Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Неретин, Группа диффеоморфизмов полупрямой и случайные канторовские множества, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 6, 73–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm137>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 11:08:54

УДК 517.98

Ю. А. Неретин

Группа диффеоморфизмов полупрямой и случайные канторовские множества

Строится некоторое однопараметрическое семейство мер на пространстве замкнутых вполне несвязных подмножеств полупрямой, не имеющих изолированных точек. Показывается, что эти меры квазиинвариантны относительно группы гладких диффеоморфизмов полупрямой, и явно вычисляются производные Радона-Никодима.

Библиография: 22 названия.

В течение ряда последних лет происходило постепенное увеличение значения теоретико-вероятностных методов в теории бесконечномерных групп и их представлений (см. [9], [12], [15], [20], [22]). В работе [16] было замечено, что все известные конструкции представлений группы диффеоморфизмов окружности и группы петель тесно связаны с диффузией дробного порядка. Это, в частности, открывает возможность использовать хорошо развитую теорию обычного броуновского движения (см. [7], [5], [21]) в теории представлений бесконечномерных групп. В той же работе было построено большое число квазиинвариантных действий группы диффеоморфизмов окружности и группы петель на различных пространствах с мерой, в том числе были найдены примеры квазиинвариантных мер на пространстве канторовских подмножеств окружности.

Вопрос о существовании подобных мер был известен в теории представлений примерно с 1970 года (см. [4], [1]); интересно, что сами эти меры, оказавшиеся квазиинвариантными, были известны давно и много изучались в теории вероятностей, однако вопрос об их квазиинвариантности и об использовании их в теории представлений не ставился. Речь идет о следующей стандартной конструкции, (см. [5], [13], [19]), восходящей к книге П. Леви [7]. Рассмотрим случайный процесс с непрерывными траекториями и поставим в соответствие каждой траектории множество ее нулей. Таким образом, мы получаем отображение пространства траекторий (по определению снабженного мерой) на пространство замкнутых подмножеств промежутка, это дает нам меру на пространстве замкнутых подмножеств промежутка. В случае, когда случайный процесс является дробной диффузией (о дробной диффузии см., например, [14]), полученная таким образом мера оказывается квазиинвариантной относительно гладких замен времени (см. [16]). Однако в таком виде конструкция еще не дает возможности выписать явные формулы для представлений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-01-00814) и Международного научного фонда (грант № МВ1300).

В этой работе мы обсуждаем другую конструкцию мер на пространстве канторовских множеств (см. [7, §§ 47, 48], [2]). Мы рассматриваем возрастающий устойчивый процесс, каждой его траектории ставим в соответствие множество ее значений. Таким образом, получается мера на пространстве подмножеств полуоси. Мы доказываем квазиинвариантность этих мер относительно группы диффеоморфизмов полуоси и явно вычисляем производную Радона–Никодима.

Основные утверждения статьи сформулированы в § 1. В § 2 более подробно обсуждается конструкция меры на пространстве канторовских подмножеств, в § 3 доказывается теорема о квазиинвариантности.

§ 1. Формулировка теоремы

1.0. Пространство $\text{Cant}(\mathbb{R}_+)$. Обозначим через $\mathbb{R}_+$ положительную полуось $u \geq 0$. Под канторовским подмножеством в $\mathbb{R}_+$ мы будем подразумевать замкнутое подмножество в $\mathbb{R}_+$ меры ноль, не имеющее изолированных точек, и содержащая точку 0. Через $\text{Cant}(\mathbb{R}_+)$ мы обозначим пространство всех канторовских подмножеств в $\mathbb{R}_+$.

Мы хотим определить некоторое однопараметрическое семейство $\varkappa_\alpha$ вероятностных мер на $\text{Cant}(\mathbb{R}_+)$. Возникает первый вопрос – на каком языке можно описать меру на $\text{Cant}(\mathbb{R}_+)$? Как известно, дополнение до замкнутого подмножества в $\mathbb{R}$ есть конечное или счетное семейство интервалов. Мы дадим описание мер $\varkappa_\alpha$ в терминах распределения концов дополнительных интервалов.

Возьмем точку $a > 0$. Все наши меры $\varkappa_\alpha$ будут обладать следующим свойством: для любого a элемент $X \in \text{Cant}(\mathbb{R}_+)$ с вероятностью 1 не содержит точку a . Таким образом, с вероятностью 1 существует дополнительный интервал (u, v) к множеству X , содержащий точку a .

Пусть теперь A – конечное подмножество в $\mathbb{R}_+$, пусть

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n$$

– его элементы, причем $a_1 > 0$. Пусть $X \in \text{Cant}(\mathbb{R}_+)$. Рассмотрим минимальный набор дополнительных к X интервалов

$$(u_1, v_1), \dots, (u_s, v_s), \tag{1.1}$$

покрывающий все точки a_j , для определенности мы полагаем, что

$$u_1 < v_1 < u_2 < v_2 < \dots.$$

Для задания меры на $\text{Cant}(\mathbb{R}_+)$ достаточно описать совместное распределение точек u_j, v_j для всевозможных конечных подмножеств $A \subset \mathbb{R}_+$.

Прежде всего заметим, что точки a_j могут быть по разному размещены по интервалам (u_k, v_k) . Чтобы учесть это, мы выберем из $(n-1)$ -элементарного множества $\{1, 2, \dots, n-1\}$ произвольное подмножество I , состоящее из элементов

$$i_1 < i_2 < \dots < i_s$$

(мы допускаем в качестве I и само множество $\{1, 2, \dots, n-1\}$, и пустое множество). Далее рассмотрим многогранник

$$Q(A \mid I) = Q(a_1, \dots, a_n \mid i_1, \dots, i_s)$$

в $\mathbb{R}^{2(s+1)}$, заданный неравенствами

$$\begin{cases} 0 < u_1 < a_1; \\ a_{i_k} < v_k < u_{k+1} < a_{i_{k+1}} \quad \forall k = 1, 2, \dots, s; \\ a_n < v_{s+1}. \end{cases}$$

Почти любой точке $X \in \text{Cant}(\mathbb{R}_+)$ ставится в соответствие точка одного из 2^{n-1} многогранников $Q(A \mid I)$, а именно, точке X ставятся в соответствие концы интервалов (1.1). Итак, для определения вероятностных мер $\varkappa_\alpha$ на $\text{Cant}(\mathbb{R}_+)$ нам достаточно выписать их проекции на всевозможные множества

$$R(A) := \bigcup_{I \subset \{1, 2, \dots, n-1\}} Q(A \mid I).$$

1.1. Розыгрыш канторовских множеств. Пусть $0 < \alpha < 1$. Определим вероятностную меру $\varkappa_\alpha$ на $\text{Cant}(\mathbb{R}_+)$.

Пусть $a > 0$. Тогда концы дополнительного интервала (u, v) к $X \in \text{Cant}(\mathbb{R}_+)$, покрывающего точку a , распределены по “обобщенному закону арксинуса”:

$$\frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \cdot \frac{du dv}{u^{1-\alpha}(v-u)^{1+\alpha}}, \quad u < a < v. \quad (1.2)$$

Мера на многограннике $Q(A \mid I)$, соответствующая мере $\varkappa_\alpha$ на $\text{Cant}(\mathbb{R}_+)$, имеет вид

$$\left(\frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \right)^{s+1} \prod_{j=1}^{s+1} \frac{du_j dv_j}{(u_j - v_{j-1})^{1-\alpha}(v_j - u_j)^{1+\alpha}} \quad (1.3)$$

(где под v_0 подразумевается 0). Равенством (1.3) мера $\varkappa_\alpha$ на $\text{Cant}(\mathbb{R}_+)$ определена.

Разумеется здесь встает целый ряд вопросов о корректности этого определения. Ниже в §2 мы дадим иное описание меры $\varkappa_\alpha$, которое менее удобно для работы, но в некоторых отношениях более прозрачно. Сейчас мы лишь сделаем несколько замечаний.

ЗАМЕЧАНИЕ. Формула (1.2) для распределения концов случайного интервала (или “недоскока” и “перескока”) в действительности очень естественна (см. статью Дынкина [2] и ее обсуждение у Феллера [11, § XIV.3]).

ЗАМЕЧАНИЕ. Формула (1.3) означает следующее. Пусть даны точки $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$. Пусть (u_1, v_1) – дополнительный интервал, содержащий a . Его концы распределены по закону (1.2). Интервал (u_1, v_1) может покрывать некоторые из точек $a_2, a_3, \dots$. Пусть a_l – первая из непокрытых точек. Пусть (u_2, v_2) – интервал, покрывающий a_l . Тогда числа

$$\tilde{u} = u_2 - v_1, \quad \tilde{v} = v_2 - v_1$$

тоже распределены по закону (1.2). Иными словами, после того как “розыгран” интервал (u_1, v_1) , “розыгрыш” интервала, содержащего a_l , проводится так же, как и розыгрыш интервала (u_1, v_1) , только в качестве начальной точки полупрямой вместо нуля мы рассматриваем v_1 . Подробнее обсуждение случая $\alpha = 1/2$ см. у Леви [7, §§ 47, 48], см. также [5].

1.2. Группа $\text{Diff}^\circ(\mathbb{R}_+)$. Через $\text{Diff}^\circ(\mathbb{R}_+)$ мы обозначим группу диффеоморфизмов p полупрямой $u \geq 0$, удовлетворяющих условиям:

- 1) вторая производная p непрерывна;
- 2) существует конечный ненулевой предел

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} p'(u),$$

этот предел мы будем обозначать через $p'(\infty)$;

3)

$$\int_0^\infty \left| \frac{p''(u)}{p'(u)} \right| du < \infty,$$

иными словами, функция $\ln p'(u)$ имеет ограниченную вариацию.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условия 2), 3) означают, что диффеоморфизм p на бесконечности не очень сильно отличается от линейной функции $\alpha u + \beta$, эти два условия можно рассматривать как своего рода требование дифференцируемости p в точке $u = \infty$. Заметим также, что если $p''(u)$ имеет постоянный знак при достаточно больших u , то условие 3) следует из 2). Действительно,

$$\int_C^\infty \frac{p''(u)}{p'(u)} du = \ln p'(\infty) - \ln p'(C).$$

1.3. Теорема о квазиинвариантности.

ТЕОРЕМА. Пусть $p \in \text{Diff}^\circ(\mathbb{R}_+)$. Тогда отображение

$$\text{Cant}(\mathbb{R}_+) \rightarrow \text{Cant}(\mathbb{R}_+),$$

задаваемое диффеоморфизмом p , составляет меру $\varkappa_\alpha$ на $\text{Cant}(\mathbb{R}_+)$ квазиинвариантной, причем производная Радона–Никодима этого преобразования задается формулой

$$\gamma_\alpha(p, X) = \frac{p'(\infty)}{p'(0)} \prod \left(\frac{p'(u_j)(v_j - u_j)}{p(v_j) - p(u_j)} \right)^{1+\alpha}, \quad (1.4)$$

где произведение берется по всем дополнительным интервалам к множеству $X \in \text{Cant}(\mathbb{R}_+)$. Это произведение сходится абсолютно и

$$|\ln \gamma_\alpha(p, X)| \leq (1 + \alpha) \int_0^\infty \left| \frac{p''(u)}{p'(u)} \right| du$$

для почти всех $X \in \text{Cant}(\mathbb{R}_+)$.

1.4. Представления и проблема построения полугрупповой оболочки. Для любого $\alpha \in (0, 1)$ и любого $s \in \mathbb{R}$ мы определим унитарное представление $\rho_{\alpha,s}$ группы $\text{Diff}^\circ(\mathbb{R}_+)$ в $L^2(\text{Cant}(\mathbb{R}_+), \varkappa_\alpha)$, заданное формулой

$$\rho_{\alpha,s}(p)f(X) = f(p \cdot X)\gamma_\alpha(p, X)^{1/2+is}.$$

В данный момент о свойствах этих представлений ничего не известно. Как мне кажется, наиболее интересный вопрос, связанный с представлениями $\rho_{\alpha,s}$, — это вопрос об отыскании полугрупповой оболочки группы $\text{Diff}^\circ(\mathbb{R}_+)$ в смысле Олшанского (см. [18], [17]). В нашем случае вопрос может быть переформулирован в следующей форме.

Рассмотрим пространство

$$Z = \text{Cant}(\mathbb{R}_+) \times \text{Cant}(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+.$$

Каждому элементу $p \in \text{Diff}^\circ(\mathbb{R}_+)$ мы ставим в соответствие отображение

$$\theta_p^{(\alpha)}: \text{Cant}(\mathbb{R}_+) \rightarrow Z,$$

определяемое формулой

$$\theta_p^{(\alpha)}(X) = (X, p \cdot X, \gamma_\alpha(p, X)).$$

Пусть h_p — образ меры $\varkappa_\alpha$ при отображении $\theta_p^{(\alpha)}$. Мы получили некоторое семейство h_p вероятностных мер на Z , эти меры нумеруются диффеоморфизмами $p \in \text{Diff}^\circ(\mathbb{R}_+)$. Требуется описать замыкание $\overline{\text{Diff}^\circ(\mathbb{R}_+)}$ семейства h_p в пространстве вероятностных мер на Z относительно слабой сходимости (см. [9]). Согласно [9], множество $\overline{\text{Diff}^\circ(\mathbb{R}_+)}$ наделено естественной операцией умножения, продолжающей обычное умножение в $\text{Diff}^\circ(\mathbb{R}_+)$.

1.5. Локальное время. Сейчас для почтикаждого (по мере $\varkappa_\alpha$) $X \in \text{Cant}(\mathbb{R}_+)$ мы определим каноническую меру λ_X на множестве X ; эта мера называется *локальным временем* на множестве X . Можно также считать, что λ_X — сингулярная мера на $\mathbb{R}_+$ с носителем X .

Пусть $b > a \geq 0$. Тогда мера λ_X отрезка $[a, b]$ по определению равна

$$\frac{1}{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{\alpha-1} \cdot \Sigma', \quad (1.5)$$

где Σ' обозначает сумму длин дополнительных интервалов $(\alpha_j, \beta_j) \subset [a, b]$ таких, что $\beta_j - \alpha_j < \varepsilon$.

Эта же величина $\lambda_X([a, b])$ равна

$$\frac{1}{\alpha} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^\alpha \cdot \Sigma'', \quad (1.6)$$

где Σ'' обозначает число дополнительных интервалов $(\alpha_j, \beta_j) \subset [a, b]$ таких, что $\beta_j - \alpha_j > \varepsilon$.

Разумеется, здесь нужно обосновать существование пределов, а также их совпадение (см. ниже п. 2.5).

Фиксируем α . Пусть $X \in \text{Cant}(\mathbb{R}_+)$, а $p \in \text{Diff}^\circ(\mathbb{R}_+)$. Тогда на множестве $p \cdot X$ мы имеем две меры: во-первых, локальное время $\lambda_{p \cdot X}$ множества $p \cdot X$, а, во-вторых, образ $p \cdot \lambda_X$ локального времени λ_X при отображении p . Из формул (1.5), (1.6) вытекает, что $\lambda_{p \cdot X}$ абсолютно непрерывна относительно $p \cdot \lambda_X$, а плотность равна

$$p'(u)^{-\alpha}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. При $\alpha = 1/2$ описанное локальное время есть обычное локальное время Леви.

ЗАМЕЧАНИЕ. Кажется правдоподобным, что меры $\mathcal{H}_\alpha$ эквивалентны мерам, возникающим при рассмотрении множеств нулевого уровня для диффузий дробного порядка (см. введение к статье).

§ 2. Устойчивые процессы и случайные канторовские множества

2.1. Пуассоновские меры. Пусть L – пространство с непрерывной σ -конечной мерой λ . Пусть Ω – пространство всех неупорядоченных счетных подмножеств множества L . Пусть $A \subset L$ – измеримое подмножество конечной меры. Обозначим через $\Omega(A, n)$ множество всех точек $\omega \in \Omega$ таких, что $\omega \cap A$ состоит из n точек. Определим вероятностную меру σ на Ω по следующему правилу:

- 1) $\sigma(\Omega(A, n)) = \frac{\lambda(A)^n}{n!} e^{-\lambda(A)}$;
- 2) если $A_1, \dots, A_k$ – попарно непересекающиеся множества конечной меры, то события $\Omega(A_j, n_j)$ независимы, т.е.

$$\sigma\left(\bigcap_{j=1}^k \Omega(A_j, n_j)\right) = \prod_{j=1}^k \sigma(\Omega(A_j, n_j)).$$

Хорошо известно (см. [6], [1]), что это определение корректно (вытекает из теоремы Колмогорова о проективных пределах). Полученная таким образом мера на Ω называется *мерой Пуассона*.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для любого измеримого подмножества $B \subset A$ бесконечной меры множество всех $\omega \in \Omega$ таких, что $\omega \cap B$ бесконечно, имеет полную меру в Ω . Если $B \subset A$ имеет конечную меру, то $\omega \cap B$ конечно с вероятностью 1.

2.2. Случайные дискретные меры. Обозначим через $\mathcal{M}(\mathbb{R}_+)$ множество всех положительных дискретных мер на $\mathbb{R}_+$. Любая такая мера представима в виде суммы

$$h = \sum u_j \delta_{t_j},$$

где через δ_t обозначена единичная мера на $\mathbb{R}_+$, сосредоточенная в точке $t \in \mathbb{R}_+$.

Фиксируем α такое, что $0 < \alpha < 1$. Построим для каждого такого α вероятностную меру μ_α на пространстве $\mathcal{M}(\mathbb{R}_+)$ по следующему правилу. Рассмотрим квадрант $L = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ с координатами (t, u) и меру λ на L , имеющую плотность

$$\frac{1}{u^{\alpha+1}}$$

относительно меры Лебега $dt du$ на L . Пусть Ω – множество счетных подмножеств L , снабженное пуассоновой мерой σ , построенной в предыдущем пункте. Каждой точке $h = \sum u_j \delta_{t_j} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}_+)$ мы поставим в соответствие счетное подмножество $\omega \in \Omega$, состоящее из точек вида (t_j, u_j) . Таким образом, мы получили биекцию $\Omega \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}_+)$, при этом мере σ на Ω соответствует мера на $\mathcal{M}(\mathbb{R}_+)$, которую мы обозначим через μ_α .

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотрим очень малые интервалы $(t, t + \Delta t)$, $(u, u + \Delta u)$. Легко показать, что среднее число слагаемых в сумме $h = \sum u_j \delta_{t_j}$ таких, что

$$t < t_j < t + \Delta t, \quad u < u_j < u + \Delta u,$$

примерно равно

$$\frac{\Delta t \Delta u}{u^{\alpha+1}}$$

(это свойство обычно берется в качестве определения меры μ_α).

2.3. Замечания о мерах μ_α . Из замечания в конце п. 2.1 вытекают следующие два высказывания А) и В).

А) Для данных $v_2 > v_1 > 0$ с вероятностью 1 по мере μ_α выражение $h = \sum u_j \delta_{t_j}$ содержит бесконечно много слагаемых таких, что $v_1 < u_j < v_2$. В частности, $\sum u_j = \infty$ с вероятностью 1.

В) Для данных $s_2 > s_1 > 0$ с вероятностью 1 по мере μ_α выражение $h = \sum u_j \delta_{t_j}$ содержит бесконечно много слагаемых таких, что $s_1 < t_j < s_2$. В частности, с вероятностью 1 по мере μ_α точки t_j расположены на полуоси $t \geq 0$ всюду плотно.

Следующие три высказывания также очень просты и хорошо известны.

С) Для данных $s_2 > s_1 > 0$ величина

$$\sum_{j: s_1 < t_j < s_2} u_j$$

конечна с вероятностью 1; ее среднее значение бесконечно.

Д) Пусть $s_2 > s_1 > 0$. Рассмотрим величину

$$\xi_\varepsilon(h) = \sum_{j: u_j < \varepsilon, s_1 < t_j < s_2} u_j.$$

Тогда для почти всех h выполнено

$$\frac{1}{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\xi_\varepsilon(h)}{\varepsilon^{1-\alpha}} = s_2 - s_1.$$

Е) Пусть $s_2 > s_1 > 0$. Пусть N_ε — число слагаемых в сумме $h = \sum u_j \delta_{t_j}$ таких, что $u_j > \varepsilon$, $s_1 < t_j < s_2$. Тогда для почти всех h

$$\frac{1}{\alpha} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon^\alpha N_\varepsilon = s_2 - s_1.$$

2.4. Меры на пространстве монотонных функций. Пусть $h \in \mathcal{M}(\mathbb{R}_+)$. Рассмотрим функцию

$$\varphi_h(s) = \int_0^s h = \sum_{j: 0 \leq t_j \leq s} u_j.$$

В силу свойства С) из п. 1.3 с вероятностью 1 этот интеграл конечен для всех s . Очевидно также, что $\varphi_h(s)$ монотонно возрастает, и $\varphi_h(0) = 0$ для почти всех h . Ясно, что мера h однозначно восстанавливается по функции φ_h .

Заметим далее, что φ_h является функцией скачков, т.е. для любой точки непрерывности a функции φ_h выполнено

$$\varphi_h(a) = \sum (\varphi(t_j + 0) - \varphi(t_j - 0)),$$

где суммирование ведется по всем точкам разрыва t_j функции φ таким, что $t_j < a$.

Обозначим через $J(\mathbb{R}_+)$ пространство всех монотонно возрастающих функций скачков f на полуоси $t \geq 0$ таких, что $f(0) = 0$. Отображение $h \mapsto \varphi_h$ является отображением $\mathcal{M}(\mathbb{R}_+) \rightarrow J(\mathbb{R}_+)$, образ меры μ_α при этом отображении мы обозначим через ν_α .

Мера ν_α на пространстве $J(\mathbb{R}_+)$ задает один из устойчивых случайных процессов (см., например, [7]).

Высказывания А)–Е) п. 2.3 легко переводятся на язык монотонных функций. Например, высказывание В) означает, что точки разрыва функции $f \in J(\mathbb{R}_+)$ (для почти всех по мере ν_α функций f) расположены всюду плотно на $\mathbb{R}_+$.

Пусть $a \in \mathbb{R}$. Рассмотрим случайную величину

$$\eta_a(f) = f(a), \quad f \in J(\mathbb{R}_+)$$

(с вероятностью 1 точка a не является точкой разрыва функции f , и поэтому $f(a)$ корректно определено). Обозначим через $r_a(u)$ функцию распределения случайной величины η_a . За исключением случая $\alpha = 1/2$ для функции $r_a(u)$ нет хорошего аналитического выражения. Свойства “специальных функций” $r_a(u)$ много изучались (см., например, [3], [8, § 5.7–5.10]). Характеристическая функция распределения $r_a(u)$ задается формулой

$$\exp\left(-a\left(\frac{x}{i}\right)^\alpha\right), \quad \operatorname{Im} x \geq 0.$$

Здесь ветвь функции $(x/i)^\alpha$ в верхней полуплоскости выбирается так, чтобы $(x/i)^\alpha$ было вещественным при $x = i\tau$, $\tau > 0$.

2.5. Меры на пространстве канторовских множеств. Пусть $f \in J(\mathbb{R}_+)$. Рассмотрим график $\operatorname{Graph}(f)$ функции f , понимаемый в следующем смысле. Множество $\operatorname{Graph}(f)$ содержит, по определению, все точки вида $(t, f(t))$, где t — точка непрерывности функции f , а также все точки вида

$$(t_j, f(t_j - 0)), \quad (t_j, f(t_j + 0)),$$

где t_j — точки разрыва функции f .

Каждой функции $f \in J(\mathbb{R}_+)$ мы поставим в соответствие множество Q_f – проекцию $\text{Graph}(f)$ на вертикальную полуось. Легко видеть, что множество Q_f замкнуто и не имеет изолированных точек, легко видеть также, что Q_f имеет лебегову меру нуль (так как f является функцией скачков).

Итак, $f \mapsto Q_f$ является отображением $J(\mathbb{R}_+) \rightarrow \text{Cant}(\mathbb{R}_+)$. Заметим далее, что множество Q_f снабжено канонической мерой, а именно, образом меры Лебега на $\mathbb{R}_+$ при отображении $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$. Эта мера и является локальным временем λ множества Q_f , определения (1.5), (1.6) локального времени являются переформулировкой высказываний D)–E) п. 2.3.

Очевидно, функция $f \in J(\mathbb{R}_+)$ однозначно определяется множеством Q_f и локальным временем λ на Q_f . Действительно, пусть u – точка вертикальной оси, а $l(u) := \lambda([0, u])$. Тогда

$$u = f(l(u)).$$

С другой стороны, как мы только что видели, для почти всех f локальное время на Q_f однозначно определяется самим множеством Q_f . Поэтому отображение $f \mapsto Q_f$ является инъективным (с точностью до множества меры 0 в $J(\mathbb{R}_+)$) отображением $J(\mathbb{R}_+) \rightarrow \text{Cant}(\mathbb{R}_+)$. Обозначим через $\varkappa_\alpha$ меру на $\text{Cant}(\mathbb{R}_+)$, являющуюся образом меры ν_α при отображении $f \mapsto Q_f$.

Итак, нами построено семейство мер $\varkappa_\alpha$ на $\text{Cant}(\mathbb{R}_+)$, зависящее от параметра $\alpha \in (0, 1)$.

Остается привести описанную картину в соответствие с п. 1.1. Пусть функция $f \in J(\mathbb{R}_+)$. Пусть $a > 0$. Пусть t – момент времени такой, что

$$f(t-0) \leq a \leq f(t+0).$$

Вопрос состоит в том, чтобы вычислить совместное распределение $f(t-0)$, $f(t+0)$ при данном значении a . Ответ был получен Дынкиным в [2], этот ответ задается формулой (1.2). Из соображений строгой марковости случайного процесса $(J(\mathbb{R}_+), \nu_\alpha)$ формула (1.3) является следствием формулы (1.2) (см., например, [10, § 4.1]).

