Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Беспалов, Явный вид ядра Дирихле для рядов и преобразований Уолша,
Матем. сб., 2005, том 196, номер 7, 3–26

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1374>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 16:22:15

УДК 517.444+519.1

М. С. Беспалов

Явный вид ядра Дирихле для рядов и преобразований Уолша

Построены динамические системы поведения модулей ядер Дирихле: дискретная для ядра Дирихле системы Уолша и непрерывная для обобщенного ядра Дирихле–Уолша. Установлены оценки p -норм ядер Дирихле. Введено понятие обобщенной константы Лебега и найдены формулы для нее, обобщающие формулы Файна для констант Лебега. Данные результаты справедливы не только для системы Уолша в нумерации Пэли, но и для перестановок системы Уолша, включающих линейные и кусочно линейные.

Библиография: 13 названий.

§ 1. Определения и обозначения

Функции Уолша суть всевозможные произведения функций Радемахера, значения которых в отличие от традиционного [1] определения вне $[0, 1)$ будем полагать равными нулю. Пусть $r_0(x) = 1$ при $x \in [0, 1/2)$, $r_0(x) = -1$ при $x \in [1/2, 1)$ и $r_0(x) = 0$ при $x \notin [0, 1)$. Следующие функции Радемахера построим методом двоичного сжатия и периодического продолжения на $[0, 1)$: $r_{n+1}(x) = r_n(2x) + r_n(2x - 1)$.

Для произвольного натурального n такого, что $2^m < n < 2^{m+1}$, рассмотрим два представления:

$$n = n_m 2^m + n_{m-1} 2^{m-1} + \dots + n_0 2^0, \quad n_i \in \{0, 1\}, \quad n_m = 1, \quad (1)$$

$$n = 2^{\varepsilon_1} + 2^{\varepsilon_2} + \dots + 2^{\varepsilon_\nu}, \quad \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \dots < \varepsilon_\nu = m. \quad (2)$$

Систему Уолша в нумерации Пэли $\{w_n(x)\}_{n=0}^\infty$ определим следующим образом:

$$w_0(x) \equiv 1, \quad w_n(x) = \prod_{k=0}^m (r_k(x))^{n_k} = \prod_{i=1}^\nu r_{\varepsilon_i}(x).$$

При исследовании рядов Фурье по системе Уолша–Пэли изучают ядро Дирихле $D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} w_k(x)$ и константы Лебега $L_n = \int_0^1 |D_n(x)| dx$.

Отметим стандартное представление ядра Дирихле [1; (1.4.11)]

$$D_n(x) = D_{2^m}(x) + r_m(x) D_k(x), \quad (3)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-00717).

где $n = 2^m + k$, $0 \leq k < 2^m$, и оценку [1; (1.4.14)] $|D_n(x)| \leq h(x)$, которую сформулировали с помощью функции

$$h(x) = 2^{-m}, \quad \text{если } x \in [2^{m-1}, 2^m), \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (4)$$

введенной в [2] при построении модифицированного сильного двоичного интеграла.

Преобразование Уолша строится [2] как континуальный аналог ряда Уолша–Пэли и формально определяется формулой

$$\hat{f}(y) = \int_0^\infty f(x)W(x, y) dx,$$

где $W(x, y) = w_{[x]}(\{y\})w_{[y]}(\{x\})$ (здесь $[a]$ – целая часть, $\{a\}$ – дробная часть числа a). Обобщенным ядром Дирихле–Уолша назовем [2] $D(x; t) = \int_0^t W(x, y) dy$. Для него в [3] получено представление [1; (1.5.38)] (где обозначили $n = [t]$)

$$D(x; t) = \begin{cases} D_n(x) + \{t\}w_n(x), & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ w_n(\{x\}) \int_0^{\{t\}} w_{[x]}(u) du, & \text{если } x \geq 1. \end{cases} \quad (5)$$

Из (5) вытекает, что при целочисленных t введенные ядра Дирихле совпадают: $D(x; n) = D_n(x)$.

При доказательстве будем использовать обозначение $D_n^p = \int_0^1 |D_n(x)|^p dx$ для p -й степени p -й нормы ядра Дирихле.

Назовем $f(x)$ *слабо интегрируемой на множестве E* ($f \in L_c^1(E)$), если найдется C такая, что $m\{x \mid x \in E, |f(x)| \geq \alpha\} < C/\alpha$ для всех $\alpha > 0$.

Точная нижняя грань по всем C в этом неравенстве есть норма в данном пространстве. В качестве множества E рассматриваем $[0, 1)$ или $[0, \infty)$.

Многие из сформулированных ниже результатов верны не только для системы Уолша–Пэли, но и для перестановок системы Уолша, сохраняющих константы Лебега. Перестановку системы Уолша, для которой последовательность констант Лебега совпадает с последовательностью констант Лебега системы Уолша–Пэли, назовем CLW-системой (permutation of the Walsh system that preserve Lebesgue Constants). В [4] доказано, что они включают введенные Шишом [5] линейные (Ф. Шиш назвал их TW-системы, к ним относятся система Уолша в нумерации Уолша и различные перестановки между пачками) и кусочно линейные (включают систему Уолша–Качмажа) перестановки. Для ядра Дирихле CLW-систем будем использовать то же обозначение $D_n(x)$.

Для констант Лебега системы Уолша–Пэли в [6] установлены формулы, справедливые (согласно [4]) и для CLW-систем:

$$L_n = \nu - \sum_{1 \leq i < j \leq \nu} 2^{\varepsilon_i - \varepsilon_j} \quad (n \text{ вида } (2)), \quad (6)$$

$$L_{2n} = L_n, \quad L_{2n+1} = \frac{1}{2}(L_{n+1} + L_n + 1), \quad (7)$$

и асимптотика (доказательство в [6] с ошибкой из-за неверно сформулированной базы индукции)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(L_k - \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{3} \log_2 3k \right) \right) = 0. \quad (8)$$

Для n вида (1) введем понятия срезки числа $[n]_k = n_k 2^k + \dots + n_0 2^0$, $k = 0, 1, 2, \dots, m$, и отклонения $\langle n \rangle_k = \min([n]_k, 2^{k+1} - [n]_k)$.

§ 2. Норма ядер Дирихле систем Уолша

Используя обозначения (1), (2) и отклонения числа, приведем более удобную формулировку леммы 3 из [4].

ЛЕММА 1. Если $2^m \leq n < 2^{m+1}$, то для любой CLW-системы существует такое разбиение $[0, 1) = \bigcup_{k=0}^{m+1} E_k$ на непересекающиеся множества, что $|E_{m+1}| = 2^{-m-1}$, $|E_k| = 2^{-k-1}$ при $k = 0, 1, 2, \dots, m$ и выполнено: $|D_n(x)| = n$, если $x \in E_{m+1}$, и $|D_n(x)| = \langle n \rangle_k$, если $x \in E_k$, $k = 0, 1, 2, \dots, m$. В частности, для системы Уолша–Пэли $E_{m+1} = [0, 2^{-m-1})$, $E_k = [2^{-k-1}, 2^{-k})$.

СЛЕДСТВИЕ. Новая формула для констант Лебега ($2^m \leq n < 2^{m+1}$):

$$L_n = n 2^{-m-1} + \sum_{k=0}^m \langle n \rangle_k 2^{-k-1}$$

и явная формула L_p -норм ядер Дирихле CLW-систем

$$\|D_n(\cdot)\|_p^p = \int_0^1 |D_n(x)|^p dx = n^p 2^{-m-1} + \sum_{k=0}^m \langle n \rangle_k^p 2^{-k-1}.$$

В частности, для любого n вида (1) $n = n^2 2^{-m-1} + \sum_{k=0}^m \langle n \rangle_k^2 2^{-k-1}$. Например, $9 = 9^2/16 + 7^2/16 + 1/8 + 1/4 + 1/2$.

ЛЕММА 2 (рекуррентная формула вычисления p -норм ядра Дирихле). Если $k < 2^m$, то

$$\|D_{2^m+k}(\cdot)\|_p^p = \frac{(2^m+k)^p + (2^m-k)^p}{2^{m+1}} - \frac{k^p}{2^m} + \|D_k(\cdot)\|_p^p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следствием равенства (3) служит соотношение [7; (55)]

$$D_{2^m+k}(x) = \begin{cases} 2^m+k, & \text{если } x \in [0, 2^{-m-1}), \\ 2^m-k, & \text{если } x \in [2^{-m-1}, 2^{-m}), \\ r_m(x)D_k(x), & \text{если } x \in [2^{-m}, 1), \end{cases} \quad (9)$$

откуда

$$D_{2^m+k}^p = (2^m+k)^p 2^{-m-1} + (2^m-k)^p 2^{-m-1} - \int_0^{2^{-m}} |D_k(x)|^p dx + \int_0^1 |D_k(x)|^p dx.$$

Так как $D_k(x) = k$ при $x \in [0, 2^{-m})$, то отсюда следует утверждение леммы.

Отметим, что лемма 1 для случая системы Уолша–Пэли также есть следствие соотношения (9), где последняя строчка есть свойство самоподобия модулей ядра Дирихле: $|D_{2^m+k}(x)| = |D_k(x)|$ при $x \in [2^{-m}, 1)$, вторая строчка иллюстрирует построение цикла изменения модуля ядра Дирихле на вновь появившемся интервале.

СЛЕДСТВИЕ ЛЕММЫ 2. Если $p = 1$, то получаем соотношение $L_{2^m+k} = 1 - k/2^m + L_k$, из которого в [6] получено (6).

Если p четное ($p = 2n$), то $D_{2^m+k}^{2n} = \sum_{r=0}^{n-1} C_{2n}^{2r} 2^{m(2n-2r-1)} k^{2r} + D_k^{2n} -$ целое число. В частности, $D_{2^m+k}^2 = 2^m + D_k^2$, $D_{2^m+k}^4 = 2^{3m} + 6 \cdot 2^m k^2 + D_k^4$.

