Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Зудилин, Формулы рамануджанова типа и меры иррациональности некоторых кратных числа π , *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 7, 51–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1376>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 06:21:13

УДК 511.36+517.5

В. В. Зудилин

Формулы рамануджанова типа и меры иррациональности некоторых кратных числа π

С помощью явной конструкции совместных приближений Паде для обобщенных гипергеометрических рядов и формул для чисел $\pi\sqrt{d}$, $d \in \{1, 2, 3, 10005\}$, в терминах этих рядов доказываются оценки меры иррациональности указанных кратных π . Обсуждаются также другие возможные приложения.

Библиография: 14 названий.

Введение

Важную роль в истории числа π – архимедовой постоянной – играют формулы, позволяющие вычислять это число с высокой степенью точности (в настоящее время речь идет о миллиардах цифр после запятой). К одному классу таких формул относятся представления, полученные Рамануджаном [1] в 1914 г., среди которых следует прежде всего отметить два примера:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1/4)_{\nu}(1/2)_{\nu}(3/4)_{\nu}}{\nu!^3} (21460\nu + 1123) \cdot \frac{(-1)^{\nu}}{882^{2\nu+1}} = \frac{4}{\pi}, \quad (1)$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1/4)_{\nu}(1/2)_{\nu}(3/4)_{\nu}}{\nu!^3} (26390\nu + 1103) \cdot \frac{1}{99^{4\nu+2}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}}; \quad (2)$$

как обычно, $(a)_{\nu} = \Gamma(a + \nu)/\Gamma(a) = a(a+1) \cdots (a + \nu - 1)$ при $\nu \geq 1$ и $(a)_0 = 1$ – символ Похгаммера (сдвинутый факториал); здесь и всюду в дальнейшем “пустые” произведения считаем равными 1. Строгие обоснования этих равенств были получены совсем недавно, и до сих пор новые формулы рамануджанова типа возникают в связи с модулярной параметризацией решений дифференциальных уравнений [2] и алгоритмами для гипергеометрических рядов [3]. В качестве примеров приведем еще две формулы, которые будут использованы в настоящей работе:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1/3)_{\nu}(1/2)_{\nu}(2/3)_{\nu}}{\nu!^3} (14151\nu + 827) \cdot \frac{(-1)^{\nu}}{500^{2\nu+1}} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}, \quad (3)$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1/6)_{\nu}(1/2)_{\nu}(5/6)_{\nu}}{\nu!^3} (545140134\nu + 13591409) \cdot \frac{(-1)^{\nu}}{53360^{3\nu+2}} = \frac{3}{2\pi\sqrt{10005}}; \quad (4)$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-01-00359).

формула (3) установлена в [2; формула (1.19)], а формула (4) – знаменитая формула Чудновских [4], с помощью которой на протяжении 1989–94 гг. они удерживали рекорд в вычислении числа π .

В левой части каждой из формул (1)–(4) написан обобщенный гипергеометрический ряд

$$\begin{aligned} f(z) &= {}_mF_{m-1} \left(\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_m \\ b_2, \dots, b_m \end{matrix} \middle| z \right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{\nu} (a_2)_{\nu} \dots (a_m)_{\nu}}{(b_2)_{\nu} \dots (b_m)_{\nu}} \frac{z^{\nu}}{\nu!} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \frac{a(0)a(1) \dots a(\nu-1)}{b(0)b(1) \dots b(\nu-1)}, \end{aligned}$$

где

$$a(x) = (x+a_1)(x+a_2) \dots (x+a_m), \quad b(x) = (x+b_1)(x+b_2) \dots (x+b_m), \quad b_1 = 1. \quad (5)$$

Хорошо известно, что функция $f(z)$ удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению порядка m , так что совокупность функций

$$f_i(z) = \left(z \frac{d}{dz} \right)^i f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu^i z^{\nu} \frac{a(0)a(1) \dots a(\nu-1)}{b(0)b(1) \dots b(\nu-1)}, \quad i = 0, 1, \dots, m-1,$$

доставляет решение некоторой системы m линейных дифференциальных уравнений первого порядка. В работе [5] была предъявлена явная конструкция совместных приближений Падэ для системы функций $1, f_0(z), f_1(z), \dots, f_{m-1}(z)$, а также указаны (без деталей) арифметические приложения для значений этих функций. Цель настоящей работы – получить оценки меры иррациональности чисел, стоящих в правых частях формул (1)–(4). Эти оценки формулируются в виде верхних границ для показателя иррациональности. