляют собой дискретные аналоги известных теорем Б. С. Павлова об операторах Шрёдингера на полуоси с комплексным потенциалом.

Библиография: 26 названий.

§ 1. Введение

В 1960-х годах Б. С. Павлов, изучая дискретный спектр оператора Шрёдингера на полуоси

$$l_h y = -y'' + q(x)y, \quad y'(0) - hy(0) = 0, \quad (1.1)$$

с комплекснозначным потенциалом q и комплексным параметром h , пришел к следующим результатам [1], [2].

ТЕОРЕМА П1. *Число собственных значений оператора l_h конечно, если бесконечно дифференцируемый потенциал $q(x)$ удовлетворяет при некотором $\varepsilon > 0$ условию*

$$|q(x)| \leq C \exp(-\varepsilon x^{1/2}), \quad x > 0.$$

ТЕОРЕМА П2. *Каковы бы ни были числа $0 < \beta < 1/2$ и $\lambda > 0$ существует оператор Шрёдингера (1.1) с вещественным бесконечно дифференцируемым потенциалом $q(x)$, удовлетворяющим при некотором $\delta > 0$ условию*

$$|q(x)| \leq C \exp(-\delta x^\beta), \quad x > 0,$$

который при некотором комплексном h имеет бесконечное множество невещественных собственных значений с единственной точкой накопления λ .

Целью настоящей работы является получение дискретных аналогов теорем Павлова.

Работа выполнена при поддержке фонда INTAS Research Network NeCCA (грант № 03-51-6637).

Пусть

$$J = \begin{pmatrix} b_0 & c_0 & & & \\ a_0 & b_1 & c_1 & & \\ & a_1 & b_2 & c_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

— бесконечная якобиева матрица с комплексными элементами, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0. \quad (1.3)$$

Оператор J в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$, $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, порождаемый данной матрицей, является, тем самым, компактным возмущением дискретного лапласиана

$$J_0 : \quad a_n = c_n = \frac{1}{2}, \quad b_n = 0.$$

Согласно теореме Г. Вейля спектр $\sigma(J)$ оператора J есть $\sigma(J) = [-1, 1] \cup \sigma_d(J)$, где не более чем счетное множество $\sigma_d(J)$ собственных значений конечной алгебраической кратности, называемое далее *дискретным спектром оператора J* , может иметь точки сгущения лишь на отрезке $[-1, 1]$. Основным объектом исследования является предельное множество дискретного спектра $E_J := \{\sigma_d(J)\}'$ для операторов (1.2), (1.3).

Возникает естественный вопрос о внутреннем описании класса $\{E_J\}$ замкнутых множеств на $[-1, 1]$, которые могут быть предельными множествами дискретного спектра якобиевых матриц всего класса (1.2), (1.3) или некоторых его подклассов. Наши результаты представляют собой первый шаг на пути решения этого общего вопроса, относящийся в основном к случаю пустого предельного множества (т.е. конечного дискретного спектра).

Будем говорить, что матрица J (1.2) принадлежит классу $\mathcal{P}(\beta)$, если

$$\left|a_n - \frac{1}{2}\right| + \left|c_n - \frac{1}{2}\right| + |b_n| \leq C_1 \exp(-C_2 n^\beta), \quad 0 < \beta < 1, \quad C_1, C_2 > 0. \quad (1.4)$$

Напомним, что *показателем сходимости* или *индексом Тейлора–Безиковича замкнутого множества $F \subset [-1, 1]$* называется величина

$$\tau(F) := \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \sum_{j=1}^{\infty} |l_j|^\varepsilon < \infty \right\},$$

где $\{l_j\}$ — смежные интервалы множества F .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $J \in \mathcal{P}(\beta)$, где $0 < \beta < 1/2$. Тогда E_J — замкнутое множество меры нуль и его показатель сходимости удовлетворяет неравенству

$$\dim E_J \leq \tau(E_J) \leq \frac{1 - 2\beta}{1 - \beta}, \quad (1.5)$$

где $\dim E_J$ — хаусдорфова размерность множества E_J . Если $J \in \mathcal{P}(1/2)$, то $E_J = \emptyset$ (т.е. дискретный спектр конечен).

Утверждение, касающееся конечности дискретного спектра, получено в несколько более общем виде в работе [3; теорема 4.6].

Оказывается, показатель $1/2$ в теореме 1 является точным в следующем смысле.

ТЕОРЕМА 2. *Для любых $\varepsilon > 0$ и $-1 < \nu < 1$ существует оператор $J \in \mathcal{P}(1/2 - \varepsilon)$ такой, что его дискретный спектр $\sigma_d(J)$ бесконечен и, более того, множество E_J состоит из единственной точки $E_J = \{\nu\}$.*

Отметим, что для вещественных якобиевых матриц J с $b_n = \overline{b_n}$, $a_n = c_n > 0$ поставленный выше вопрос тривиален. Поскольку дискретный спектр в этом случае веществен, в качестве предельного множества кроме пустого могут выступать только точки ± 1 (каждая в отдельности или обе сразу). При этом хорошо известно [4], что уже существование первого момента

$$\sum_n n \left(\left| a_n - \frac{1}{2} \right| + |b_n| \right) < \infty$$

обеспечивает конечность дискретного спектра оператора J .

Настоящая статья возникла как попытка понять замечательные работы [1], [2], содержащие синтез идей теории операторов и теории функций в круге, которые, на наш взгляд, не получили должной оценки специалистов. Сравнительная простота дискретной модели позволила устранить ряд неточностей и упростить рассуждения работ [1], [2], применяя в § 2 развитую технику определителей возмущения [5], [6]. Параграф 3 следует в основном работе Л. Карлесона [7] о множествах нулей голоморфных функций в единичном круге, результаты которой позволяют получить оценку (1.5) и завершить доказательство теоремы 1. В § 4 приводятся необходимые сведения из задачи рассеяния для вещественных матриц, которые применяются в § 5 для доказательства теоремы 2. Для удобства читателей в приложении приведены некоторые результаты об определителях возмущения для комплексных якобиевых матриц.

Отметим в заключение, что теория комплексных якобиевых матриц представляет собой интенсивно развивающийся раздел теории операторов, находящий применения в теории формальных ортогональных полиномов, J -непрерывных дробей и аппроксимаций Паде (см. [8]–[12]).

§ 2. Определители возмущения и решение Йоста

Техника определителей возмущения в спектральной теории якобиевых матриц развита в недавней работе Р. Киллипа и Б. Саймона [6; раздел 2]. Основные результаты этой работы касаются вещественных симметрических матриц ($b_n = \overline{b_n}$, $a_n = c_n > 0$), однако та часть из них, о которой пойдет речь далее, ни в коей мере не использует эту специфику, и результаты сохраняются для комплексных якобиевых матриц (1.2) (см. приложение). В дальнейшем мы предполагаем существование первого момента

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \left(\left| a_k - \frac{1}{2} \right| + |b_k| + \left| c_k - \frac{1}{2} \right| \right) < \infty, \quad (2.1)$$

хотя некоторые результаты (в ослабленном виде) верны при менее ограничительных предположениях.

При условии (2.1) оператор J есть ядерное возмущение оператора J_0 , т.е. $\Delta J = J - J_0 \in \mathcal{S}_1$, так что при $\lambda \notin [-1, 1]$

$$(J - \lambda)(J_0 - \lambda)^{-1} = I + \Delta J(J_0 - \lambda)^{-1},$$

и тем самым при $|z| < 1$ корректно определен определитель возмущения [5; гл. IV.3]:

$$\Delta(z, J) := \det(J - \lambda)(J_0 - \lambda)^{-1}, \quad \lambda(z) = \frac{z + z^{-1}}{2}.$$

Основные свойства определителя возмущения содержатся в следующем утверждении (см., например, [5; гл. IV, §3], [6; теорема 2.5]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. *При условии (2.1) функция Δ принадлежит алгебре $\mathcal{A}$ голоморфных в единичном круге $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ и непрерывных вплоть до границы функций; $\Delta(z_0) = 0$ при $|z_0| < 1$ в том и только том случае, если $\lambda(z_0) \in \sigma_d(J)$, при этом порядок нуля равен алгебраической кратности собственного значения $\lambda(z_0)$.*

Ключевую роль в теории играет ашпроксимационное соотношение для определителей возмущения. Обозначим через

$$J_m = \begin{pmatrix} b_0 & c_0 & & & \\ a_0 & b_1 & c_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{m-1} \\ & & & a_{m-1} & b_m \end{pmatrix}, \quad J_{0,m} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ & & & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

матрицы порядка $m + 1$, полученные из матриц J и J_0 соответственно. Тогда [6; (2.59)]

$$\Delta(z, J) = \lim_{m \rightarrow \infty} \det \left(\frac{J_m - \lambda}{J_{0,m} - \lambda} \right) \quad (2.2)$$

равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{D}$ (доказательство соотношения (2.2) дано в приложении).

Наряду с исходными матрицами J , J_0 рассмотрим так называемые *ассоциированные матрицы* $J^{(n)}$, $J_0^{(n)}$, которые получаются вычеркиванием первых $n + 1$ строк и столбцов у матриц J , J_0 соответственно:

$$J^{(n)} = \begin{pmatrix} b_{n+1} & c_{n+1} & & \\ a_{n+1} & b_{n+2} & c_{n+2} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad J_0^{(n)} = J_0,$$

и $J^{(-1)} = J$. Матрицы $J_m^{(n)}$ определяются естественным образом. Разлагая определитель $\det(J_m - \lambda)$ по первой строке, мы получаем после деления на $\det(J_{0,m} - \lambda)$

$$\begin{aligned} \det \left(\frac{J_m - \lambda}{J_{0,m} - \lambda} \right) &= (b_0 - \lambda) \det \left(\frac{J_{m-1}^{(0)} - \lambda}{J_{0,m-1} - \lambda} \right) \det \left(\frac{J_{0,m-1} - \lambda}{J_{0,m} - \lambda} \right) \\ &\quad - a_0 c_0 \det \left(\frac{J_{m-2}^{(1)} - \lambda}{J_{0,m-2} - \lambda} \right) \det \left(\frac{J_{0,m-2} - \lambda}{J_{0,m} - \lambda} \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Далее, непосредственно вычисляется (ср. [6; (2.10)])

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \det \left(\frac{J_{0,m-j} - \lambda}{J_{0,m} - \lambda} \right) = (-2z)^j, \quad j \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\},$$

так что предельный переход в (2.3) при $m \rightarrow \infty$ с учетом (2.2) приводит к соотношению

$$\Delta(z, J) = (\lambda - b_0)(2z\Delta(z, J^{(0)})) - a_0 c_0 (4z^2 \Delta(z, J^{(1)})). \quad (2.4)$$

Поскольку (2.4) справедливо для любой матрицы J , запишем его для $J = J^{(n)}$:

$$\Delta(z, J^{(n)}) = (\lambda - b_{n+1})(2z\Delta(z, J^{(n+1)})) - a_{n+1} c_{n+1} (4z^2 \Delta(z, J^{(n+2)})). \quad (2.5)$$

Умножим (2.5) на z^n и обозначим $\psi_n := z^n \Delta(z, J^{(n)})$. После сдвига индексов получаем

$$\psi_{m-1}(z) + 2b_m \psi_m(z) + 4a_m c_m \psi_{m+1}(z) = 2\lambda \psi_m(z), \quad m \geq 0. \quad (2.6)$$

Еще одно важное свойство определителей возмущения содержится в следующем результате [6; утверждение 2.14], доказательство которого дано в приложении.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2. *При условии (2.1) имеет место соотношение*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta(z, J^{(m)}) = 1 \quad (2.7)$$

равномерно в замкнутом круге $\overline{\mathbb{D}}$.

Тем самым для вещественной симметрической матрицы J решение $\psi_m(z)$ уравнения (2.6) с точностью до константы (относительно спектрального параметра) совпадает с решением Йоста уравнения $(J - \lambda)\psi = 0$ (см. [13]).

При условии (2.1) обозначим

$$H(n) := \sum_{j=n}^{\infty} (|2b_j| + |4a_j c_j - 1|), \quad H(n, m) := \prod_{j=n+1}^{n+m-1} (1 + H(j)). \quad (2.8)$$

Как легко видеть, $\{H(n)\} \in \ell^1$ и последовательности $H(n)$ и $H(n, m)$ монотонно убывают.

Основным результатом данного параграфа является

ТЕОРЕМА 2.3. *При условии (2.1) тейлоровские коэффициенты определителя возмущения*

$$\Delta(z, J) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j z^j$$

допускают оценку

$$|\delta_j| \leq \prod_{j=1}^{\infty} (1 + H(j)) \sum_{m=[j/2]}^{\infty} (|2b_m| + |4a_m c_m - 1|), \quad (2.9)$$

где $[x]$ есть целая часть x . В частности, определитель возмущения Δ принадлежит пространству W_+ абсолютно сходящихся рядов Тейлора.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что ψ_n удовлетворяет “дискретному интегральному” уравнению вольтерровского типа. Для этого введем функцию

$$G(n, m, z) = \begin{cases} 2 \frac{z^{m-n} - z^{n-m}}{z - z^{-1}}, & m \geq n; \\ 0, & m < n, \end{cases}$$

для которой выполняется

$$\frac{1}{2}G(n, m+1, z) + \frac{1}{2}G(n, m-1, z) - \lambda G(n, m, z) = \delta(n, m), \quad (2.10)$$

где $\lambda = (z + z^{-1})/2$, $\delta(n, m)$ – символ Кронекера. Умножим теперь соотношение (2.10) на ψ_m , (2.6) – на $G(n, m, z)/2$, вычтем из первого второе и просуммируем полученные равенства по m от n до N . Имеем

$$\begin{aligned} \psi_n &= \sum_{m=n}^N \left(-b_m G(n, m, z) + \left(\frac{1}{2} - 2a_{m-1}c_{m-1} \right) G(n, m-1, z) \right) \psi_m \\ &\quad + \frac{1}{2}G(n, N+1, z)\psi_N - 2a_N c_N G(n, N, z)\psi_{N+1}. \end{aligned}$$

Устремим теперь $N \rightarrow \infty$, учитывая явный вид ядра G и соотношение (2.7):

$$\psi_n(z) = z^n + \sum_{m=n+1}^{\infty} M(n, m, z)\psi_m(z), \quad n = -1, 0, 1, \dots, \quad (2.11)$$

где

$$M(n, m, z) = -b_m G(n, m, z) + \left(\frac{1}{2} - 2a_{m-1}c_{m-1} \right) G(n, m-1, z),$$

причем, очевидным образом, $M(n, n, z) = 0$. Удобно преобразовать (2.11), введя переменные

$$\Delta(z, J^{(n)}) = z^{-n}\psi_n, \quad \widehat{M}(n, m, z) = M(n, m, z)z^{m-n},$$

так что

$$\Delta(z, J^{(n)}) = 1 + \sum_{m=n+1}^{\infty} \widehat{M}(n, m, z)\Delta(z, J^{(m)}),$$

или иначе

$$\Delta(z, J^{(n)}) - 1 = \sum_{m=n+1}^{\infty} \widehat{M}(n, m, z) + \sum_{m=n+1}^{\infty} \widehat{M}(n, m, z)(\Delta(z, J^{(m)}) - 1). \quad (2.12)$$

Ясно, что $\widehat{M}$ – полином по переменной z , и так как при $|z| \leq 1$

$$\begin{aligned} |G(n, m, z)z^{m-n}| &= 2|z^{2(m-n)} - 1||z - z^{-1}|^{-1} \leq 2|z||m-n|, \\ |G(n, m-1, z)z^{m-n}| &\leq 2|z|^2|m-n-1| < 2|z||m-n|, \end{aligned}$$

то

$$|\widehat{M}(n, m, z)| \leq |z| |m - n| (|2b_m| + |1 - 4a_{m-1}c_{m-1}|), \quad |z| \leq 1. \quad (2.13)$$

При условии (2.1) ряд

$$g(n, z) = \sum_{m=n+1}^{\infty} \widehat{M}(n, m, z)$$

сходится абсолютно и равномерно в замкнутом единичном круге $\overline{\mathbb{D}}$ и в силу (2.13)

$$|g(n, z)| \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} mh_m, \quad h_m = |2b_m| + |1 - 4a_{m-1}c_{m-1}|.$$

Стандартный метод последовательных приближений (ср. [14; лемма 7.8]) дает

$$|\Delta(z, J^{(n)}) - 1| \leq \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} mh_m\right) \sum_{m=n+1}^{\infty} mh_m, \quad n \geq -1, \quad |z| \leq 1.$$

Разложим функцию $\Delta(z, J^{(n)})$ в ряд Тейлора

$$\Delta(z, J^{(n)}) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \varkappa(n, j) z^j \quad (2.14)$$

и оценим ее тейлоровские коэффициенты. По неравенству Коши

$$|\varkappa(n, j)| \leq C \sum_{m=n+1}^{\infty} mh_m,$$

где через C мы будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от пространственных переменных и спектрального параметра. В частности, $\varkappa(n, j) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и фиксированном j .

Более точная оценка учитывает зависимость от второго индекса. Подставим разложение (2.14) в (2.5) и приравняем соответствующие коэффициенты:

$$\varkappa(n, j+1) = \varkappa(n+1, j-1) - \sum_{m=n+1}^{\infty} (2b_m \varkappa(m, j) + (4a_m c_m - 1) \varkappa(m+1, j-1)) \quad (2.15)$$

при $j \geq 2$,

$$\varkappa(n, 1) = -2 \sum_{m=n+1}^{\infty} b_m, \quad \varkappa(n, 2) = - \sum_{m=n+1}^{\infty} (2b_m \varkappa(m, 1) + (4a_m c_m - 1)).$$

Индукция по j с учетом (2.15) приводит к оценке

$$|\varkappa(n, j)| \leq H(n, j) H\left(n+1 + \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor\right), \quad n \geq -1,$$

где $H(n)$, $H(n, m)$ определены в (2.8). Поэтому

$$|\varkappa(n, j)| \leq \prod_{j=1}^{\infty} (1 + H(j)) \sum_{m=n+1+[j/2]}^{\infty} (|2b_m| + |4a_m c_m - 1|). \quad (2.16)$$

Искомая оценка (2.9) есть (2.16) с $n = -1$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Пусть для матрицы J (1.2) конечен момент порядка $n+1$

$$M_{n+1} := \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{n+1} \left(\left| a_k - \frac{1}{2} \right| + |b_k| + \left| c_k - \frac{1}{2} \right| \right) < \infty. \quad (2.17)$$

Тогда n -я производная $\Delta^{(n)}(z)$ определителя возмущения принадлежит W_+ и

$$\max_{z \in \mathbb{D}} |\Delta^{(n)}(z)| \leq C(J) \frac{4^n}{n+1} M_{n+1}, \quad (2.18)$$

где положительная константа $C(J)$ зависит лишь от J .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение очевидным образом вытекает из условия (2.17), представления

$$\Delta^{(n)}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \cdots (j+n) \delta_{j+n} z^j$$

и оценок (2.9).

§ 3. Множества нулей для классов голоморфных в единичном круге функций

Пусть X – некоторый класс функций из алгебры $\mathcal{A}$. Замкнутое множество E на единичной окружности $\mathbb{T}$ называется *множеством единственности для X* , если не существует нетривиальной функции $f \in X$, равной нулю на E . В противном случае говорят о *множестве нулей для X* . Если $X = \mathcal{A}$, то согласно тереме Фату [15] множество E есть множество нулей для $\mathcal{A}$ в том и только том случае, если E имеет лебегову меру нуль: $|E| = 0$. Если X есть подкласс $\mathcal{A}$, то множества нулей, вообще говоря, обладают дополнительными свойствами. Исследование (метрических) свойств множеств нулей восходит к А. Берлингу [16] и Л. Карлесону [7] (см. также [17]). Например, обозначим через $\mathcal{A}_{\infty}$ множество всех функций из $\mathcal{A}$, все производные которых также принадлежат $\mathcal{A}$. Замкнутое множество $E = \mathbb{T} \setminus \bigcup_j l_j$ со смежными дугами l_j есть множество нулей для $\mathcal{A}_{\infty}$ в том и только том случае, если

$$\sum_j |l_j| \ln \frac{1}{|l_j|} < \infty \Leftrightarrow \int_{\mathbb{T}} |\ln \rho(\zeta, E)| dm < \infty, \quad \rho(\zeta, E) = \text{dist}(\zeta, E), \quad (3.1)$$

где dm – нормированная мера Лебега на $\mathbb{T}$. Нас будут интересовать некоторые специальные подклассы класса $\mathcal{A}_{\infty}$, и для множеств нулей возникнет условие более сильное, чем (3.1).

Пусть $g \in \mathcal{A}_{\infty}$ и

$$G_n(g) = G_n := \max_{z \in \mathbb{D}} |g^{(n)}(z)|, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (3.2)$$

Следующий результат (формула Тейлора с остаточным членом) легко получается индукцией по n .

ЛЕММА 3.1. Пусть $g \in \mathcal{A}_\infty$, тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ и любых точек z, w из $\overline{\mathbb{D}}$ справедливо неравенство

$$\left| g(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(w)}{k!} (z-w)^k \right| \leq \frac{G_n}{n!} |z-w|^n. \quad (3.3)$$

Введем нулевое множество функции g на $\mathbb{T}$:

$$F(g) = F := \{\zeta \in \mathbb{T} : g^{(n)}(\zeta) = 0 \text{ при всех } n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Тогда F есть замкнутое множество меры нуль, которое мы отождествим с множеством точек на $[0, 2\pi)$. Обозначим через F_t замкнутое множество точек, расстояние от которых до F не превосходит t , и положим $\varphi_F(t) = \varphi(t) = |F_t|$. Свойства функции φ при $t \rightarrow 0$ играют решающую роль при изучении множеств нулей для классов функций в $\mathcal{A}_\infty$, допускающих оценки на производные (3.2). Функция φ известна также как функция распределения функции $d_F(x) = \text{dist}(x, F)$, $x \in \mathbb{R}$. По формуле замены переменной для любой измеримой функции h

$$\int_{F_s} h(d_F(t)) dt = \int_0^s h(u) d\varphi(u). \quad (3.4)$$

Для функции $g \in \mathcal{A}_\infty$ введем величину (ср. [1])

$$T(s) := \inf_{k \geq 0} \frac{G_k(g)}{k!} s^k, \quad s > 0. \quad (3.5)$$

ЛЕММА 3.2. Пусть $g \in \mathcal{A}_\infty$ и $g \neq 0$. Тогда

$$\int_0^{2\pi} \ln T(s) d\varphi(s) > -\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим в (3.3) $w = \exp(i\theta_0)$, $\theta_0 \in F$, и $z = \exp(i\theta)$. Тогда

$$|g(e^{i\theta})| \leq \frac{G_n}{n!} |\theta - \theta_0|^n.$$

Правая часть этого неравенства содержит два параметра (n и θ_0), по которым можно ее минимизировать:

$$|g(e^{i\theta})| \leq \inf_{n \geq 0} \frac{G_n}{n!} (d_F(\theta))^n = T(d_F(\theta)), \quad \ln |g(e^{i\theta})| \leq \ln T(d_F(\theta)).$$

Остается учесть (3.4) и известное свойство

$$\int_0^{2\pi} \ln |g(e^{i\theta})| d\theta > -\infty.$$

Лемма доказана.

Введем, наконец, основное для нас множество, связанное с нулями функции g внутри круга:

$$E(g) = E := \{\zeta \in \mathbb{T} : \exists \{z_n\} \in \mathbb{D}, z_n \rightarrow \zeta, g(z_n) = 0\}.$$

ЛЕММА 3.3. *Имеем $E \subset F$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $g^{(k)}(w) = 0$, $k = 0, 1, \dots, n-2$, и $g^{(n-1)}(w) \neq 0$ для некоторого $w \in E$. В силу (3.3)

$$\left| g(z) - \frac{g^{(n-1)}(w)}{(n-1)!} (z-w)^{n-1} \right| \leq \frac{G_n}{n!} |z-w|^n.$$

Остается положить $z = z_k$ и устремить $k \rightarrow \infty$. Противоречие доказывает лемму.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 опирается на следствие 2.4. Для матриц $J \in \mathcal{P}(\beta)$ (1.4) условие (2.17) заведомо выполняется при всех n , и моменты M_r легко оцениваются. Поскольку

$$\left| a_k - \frac{1}{2} \right| + |b_k| + \left| c_k - \frac{1}{2} \right| \leq C \exp(-C(k+1)^\beta), \quad 0 < \beta < 1$$

(через C мы обозначаем положительные константы, зависящие лишь от исходной матрицы J), мы имеем

$$M_r \leq C \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^r \exp\left(-\frac{C}{2}(k+1)^\beta\right) \exp\left(-\frac{C}{2}(k+1)^\beta\right).$$

Элементарный анализ функции $u(x) = x^r \exp(-Cx^\beta/2)$ дает

$$\max_{x \geq 0} u(x) = u(x_0) = \left(\frac{2r}{C\beta}\right)^{r/\beta} e^{-r/\beta} = \left(\frac{2}{C\beta e}\right)^{r/\beta} r^{r/\beta}, \quad x_0 = \left(\frac{2r}{C\beta}\right)^{1/\beta},$$

так что

$$M_r \leq B \left(\frac{2}{C\beta e}\right)^{r/\beta} r^{r/\beta}, \quad B = C \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{C}{2}(k+1)^\beta\right).$$

Таким образом,

$$G_n(\Delta) = \max_{z \in \mathbb{D}} |\Delta^{(n)}(z)| \leq C \frac{4^n}{n+1} \left(\frac{2}{C\beta e}\right)^{(n+1)/\beta} (n+1)^{(n+1)/\beta}, \quad n \geq 0.$$

Неравенства

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n/\beta} < e^{1/\beta}, \quad (n+1)^{1/\beta} < e^{(n+1)/\beta}, \quad (n+1)^{(n+1)/\beta} < e^{1/\beta} n^{n/\beta} e^{(n+1)/\beta}$$

приводят к оценке

$$G_n(\Delta) \leq CC_1^n n^{n/\beta}, \quad n \geq 0.$$

Иными словами, определитель возмущения для матриц $J \in \mathcal{P}(\beta)$ принадлежит классу Жевре $\mathcal{G}_\beta$.

Перейдем теперь к оценке функции T (3.5). Так как $n! > n^n e^{-n}$, то

$$T(s) \leq C \inf_n (C_1 e s)^n n^{n/\beta - n} = C \inf_n t^n n^{\alpha n},$$

где $t = C_1 e s < 1/2$ при достаточно малых s , $\alpha = \beta^{-1} - 1 > 0$. Элементарный анализ функции $v(x) = t^x x^{\alpha x}$ показывает, что

$$\min_{x \geq 0} v(x) = v(x_1) = \exp\left(-\frac{\alpha}{e} t^{-1/\alpha}\right), \quad x_1 = \frac{1}{e} t^{-1/\alpha} \gg 1. \quad (3.6)$$

Хотя число x_1 , вообще говоря, не целое, полагая $n = [x_1]$, нетрудно убедиться, что

$$T(s) \leq C \exp\left(-C \left(\frac{1}{s}\right)^{\beta/(1-\beta)}\right), \quad s \leq s_0.$$

Применяя лемму 3.2, мы заключаем, что

$$\int_0^a \frac{d\varphi_F(s)}{s^{\beta/(1-\beta)}} < \infty, \quad 0 < a < 1, \quad F = F(\Delta). \quad (3.7)$$

Предположим, что $0 < \beta < \frac{1}{2}$. Как показано в [7], сходимость интеграла (3.7) эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} |l_j|^{(1-2\beta)/(1-\beta)} < \infty,$$

где $\{l_j\}$ — смежные интервалы замкнутого множества F (как множества на $[0, 2\pi]$), и тем самым

$$\tau(F) \leq \frac{1-2\beta}{1-\beta}.$$

Неравенство $\dim F \leq \tau(F)$ есть общий факт теории фрактальных размерностей (см. [18]). Но по лемме 3.3 $E = E(\Delta) \subset F$, так что в силу монотонности размерностей

$$\dim E \leq \tau(E) \leq \frac{1-2\beta}{1-\beta}.$$

Неравенство (1.5) вытекает теперь из очевидной связи между E_J и E .

Рассмотрим случай $\beta = 1/2$, так что

$$\int_0^a \frac{d\varphi_F(s)}{s} < \infty. \quad (3.8)$$

Покажем, что последнее невозможно для непустого F . Предположим, что смежные дуги $l_j = (\alpha_j, \beta_j)$ занумерованы в порядке убывания длины, т.е. $|l_1| \geq |l_2| \geq \dots$. Пусть

$$0 < t_1 < t_2 < \frac{1}{2}|l_1| = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2}.$$

По определению функции φ

$$\varphi(t_2) - \varphi(t_1) = |\{x : t_1 < \text{dist}(x, F) \leq t_2\}|.$$

Для интервала $I(t_1, t_2) = (\alpha_1 + t_1, \alpha_1 + t_2)$, очевидно, выполняется

$$I(t_1, t_2) \subset \{x : t_1 < \text{dist}(x, F) \leq t_2\},$$

так что $\varphi(t_2) - \varphi(t_1) \geq t_2 - t_1$. Поэтому мера $d\varphi_F$ мажорирует меру Лебега, и интеграл (3.8) расходится. Тем самым мы приходим к выводу: если $J \in \mathcal{P}(1/2)$, то множество F (а значит, и E) пусто, что означает конечность дискретного спектра $\sigma_d(J)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Следствие 2.4 позволяет получить условия на “массивность” множества E_J в гораздо более общих ситуациях. Так если для матрицы J выполнено (2.17), то $\Delta \in \mathcal{A}_\infty$ и, значит, для множества $E(\Delta)$ справедливо (3.1) и то же условие (после очевидной переформулировки для отрезка $[-2, 2]$) верно для E_J . Другим примером может служить класс якобиевых матриц J с условием

$$\left| a_k - \frac{1}{2} \right| + |b_k| + \left| c_k - \frac{1}{2} \right| \leq C \exp(-C(\ln(k+1))^\gamma), \quad \gamma > 1,$$

содержащий класс $\mathcal{P}(\beta)$. Нетрудно убедиться, что определитель возмущения таких матриц удовлетворяет оценке

$$\max_{z \in \mathbb{D}} |\Delta^{(n)}(z)| \leq C \exp(Cn^p), \quad p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} > 1.$$

Функции с такими оценками на производные изучены Б. Тейлором и Д. Вильямсом в [19], где получено условие на нулевое множество

$$\int_{\mathbb{T}} |\ln \rho(\zeta, E)|^q dm < \infty, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1.$$

С другой стороны, конечность дискретного спектра матриц $J \in \mathcal{P}(1/2)$ обусловлена квазианалитичностью класса Жевре $\mathcal{G}_{1/2}$, т.е. отсутствием нетривиальной функции f такой, что $f^{(n)}(\zeta_0) = 0$ при всех $n \geq 0$ и некотором $\zeta_0 \in \mathbb{T}$. Известный критерий квазианалитичности [20] позволяет получить несколько более сильное, чем (1.4) с $\beta = 1/2$, условие конечности дискретного спектра.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Определитель возмущения матрицы $J \in \mathcal{P}(1/2)$ может иметь граничные нули на единичной окружности, что видно уже на простом примере

$$J : \quad a_n = c_n = \frac{1}{2}, \quad b_0 = e^{i\theta}, \quad b_1 = b_2 = \dots = 0,$$

для которого легко вычисляется $\Delta(z, J) = 1 - e^{i\theta}z$. Эти точки (точнее, их образы при отображении Жуковского) известны как спектральные особенности. В указанном примере при $\theta \neq 0, \pi$ матрица J имеет пустой дискретный спектр и одну спектральную особенность в точке $\cos \theta \in (-1, 1)$. При общем условии (2.1) спектральные особенности образуют замкнутое множество меры нуль. Ясно, что матрица $J \in \mathcal{P}(1/2)$ может иметь не более конечного числа спектральных особенностей (ср. [3]). В самом деле, в противном случае существовала бы точка $\zeta_0 \in \mathbb{T}$, для которой $\Delta^{(n)}(\zeta_0, J) = 0$ при всех $n \geq 0$ (ср. (3.3)), что противоречит квазианалитичности класса $\mathcal{G}_{1/2}$.

§ 4. О данных рассеяния вещественной симметрической матрицы Якоби

В этом параграфе, основываясь на некоторых фактах задачи рассеяния для полубесконечной вещественной матрицы Якоби [4], [13], [21], мы изучаем связь между коэффициентами Фурье функции рассеяния и скоростью стабилизации элементов якобиевой матрицы в отсутствие дискретного спектра и резонансов. Основным результатом — лемма 4.2.

Пусть

$$J = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & & \\ a_1 & b_2 & a_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

— матрица Якоби с элементами $a_n > 0, b_n = \overline{b_n}$, удовлетворяющими условию (1.5). Положим $a_0 = 1$. Как известно (см. [4], [13], [21]), у уравнения

$$a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \frac{1}{2}(z + z^{-1})y_n, \quad z \in \overline{\mathbb{D}}, \quad n \geq 1, \quad (4.2)$$

есть решение $f_n(z)$, называемое *решением Йоста*, которое обладает следующими свойствами:

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)z^{-n} = 1$ равномерно по $z \in \overline{\mathbb{D}}$;
- ii) при всех $n \geq 0$ функции $f_n(z)$ принадлежат алгебре W_+ абсолютно сходящихся рядов Тейлора, при этом $f_n(\overline{\zeta}) = \overline{f_n(\zeta)}$, $\zeta \in \mathbb{T}$;
- iii) если функция $f_0(z)$, называемая *функцией Йоста*, имеет нули в $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{\pm 1\}$, то они вещественные, простые, их конечное число и их образы в λ -плоскости являются точками дискретного спектра оператора J ;
- iv) решения $f_n(\zeta)$ и $\overline{f_n(\zeta)}$ линейно независимы при $\zeta \in \mathbb{T} \setminus \{\pm 1\}$ и

$$\langle f, \overline{f} \rangle = \frac{\zeta^{-1} - \zeta}{2}, \quad (4.3)$$

где $\langle f, \overline{f} \rangle := a_{n-1}(f_{n-1}\overline{f_n} - f_n\overline{f_{n-1}})$ — вронскиан этих решений.

В силу свойств i) и ii) имеет место представление

$$f_n(z) = \sum_{m=n}^{\infty} K(n, m)z^m, \quad z \in \overline{\mathbb{D}}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (4.4)$$

где элементы $K(n, m)$ матрицы, называемой *оператором преобразования*, вещественны и связаны с элементами матрицы J соотношениями [14], [22]

$$a_n = \frac{K(n+1, n+1)}{2K(n, n)}, \quad \text{т.е.} \quad K(n, n) = \prod_{j=n}^{\infty} (2a_j)^{-1}, \quad (4.5)$$

$$b_n = \frac{K(n, n+1)}{2K(n, n)} - \frac{K(n-1, n)}{2K(n-1, n-1)}, \quad n \geq 1. \quad (4.6)$$

Отметим, что функция $\check{Y}$ оста связана (с точностью до множителя, не зависящего от спектральной переменной) с определителем возмущения матрицы J формулой [6; (2.64)]

$$f_0(z) = \left(\prod_{j=1}^{\infty} 2a_j \right)^{-1} \Delta(z, J).$$

Пусть $S(\zeta) = \overline{f_0(\zeta)}(f_0(\zeta))^{-1}$ — функция рассеяния матрицы J , $\zeta \in \mathbb{T}$. Так как $f_0(\zeta) \neq 0$, $\zeta \in \mathbb{T}$ (в силу предположения об отсутствии резонанса $f_0(\pm 1) \neq 0$), то $S(\zeta)$ — непрерывная функция на $\mathbb{T}$, причем $\overline{S(\zeta)} = S(\bar{\zeta}) = S^{-1}(\zeta)$. Положим

$$F(n) := -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(e^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta. \quad (4.7)$$

В отсутствие дискретного спектра коэффициенты Фурье $F(n)$ и матричные элементы $K(n, m)$ оператора преобразования связаны уравнением обратной задачи рассеяния (уравнением Марченко, см. [4], [13])

$$\frac{\delta(n, m)}{K(n, n)} = K(n, m) + \sum_{l=n}^{\infty} K(n, l) F(l + m), \quad n, m \in \mathbb{Z}_+. \quad (4.8)$$

Известно [14; (10.87)], что при условии (1.5) имеет место неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |F(n+2) - F(n)| < \infty. \quad (4.9)$$

Введем дискретный аналог оператора Гельфанда–Левитана

$$\mathcal{F}_n: \ell^1(\mathbb{Z}_+) \rightarrow \ell^1(\mathbb{Z}_+), \quad (\mathcal{F}_n y)_j = \sum_{m=0}^{\infty} F(2n + m + j) y_m, \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

Здесь $n \geq 1$ — фиксированный параметр.

ЛЕММА 4.1. При условии (4.9) оператор $\mathcal{I} + \mathcal{F}_n$ обратим в пространстве $\ell^1(\mathbb{Z}_+)$ при каждом $n \geq 1$ и

$$\|(\mathcal{I} + \mathcal{F}_n)^{-1}\| \rightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\widehat{F}(n) := \sum_{j=0}^{\infty} |F(n+j) - F(n+j+2)| = \sum_{k=n}^{\infty} |F(k) - F(k+2)|. \quad (4.10)$$

Поскольку $F(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$|F(k)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |F(k+2j) - F(k+2j+2)|,$$

так что

$$|F(k)| + |F(k+1)| \leq \widehat{F}(k). \quad (4.11)$$

Соответственно $\{F(k)\} \in \ell^1(\mathbb{Z}_+)$, т.е. оператор $\mathcal{F}_n$ является вполне непрерывным. По альтернативе Фредгольма оператор $\mathcal{J} + \mathcal{F}_n$ обратим, если уравнение

$$(\mathcal{J} + \mathcal{F}_n)g = 0 \quad (4.12)$$

имеет лишь тривиальное решение. Поскольку $S(e^{-i\theta}) = \overline{S(e^{i\theta})}$, то $F(n) \in \mathbb{R}$, так что достаточно ограничиться вещественными решениями уравнения (4.12). Пусть $g = \{g(k)\} \in \ell^1$ – такое решение. Введем функцию

$$\tilde{g}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^k.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (g, g) &= \sum_0^{\infty} |g(k)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{g}(e^{i\theta})|^2 d\theta, \\ (\mathcal{F}_n g, g) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(e^{i\theta}) e^{2in\theta} \tilde{g}^2(e^{i\theta}) d\theta, \end{aligned}$$

так что

$$0 = ((\mathcal{J} + \mathcal{F}_n)g, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \Phi(e^{i\theta})) |\tilde{g}(e^{i\theta})|^2 d\theta, \quad (4.13)$$

где

$$\Phi(e^{i\theta}) = S(e^{i\theta}) e^{2in\theta} \tilde{g}^2(e^{i\theta}) |\tilde{g}(e^{i\theta})|^{-2}.$$

Предположим, что $\tilde{g} \neq 0$. Так как $|\Phi(e^{i\theta})| = 1$, то из (4.13) следует $\Phi(e^{i\theta}) \equiv 1$, т.е. с учетом определения функции рассеяния

$$\frac{\tilde{g}^2(e^{i\theta})}{f_0^2(e^{i\theta})} e^{2in\theta} = \frac{|\tilde{g}(e^{i\theta})|^2}{|f_0(e^{i\theta})|^2}.$$

Тем самым, для функции $h_n = \tilde{g}^2 f_0^{-2} e^{2in\theta}$ имеем $h_n(e^{i\theta}) = |h_n(e^{i\theta})|$. Ввиду отсутствия дискретного спектра и резонансов $f_0(z) \neq 0$ при $z \in \overline{\mathbb{D}}$ и, следовательно, $h_n \in W_+$, так что по принципу симметрии и теореме единственности $h_n \equiv \text{const}$ в $\overline{\mathbb{D}}$. Но при $n \geq 1$ $h_n(0) = 0$, т.е. $\tilde{g} \equiv 0$. Таким образом, уравнение (4.12) имеет лишь тривиальное решение, и оператор $\mathcal{J} + \mathcal{F}_n$ обратим при $n \geq 1$. Второе утверждение леммы вытекает из неравенств

$$\|\mathcal{F}_n\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |F(2n+j)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

и

$$\|(\mathcal{J} + \mathcal{F}_n)^{-1} - \mathcal{J}\| \leq \frac{\|\mathcal{F}_n\|}{1 - \|\mathcal{F}_n\|}.$$

Лемма доказана.

Положим

$$\tau(n, j) = K(n, n+j)K(n, n) - \delta(n, n+j). \quad (4.14)$$

Тогда уравнение (4.8) приобретает вид

$$\tau(n, j) + \sum_{m=0}^{\infty} F(2n+m+j)\tau(n, m) = -F(2n+j), \quad j \geq 0, \quad (4.15)$$

откуда

$$\{\tau(n, j)\}_{j \geq 0} = -(\mathcal{J} + \mathcal{F}_n)^{-1}\{F(2n+j)\}_{j \geq 0}. \quad (4.16)$$

Имеет место следующее утверждение, являющееся некоторой модификацией формулы (10.110) из [14].

ЛЕММА 4.2. *При условии (4.9) справедлива оценка*

$$|2a_n - 1| + |b_n| \leq C(|F(2n-1) - F(2n+1)| + |F(2n) - F(2n+2)| + \widehat{F}^2(2n-2)), \quad (4.17)$$

где $\widehat{F}(n)$ определено в (4.10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В пространстве $\ell^1(\mathbb{Z}_+)$ рассмотрим уравнение

$$(\mathcal{J} + \mathcal{F}_n)x = y,$$

или

$$x(j) + \sum_{m=0}^{\infty} F(2n+j+m)x(m) = y(j), \quad x = \{x(j)\}, \quad y = \{y(j)\}, \quad j \geq 0. \quad (4.18)$$

В силу обратимости оператора $\mathcal{J} + \mathcal{F}_n$ при $n \geq 1$ для решения (4.18) справедливо

$$\|x\|_1 \leq K\|y\|_1, \quad K = \sup_{n \geq 1} \|(\mathcal{J} + \mathcal{F}_n)^{-1}\| < \infty. \quad (4.19)$$

Подставляя (4.19) в (4.18), получаем оценки для координат

$$|x(j)| \leq \sup_{k \geq 2n+j} |F(k)| \|x\|_1 + |y(j)| \leq K \sup_{k \geq 2n+j} |F(k)| \|y\|_1 + |y(j)|.$$

С учетом (4.11) и невозрастания последовательности $\{\widehat{F}(n)\}$, приходим к неравенству

$$|x(j)| \leq K\widehat{F}(2n+j)\|y\|_1 + |y(j)|. \quad (4.20)$$

Применим оценку (4.20) к исходному уравнению (4.15), где

$$x(j) = \tau(n, j), \quad y(j) = -F(2n+j).$$

Поскольку в силу (4.9)–(4.14)

$$\|y_n\|_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{F}(k) = C < \infty, \quad |y_n(j)| \leq \widehat{F}(2n+j),$$

то (4.20) примет вид

$$|\tau(n, j)| \leq C \widehat{F}(2n+j), \quad j \geq 0. \quad (4.21)$$

Далее, запишем (4.15) с индексами n и $n+1$ и вычтем второе из первого:

$$(\mathcal{I} + \mathcal{F}_n)(\tau_n - \tau_{n+1}) = y_n, \quad \tau_n = \{\tau(n, j)\}_{j \geq 0}, \quad y_n = \{y_n(j)\}_{j \geq 0},$$

где

$$y_n(j) = F(2n+2+j) - F(2n+j) + \sum_{m=0}^{\infty} (F(2n+j+m) - F(2n+2+j+m))\tau(n+1, m).$$

С учетом (4.21) непосредственно проверяется

$$|y_n(j)| \leq |F(2n+j) - F(2n+2+j)| + C \widehat{F}(2n) \widehat{F}(2n+j), \quad \|y_n\| \leq C \widehat{F}(2n),$$

так что из (4.20) следует

$$|\tau(n, j) - \tau(n+1, j)| \leq |F(2n+j) - F(2n+2+j)| + C \widehat{F}(2n) \widehat{F}(2n+1), \quad j \geq 0. \quad (4.22)$$

Искомая оценка (4.17) вытекает из равенств (4.5), (4.6) и определения (4.14). Действительно, по (4.5)

$$0 < C_1 \leq K^2(n, n) \leq C_2 < \infty, \quad K(n, n) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty,$$

так что в силу (4.22) с $j = 0$

$$\begin{aligned} |2a_n - 1| &= \frac{|K(n+1, n+1) - K(n, n)|}{K(n, n)} \leq C |\tau(n, 0) - \tau(n+1, 0)| \\ &\leq C (|F(2n) - F(2n+2)| + \widehat{F}^2(2n)). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Далее, так как $|\tau(n, 1)| \leq C$ (см. (4.21)), то из (4.6)

$$|2b_n| = \frac{|4a_{n-1}^2 \tau(n-1, 1) - \tau(n, 1)|}{K^2(n, n)} \leq C (|\tau(n-1, 1) - \tau(n, 1)| + |4a_{n-1}^2 - 1|),$$

что с учетом (4.22) при $j = 1$, (4.23) и монотонности $\widehat{F}(n)$ дает

$$|b_n| \leq C (|F(2n-1) - F(2n+1)| + |F(2n) - F(2n+2)| + \widehat{F}(2n-2) \widehat{F}(2n-1)). \quad (4.24)$$

Объединяя оценки (4.23) и (4.24) мы приходим к (4.17), что и завершает доказательство леммы 4.2.

§ 5. Пример Павлова

В основе доказательства теоремы 2 лежит “осцилляционный интеграл”, введенный Павловым в [2; § 3]

$$V(z) = \int_0^z \exp(-\chi(\xi)) \cos(\gamma\chi(\xi)) d\xi, \quad (5.1)$$

где $\chi(\xi) = (1 + \xi^2)^{\gamma-1}/32$ и γ – малый параметр, $0 < \gamma < 1$. Этот интеграл обладает следующими свойствами:

- i) $V \in \mathcal{A}_\infty$ и голоморфна в каждой точке $\zeta \in \mathbb{T} \setminus \{\pm i\}$;
- ii) $V(0) = 0$ и $|V(z)| \leq 1$ при $z \in \overline{\mathbb{D}}$, причем $V(z) \neq 0$ при $z \neq 0$;
- iii) $\operatorname{Im} V(z) \operatorname{Im} z > 0$ при $z \notin \mathbb{R}$;
- iv) существует последовательность точек на мнимой оси $z_k = i \operatorname{Im} z_k$, $0 < \operatorname{Im} z_k < 1$, таких, что $\operatorname{Im} z_k \uparrow 1$ и $V(z_k) = V(i)$; при этом

$$V(\overline{z_k}) = V(-z_k) = \overline{V(i)}.$$

К дальнейшим свойствам функции Павлова мы будем обращаться по мере необходимости. Положим

$$f(\lambda) = -\frac{1}{V(-z(\lambda))}, \quad \lambda(z) = \frac{z + z^{-1}}{2}.$$

Ясно, что функция f голоморфна в $\{\operatorname{Im} \lambda > 0\}$ и непрерывна (на самом деле бесконечно дифференцируема) в $\{\operatorname{Im} \lambda \geq 0\}$, причем $\operatorname{Im} f(x) = 0$ при $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ и $\operatorname{Im} f(x) > 0$ при $\lambda \in \{\operatorname{Im} \lambda > 0\} \cup (-1, 1)$. Следовательно,

$$f(\lambda) = \alpha\lambda + \beta + \int_{-1}^1 \frac{\operatorname{Im} f(x)}{x - \lambda} dx, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta = \overline{\beta}. \quad (5.2)$$

Коэффициент α находится из предельного соотношения

$$\alpha = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{f(iy)}{iy} = -\lim_{t \downarrow 0} \frac{2}{i(t^{-1} - t)V(it)},$$

и поскольку $V(it) = V'(0)it + O(t^2)$ при $t \rightarrow 0$, то

$$\alpha = \frac{2}{V'(0)} = \frac{2e^{1/32}}{\cos \gamma} > 0.$$

Определим

$$\tilde{m}(\lambda) := A \int_{-1}^1 \frac{\operatorname{Im} f(x)}{x - \lambda} dx = A(f(\lambda) - \alpha\lambda - \beta), \quad A^{-1} := \int_{-1}^1 \operatorname{Im} f(x) dx. \quad (5.3)$$

Функция $\tilde{m}(\lambda)$ является функцией Вейля некоторой матрицы Якоби

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & \\ a_1 & b_2 & a_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad a_j > 0, \quad b_j = \overline{b_j}.$$

Положим, наконец,

$$a_0^2 := -\frac{1}{\alpha A}, \quad b_0 := -\frac{\beta}{\alpha} - \frac{1}{\alpha \overline{V(i)}}, \quad a_0, b_0 \in \mathbb{C}, \quad (5.4)$$

где α и β взяты из представления (5.2), и построим комплексную якобиеву матрицу

$$J = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 \\ a_0 & \tilde{J} \end{pmatrix}.$$

Нашей целью является доказательство того, что J удовлетворяет условиям теоремы 2 с $\nu = 0$.¹

Начнем с дискретного спектра матрицы J . Пусть $R(\lambda) = (J - \lambda)^{-1}$ – резольвента J и $m(\lambda) = (R(\lambda)e_0, e_0)$ – ее функция Вейля. Как известно [23],

$$m(\lambda) = \frac{1}{\lambda - b_0 - a_0^2 \tilde{m}(\lambda)}, \quad (5.5)$$

и в силу выбора a_0, b_0 (5.4) и определения $\tilde{m}$ мы имеем

$$\begin{aligned} \lambda - a_0^2 \tilde{m}(\lambda) - b_0 &= \lambda + \frac{\tilde{m}(\lambda)}{\alpha A} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha \overline{V(i)}} = \frac{1}{\alpha} \left(f(\lambda) + \frac{1}{\overline{V(i)}} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\overline{V(i)}} - \frac{1}{V(-z(\lambda))} \right). \end{aligned}$$

Пусть $\lambda_k = \lambda(z_k) = \frac{1}{2}(z_k + z_k^{-1})$, где z_k из iv), так что $\lambda_k \in i\mathbb{R}_-$, $\lambda_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Свойство iv) функции V влечет $\lambda_k - b_0 - a_0^2 \tilde{m}(\lambda_k) = 0$, т.е. m имеет полюсы в точках λ_k , тем самым, $\{\lambda_k\} \in \sigma_d(J)$ и 0 есть предельная точка $\sigma_d(J)$.

Покажем, что других предельных точек нет. Начнем с простого теоретико-операторного утверждения.

ЛЕММА 5.1. *Пусть T – ограниченный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ такой, что T и T^* имеют общий циклический вектор h . Точка $\lambda \in \mathbb{C}$ является изолированной точкой спектра T в том и только том случае, если λ есть особая точка функции Вейля $m(\lambda) = (R(\lambda)e_0, e_0)$, $R(\lambda) = (T - \lambda)^{-1}$.*

¹На заключительном этапе доказательства мы покажем, что общий случай несущественно отличается от этого специального.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надо лишь проверить, что изолированная особенность резольвенты $R(\lambda)$ является в данном случае неустранимой особенностью функции Вейля. Предположим, что m голоморфна в точке λ . Поскольку

$$(R(\mu)T^k h, h) = (R(\mu)(T^k - \mu^k)h, h) + \mu^k m(\mu) = P(\mu) + \mu^k m(\mu),$$

где P — полином, то функции $(R(\mu)g_n, h)$, где $g_n = \sum_{k=0}^n c_k T^k h$, также голоморфны в точке λ . По условию система $\{T^k h\}_{k \geq 0}$ полна в $\mathcal{H}$, так что для любого $g \in \mathcal{H}$ найдется последовательность $g_n \rightarrow g$ при $n \rightarrow \infty$. При достаточно малом $\varepsilon > 0$ проколотый круг $\{\mu : 0 < |\mu - \lambda| \leq \varepsilon\}$ целиком лежит в резольвентном множестве оператора T , т.е. $\|R(\mu)\| \leq C$ при $|\mu - \lambda| = \varepsilon$. Значит, $(R(\mu)g_n, e_0)$ сходится к $(R(\mu)g, e_0)$ равномерно в этом круге, так что $(R(\mu)g, e_0)$ голоморфна в точке λ . Аналогичным образом, учитывая полноту системы $\{(T^*)^k h\}_{k \geq 0}$, устанавливается голоморфность функции $(R(\mu)g, f)$ в точке λ при всех $g, f \in \mathcal{H}$. Но слабая голоморфность влечет сильную (см., например, [24; гл. V.3]), т.е. R голоморфна в точке λ , что и требовалось.

Предположим теперь, что существует последовательность $\{\lambda'_k\} \in \sigma_d(J)$ и $\lambda' = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda'_k \in [-1, 1]$, причем $\lambda' \neq 0$. По лемме 5.1 функция Вейля m имеет полюсы в точках λ'_k и в силу (5.4), (5.5) $V(-z(\lambda'_k)) = \overline{V(i)}$. Но

$$-\lim_{k \rightarrow \infty} z(\lambda'_k) = y' \in \mathbb{T} \setminus \{\pm i\}$$

и поскольку функция V голоморфна в точке y' , то $V \equiv \overline{V(i)}$, что противоречит определению функции Павлова V (5.1).

Основная трудность состоит в доказательстве того, что матрица J принадлежит классу $\mathcal{P}(1/2 - \varepsilon)$. В качестве первого шага установим некоторую предварительную оценку скорости стабилизации параметров $\{a_n, b_n\}$, которые суть коэффициенты трехчленного рекуррентного соотношения для ортонормированных полиномов относительно веса $w(x) = A \operatorname{Im} f(x)$ на $[-1, 1]$, где постоянная A определена формулой (5.3). Поскольку функция Павлова V голоморфна в 1 и $V(1) > 0$, $V'(1) > 0$, то

$$\operatorname{Im} V(e^{i\theta}) = V'(1) \sin \theta + O(\sin^2 \theta) \quad (5.6)$$

при θ вблизи 0, π , и функция

$$\frac{w(\cos \theta)}{\sin \theta} = \frac{\operatorname{Im} V(e^{i\theta})}{\sin \theta |V(e^{i\theta})|^2}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

является 2π -периодической и бесконечно дифференцируемой. Следовательно, для ее коэффициентов Фурье справедливо

$$\frac{w(\cos \theta)}{\sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n e^{in\theta}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^k |q_n| < \infty$$

для любого натурального k . По [25; теорема 1] такое же неравенство имеет место и для параметров $\{a_n, b_n\}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k \left(\left| a_n - \frac{1}{2} \right| + |b_n| \right) < \infty, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.7)$$

Соотношения (5.7) позволяют применить технику задачи рассеяния, развитую в предыдущем параграфе. Заметим, что это не просто “дань традиции”, а адекватный аппарат, позволяющий получить правильную оценку убывания элементов $a_n - 1/2$ и b_n для веса, связанного с функцией Павлова. Мы можем лишь надеяться, что современные методы (задача Римана–Гильберта) позволят решить данную задачу в более общем классе весов столь же эффективно, как это сделано для весов, аналитических² в окрестности $[-1, 1]$ (см. [26]).

Пусть $\{\tilde{f}_n\}_{n \geq 0}$ – решение Йоста уравнения $(\tilde{J} - \lambda)y = 0$. Так как это решение с точностью до мультипликативной постоянной, зависящей от спектрального параметра, совпадает с решением Вейля того же уравнения, то

$$\tilde{M}(z) := -\tilde{m}(\lambda(z)) = \frac{\tilde{f}_1(z)}{\tilde{f}_0(z)}, \quad (5.8)$$

откуда с использованием выражения (4.3) для вронскиана $\langle \tilde{f}, \tilde{f} \rangle$ получаем

$$|\tilde{f}_0(e^{i\theta})|^2 = \left| \frac{\sin \theta}{\operatorname{Im} \tilde{M}(e^{i\theta})} \right|. \quad (5.9)$$

Начнем с того, что установим отсутствие резонансов в спектре матрицы $\tilde{J}$. Предположим, напротив, что $\tilde{f}_0(\pm 1) = 0$ хотя бы при одном выборе знака. Так как функция $A^{-1}\tilde{m}(\lambda) = -V^{-1}(-z(\lambda)) - \alpha\lambda - \beta$ ограничена в окрестности точек $\lambda = \pm 1$, то из (5.8) следует $\tilde{f}_1(\pm 1) = 0$ и, значит, в силу рекуррентного соотношения (4.2) $\tilde{f}_n(\pm 1) = 0$, что противоречит асимптотике решения Йоста.

Помимо указанных выше свойств i)–iv) функции Павлова в [2; формула (3.1)] найдены оценки ее производных

$$|V^{(r)}(e^{i\theta})| \leq K^r r! r^{r/\delta}, \quad \delta = 1 - \gamma, \quad r = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.10)$$

где $K = K(\gamma)$ – некоторая положительная константа. Мы покажем, что функция рассеяния $\tilde{S} = \tilde{f}_0 \tilde{f}_0^{-1}$ удовлетворяет тем же оценкам, возможно, с некоторой другой константой K . Согласно [2; лемма 3.П.1 и замечание], если для функции v справедливо (5.10), а функции u и u_1 голоморфны в окрестности множества значений v и замкнутого круга $\mathbb{D}$ соответственно, то сложная функция $u(v)$ и произведение $u_1 v$ удовлетворяют (5.10) (с некоторой другой постоянной K). Поэтому функция Вейля

$$\tilde{M}(z) = A \left(\frac{1}{V(-z)} + \frac{\alpha}{2} \left(z + z^{-1} \right) + \beta \right)$$

² Наш вес w имеет одну особую точку в нуле.

удовлетворяет (5.10) ($V(e^{i\theta}) \neq 0$). Далее, так как в силу (5.6)

$$\left| \frac{\sin \theta}{\widetilde{\operatorname{Im} M}(e^{i\theta})} \right| \geq C > 0$$

при всех θ , то с учетом (5.9) мы имеем

$$|(\ln |\widetilde{f}_0(e^{i\theta})|)^{(r)}| \leq K_1^T r! r^{r/\delta}, \quad K_1 = K_1(\gamma) > 0, \quad r \in \mathbb{Z}_+.$$

Для функции рассеяния $\widetilde{S}$ справедливо

$$\widetilde{S}(e^{i\theta}) = \exp(-2i \arg \widetilde{f}_0(e^{i\theta})) = \exp(-2i H(\ln |\widetilde{f}_0|)(e^{i\theta})),$$

так что остается проверить, что класс функций (5.10) инвариантен относительно оператора Гильберта H .