Если p нечетное, то $D_{2^m+k}^{2n+1} = \sum_{r=0}^n C_{2n+1}^{2r} 2^{m(2n-2r)} k^{2r} - k^{2n+1}/2^m + D_k^{2n+1}$ (здесь $p = 2n + 1$). В частности, $D_{2^m+k}^3 = 2^{2m} + 3k^2 - k^3/2^m + D_k^3$.

Приведем аналоги формулы (6) для n вида (2) в случае $p = 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned} D_n^2 &= 2^{\varepsilon_\nu} + 2^{\varepsilon_{\nu-1}} + \dots + 2^{\varepsilon_1} = n, \\ D_n^3 &= \sum_{k=0}^{\nu-1} \left(2^{2\varepsilon_{k+1}} + 3 \left(\sum_{r=1}^k 2^{\varepsilon_r} \right)^2 - \left(\sum_{r=1}^k 2^{\varepsilon_r} \right)^3 2^{-\varepsilon_{k+1}} \right), \\ D_n^4 &= \sum_{k=0}^{\nu-1} \left(2^{3\varepsilon_{k+1}} + 6 \cdot 2^{\varepsilon_{k+1}} \left(\sum_{r=1}^k 2^{\varepsilon_r} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1. Для CLW-систем справедливо следующее:

- 1) $\|D_n(\cdot)\|_{L_c^1[0,1)} = 1$;
- 2) если $1 < p < 2$, то $n^{p-1} \leq \|D_n(\cdot)\|_p^p < A n^{p-1}$, причем равенство слева достигается только при $n = 2^m$, $m \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, если $1.33 < p < 2$, то в качестве A можно взять 2;
- 3) $\|D_n(\cdot)\|_2^2 = n$;
- 4) если $p > 2$, то:
 - а) $\frac{1}{2} n^{p-1} < \|D_n(\cdot)\|_p^p \leq n^{p-1}$, причем равенство справа достигается только при $n = 2^m$, $m \in \mathbb{N}_0$;
 - б) $\|D_n(\cdot)\|_p^p < \|D_{n+1}(\cdot)\|_p^p$ для всех n .

Последнее соотношение теоремы указывает на монотонность величин D_n^p при $p \geq 2$, которые при $p = 1$ обладают противоположным свойством: из (7) вытекает, что последовательность L_n зубчатая (последовательность ΔL_n знакопеременная). Хотя с ростом p происходит “выпрямление” последовательности D_n^p , есть основания выдвинуть следующее предположение: для любого $1 \leq p < 2$ последовательность ΔD_n^p (или $\Delta(D_n^p - n^{p-1})$) начиная с некоторого номера становится знакопеременной.

Утверждение о том, что для любого $1 \leq p < 2$ последовательность D_n^p не является монотонной, вытекает из следующего утверждения:

для любого $1 \leq p < 2$ существует m такое, что $D_{2^m-1}^p > D_{2^m}^p$.

Это неравенство устанавливается непосредственным вычислением (подробные выкладки приведены ниже) $D_{2^m-1}^p = (2^m - 1)^p / 2^m + 1 - 2^{-m}$, $D_{2^m}^p = 2^{m(p-1)}$ с привлечением вспомогательных функций, для которых в следующем параграфе найдены решения $p(m)$ соответствующих уравнений. Так как будет доказано, что $\lim_{m \rightarrow \infty} p(m) = 2$, то при $p < p(m)$ верно $D_{2^m-1}^p > D_{2^m}^p$.

Систему Уолша–Качмажа исследовали (например, в [8], [9]) как пример системы с отличными от тригонометрических свойствами, при этом отмечая (см. [7; с. 37]), что у ядра Дирихле нет мажоранты:

ТЕОРЕМА Ш. *Существует $\alpha > 0$ такое, что*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{|D_n(x)|}{\log n} > \alpha \quad \text{для п.в. } x \in [0, 1).$$

Отсутствие мажоранты у ядра Дирихле системы Уолша–Качмажа, которая является кусочно линейной перестановкой, обусловлено тем, что при построении последовательности разбиений $[0, 1)$ в лемме 1 набор множеств E_k на каждом шаге перетасовывается сложным образом, хотя ядра Дирихле с одинаковым номером всех CLW-систем равно измеримы. Отметим, что множество тех x , для которых верно неравенство в теореме Ш, состоит только из двоично-иррациональных чисел. Структурные особенности данного множества более наглядны при рассмотрении системы Крестенсона–Леви, а не системы Уолша. Результаты данного исследования для перестановки Качмажа системы Крестенсона–Леви опубликованы в [10].

Наличие мажоранты у ядра Дирихле системы Уолша–Пэли (а также любой ее линейной перестановки) вытекает из того, что при построении последовательности разбиений $[0, 1)$ в лемме 1 на каждом шаге (увеличение m на единицу) каждое множество E_k делится на два множества одинаковой меры. Следовательно, у любой линейной перестановки системы Уолша существует мажоранта, равно измеримая с функцией $h(x)$ из (3).

Для системы Уолша–Пэли и преобразования Уолша этот результат уточняет следующая теорема, где дано описание (дискретной для $D_n(x)$ при целочисленных t и непрерывной для $D(x; t)$) динамических систем поведения модулей ядра Дирихле.

ТЕОРЕМА 2. 1) *Функция $h(x)$ является точной мажорантой как $D_n(x)$, так и $D(x; t)$.*

При этом величина $|D(x; t)|$ на $[0, \infty)$ равномерно со скоростью 1 по времени t (а величина $|D_n(x)|$ как функция дискретного времени n) совершает колебательные перемещения от функции $e(x) \equiv 0$ до функции $h(x)$ и обратно.

2) *При фиксированном t (или n) величина $|D(x; t)|$ (или $|D_n(x)|$) – монотонно убывающая функция.*

Введем понятие обобщенной константы Лебега

$$L_t = \int_0^\infty |D(x; t)| dx$$

для двоично-рационального t . Это определение оправдано тем, что для натуральных t данная величина совпадает с константой Лебега. Корректность определения и свойства обобщенных ядер Дирихле – в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 3. *Для любого t справедливы следующие утверждения:*

- 1) $\|D(\cdot; t)\|_{L^1_c[0, \infty)} = 1$;
- 2) $\|D(\cdot; t)\|_{L^2[0, \infty)}^2 = t$;
- 3) *если $1 < p < \infty$, то $D(\cdot; t) \in L^p[0, \infty)$;*

- 4) если t двоично-иррациональное, то $D(\cdot; t) \notin L[0, \infty)$, если t двоично-рациональное, то $D(\cdot; t) \in L[0, \infty)$;
 5) если t двоично-рациональное (обозначим $t = n + z$, $n \in \mathbb{N}_0$, $z \in [0, 1)$), то

$$L_{2t} = L_t, \quad L_{n+z} = (1-z)L_n + zL_{n+1} + L_z - z, \quad L_z = z + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(z2^k),$$

где $\varphi(u)$ – кусочно линейная функция с узлами $\varphi(n) = 0$, $\varphi((2n+1)/2) = 1/2$;

- 6) если $1 < p < 2$, то $t^{p-1} \leq \|D(\cdot; t)\|_{L^p[0, \infty)}^p \leq A(p)t^{p-1}$; в частности, при $1.33 < p < 2$ можно взять $A(p) = 2$;
 7) если $p > 2$, то

$$\frac{1}{2}t^{p-1} \leq \|D(\cdot; t)\|_{L^p[0, \infty)}^p \leq t^{p-1}$$

и величина $\|D(\cdot; t)\|_{L^p[0, \infty)}^p$ монотонно возрастающая по t .

СЛЕДСТВИЕ. Если $t \in [2^m, 2^{m+1})$, $m \in \mathbb{Z}$, то

$$L_t = t2^{-m-1} + \sum_{r=0}^{\infty} \varphi(t2^{r-m-1}) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(t2^{k-m}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $t2^{-m-1} \in [1/2, 1)$, то

$$L_t = L_{t2^{-m-1}} = t2^{-m-1} + \sum_{r=0}^{\infty} \varphi(2^r t2^{-m-1}),$$

причем $\varphi(t/2^{m+1}) = 1/2 - (t/2^{m+1} - 1/2)$.

СЛЕДСТВИЕ. Если t двоично-иррациональное, то $\sum_{r=0}^{\infty} \varphi(2^r t) = \infty$.

Формулы Файна (7) есть следствие формул $L_{2t} = L_t$, $L_{n+z} = (1-z)L_n + zL_{n+1} + L_z - z$ при $z = 1/2$.

§3. Свойства вспомогательных функций

Следующие две функции будем рассматривать при фиксированном p , что отразим в обозначениях:

$$f(x) = f(x; p) = \frac{(1+x)^p + (1-x)^p}{2} - x^p,$$

$$g(x) = g(x; p) = (1+x)^{p-1} - x^{p-1}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть $x \in (0, 1)$. Если $1 < p < 2$, то:

- а) функции $f(x)$ и $g(x)$ убывают от 1 до $2^{p-1} - 1$;
 б) $g(x)$ выпукла вниз, а функция $f(x)$ имеет на $(0, 1)$ точку перегиба, слева от которой она выпукла вверх, а справа – выпукла вниз;
 в) $g(x) < f(x)$, $f(x) < Ag(x)$, где константа A зависит от p ; в частности, если $1.33 < p < 2$, то $f(x) < 2g(x)$.

Если $p = 2$, то $f(x) = g(x) = 1$.

Если $p > 2$, то:

- а) функции $f(x)$ и $g(x)$ возрастают от 1 до $2^{p-1} - 1$;
- б) функция $f(x)$ выпукла вниз при $p \geq 3$, при $2 < p < 3$ функция $f(x)$ имеет на $(0, 1)$ точку перегиба, слева от которой она выпукла вниз, а справа – выпукла вверх; функция $g(x)$ выпукла вверх при $2 < p < 3$, $g(x) = 2x + 1$ при $p = 3$, функция $g(x)$ выпукла вниз при $p > 3$;
- в) $f(x; p) > f(x; p-1) + \frac{1}{2}x^{p-1}$, $\frac{1}{2}g(x) < f(x) < g(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим производные наших функций

$$f'(x) = p \left(\frac{(1+x)^{p-1} - (1-x)^{p-1}}{2} - x^{p-1} \right), \quad f''(x; p) = p(p-1)f(x; p-2);$$

$$g'(x; p) = (p-1)g(x; p-1), \quad g''(x; p) = (p-1)(p-2)g(x; p-2).$$

Сравнивая скорость роста функции $y = t^{p-1}$ (которая выпукла вверх при $1 < p < 2$ и выпукла вниз при $p > 2$) на различных участках одинаковой длины, получаем

$$2((1+x)^{p-1} - 1) \vee (1+x)^{p-1} - (1-x)^{p-1} \vee 2(1 - (1-x)^{p-1}) \vee 2x^{p-1},$$

где знак сравнения $\vee$ понимаем как знак $<$ при $1 < p < 2$ и как знак $>$ при $p > 2$. Следовательно, $f'(x) \vee 0$.

Так как $(p-2) < 0$ при $1 < p < 2$ и $(p-2) > 0$ при $p > 2$, то $g'(x) \vee 0$. Легко проверить, что $f(0) = g(0) = 1$ и $f(1) = g(1) = 2^{p-1} - 1$. Пункты а) доказаны.

Если $1 < p < 2$, то $g''(x) > 0$ при $x \in (0, 1)$, так как функция $y = t^{p-2}$ убывает. Из графика функции $y = t^{p-2}$ видно, что функция $(1+x)^{p-2} + (1-x)^{p-2}$ растёт от 2 до ∞ на $(0, 1)$, а функция x^{p-2} убывает от ∞ до 1. Следовательно, функция $f''(x)$ растёт от $-\infty$ до ∞ .

Если $2 < p < 3$, то $g''(x) < 0$ при $x \in (0, 1)$. Из графика функции $y = t^{p-2}$ видно, что функция $(1+x)^{p-2} + (1-x)^{p-2}$ убывает от 2 до 2^{p-2} , а функция x^{p-2} растёт от 0 до 1. Следовательно, функция $f''(x)$ убывает от $p(p-1)$ до $p(p-1)(2^{p-3} - 1) < 0$.

Если $p = 3$, то $g(x) = 2x + 1$, а функция $f''(x)$ убывает до 0 ($f''(1) = 0$).

Если $p > 3$, то $g''(x) > 0$ и $f''(x) > 0$. Последнее неравенство эквивалентно условию $f(x) > 0$ при $p > 1$, которое вытекает (согласно выпуклости функции x^p) из того, что функция $((1+x)^p + (1-x)^p)/2$ растёт от 1 до 2^{p-1} . Пункты б) доказаны.

Рассмотрим

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \frac{1}{2}((1+x)^p + (1-x)^p - 2x^p - 2(1+x)^{p-1} + 2x^{p-1}) \\ &= \frac{1}{2}((1+x)^p - 2(1+x)^{p-1} + 2x^{p-1} - 2x^p + (1-x)^p) \\ &= \frac{1}{2}((1+x)^{p-1}(1+x-2) + 2x^{p-1}(1-x) + (1-x)(1-x)^{p-1}) \\ &= (1-x) \left(x^{p-1} - \frac{(1+x)^{p-1} - (1-x)^{p-1}}{2} \right). \end{aligned}$$

Следовательно, $f(x) - g(x) = -\frac{1}{p}(1-x)f'(x)$. Отсюда $f(x) > g(x)$ при $1 < p < 2$ и $f(x) < g(x)$ при $p > 2$.

Пусть $1 < p < 2$. Для $A = 1/(2^{p-1} - 1)$ верно $f(x) < 1 < Ag(x)$. Если $\log_2 3 < p < 2$, то $f(x) < 1 < 2g(x)$. Решая неравенство $f(x) - 2g(x) < 0$ в системе Mathcad, нетрудно получить границу $1.322 \dots$ для p .

Неравенство $g(x) < 2f(x)$ при $p > 2$ есть следствие неравенства $f(x; p) > f(x; p-1) + \frac{1}{2}x^{p-1}$.

Докажем, что $f(x; p) > f(x; p-1) + \frac{1}{2}x^{p-1}$ при $p > 2$.

Это неравенство эквивалентно следующим неравенствам:

$$\begin{aligned}(1+x)^p + (1-x)^p - 2x^p &> (1+x)^{p-1} + (1-x)^{p-1} - x^{p-1}, \\ (1+x)^{p-1}(1+x-1) + (1-x-1)(1-x)^{p-1} &> 2x^p - x^{p-1}, \\ (1+x)^{p-1} - (1-x)^{p-1} &> x^{p-2}(2x-1).\end{aligned}$$

При $x \in (0, 1/2]$ последнее неравенство очевидно.

Пусть $x \in (1/2, 1]$. Так как функция слева возрастает, то

$$(1+x)^{p-1} - (1-x)^{p-1} > \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{p-1} - \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{p-1} > \left(\frac{3}{2}\right)^{2-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2-1} = 1.$$

С другой стороны, $x^{p-2}(2x-1) < 1^{p-2}(2 \cdot 1 - 1) = 1$.

Случай $p = 2$ очевиден. Утверждение доказано.

Оценку снизу в последнем неравенстве утверждения можно улучшить, заменив константу $1/2$ (которую обозначим $a(p)$) на $2/3$. При фиксированном p величину $a(p)$ можно оценить точнее.

Например, $a(4) = 2(3 - \sqrt{7}) \approx 0.70850$. При $p = 4$ имеем $f(x) = 1 + 6x^2$, $g(x) = 1 + 3x + 3x^2$. Так как

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{18x^2 + 6x - 3}{g^2(x)},$$

то $(f(x)/g(x))' = 0$ при $x_1 = (\sqrt{7} - 1)/6 \in (0, 1)$ и $x_2 < 0$. Отсюда

$$\min \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_1)}{g(x_1)} = 2(3 - \sqrt{7}),$$

так как $f(x_1) = (7 - \sqrt{7})/3$, $g(x_1) = (7 + 2\sqrt{7})/6$.

Отметим, что $a(3) > 0.75$, так как справедливо неравенство $f(x) > \frac{3}{4}g(x)$ для $f(x) = 1 + 3x^2 - x^3$, $g(x) = 1 + 2x$. Это неравенство равносильно неравенству $h(x) < 0$, где $h(x) = 3g(x) - 4f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 6x - 1$. Оно верно, так как $(h(x))' = 6(2x^2 - 4x + 1)$, и при $x \in [0, 1]$ оценим

$$\max h(x) = h\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right) = -3 + 2\sqrt{2} < 0.$$

Несложно показать, что $a(3) < 0.8$.

Константа $A(p)$ в неравенстве $f(x) < A(p)g(x)$, рассмотренном при $1 < p < 2$, при $p \rightarrow 1$ неограниченно растет, так как $f(x) = 1 - x$ при $p = 1$, а $g(x)$ приближается к тождественному нулю на $(0, 1)$ при $p \rightarrow 1$. Это может служить объяснением появления логарифма в оценке сверху констант Лебега.

Далее рассматривали более простые вспомогательные функции и в системе Mathcad решали уравнения $(2^m - 1)^p + (2^m - 1) = (2^m)^p$ (чтобы найти критические значения p , при которых $D_{2^m-1}^p = D_{2^m}^p$).

Приведем несколько решений $p(m)$ этих уравнений: $p(2) = 1.535 \dots$, $p(3) = 1.702 \dots$, $p(4) = 1.778 \dots$, $p(5) = 1.822 \dots$, $p(6) = 1.850 \dots$, $p(7) = 1.870 \dots$, $p(8) = 1.885 \dots$, $p(9) = 1.897 \dots$.

Очевидно, что если $p < p(m)$, то $(2^m - 1)^p + (2^m - 1) > (2^m)^p$, а если $p > p(m)$, то $(2^m - 1)^p + (2^m - 1) < (2^m)^p$.

Покажем, что $\lim_{m \rightarrow \infty} p(m) = 2$ для данной последовательности.

Неравенство $2^{mp} - (2^m - 1)^p < p2^{m(p-1)}$ указывает, что средняя скорость роста функции x^p (при $1 < p < 2$) на участке длиной 1 меньше мгновенной скорости в правой точке участка. При $p = p(m)$ это неравенство примет вид $2^m - 1 < p(m)2^{m(p(m)-1)}$. Если предположим, что $p(m) < p_0 < 2$, то получим противоречие, устремив $m \rightarrow \infty$ в неравенстве $2^m - 1 < p_0 2^{m(p_0-1)}$.

Последние рассуждения относятся к проверке монотонности по номеру при $p < 2$. Так как $D_{2^m-1}^p = 2^{-m}(2^m - 1)^p + (1 - 2^{-m})$, $D_{2^m}^p = 2^{-m} \cdot 2^{mp}$, то $D_{2^m-1}^{p(m)} = D_{2^m}^{p(m)}$. Соседние номера $2^m - 1$ и 2^m являются критическими в пачке. Если $D_{2^m-1}^p < D_{2^m}^p$, то $D_{2^k-1}^p < D_{2^k}^p$ для всех $2k \leq 2^m$.

§ 4. Доказательства теорем

Обобщением леммы Пэли [7; с. 7] служит приведенная в [7; с. 428]

ЛЕММА 3. Для любого целого m

$$D(x; 2^m) = \begin{cases} 2^m, & \text{если } x \in [0, 2^{-m}), \\ 0, & \text{если } x \in [2^{-m}, \infty). \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для положительных m — это лемма Пэли, так как

$$D(x; 2^m) = D_{2^m}(x).$$

Для отрицательных m утверждение вытекает из (5), где $n = 0$, и соотношений

$$\int_0^{2^{-r}} w_k(x) dx = 2^{-r} \text{ при } k < 2^r, \quad \int_0^{2^{-r}} w_k(x) dx = 0 \text{ при } k \geq 2^r, \text{ где } r \in \mathbb{N}.$$

В обозначениях (1) и (2) непосредственной проверкой легко устанавливается

ЛЕММА 4. Имеем $\langle n \rangle_k = 0$, если $k < \varepsilon_1$, и $2^{\varepsilon_1} \leq \langle n \rangle_k \leq 2^k$, если $k \geq \varepsilon_1$. При этом равенство $\langle n \rangle_k = 2^{\varepsilon_1}$ достигается только в случае $\varepsilon_1 \leq k \leq \varepsilon_s$, где s таково, что $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s$ — последовательные натуральные числа, а $\varepsilon_s + 1 < \varepsilon_{s+1}$.

Утверждение теоремы 2 о том, что $h(x)$ — точная мажоранта для $D_n(x)$, вытекает из лемм 1 и 4 и соотношения $\langle 2^k \rangle_k = 2^k$.

Отсюда с помощью очевидного равенства $\|h\|_{L^1_c[0,1]} = 1$ и леммы Пэли вытекает первое утверждение теоремы 1: $\|D_n(\cdot)\|_{L^1_c[0,1]} = 1$.

Пункт 3) получен выше как следствие леммы 2 и является также простым следствием ортонормированности системы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Построим базу индукции. По лемме Пэли $D_{2^m}^p = 2^{mp} \cdot 2^{-m} = 2^{m(p-1)}$. Непосредственным вычислением получаем $D_3^p = (3^p + 3)/4$. Тогда для номеров n , равных 1, 2, 3, 4, имеем $n^{p-1} \leq D_n^p < A(p)n^{p-1}$ при $1 < p < 2$ и $\frac{1}{2}n^{p-1} < D_n^p \leq n^{p-1}$ при $p > 2$; $D_0^p = 0$. При $p > 2$ заметим, что L^p -нормы ядер Дирихле начальных номеров монотонно растут с увеличением номера.

Индукцию по номеру пачки проведем для п. 2).

Пусть $1 < p < 2$. Положим $x = k/2^m$. Тогда $x \in (0, 1)$. По лемме 2 имеем $D_{2^m+k}^p = 2^{m(p-1)}((1+x)^p + (1-x)^p)/2 - x^p + D_k^p$. Предполагая, что $D_k^p \geq k^{p-1}$, получаем (с использованием вспомогательных функций $f(x)$ и $g(x)$ и их свойств)

$$D_{2^m+k}^p \geq 2^{m(p-1)}(f(x) + x^{p-1}) > 2^{m(p-1)}(g(x) + x^{p-1}) = (2^m + k)^{p-1}.$$

Предполагая, что $D_k^p < Ak^{p-1}$, где $A = A(p)$, получаем

$$D_{2^m+k}^p < 2^{m(p-1)}(f(x) + Ax^{p-1}) < 2^{m(p-1)}A(g(x) + x^{p-1}) = A(2^m + k)^{p-1}.$$

Для $p > 2$ (п. 4)) доказательство аналогично.

Монотонность (п. 4), b)) также доказывается по индукции:

$$\begin{aligned} D_{2^m+k+1}^p &= 2^{m(p-1)} \left(\frac{(1+y)^p + (1-y)^p}{2} - y^p \right) + D_{k+1}^p \\ &> D_{2^m+k}^p, \quad \text{где } y = x + 2^{-m}, \end{aligned}$$

из монотонности функции $((1+x)^p + (1-x)^p)/2 - x^p$ по x на $[0, 1]$ и монотонности D_k^p по k . Теорема 1 доказана.

Для t вида $t = \sum_{k=0}^{\infty} t_k 2^k + \sum_{k=1}^{\infty} t_k 2^{-k}$, где первая сумма конечна, $t_k \in \{0, 1\}$, распространим понятие срезки и отклонения на отрицательные индексы:

$$[t]_k = \sum_{s=-k}^{\infty} t_s 2^{-s}, \quad \langle t \rangle_k = \min([t]_k, 2^{k+1} - [t]_k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

ЛЕММА 5. Если $x \in [2^m, 2^{m+1})$, то $|D(x; t)| = \langle t \rangle_{-m-1} \leq 2^{-(m+1)}$. При этом равенство достигается только при $t = (2r-1)2^{-m-1}$, $m, r \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем ν из условия $\nu 2^{-m} \leq \{t\} < (\nu+1)2^{-m}$ и обозначим $z = \{t\} - \nu 2^{-m}$, $[x] = 2^m + k$, где $k < 2^m$. Значит, $z = [t]_{-m-1}$.

Тогда из (5) вытекает, что

$$\begin{aligned} |D(x; t)| &= \left| \int_0^{\{t\}} w_{2^m}(u) \cdot w_k(u) du \right| = \left| \int_{\nu 2^{-m}}^{\{t\}} w_{2^m}(u) du \right| \\ &= \left| \int_0^z w_{2^m}(u) du \right| = \langle t \rangle_{-m-1}, \end{aligned}$$

так как последний интеграл равен z , если $z \leq 2^{-m-1}$, и $2^{-m-1} - (z - 2^{-m-1})$, если $z > 2^{-m-1}$. Отсюда $\langle t \rangle_{-m-1} \leq 2^{-m-1}$ и равенство только при $z = 2^{-m-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. То, что $h(x)$ – мажоранта для $D_n(x)$, уже доказали.

Дискретная динамическая система для $D_n(x)$ следующая. Для фиксированного интервала $[2^{-k-1}, 2^{-k}] \subset [0, 1)$ и дискретного времени $t = n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ величина $\langle n \rangle_k$ равномерно со скоростью 1: растёт при $n \leq 2^k$ (при $m2^{k+1} \leq n \leq m2^{k+1} + 2^k$ на m -м периоде), так как $\langle n \rangle_k = [n]_k$, и убывает от 2^k до 0 при $2^k \leq n \leq 2^{k+1}$ (при $m2^{k+1} + 2^k \leq n \leq (m+1)2^{k+1}$ на m -м периоде), так как $\langle n \rangle_k = 2^{k+1} - [n]_k$. Отметим, что изменение направления движения на данном интервале происходит в моменты времени, кратные 2^k .

Для непрерывного времени $t = n + z$, $n \in \mathbb{N}_0$, $z \in [0, 1)$, и при $x \in [0, 1)$ формулу (5) перепишем в виде

$$D(x; t) = (1 - z)D_n(x) + zD_{n+1}(x),$$

что соответствует равномерному движению со скоростью 1 от $D_n(x)$ к $D_{n+1}(x)$. Отсюда следует, что $h(x)$ – мажоранта на $[0, 1)$ и для $D(x; t)$. То, что $h(x)$ – мажоранта на $[1, \infty)$, доказано в лемме 5, которая также уточняет поведение динамической системы на $[1, \infty)$ по аналогии с дискретным случаем. Величина z при изменении от 0 до 2^{-m} соответствует изменению $|D(x; t)|$ на $[2^m, 2^{m+1})$ от $e(x)$ до $h(x)$ и обратно.

Монотонность по t вытекает из сравнения поведения $|D(x; t)|$ на двух соседних интервалах $[2^{m-1}, 2^m)$ и $[2^m, 2^{m+1})$. Отсюда вытекает монотонность $D_n(x)$ по n . Теорема 2 доказана.

ЛЕММА 6. Для любого t справедливо равенство

$$\|D(\cdot; t)\|_{L[0,1)} = L_n(1 - \{t\}) + L_{n+1}\{t\}.$$

Доказательство вытекает из равенства $D(x; t) = (1 - z)D_n(x) + zD_{n+1}(x)$, так как динамическая система на граничные линии $e(x)$ и $h(x)$ выходит только в целочисленные моменты времени.

ЛЕММА 7. Для всех положительных x , t имеем

$$D(x; t) = \frac{1}{2}D\left(\frac{x}{2}; 2t\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, как равенство вытекает из построения динамической системы. Путь точки x от $e(x)$ до $h(x)$ и обратно до $e(x)$ назовем маршрутом точки x . За время t точка x проходит несколько полных маршрутов и какую-то часть δ своего маршрута. За время $2t$ точка $x/2$ проходит столько же полных маршрутов и такую же часть δ своего маршрута, который в два раза длиннее.

ЛЕММА 8. Если $1 \leq p < \infty$, s целое, то $D_{2^s t}^p = 2^{s(p-1)} D_t^p$.

Доказательство вытекает из равенства

$$D_t^p = \int_0^\infty |D(x; t)|^p dx = \int_0^\infty 2 \left| \frac{1}{2} D\left(\frac{x}{2}; 2t\right) \right|^p \frac{1}{2} dx = 2^{1-p} D_{2t}^p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. 1) Так как $\|h\|_{L^1_c[0,\infty)} = 1$, то из теоремы 2 и леммы Пэли вытекает, что $\|D(\cdot; t)\|_{L^1_c[0,\infty)} = 1$.

2) По определению преобразования Уолша обобщенное ядро Дирихле–Уолша есть преобразование Уолша от функции $\chi_t(x)$ – характеристической функции интервала $[0, t)$: $D(x; t) = \widehat{\chi}_t(x)$. По равенству Планшереля [1; 6.2.4] получим, что $\int_0^\infty |D(x; t)|^2 dx = \int_0^\infty |\chi_t(x)|^2 dx = t$.

3) То, что $D(\cdot; t) \in L^p[0, \infty)$ при $p \neq 1$, доказано в [3] (см. также [1; §6.3]). Приведем более короткое доказательство:

$$\|D(\cdot; t)\|_p^p = \int_0^1 |D(x; t)|^p dx + \int_1^\infty |D(x; t)|^p dx \leq t^p + \|h\|_p^p < \infty.$$

4) Следующие два утверждения теоремы доказаны в [11]. Второе из них есть очевидное следствие теоремы 2, так как для двоично-рационального t величина $D(x; t)$ финитна. Приведем более короткое доказательство первого утверждения.

Если t двоично-иррациональное, то в двоичной записи числа $\{t\} = \sum_{k=1}^\infty t_k/2^k$ перенумеруем все переходы от нуля к единице: $t_{r_k} = 0, t_{r_k+1} = 1, r_1 < r_2 < \dots < r_k < \dots$. Их бесконечно много.

По лемме 5 имеем $|D(x, t)| = \langle t \rangle_{-r_k} = [t]_{-r_k-1} > 2^{-r_k-1}$ при $x \in [2^{r_k-1}, 2^{r_k})$. Тогда

$$\int_0^\infty |D(x; t)| dx > \sum_{k=1}^\infty \int_{2^{r_k-1}}^{2^{r_k}} |D(x; t)| dx > \sum_{k=1}^\infty 2^{-r_k-1} \cdot 2^{r_k-1} = \infty.$$

5) Пусть t двоично-рациональное. Будем обозначать $t = [t] + \{t\} = n + z$. В леммы 8 доказано, что $L_t = L_{2t}$.

В представлении $L_{n+z} = \|D(\cdot; n+z)\|_{L[0,1)} + \|D(\cdot; n+z)\|_{L[1,\infty)}$ для первого слагаемого применим лемму 6.

Так как в целочисленный момент времени $t = n$ динамическая система на $[1, \infty)$ находится в начальном положении $e(x)$, то $\|D(\cdot; n+z)\|_{L[1,\infty)} = \|D(\cdot; z)\|_{L[1,\infty)}$. Так как в момент времени $t = z$ динамическая система на $[0, 1)$ еще ни разу не достигла верхней границы $h(x)$, то $\|D(\cdot; z)\|_{L[1,\infty)} = L_z - \|D(\cdot; z)\|_{L[0,1)} = L_z - z$. Итак, $L_{n+z} = (1-z)L_n + zL_{n+1} + L_z - z$.

По формуле (5) и аналогично доказательству леммы 5 ($z \in (0, 1)$)

$$\begin{aligned} \int_1^\infty |D(x; z)| dx &= \sum_{m=0}^\infty \sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1} \int_n^{n+1} \left| \int_0^z w_n(u) du \right| dx \\ &= \sum_{m=0}^\infty \sum_{k=0}^{2^m-1} \left| \int_{\nu 2^{-m}}^z w_{2^m}(u) du \cdot w_k\left(\frac{\nu}{2^m}\right) \right| = \sum_{m=0}^\infty 2^m \langle z \rangle_{-m-1}. \end{aligned}$$

Пусть $R_k(x)$ – традиционные [1] функции Радемахера, т.е. $R_k(x)$ – периодические с периодом 1 продолженная функция $r_k(x)$. Обозначим $f_k(t) = \int_0^t R_k(x) dx$.

Тогда $f_0(t) = \varphi(t)$. Заметим, что $2f_k(t) = f_{k-1}(2t)$, так как $R_k(x) = R_{k-1}(2x)$ и $2f_k(t) = 2 \int_0^t R_{k-1}(2x) dx$. Учитывая, что $\int_0^{2^{-m}} R_m(u) du = 0$, получаем

$$L_z = z + \sum_{m=0}^{\infty} 2^m \langle z \rangle_{m-1} = z + \sum_{m=0}^{\infty} 2^m f_m(z) = z + \sum_{m=0}^{\infty} \varphi(2^m z).$$

Перейдем к доказательству шп. 6), 7) теоремы.

По обобщенной лемме Пэли (лемма 3) получаем базу индукции

$$D_{2^m}^p = 2^{m(1-p)}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Индукция по длине двоичной записи числа t . Основное индуктивное предположение состоит в том, что $D_z^p \vee z^{p-1}$, где знак сравнения $\vee$ понимаем как знак $\leq$ при $p > 2$ и как знак $\geq$ при $1 < p < 2$, z двоично-рациональное. Противоположные неравенства с добавлением констант в качестве множителей доказываются аналогично, поэтому приводить их не будем.

Пусть t двоично-рациональное. Если $t = 2^m + z$, $z \in (0, 2^m)$, $m \in \mathbb{Z}$, то

$$\|D(\cdot; t)\|_p^p = 2^{m(p-1)} \left(\frac{(1+x)^p + (1-x)^p}{2} - x^p \right) + D_z^p, \quad (10)$$

где $0 < x = z/2^m < 1$.

Доказательство (10) такое же, как и в лемме 2:

$$\begin{aligned} D_t^p &= \int_0^{2^{-m-1}} |D(x; t)|^p dx + \int_{2^{-m-1}}^{2^{-m}} |D(x; t)|^p dx + \int_{2^{-m}}^{\infty} |D(x; z)|^p dx \\ &= \frac{(2^m + z)^p}{2^{m+1}} + \frac{(2^m - z)^p}{2^{m+1}} + \int_0^{\infty} |D(x; z)|^p dx - z^p 2^{-m}. \end{aligned}$$

Тогда

$$D_t^p = 2^{m(p-1)} \left(\frac{(1+x)^p + (1-x)^p}{2} - x^p \right) + D_z^p.$$

По индуктивному предположению получим, что $D_t^p \vee 2^{m(p-1)}(f(x) + x^{p-1})$. По свойствам вспомогательных функций $D_t^p \vee 2^{m(p-1)}(1+x)^{p-1} = t^{p-1}$, где знак $\vee$ (в отличие от предыдущих предложений) понимается как неравенство строгое.

Покажем, что монотонность D_t^p при фиксированном $p > 2$ по двоично-рациональной сети вытекает из леммы 8. Число z назовем двоично-рациональным порядка s , если $z2^{s-1}$ дробное, а $z2^s$ целое.

Тогда $D_z^p = 2^{s(p-1)} D_{2^s z}^p < 2^{s(p-1)} D_{2^s z+1}^p = D_{z+2^{-s}}^p$.

Пусть t двоично-иррациональное. Будем обозначать $t = [t] + \{t\} = n + z$.

Пусть n четное вида (2). Тогда

$$\begin{aligned} D_{n+1}^p &= 1 + \frac{(2^{\varepsilon_1} + 1)^p + (2^{\varepsilon_1} - 1)^p}{2^{\varepsilon_1+1}} - \frac{1^p}{2^{\varepsilon_1}} \\ &+ \frac{(2^{\varepsilon_2} + (2^{\varepsilon_1} + 1))^p + (2^{\varepsilon_2} - (2^{\varepsilon_1} + 1))^p}{2^{\varepsilon_2+1}} - \frac{(2^{\varepsilon_1} + 1)^p}{2^{\varepsilon_2}} + \dots \\ &+ \frac{(2^{\varepsilon_\nu} + (2^{\varepsilon_{\nu-1}} + \dots + 2^{\varepsilon_1} + 1))^p + (2^{\varepsilon_\nu} - (2^{\varepsilon_{\nu-1}} + \dots + 2^{\varepsilon_1} + 1))^p}{2^{\varepsilon_\nu+1}} \\ &- \frac{(2^{\varepsilon_{\nu-1}} + \dots + 2^{\varepsilon_1} + 1)^p}{2^{\varepsilon_\nu}}. \end{aligned}$$

Перепишем с использованием функции $f(x) = ((1+x)^p + (1-x)^p)/2 - x^p$:

$$D_{n+1}^p = 1 + 2^{\varepsilon_1(p-1)} f(x_1) + 2^{\varepsilon_2(p-1)} f(x_2) + \dots + 2^{\varepsilon_\nu(p-1)} f(x_\nu), \quad (11)$$

где $x_i = (2^{\varepsilon_{i-1}} + \dots + 2^{\varepsilon_1} + 1)/2^{\varepsilon_i}$.

Аналогично можно представить $\tilde{D}_{n+z}^p = \|D(\cdot; n+z)\|_{L^p[0,1]}^p$ при $z \in (0, 1)$:

$$\tilde{D}_{n+z}^p = z^p + 2^{\varepsilon_1(p-1)} f(x'_1) + 2^{\varepsilon_2(p-1)} f(x'_2) + \dots + 2^{\varepsilon_\nu(p-1)} f(x'_\nu), \quad (12)$$

где $x'_i = (2^{\varepsilon_{i-1}} + \dots + 2^{\varepsilon_1} + z)/2^{\varepsilon_i}$.

Можно указать аналогичные, но более громоздкие представления для случая нечетных n . Приводить их не будем, так как для нашего доказательства соответствующим выбором числа s можно ограничиться только случаем четного n .

Заметим, что

$$\int_1^\infty h^p(x) dx = 2^{-p} \cdot 2^0 + 2^{-2p} \cdot 2^1 + 2^{-3p} \cdot 2^2 + \dots = \frac{1}{2^p - 2}$$

и соответственно

$$\int_{2^s}^\infty h^p(x) dx = 2^{s(1-p)} \cdot \frac{1}{2^p - 2}.$$

Метод доказательства от противного.

Рассмотрим случай $p > 2$.

Предположим, что $D_t^p > t^{p-1}$ для некоторого двоично-иррационального t . Обозначим $a = D_t^p$. Выберем такое s , что для ближайшего сверху двоично-рационального порядка s числа u выполнено

$$t^{p-1} < u^{p-1} < u^{p-1} + \frac{1}{2} 2^{s(1-p)} < a.$$

Выполнения последнего неравенства добиваемся увеличением s . Увеличением s добиваемся также того, чтобы u было порядка s , т.е. $2^s u$ нечетное целое. Это возможно, так как в двоичной записи числа t бесконечно много нулей.

Тогда по лемме 8 имеем

$$D_t^p = 2^{s(1-p)} D_{2^s t}^p < 2^{s(1-p)} \tilde{D}_{2^s t}^p + \int_{2^s}^\infty h^p(x) dx.$$

Так как при $p > 2$ функция $f(x)$ возрастает, то из сравнения (11) и (12) получаем

$$D_t^p < 2^{s(1-p)} D_{[2^s t]+1}^p + \frac{2^{s(1-p)}}{2^p - 2} < D_u^p + \frac{1}{2} \cdot 2^{s(1-p)} < a.$$

Противоречие с предположением, что $D_t^p = a > t^{p-1}$.

Рассмотрим случай $1 < p < 2$. Пусть $D_t^p = a < t^{p-1}$. Выберем такое s , что для ближайшего сверху двоично-рационального порядка s числа u выполнено

$$a < u^{p-1} - 2^{s(1-p)}, \quad t^{p-1} < u^{p-1}.$$

Тогда по той же схеме согласно убыванию функции $f(x)$ имеем

$$D_t^p = 2^{s(1-p)} D_{2^s t}^p > 2^{s(1-p)} \tilde{D}_{2^s t}^p > 2^{s(1-p)} (D_{[2^s t]+1}^p - (1 - z^p)) > D_u^p - 2^{s(1-p)} > a.$$

Противоречие.

Противоположные оценки: $D_t^p < At^{p-1}$ при $1 < p < 2$ и $D_t^p > \frac{1}{2}t^{p-1}$ при $p > 2$, считаем доказанными для двоично-рациональной сети. Они более грубые, чем исходные оценки. Аналогичными приемами и они распространяются на двоично-иррациональные t .

Ранее показали, что величины D_t^p для двоично-иррациональных t с любой заданной точностью приближаются аналогичными величинами по двоично-рациональной сети, для которых есть монотонность при $p > 2$. Отсюда следует утверждение о монотонности D_t^p .

ЗАМЕЧАНИЕ. Для тригонометрического ядра Дирихле при $p \in (1, \infty)$ аналогичную оценку сверху

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right|^p dx \leq C_p n^{p-1}$$

получил П. Л. Улянов [12; § 4, теорема 5].

Асимптотические оценки для L^p -норм производных от тригонометрического ядра Дирихле установлены Б. И. Голубовым [13].

§ 5. Константы Лебега для системы Уолша

ЛЕММА 9 (симметрии, см. [4]). *Константы Лебега в симметричных точках внутри пачки совпадают: $L_{2^m+k} = L_{2^{m+1}-k}$, где $0 \leq k < 2^m$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассматривая динамическую систему в теореме 2 как движение по времени k вперед от $|D_{2^m}|$ и соответственно назад от $|D_{2^{m+1}}|$, получим, что $|D_{2^m+k}(x)| = |D_{2^{m+1}-k}(x)|$ при $x \in [2^{-m}, 1)$. На оставшихся интервалах интегралы равны:

$$\begin{aligned} \int_0^{2^{-m}} |D_{2^m+k}(x)| dx &= \frac{(2^m + k) + (2^m - k)}{2^{m+1}} = 1, \\ \int_0^{2^{-m}} |D_{2^{m+1}-k}(x)| dx &= \frac{(2^m + (2^m - k)) + (2^m - (2^m - k))}{2^{m+1}} = 1. \end{aligned}$$

Формулы Файна (7) $L_{2n} = L_n$ и $L_{2n+1} = (L_{n+1} + L_n + 1)/2$ есть рекуррентные формулы для вычисления констант Лебега по пачкам. По моему мнению, вторая формула в [6] не доказана. Файн приводит соотношение $L_{2n+1} = L_n + 1 - (2^{-\varepsilon_1} + 2^{-\varepsilon_2} + \dots + 2^{-\varepsilon_\nu})/2 = L_n + 1 - g(n)/2$, замечает, что $g(2n) = g(n)/2$, $g(2n+1) = 1 + g(2n)$, и утверждает, что отсюда легко получить данную формулу. Это действительно так для четных n . Для нечетных n доказательство можно дополнить ссылкой на лемму симметрии, где $n = 2^m + k$ и $0 \leq k < 2^m$:

$$\begin{aligned} L_{2n+1} &= L_{2^{m+1}+2k+1} = L_{2^{m+2}-(2k+1)} = L_{2(2^{m+1}-(k+1))+1} \\ &= \frac{1}{2}(L_{2^{m+1}-(k+1)+1} + L_{2^{m+1}-(k+1)} + 1) = \frac{1}{2}(L_{2^m+k} + L_{2^m+k+1} + 1). \end{aligned}$$

Пачкой, которую обозначим $]m[$, назовем все целые числа от 2^m до $2^{m+1} - 1$. Обозначим через $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$ разность вперед, $A_m = \max_{n \in]m[} L_n$ — максимальное значение константы Лебега в пачке, t_m — точка максимума в пачке: $L_{t_m} = A_m$.

Используя только формулы (7) и соотношение $L_1 = 1$, можно получить следующие утверждения.

1. $\Delta L_{2n} = \frac{1}{2}(1 + \Delta L_n)$, $\Delta L_{2n+1} = \frac{1}{2}(\Delta L_n - 1)$.
2. $\max(|\Delta L_{2n}|, |\Delta L_{2n+1}|) = \frac{1}{2}(1 + |\Delta L_n|)$.
3. $0 < |\Delta L_n| < 1$ при $n \geq 2$. Последовательность ΔL_n , начиная с 2, знакопередающаяся. А именно $\Delta L_{2n} > 0$, $\Delta L_{2n+1} < 0$.
4. При $m \geq 2$ в m -й пачке существуют ровно две точки максимума t_m , связанные разностным уравнением $t_{m+2} = t_{m+1} + 2t_m$ с начальным условием $t_0 = 1$, $t_1 = 3$ для вычисления левой точки максимума t'_m и тем же уравнением с начальным условием $t_0 = 2$, $t_1 = 3$ для вычисления правой точки максимума t''_m ; причем t'_m и $2t'_{m-1}$ (аналогично t''_m и $2t''_{m-1}$) — соседние точки, т.е. они различаются на 1.
5. $t'_m = \frac{1}{3}(2^{m+2} + (-1)^{m+1})$, $t''_m = \frac{1}{3}(5 \cdot 2^m + (-1)^m)$.
6. $t''_m = t'_{m-1} + 2^m$, $t'_m = t''_{m-1} + 2^{m-1}$ и $t'_m = t'_{m-2} + 2^m$.
7. $A_{m+1} > A_m$ и они удовлетворяют разностному уравнению $2A_{m+2} - A_{m+1} - A_m = 1$ с начальным условием $A_0 = 1$, $A_1 = \frac{3}{2}$, решение которого $A_m = \frac{1}{9}(3m + 10 + (-1)^{m+1}2^{-m})$.
8. $t'_{2m+1} = 2t'_{2m} + 1$, $t'_{2m} = 2t'_{2m-1} - 1$, $t'_{2m} = 4t'_{2m-2} + 1$, $t'_{2m+1} \pmod{8} = 3$, $t'_{2m} \pmod{4} = 1$.

Сформулированные утверждения несложно доказываются именно в указанном порядке. Последний пункт приведен потому, что эти соотношения применяются при доказательстве теоремы Файна. Остановимся на доказательстве п. 4, который считаем наиболее сложным.

Для построения базы индукции отметим, что в первой пачке всего одна внутренняя точка, которая и является точкой максимума: $t_1 = 3$. Во второй пачке две точки максимума: $t'_2 = 5$, $t''_2 = 7$. В точках с четными номерами наследуются предыдущие константы Лебега.

Так как $\Delta L_{2n} > 0$, то $A_{m+1} > A_m$ и t_m — нечетное число. Заметим, что $A_{m+2} \leq (A_{m+1} + A_m - 1)/2$, так как n и $n+1$ разной четности. Чтобы показать, что верным здесь является только знак равенства, нужно доказать, что числа t_{m+1} и $2t_m$ различаются на 1. В этом случае одно из них n , а другое $n+1$ во второй

формуле Файна. Следовательно, $t_{m+2} = t_{m+1} + 2t_m$, а числа t_{m+2} и $2t_{m+1}$ снова различаются на 1. Индукционный переход доказан.

Дальнейшие формулы получаются стандартным методом решения разностных уравнений. Например для уравнения $t_{m+2} = t_{m+1} + 2t_m$ характеристическое уравнение имеет корни 2 и -1 . Константы для общего решения $t_m = C_1(2^m) + C_2(-1)^m$ найдем из начальных условий.

В [6] формулы для t'_m и A_m использованы при доказательстве теоремы Радемахера (формула (9)), которая была получена, но не опубликована Радемахером в 1921 году. Файн предлагает [6] более короткое доказательство теоремы Радемахера: $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} e_k = 0$, где $e(k) = L_k - \frac{4}{9} - \frac{1}{3} \log_2 3k$, в котором им неправильно построена база индукции. В [6] утверждается, что $e(k) < 0$ при всех k от 2 до 8. Однако $e(5) = 0.0032587 \dots > 0$.

Файн [6] заметил, что $e(2k) = e(k) - \frac{1}{3}$, $e(2k+1) < \frac{1}{2}(e(k+1) + e(k)) + \frac{1}{6}$. Отсюда вытекает, что

$$e(4k+1) < \frac{1}{2}(e(2k+1) + e(k)), \quad e(4k-1) < \frac{1}{2}(e(2k-1) + e(k)) \quad (13)$$

(Файн рассматривал $e(4k+3)$). Следовательно, если для всех k из двух пачек подряд $e(k) < 0$, то и в следующей пачке $e(k) < 0$. При неправильно построенной базе индукции приведенное Файном доказательство приводит к соотношению $\limsup e(k) < 0$, что противоречит сформулированному им же утверждению о том, что $\limsup e(k) \geq 0$. Формула (9) вытекает из следующей леммы 10, при развернутой формулировке которой в [4] допущена опечатка: $4/3$ вместо $4/9$.

ЛЕММА 10. Если $k \neq t'_{2m}$ и $k \geq 2$, то $e(k) < 0$; $0 < e(t'_{2m}) < 0.01/4^m$ при $m > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственным вычислением проверяется, что

$$0 < e(t'_{2m}) < \frac{0.01}{4^m}$$

и $e(t'_{2m+1}) < 0$.

Используя разложение по формуле Тейлора, получим

$$e(t_{2m}) = A_{2m} - \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{3} \log_2(3t_{2m}) \right) = \left(\frac{1}{12 \ln 2} - \frac{1}{9} \right) q - \frac{q}{3 \ln 2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{q^{k-1}}{k}$$

для $q = 4^{-m}$. Отсюда вытекает, что $0 < e(t'_{2m}) < 0.01/4^m$, так как $1/(12 \ln 2) - 1/9 = 0.00911 \dots$, левое неравенство верно при $m = 1$ ($t_2 = 5$), а величина последнего ряда убывает при $q \rightarrow 0$. Дополнительно вычислили $0 < e(1) = 0.0272347 \dots$.

Аналогично,

$$e(t_{2m+1}) = \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{12 \ln 2} \right) 2^{-2m-1} - \frac{1}{3 \ln 2} \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k (k 2^{k(2m+1)})^{-1},$$

$e(t_{2m+1}) < 0$.

Для построения базы индукции вычисляем $e(k)$ для первых двух пачек, т.е. при k от 2 до 8.

Переходим к шагу индукции. Пусть утверждение леммы 10 верно для всех пачек до $2m$ -й включительно. Докажем его справедливость для двух следующих пачек.

Для всех точек $(2^m + 1)$ -й пачки, за исключением точек $2t'_{2m} - 1$ и $2t'_{2m} + 1$, подходит метод Файна.

Вторая точка есть точка максимума $2t'_{2m} + 1 = t'_{2m+1}$.

Проверим условие для первой точки. Согласно п. 8 $2t'_{2m} - 1 = t'_{2m+1} - 2 = 4k + 1, 2k + 1 = t'_{2m}, k = 2t'_{2m-2}$, где k четное. Тогда по методу Файна (13) получим (штрих опускаем)

$$e(t_{2m+1} - 2) < \frac{1}{2}(e(t_{2m}) + e(2t_{2m-2})) = \frac{1}{2}\left(e(t_{2m}) + e(t_{2m-2}) - \frac{1}{3}\right) < 0, \quad (14)$$

так как $0.01/4^m + 0.01/4^{m-1} < 1/3$.

В $(2m + 2)$ -й пачке от $e(t'_{2m})$ согласно (13) зависят только $e(k)$ с номерами от $4t'_{2m} - 1$ до $4t'_{2m} + 1$. Очевидно, что $e(4t'_{2m}) < 0$. Для номера $4t'_{2m} + 1 = t'_{2m+2}$, как отмечалось, проверяем непосредственно.

По формулам (13), (14) (штрих опускаем)

$$\begin{aligned} e(4t_{2m} - 1) &< \frac{1}{2}(e(2t_{2m} - 1) + e(t_{2m})) < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(e(t_{2m}) + e(t_{2m-2})) - \frac{1}{6} + e(t_{2m})\right) \\ &< \frac{0.03}{4 \cdot 4^m} + \frac{0.01}{4^m} - \frac{1}{12} < 0. \end{aligned}$$

Лемма 10 доказана.

Так как $t'_m = 2^m + t'_{m-2}$ и $t'_m + t'_{m-1} = 2^{m-1}$, то для системы Уолша–Пэли соотношение (9) примет вид

$$|D_{t'_m}(x)| = \begin{cases} t'_m, & \text{если } x \in [0, 2^{-m-1}), \\ t'_{m-1}, & \text{если } x \in [2^{-m-1}, 2^{-m}), \\ |D_{t'_{m-2}}(x)|, & \text{если } x \in [2^{-m}, 1). \end{cases}$$

Аналогично,

$$|D_{t'_{m-2}}(x)| = \begin{cases} t'_{m-2}, & \text{если } x \in [0, 2^{-m+1}), \\ t'_{m-3}, & \text{если } x \in [2^{-m+1}, 2^{-m+2}), \\ |D_{t'_{m-4}}(x)|, & \text{если } x \in [2^{-m+2}, 1). \end{cases}$$

И так далее. Следовательно, $|D_{t'_m}(x)| = t'_m$ при $x \in [0, 2^{-m-1})$ и $|D_{t'_m}(x)| = t'_k$ при $x \in [2^{-k-2}, 2^{-k-1})$, где $-1 \leq k \leq m-1$. Полагаем $t'_{-1} = 1$, что соответствует разностному уравнению.

Отсюда получаем, что

$$A_m = \frac{t'_m}{2^{m+1}} + \sum_{k=-1}^{m-1} \frac{t'_k}{2^{k+2}} = 1 + \sum_{k=1}^m \frac{t'_{k-2}}{2^k}$$

и, следовательно, $A_m - A_{m-1} = t'_{m-2}/2^m$ – прирост максимальных значений констант Лебега в пачке.

Полагая, что и для p -норм ядер Дирихле точки t'_m обладают аналогичным экстремальным свойством, выдвинем гипотезу:

если $1 < p < 2$, то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (D_n^p - A(p)n^{p-1}) = \lim_{m \rightarrow \infty} (D_{t'_m}^p - A(p)(t'_m)^{p-1}) = 0,$$

где $A(p)$ – точная константа в неравенстве $g(x) < f(x) \leq A(p)g(x)$;

если $p > 2$, то

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (D_n^p - a(p)n^{p-1}) = \lim_{m \rightarrow \infty} (D_{t'_m}^p - a(p)(t'_m)^{p-1}) = 0,$$

где $a(p)$ – точная константа в неравенстве $a(p)g(x) \leq f(x) < g(x)$.

Вычисления с применением компьютера подтверждают данную гипотезу.

Грубая прикидка позволяет получить, что $a(p) \approx \frac{1}{3}(2^{1-p}+2)$, $A(p) \approx \frac{1}{3}(2^{1-p}+2)$. Для $p = 4$ эта величина 0.708(3) близка к $a(4)$.

§ 6. О константах Лебега для перестановок

Пусть $W = \{w_n(x)\}_{n=0}^\infty$ есть множество всех функций Уолша. Пусть $\{v_n(x)\}_{n=0}^\infty$ – произвольная перестановка системы Уолша. Можно полагать, что $\{v_n(x)\}_{n=0}^\infty \subset W$, так как нас будет интересовать только конечная сумма $\widehat{D}_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} v_k(x)$ – ядро Дирихле перестановки.

Для экстремумов по всем перестановкам можно показать, что

$$L_n = \min \int_0^1 |\widehat{D}_n(x)| dx, \quad R_n = \max \int_0^1 |\widehat{D}_n(x)| dx,$$

где $R_n = \int_0^1 \left| \sum_{k=0}^{n-1} r_k(x) \right| dx$ – константы Лебега системы функций Радемахера.

Доказательство данного утверждения объемное и его можно провести с использованием понятия независимых функций для W как группы методами, затронутыми в [4].

Для функций Радемахера легко вычислить

$$\widehat{D}_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \Delta_1^0, \\ -1, & \text{если } x \in \Delta_1^1, \end{cases} \quad \widehat{D}_2(x) = \begin{cases} 2, & \text{если } x \in \Delta_2^0, \\ 0, & \text{если } x \in \Delta_2^1 \cup \Delta_2^2, \\ -2, & \text{если } x \in \Delta_2^3, \end{cases}$$

и так далее, где $\Delta_n^k = [k/2^n, (k+1)/2^n)$ – интервал n -го ранга. Предложим более компактную форму записи этих формул без уточнения расположения интервалов, но с указанием их количества

$$\begin{aligned} \widehat{D}_1(x) &\sim \{(1, C_1^0), (-1, C_1^1)\}, \\ \widehat{D}_2(x) &\sim \{(2, C_2^0), (0, C_2^1), (-2, C_2^2)\}, \\ &\dots\dots\dots \\ \widehat{D}_n(x) &\sim \{(n, C_n^0), (n-2, C_n^1), (n-4, C_n^2), \dots, (n-2i, C_n^i), \dots, (-n, C_n^n)\}. \end{aligned} \tag{15}$$

Общий элемент $(n - 2i, C_n^i)$ в формуле (15) означает, что $\widehat{D}_n(x)$ принимает значение $(n - 2i)$ ровно на C_n^i интервалах n -го ранга. Равенство $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$ означает, что все интервалы учтены. Доказательство этой формулы вытекает из соотношения $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$, лежащего в основе построения треугольника Паскаля. При добавлении к ядру Дирихле очередной функции Радемахера каждый интервал n -го ранга распадается на два равновеликих интервала, на одном из которых ядро Дирихле со следующим номером увеличивается на 1, а на другом — уменьшается на 1. А именно

$$\begin{aligned} \widehat{D}_{n+1}(x) \sim \{ & (n+1, C_n^0), (n-1, C_n^0 + C_n^1), (n-3, C_n^1 + C_n^2), \dots, \\ & (-n+1, C_n^{n-1} + C_n^n), (-n-1, C_n^n) \}. \end{aligned} \quad (16)$$

Эта формула доказывает индукционный переход.

Следовательно,

$$R_n = 2^{-n} \sum_{i=0}^n |n - 2i| C_n^i. \quad (17)$$

В частности, $R_1 = R_2 = 1$, $R_3 = R_4 = 3/2$, $R_5 = R_6 = 15/8$.

ЛЕММА 11. *Справедливо соотношение $R_{2k-1} = R_{2k}$.*

Доказательство вытекает из формул (16), (17) при $n = 2k - 1$ согласно симметрии.

ЛЕММА 12. *Справедливо соотношение $R_{2k+1} = R_{2k} + 2^{-2k} C_{2k}^k$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $n = 2k$, то в формуле (15) центральный элемент $(0, C_{2k}^k)$. То есть $[0, 1) = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, где $\widehat{D}_{2k}(x) = 0$ при $x \in E_2$ и $|\widehat{D}_{2k}(x)| \geq 2$ при $x \in E_1$, а $|E_2| = 2^{-2k} C_{2k}^k$. Тогда

$$\begin{aligned} R_{2k+1} &= \int_{E_1} |\widehat{D}_{2k+1}(x)| dx + \int_{E_2} |\widehat{D}_{2k+1}(x)| dx = \int_{E_1} |\widehat{D}_{2k}(x)| dx + |E_2| \\ &= R_{2k} + 2^{-2k} C_{2k}^k. \end{aligned}$$

Так как каждый из интервалов ранга $2k$, составляющих множество E_1 , распадается на два равных интервала, значение ядра Дирихле на одном из них увеличивается на 1, а на другом — уменьшается на 1.

ЛЕММА 13. *Константы Лебега системы Радемахера вычисляются по формулам Валлиса $R_{2k+2} = \frac{(2k+1)!!}{(2k)!!}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. База индукции установлена. Заметим, что

$$\frac{(2k+1)!!}{(2k)!!} = \frac{((2k+1)!!)((2k)!!)}{(2^k k!)^2} = \frac{(2k+1)!}{2^{2k} (k!)^2}.$$

Если предположим, что

$$R_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k-2)!!} = \frac{(2k-1)!}{(2^{k-1} (k-1)!)^2},$$

то

$$\begin{aligned} R_{2k+2} &= R_{2k+1} = R_{2k} + \frac{C_{2k}^k}{2^{2k}} = \frac{(2k-1)!}{2^{2k-2}((k-1)!)^2} + \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \\ &= \frac{(2k-1)!(4k^2+2k)}{2^{2k}(k!)^2} = \frac{(2k+1)!}{2^{2k}(k!)^2}. \end{aligned}$$

Асимптотика формулы Валлиса $\frac{(2k+1)!!}{(2k)!!} \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{k}$ вытекает из соотношения $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(m!)^2 2^{2m}}{(2m)! \sqrt{m}} = \sqrt{\pi}$, которое используют при выводе формулы Стирлинга.