§ 3. Доказательство теоремы

Пусть множество $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ – такое же, как в пп. 1.0, 1.1, через $p(A)$ мы обозначим множество $\{p(a_1), \dots, p(a_n)\}$. Отображение $\text{Cant}(\mathbb{R}_+) \rightarrow \text{Cant}(\mathbb{R}_+)$, заданное диффеоморфизмом p , индуцирует отображение многогранников

$$Q(A \mid I) \rightarrow Q(p(A) \mid I),$$

заданное формулой

$$u_j \mapsto p(u_j), \quad v_j \mapsto p(v_j).$$

При этом производная Радона–Никодима задается формулой

$$\frac{\left[\prod_{j=1}^{s+1} \frac{dp(u_j) dp(v_j)}{(p(u_j) - p(v_{j-1}))^{1-\alpha} (p(v_j) - p(u_j))^{1+\alpha}} \right]}{\left[\prod_{j=1}^{s+1} \frac{du_j dv_j}{(u_j - v_{j-1})^{1-\alpha} (v_j - u_j)^{1+\alpha}} \right]} = \prod_{j=1}^{s+1} \left[p'(u_j) p'(v_j) \left(\frac{u_j - v_{j-1}}{p(u_j) - p(v_{j-1})} \right)^{1-\alpha} \left(\frac{v_j - u_j}{p(v_j) - p(u_j)} \right)^{1+\alpha} \right].$$

Перепишем это выражение в виде

$$\frac{p'(v_{s+1})}{p'(v_0)} \cdot \left[\frac{p'(v_0) p'(v_1) \cdots p'(v_s)}{p'(u_1) p'(u_2) \cdots p'(u_{s+1})} \right]^\alpha \times \prod_{j=1}^{s+1} \left(\frac{p'(v_{j-1})(u_j - v_{j-1})}{p(u_j) - p(v_{j-1})} \right)^{1-\alpha} \cdot \prod_{j=1}^{s+1} \left(\frac{p'(u_j)(v_j - u_j)}{p(v_j) - p(u_j)} \right)^{1+\alpha}, \quad (3.1)$$

где $v_0 = 0$.

Начнем теперь увеличивать конечное множество A так, чтобы в пределе получилось счетное всюду плотное множество на полуоси. Посмотрим, как будут вести себя при этом четыре сомножителя произведения (3.1).

а) Первый сомножитель очевидно стремится к

$$\frac{p'(\infty)}{p'(0)}.$$

б) Второй сомножитель. Рассмотрим его логарифм

$$\begin{aligned} \left| \ln \prod \frac{p'(v_{j-1})}{p'(u_j)} \right| &\leq \sum |\ln p'(v_{j-1}) - \ln p'(u_j)| \\ &\leq \sum_j \int_{v_{j-1}}^{u_j} \left| \frac{p''(\omega)}{p'(\omega)} \right| d\omega \\ &\leq \sum_j \int_{v_{j-1}}^{u_j} \left| \frac{p''(\omega)}{p'(\omega)} \right| d\omega + \int_{v_{s+1}}^{\infty} \left| \frac{p''(\omega)}{p'(\omega)} \right| d\omega. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Рассмотрим множество

$$Y(A) = [v_0, u_1] \cup [v_1, u_2] \cup \cdots \cup [v_{s+1}, \infty).$$

С увеличением A множество $Y(A)$ уменьшается, пересечение множеств $Y(A)$ является канторовским множеством меры 0. Поэтому в силу интегрируемости функции $|p''/p'|$ и абсолютной непрерывности интеграла Лебега выражение

$$\int_{Y(A)} \left| \frac{p''(\omega)}{p'(\omega)} \right| d\omega$$

стремится к 0 при увеличении A . Таким образом, второй сомножитель в (3.1) стремится к 1.

в) Третий сомножитель. Снова перейдем к логарифмам

$$\left| \ln \prod \frac{p'(v_{j-1})(u_j - v_{j-1})}{p(u_j) - p(v_j)} \right| \leq \sum \left| \ln p'(v_j) + \ln \frac{u_j - v_{j-1}}{p(u_j) - p(v_{j-1})} \right|. \quad (3.3)$$

Выберем, далее, $\xi_{j-1} \in (v_{j-1}, u_j)$ так, что

$$\frac{p(u_j) - p(v_{j-1})}{u_j - v_{j-1}} = p'(\xi_{j-1}).$$

Тогда выражение (3.3) переписывается в виде

$$\sum |\ln p'(v_{j-1}) - \ln p'(\xi_{j-1})| \leq \sum \int_{v_{j-1}}^{\xi_{j-1}} \left| \frac{p''(\omega)}{p'(\omega)} \right| d\omega \leq \sum \int_{v_{j-1}}^{u_j} \left| \frac{p''(\omega)}{p'(\omega)} \right| d\omega,$$

это выражение стремится к 0 при увеличении A по тем же причинам, что и (3.2).