ЛЕММА 5.2. Пусть g — 2π -периодическая и бесконечно дифференцируемая функция. Тогда при любом натуральном n

$$\|(Hg)^{(n)}\|_\infty \leq C(\|g^{(n)}\|_\infty + \|g^{(n+1)}\|_\infty),$$

где C — абсолютная постоянная, а оператор Гильберта определяется равенством

$$(Hg)(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{g(\theta - t) - g(\theta + t)}{2 \operatorname{tg}(t/2)} dt. \quad (5.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условиях леммы интеграл (5.11) абсолютно сходится и оператор H перестановочен с дифференцированием $(Hg)' = Hg'$. Далее, для функции g имеет место представление

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi g(x) dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \varphi(t) g'(x+t) dt,$$

где

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{t - \pi}{2}, & 0 < t \leq \pi; \\ \frac{t + \pi}{2}, & -\pi \leq t < 0, \end{cases}$$

которое получается интегрированием по частям в частной сумме ряда Фурье и предельным переходом. Из этого представления получаем

$$\|g\|_\infty \leq C(\|g\|_2 + \|g'\|_2).$$

Поскольку оператор Гильберта унитарен в $L^2(\mathbb{T})$, мы имеем

$$\|Hg\|_\infty \leq C(\|g\|_2 + \|g'\|_2) \leq C(\|g\|_\infty + \|g'\|_\infty),$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, для функции рассеяния выполняется

$$|\tilde{S}^{(r-1)}(e^{i\theta})| \leq K_2^r r! r^{r/\delta}, \quad K_2 = K_2(\gamma) > 0, \quad r = 1, 2, \dots \quad (5.12)$$

Переход к матричным элементам a_n, b_n осуществляется с помощью леммы 4.2. Проинтегрируем r раз по частям представление (4.7) с учетом периодичности функции $\tilde{S}$. Тогда

$$\begin{aligned} & n^r (|F(2n+2) - F(2n)| + |F(2n-1) - F(2n+1)|) \\ & \leq \frac{1}{2\pi 2^r} \int_0^{2\pi} \left| \frac{d^r}{d\theta^r} (\tilde{S}(e^{i\theta})(e^{2i\theta} - 1)) \right| d\theta. \end{aligned}$$

Так как умножение на регулярную функцию не меняет структуры оценок (5.12), то (с некоторой положительной постоянной K_3)

$$|F(2n+2) - F(2n)| + |F(2n-1) - F(2n+1)| \leq C K_3^r r! r^{r/\delta} n^{-r+1} \leq C n \inf_{r \geq 3} t^r r^{\alpha r}, \quad (5.13)$$

где $t = K_3 n^{-1} \ll 1$ и $\alpha = 1 + 1/\delta$. Применим к правой части неравенства (5.13) оценку (3.6). Для больших n имеем

$$|F(2n+2) - F(2n)| + |F(2n-1) - F(2n+1)| \leq C \exp(-C_1 n^{\delta/(1+\delta)}), \quad (5.14)$$

где

$$C_1 = \frac{1+\delta}{2\delta} K_3^{-\delta/(1+\delta)} > 0.$$

Из (4.10) и (5.14) вытекает оценка

$$\hat{F}^2(2n-2) \leq C \exp(-C_1 n^{\delta/(1+\delta)}) \sum_{k=n}^{\infty} \exp(-C_1 k^{\delta/(1+\delta)}) \leq C_2 \exp(-C_1 n^{\delta/(1+\delta)})$$

и в силу леммы 4.2 соответственно

$$\left| a_n - \frac{1}{2} \right| + |b_n| \leq C_3 \exp(-C_4 n^{\delta/(1+\delta)}) = C_3 \exp(-C_4 n^{(1-\gamma)/(2-\gamma)}), \quad C_3, C_4 > 0. \quad (5.15)$$

При заданном $\varepsilon > 0$ остается выбрать γ столь малым, чтобы

$$\frac{1-\gamma}{2-\gamma} > \frac{1}{2} - \varepsilon,$$

что и означает $\tilde{J} \in \mathcal{P}(\frac{1}{2} - \varepsilon)$. Теорема 2 тем самым доказана при $\nu = 0$.

Общий случай получается с помощью тех же рассуждений с использованием модифицированной функции Павлова. Действительно, пусть $-1 < \varkappa < 1$. Рассмотрим функцию

$$V_{\varkappa}(z) = V\left(\frac{z - \varkappa}{1 - \varkappa z}\right), \quad V_0(z) = V(z).$$

Эта функция удовлетворяет i)–iv) с той лишь разницей, что ее особыми точками на $\mathbb{T}$ являются точки $w_{\varkappa}$ и $\bar{w}_{\varkappa}$, где $w_{\varkappa} = (i + \varkappa)(1 + i\varkappa)^{-1}$. Когда $\varkappa$ пробегает интервал $(-1, 1)$, точка $w_{\varkappa}$ описывает верхнюю полуокружность. Таким образом, при подходящем выборе $\varkappa$ мы получим произвольную точку ν , $-1 < \nu < 1$, сгущения дискретного спектра якобиевой матрицы $J \in \mathcal{P}(1/2 - \varepsilon)$. Теорема 2 полностью доказана.

§6. Приложение

Мы докажем здесь два утверждения об определителях возмущения комплексных якобиевых матриц, следуя [6; раздел 2], где эти утверждения доказаны для вещественных симметрических матриц.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 2.2. Мы используем известные свойства операторных идеалов Шаттена–фон Неймана $\mathcal{S}_p$ и бесконечных определителей (см., например, [5; гл. III, IV]). Доказательство распадается на несколько этапов.

1) Пусть

$$R_0(z) = (J_0 - \lambda(z))^{-1}, \quad R_0(z) = \{r_{nm}(z)\}_0^\infty, \quad |z| < 1,$$

— резольвента дискретного лапласиана. Для матричных элементов r_{nm} непосредственно находится

$$r_{nm}(z) = \frac{z^{|n-m|} - z^{n+m+2}}{z - z^{-1}} = - \sum_{j=0}^{\min\{n,m\}} z^{1+|n-m|+2j}, \quad n, m \geq 0, \quad |z| < 1.$$

Ясно, что

$$|r_{nm}(z)| \leq \min\{n, m\} + 1. \quad (6.1)$$

Пусть $|\zeta| = 1$. Очевидно, существует предельное значение $r_{nm}(\zeta)$, однако матрица $\{r_{nm}(\zeta)\}$ определена лишь формально (ей не отвечает ограниченный оператор в ℓ^2). Ситуацию можно исправить путем окаймления R_0 диагональными матрицами. Пусть

$$D = \text{diag}(d_0, d_1, \dots), \quad d_j \geq 0, \quad \sum_j j d_j < \infty.$$

Рассмотрим оператор-функцию

$$B(z) := D^{1/2} R_0(z) D^{1/2} = \{B_{nm}(z)\}_0^\infty, \quad |z| < 1.$$

Так как $D^{1/2} \in \mathcal{S}_2$ (оператор Гильберта–Шмидта), то $B(z) \in \mathcal{S}_2$ (на самом деле $B \in \mathcal{S}_1$ как произведение двух операторов из $\mathcal{S}_2$, чем мы воспользуемся далее). Более того, по (6.1)

$$\|B(z)\|_2^2 = \sum_{n,m} |B_{nm}(z)|^2 \leq \sum_{n,m} (d_m^{1/2} d_n^{1/2} (\min\{n, m\} + 1))^2 \leq \left(\sum_j (j+1) d_j \right)^2 \quad (6.2)$$

и тем самым предельные значения $B(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta} B(z)$ принадлежат $\mathcal{S}_2$ и удовлетворяют (6.2). Наконец,

$$\|B(z) - B(\zeta)\|_2^2 = \sum_{n,m} |B_{nm}(z) - B_{nm}(\zeta)|^2 \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \zeta,$$

по теореме Лебега о мажорированной сходимости, так что $B(z)$ принадлежит алгебре $\mathcal{A}$ (как оператор-функция со значениями в $\mathcal{S}_2$).

Пусть теперь J – якобиева матрица (1.2), подчиненная условию (1.3). Положим $d_0 = \max\{|b_0|, |c_0 - 1/2|\}$, $d_n = \max\{|a_{n-1} - 1/2|, |b_n|, |c_n - 1/2|\}$, $n \geq 1$, и $D = \text{diag}(d_0, d_1, \dots)$. Возмущение $\Delta J = J - J_0$ допускает факторизацию $\Delta J = D^{1/2} U D^{1/2}$, где

$$U = \{u_{nm}\}, \quad u_{nm} = \begin{cases} \frac{a_{n-1} - 1/2}{\sqrt{d_{n-1}d_n}}, & m = n-1; \\ \frac{b_n}{d_n}, & m = n; \\ \frac{c_n - 1/2}{\sqrt{d_{n+1}d_n}}, & m = n+1, \end{cases} \quad u_{nm} = 0, \quad |n - m| \geq 2,$$

в котором считаем $0/0 = 1$. Очевидно, $|u_{nm}| \leq 1$, так что $\|U\| \leq 3$.

2) Рассмотрим функцию $t(z) := \text{tr}(\Delta J R_0(z))$, корректно определенную при $|z| < 1$ при условии $\Delta J \in \mathcal{S}_1$. Покажем, что (2.1) влечет $t \in \mathcal{A}$, и получим оценку сверху для этой функции. По определению следа $t = t_1 + t_2 + t_3$, где

$$\begin{aligned} t_1(z) &= \sum_0^\infty b_j r_{jj}(z), & t_2(z) &= \sum_0^\infty \left(a_j - \frac{1}{2}\right) r_{j,j+1}(z), \\ t_3(z) &= \sum_0^\infty \left(c_j - \frac{1}{2}\right) r_{j+1,j}(z). \end{aligned}$$

Неравенство (6.1) и условие (2.1) позволяют, как и выше, заключить, что $t_l \in \mathcal{A}$, $l = 1, 2, 3$, и

$$|t(z)| \leq \sum_0^\infty (j+2) \left(\left|a_j - \frac{1}{2}\right| + |b_j| + \left|c_j - \frac{1}{2}\right| \right). \quad (6.3)$$

3) Запишем определитель возмущения Δ с учетом факторизации ΔJ :

$$\Delta(z, J) = \det(I + \Delta J R_0) = \det(I + D^{1/2} U D^{1/2} R_0) = \det(I + U B(z))$$

(здесь использовано свойство $\det(I + AB) = \det(I + BA)$). Поскольку $B(z)$ имеет “хорошие” свойства как функция со значениями в $\mathcal{S}_2$, естественно перейти к *регуляризованным* определителям [5; гл. IV, § 2]:

$$\Delta(z, J) = \det_2(I + U B(z)) e^{\text{tr}(\Delta J R_0(z))}. \quad (6.4)$$

В силу непрерывности $\det_2$ по операторному аргументу [4; теорема IV.2.1] и непрерывности t в $\overline{\mathbb{D}}$ из (6.4) следует $\Delta \in \mathcal{A}$.