Воспользуемся обозначениями

$$D_n^p = \int_0^1 |D_n(x)|^p dx, \quad \widehat{D}_n^p = \int_0^1 \left| \sum_{k=0}^{n-1} v_k(x) \right|^p dx,$$

где $\{v_k(x)\}$ – последовательность независимых функций Уолша (например, функций Радемахера). Ранее получили, что

$$1 \leq D_n^1 < \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \log_2 3n + o(n), \quad \widehat{D}_n^1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n} + o(n).$$

Очевидно, что $D_n^2 = n = \widehat{D}_n^2$.

Оценку $2(3 - \sqrt{7})n^3 < D_n^4 \leq n^3$ интересно сравнить с точным равенством $\widehat{D}_n^4 = n(3n-2)$, которое получается для последовательности независимых функций применением полиномиальной формулы. А именно

$$\widehat{D}_n^4 = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} w_k^4(x) + 6 \sum_{0 \leq k < j \leq n-1} w_k^2(x) w_j^2(x) \right) dx = (n + 6C_n^2) \int_0^1 w_0(x) dx,$$

так как остальные слагаемые в полиномиальной формуле содержат нечетные степени хотя бы одного из сомножителей $w_k(x)$.

Применением интерполяционных соотношений (или вычислением на компьютере) можно получить, что $D_n^p < \widehat{D}_n^p$ при $1 < p < 2$ и $D_n^p > \widehat{D}_n^p$ при $p > 2$.

При четном p последнее неравенство легко устанавливается непосредственно, так как $\widehat{D}_n^{2k}$ равно количеству слагаемых в полиномиальной формуле $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^{2k}$ с четными степенями при всех сомножителях. Например $\widehat{D}_n^6 = 15n^3 - 30n^2 + 16$. Величина $\widehat{D}_n^{2k}$ имеет порядок n^k .

§ 7. Знак ядра Дирихле для системы Уолша–Пэли

Текст статьи не полностью соответствовал бы названию, если бы не рассмотрели знак ядра Дирихле. Проанализируем знак ядра Дирихле для системы Уолша в нумерации Пэли.

Для номера n вида (2) из формулы (3) следует (опустили аргумент x), что

$$D_n = D_{2^{\varepsilon_\nu}} + w_{2^{\varepsilon_\nu}} (D_{2^{\varepsilon_{\nu-1}}} + w_{2^{\varepsilon_{\nu-1}}} (D_{2^{\varepsilon_{\nu-2}}} + w_{2^{\varepsilon_{\nu-2}}} (\dots + w_{2^{\varepsilon_2}} (D_{2^{\varepsilon_1}}) \dots))).$$

Отсюда по лемме Пэли получаем

$$\text{sign } D_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in [0, 2^{-\varepsilon_\nu}), \\ w_{2^{\varepsilon_\nu} + 2^{\varepsilon_\nu - 1} + \dots + 2^{\varepsilon_k}} & \text{при } x \in [2^{-\varepsilon_k}, 2^{-\varepsilon_{k-1}}), \quad k = 2, 3, \dots, \nu, \\ 0 & \text{при } x \in [2^{-\varepsilon_1}, 1). \end{cases}$$

В некоторых случаях более удобным является представление знака ядра Дирихле в виде линейной комбинации функций Уолша.

Для номеров 2^m по лемме Пэли имеем

$$\text{sign } D_{2^m}(x) = \sum_{r=0}^{2^m-1} \frac{1}{2^m} w_r(x).$$

ЛЕММА 14. Для каждого $n = 2^{m-1} + k$, где $0 < k < 2^{m-1}$, знак ядра Дирихле имеет вид

$$\text{sign } D_n(x) = \sum_{r=0}^{n-1} a_r w_r(x) - \sum_{r=n}^{2^m-1} a_r w_r(x),$$

где $0 < a_r < 1$, $a_r = 1/2^{m-1}$ при $0 \leq r < 2^{m-1}$, $a_r = l/2^{m-1}$ ($l = l(r)$ нечетное целое положительное) при $r \geq 2^{m-1}$, $\sum_{r=0}^{n-1} a_r - \sum_{r=n}^{2^m-1} a_r = 1$.

Сумма всех положительных коэффициентов приведенного разложения равна константе Лебега $L_n = \sum_{r=0}^{n-1} a_r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение $D_3(x) = \frac{1}{2}(w_0(x) + w_1(x) + w_2(x) - w_3(x))$ составляет базу индукции для доказательства первого утверждения леммы методом математической индукции по пачкам.

Лемму 7 можно переформулировать:

$$D_{2n}(x) = \begin{cases} 2D_n(2x) & \text{при } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ 0 & \text{при } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right). \end{cases} \quad (18)$$

Отсюда вытекает, что

$$\text{sign } D_{2n}(x) = \begin{cases} \text{sign } D_n(2x) & \text{при } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ 0 & \text{при } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right). \end{cases}$$

Следовательно, $\text{sign } D_{2n}$ получаем из $\text{sign } D_n$ применением преобразования сжатия в 2 раза по горизонтали: $w_i \rightarrow \frac{1}{2}(w_{2i} + w_{2i+1})$. Итак, для всех четных номеров очередной пачки лемма верна. Более того, для четных номеров получили $0 < a_r < \frac{1}{2}$.

Так как $D_{2n+1} \neq 0$ всюду на $[0, 1)$, то из (18) вытекает:

$$\begin{aligned} \text{sign } D_{4n+1}(x) &= \text{sign } D_{4n+2}(x) = \text{sign } D_{4n+3}(x) \text{ при } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ \text{sign } D_{4n+1}(x) &= w_{4n}(x) \text{ при } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right), \\ \text{sign } D_{4n+2}(x) &= 0 \text{ при } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right), \\ \text{sign } D_{4n+3}(x) &= w_{4n+2}(x) \text{ при } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\operatorname{sign} D_{4n+1}(x) &= \operatorname{sign} D_{4n+2}(x) + \frac{1}{2}(w_0(x) - w_1(x))w_{4n}(x), \\ \operatorname{sign} D_{4n+3}(x) &= \operatorname{sign} D_{4n+2}(x) + \frac{1}{2}(w_0(x) - w_1(x))w_{4n+2}(x).\end{aligned}$$

С помощью этих формул проверяется справедливость первого утверждения леммы для всех нечетных номеров очередной пачки.

Модуль ядра Дирихле можно выразить в виде линейной комбинации функций Уолша, применив формулу $|D_n(x)| = \operatorname{sign} D_n(x) \times D_n(x)$. Коэффициент перед функцией $w_0(x)$ в этом разложении равен $\sum_{r=0}^{n-1} a_r$, что после интегрирования дает второе утверждение леммы.

Существуют соотношения для вычисления коэффициентов $a_r = a_r(n)$ в зависимости от номера n . Приведем таблицу значений знаменателя и числителей коэффициентов линейной комбинации функции $\operatorname{sign} D_n(x)$ через функции Уолша с указанными номерами (для начальных номеров)

n		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	2	1	1	1	-1												
5	4	1	1	1	1	3	-1	-1	-1								
6	4	1	1	1	1	1	1	-1	-1								
7	4	1	1	1	1	1	1	1	-3								
9	8	1	1	1	1	1	1	1	1	7	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
10	8	1	1	1	1	1	1	1	1	3	3	-1	-1	-1	-1	-1	-1
11	8	1	1	1	1	1	1	1	1	3	3	3	-5	-1	-1	-1	-1
12	8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
13	8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	5	-3	-3	-3
14	8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-3	-3
15	8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-7

Из приведенной таблицы видно, что можно предложить вариант леммы симметрии и для знака ядра Дирихле.

Список литературы

1. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М.: Наука, 1987.
2. Голубов Б. И. О модифицированном сильном двоичном интеграле и производной // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 4. С. 37–60.
3. Беспалов М. С. Мультипликативные преобразования Фурье в L_p // Деп. в ВИНТИ. № 100-82. М.: МИЭТ, 1981.
4. Беспалов М. С. Перестановки системы Уолша, сохраняющие константы Лебега // Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 1. С. 36–48.
5. Шипп Ф. О некоторых перестановках рядов по системе Уолша // Матем. заметки. 1975. Т. 18. № 2. С. 193–201.

6. *Fine N. J.* On the Walsh functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1949. V. 65. № 3. P. 372–414.
7. *Schipp F., Wade W. R., Simon P., Pál J.* Walsh series. An introduction to diadic harmonic analysis. Budapest: Akadémiai Kiadó, 1990.
8. *Шнейдер А. А.* О рядах по функциям Вальша с монотонными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1948. Т. 12. № 2. С. 179–192.
9. *Балашов Л. А.* О рядах по системе Уолша с монотонными коэффициентами // Сиб. матем. журн. 1971. Т. 12. № 1. С. 25–39.
10. *Беспалов М. С.* О сходимости рядов по системам Крестенсона // Современные проблемы теории функций и их приложения. Тезисы докладов 9-й Саратовской зимней школы. Саратов: СГУ, 1997.
11. *Беспалов М. С.* Об операторах мультипликативных преобразований Фурье // Деп. в ВИНТИ. № 5826-83. М.: МИЭТ, 1983.
12. *Ульянов П. Л.* Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье // Матем. сб. 1967. Т. 72 (114). С. 193–225.
13. *Голубов Б. И.* Асимптотика L^p -норм продифференцированных сумм Фурье функций ограниченной вариации // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1973. Т. 37. № 2. С. 399–421.

Владимирский государственный университет
E-mail: bespalov@vpti.vladimir.ru

Поступила в редакцию
22.12.2003 и 25.02.2005