г) Четвертый сомножитель. Здесь с ростом множества A к произведению добавляются новые сомножители; те же сомножители, которые были раньше, остаются неизменными. Покажем, что произведение остается равномерно ограниченным при росте множества A :

$$\begin{aligned} \left| \ln \left(\prod \frac{p'(u_j)(v_j - u_j)}{p(v_j) - p(u_j)} \right) \right| &\leq \sum \left| \ln p'(u_j) - \ln \frac{p(v_j) - p(u_j)}{v_j - u_j} \right| \\ &\leq \sum |\ln p'(u_j) - \ln p'(\xi_j)|, \end{aligned}$$

где $\xi_j \in (u_j, v_j)$.

Эта величина оценивается сверху вариацией функции $\ln p'(\omega)$, т.е. интегралом

$$\int_0^\infty \left| \frac{p''(\omega)}{p'(\omega)} \right| d\omega. \quad (3.4)$$

Подчеркнем, что полученная верхняя оценка не зависит ни от выбора последовательности множеств A , ни от точки $X \in \text{Cant}(\mathbb{R}_+)$. Итак, мы убедились, что с ростом A семейство функций (3.1) сходится поточечно к искомому выражению (1.4).

Более того, семейство функций (3.1) остается при этом равномерно ограниченным (модули логарифмов второго и третьего сомножителей оцениваются сверху тем же интегралом (3.4)). Теперь мы можем применить теорему Лебега о мажорируемой сходимости. В итоге мы получаем, что семейство функций (3.1) на $\text{Cant}(\mathbb{R}_+)$ сходится к (1.4) в смысле L^1 по мере $\varkappa_\alpha$, что и завершает доказательство теоремы.

Список литературы

1. *Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И.* Представления групп диффеоморфизмов // УМН. 1975. Т. 30. №6. С. 1–50.
2. *Дынкин Е. Б.* Некоторые предельные теоремы для сумм независимых случайных величин с бесконечными математическими ожиданиями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1955. Т. 19. С. 247–266.
3. *Золотарев В. М.* Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983.
4. *Исмагилов Р. С.* Об унитарных представлениях группы диффеоморфизмов окружности // Функц. анализ и прилож. 1972. Т. 6. №1. С. 42–53.
5. *Ито К., Маккин Г.* Диффузионные процессы и их траектории. М.: Мир, 1968.
6. *Керстан Й., Маттес К., Мекке Й.* Безгранично делимые точечные процессы. М.: Наука, 1982.
7. *Леви П.* Стохастические процессы и броуновское движение. М.: Наука, 1972.
8. *Лукач Е.* Характеристические функции. М.: Наука, 1979.
9. *Неретин Ю. А.* Категории бистохастических мер и представления некоторых бесконечномерных групп // Матем. сб. 1992. Т. 183. №2. С. 52–76.
10. *Скоробод А. В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. М.: Наука, 1986.
11. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1967.
12. *Шавгулдзе Е. Т.* О мере, квазиинвариантной по отношению к действию группы диффеоморфизмов конечномерного многообразия // ДАН СССР. 1988. Т. 303. №4. С. 811–814.
13. *Geman D., Horowitz G.* Occupation densities // Ann. Probab. 1980. V. 8. №1. P. 1–67.
14. *Kahane J. P.* Some random series of functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985.
15. *Kerov S. V., Olshanskii G. I., Vershik A. M.* Harmonic analysis on the infinite symmetric group // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. 1993. V. 316. P. 773–778.
16. *Neretin Yu. A.* Some remarks on quasi-invariant actions of loop groups and the group of diffeomorphisms of the circle // Comm. Math. Phys. 1994. V. 164. №2. P. 599–626.
17. *Neretin Yu. A.* Mantles, trains and representations of infinite dimensional groups // First European Congress of Math. V. 2. Birkhauser, 1994. P. 293–310.
18. *Olshanskii G. I.* On semigroups related to infinite dimensional groups // Topics in representation theory / ed. A. A. Kirillov. Adv. Sov. Math. V. 2, 1991. P. 67–101.
19. *Orey S.* Gaussian sample functions and Hausdorff dimension of level sets // Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete. 1970. V. 15. P. 249–256.
20. *Pickrell D.* Measures on infinite dimensional grassmann manifold // J. Funct. Anal. 1987. V. 70. P. 323–336.
21. *Revuz D., Yor M.* Continuous martingales and Brownian motion. Berlin: Springer-Verlag, 1991.
22. *Voiculescu D. V., Dikema K. J., Nica A.* Free random variables. Providence: Amer. Math. Soc., 1993.

Москва

E-mail: neretin@mpim-bonn.mpg.de

Поступила в редакцию

31.05.1995