Запишем теперь (6.4) для ассоциированной матрицы $J^{(k)}$:

$$\Delta(z, J^{(k)}) = \det_2(I + U_k B_k(z)) e^{\text{tr}(\Delta J^{(k)} R_0(z))}.$$

Окаймляющая матрица D_k сейчас имеет вид $D_k = \text{diag}(d_0^{(k)}, d_1^{(k)}, \dots)$, где $d_j^{(k)} = d_{j+k}$. В силу (6.2)

$$\|B_k(z)\|_2^2 \leq \left(\sum_j (j+1)d_j^{(k)} \right)^2$$

и по теореме Лебега $\lim_{k \rightarrow \infty} \|B_k(z)\|_2 = 0$ равномерно в $\overline{\mathbb{D}}$, откуда следует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \det_2(I + U_k B_k(z)) = 1.$$

В силу (6.3)

$$|t^{(k)}(z)| = |\text{tr}(\Delta J^{(k)} R_0(z))| \leq \sum_0^\infty (j+2) \left(\left| a_{j+k} - \frac{1}{2} \right| + |b_{j+k}| + \left| c_{j+k} - \frac{1}{2} \right| \right),$$

так что $\lim_{k \rightarrow \infty} |t^{(k)}(z)| = 0$ равномерно в $\overline{\mathbb{D}}$, и утверждение доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЕЛЬНОГО СООТНОШЕНИЯ (2.2). Идея состоит в следующем: необходимо аппроксимировать оператор $\Delta J R_0$ конечномерными операторами и учесть непрерывность определителя возмущения.

Пусть

$$\widehat{J}_m := \begin{pmatrix} J_m & \vdots \\ \dots & \dots \\ & \vdots & J_0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{J}_{0,m} := \begin{pmatrix} J_{0,m} & \vdots \\ \dots & \dots \\ & \vdots & J_0 \end{pmatrix}$$

— блочно-диагональные операторы,

$$\Delta \widehat{J}_m = \widehat{J}_m - \widehat{J}_{0,m} = \begin{pmatrix} J_m - J_{0,m} & \vdots \\ \dots & \dots \\ & \vdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$\Delta J = J - J_0 = \begin{pmatrix} J_m - J_{0,m} & \vdots & C \\ \dots & \dots & \dots \\ A & \vdots & J^{(m)} - J_0 \end{pmatrix},$$

где матрицы A и C имеют только по одному ненулевому элементу $C_{m1} = c_m - 1/2$, $A_{1m} = a_m - 1/2$, $A_{ji} = C_{ij} = 0$, $i \neq m$, $j \neq 1$, то

$$\|\Delta J - \Delta \widehat{J}_m\|_1 \leq \sum_{j=m}^\infty \left(\left| a_j - \frac{1}{2} \right| + |b_j| + \left| c_j - \frac{1}{2} \right| \right) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

Далее, как легко видеть, матрица $J_0 - \widehat{J}_{0,m}$ имеет лишь два ненулевых элемента. Если $h \in \ell^2$, то

$$(J_0 - \widehat{J}_{0,m})h = (h, e_m)e_{m+1} + (h, e_{m+1})e_m \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty,$$

иными словами, $\widehat{J}_{0,m} \rightarrow J_0$ при $m \rightarrow \infty$ в сильном смысле (на каждом векторе из ℓ^2). Пусть K – компакт, лежащий в $\mathbb{D}$. Сравним резольвенты операторов J_0 и $\widehat{J}_{0,m}$ при $z \in K$:

$$(\widehat{J}_{0,m} - \lambda)^{-1} - (J_0 - \lambda)^{-1} = (\widehat{J}_{0,m} - \lambda)^{-1} (J_0 - \widehat{J}_{0,m}) (J_0 - \lambda)^{-1}.$$

Так как $\|(\widehat{J}_{0,m} - \lambda)^{-1}\| = (\text{dist}(\lambda(z), \sigma(\widehat{J}_{0,m})))^{-1}$ и $\sigma(\widehat{J}_{0,m}) = [-1, 1]$, то

$$\|(\widehat{J}_{0,m} - \lambda)^{-1}\| \leq C(K), \quad z \in K.$$

Следовательно, $(\widehat{J}_{0,m} - \lambda)^{-1} \rightarrow (J_0 - \lambda)^{-1}$ в сильном смысле.

Согласно [5; теорема III.6.3] из сходимости последовательности операторов A_m к A в $\mathcal{S}_1$ и X_m к X в сильном смысле следует сходимость $A_m X_m$ к $A X$ в $\mathcal{S}_1$. Тем самым

$$(\widehat{J}_m - \widehat{J}_{0,m})(\widehat{J}_{0,m} - \lambda)^{-1} \rightarrow \Delta J R_0, \quad I + (\widehat{J}_m - \widehat{J}_{0,m})(\widehat{J}_{0,m} - \lambda)^{-1} \rightarrow I + \Delta J R_0$$

в $\mathcal{S}_1$ при каждом z , а значит, равномерно на K . Но $(\widehat{J}_m - \widehat{J}_{0,m})(\widehat{J}_{0,m} - \lambda)^{-1}$ – конечномерный оператор и

$$\det(I + (\widehat{J}_m - \widehat{J}_{0,m})(\widehat{J}_{0,m} - \lambda)^{-1}) = \det\left(\frac{J_m - \lambda}{J_{0,m} - \lambda}\right),$$

так что остается учесть непрерывность определителя возмущения.

Список литературы

1. Павлов Б. С. О несамосопряженном операторе Шрёдингера. I // Проблемы математической физики. №1. Л.: Изд-во ЛГУ, 1966. С. 102–132.
2. Павлов Б. С. О несамосопряженном операторе Шрёдингера. II // Проблемы математической физики. №2. Л.: Изд-во ЛГУ, 1967. С. 133–157.
3. Vajrakov E., Cakal O., Krall A. M. Non-selfadjoint difference operators and Jacobi matrices with spectral singularities // Math. Nachr. 2001. V. 229. P. 5–14.
4. Geronimo J. S., Case K. M. Scattering theory and polynomials on the real line // Trans. Amer. Math. Soc. 1980. V. 258. P. 467–494.
5. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.
6. Killip R., Simon B. Sum rules for Jacobi matrices and their applications to spectral theory // Ann. Math. 2003. V. 158. P. 253–321.
7. Carleson L. Sets of uniqueness for functions analytic in the unit disc // Acta Math. 1952. V. 87. P. 325–345.
8. Aptekarev A. I., Kalyaguine V., Van Assche W. Criterion for the resolvent set of non-symmetric tridiagonal operators // Proc. Amer. Math. Soc. 1995. V. 123. P. 2423–2430.
9. Beckermann B. On the convergence of bounded J-fractions on the resolvent set of the corresponding second order difference operator // J. Approx. Theory. 1999. V. 99. P. 369–408.
10. Beckermann B., Kalyaguine V. The diagonal of the Padé table and the approximation of the Weyl function of the second order difference operators // Constr. Approx. 1997. V. 13. P. 481–510.
11. Beckermann B. Complex Jacobi matrices // J. Comput. Appl. Math. 2001. V. 127. P. 17–65.

12. Барриос Д., Лопес Г., Мартинес-Финкельштейн А., Торрано Э. Конечномерные аппроксимации резольвенты бесконечной ленточной матрицы и непрерывные дроби // Матем. сб. 1999. Т. 190. № 4. С. 23–42.
13. Гусейнов Г. Ш. Определение бесконечной матрицы Якоби по данным рассеяния // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227. № 6. С. 1289–1292.
14. Teschl G. Jacobi operators and completely integrable nonlinear lattices. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1999. (Math. Surveys Monogr. V. 72.)
15. Fatou P. Séries trigonométriques et séries de Taylor // Acta Math. 1906. V. 30. P. 335–400.
16. Beurling A. Ensembles exceptionnelles // Acta Math. 1939. V. 72. P. 1–13.
17. Хрущев С. В. Проблема одновременной аппроксимации и стирание особенностей интегралов типа Коши // Труды МИАН СССР. 1978. Т. 130. С. 124–195.
18. Besicovitch A. S., Taylor S. J. On the complementary intervals of a linear closed sets of zero Lebesgue measure // J. London Math. Soc. 1954. V. 29. P. 449–459.
19. Taylor B. A., Williams D. L. Boundary zero sets of A^∞ functions satisfying growth conditions // Proc. Amer. Math. Soc. 1972. V. 35. P. 155–160.
20. Коренблюм Б. И. Квазианалитические классы функций в круге // Докл. АН СССР. 1965. Т. 164. С. 36–39.
21. Никишин Е. М. Дискретный оператор Штурма–Лиувилля и некоторые задачи теории функций // Труды сем. им. И. Г. Петровского. № 10. М.: Изд-во МГУ, 1984. С. 3–77.
22. Тода М. Теория нелинейных решеток. М.: Мир, 1984.
23. Калягин В. А. О рациональных аппроксимациях резольвентной функции разностного оператора второго порядка // УМН. 1994. Т. 49. № 3. С. 181–182.
24. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
25. Geronimo J. S. A relation between the coefficients in the recurrence formula and the spectral function for orthogonal polynomials // Trans. Amer. Math. Soc. 1980. V. 260. № 1. P. 65–82.
26. Kuijlaars A., McLaughlin K. T.-R., Van Assche W., Vanlessen M. The Riemann–Hilbert approach to strong asymptotics for orthogonal polynomials on $[-1, 1]$ // Adv. Math. 2004. V. 188. P. 337–398.

Физико-технический институт
 низких температур НАН Украины,
 г. Харьков, Украина
E-mail: golinskii@ilt.kharkov.ua
 egorova@ilt.kharkov.ua

Поступила в редакцию
 02.02.2004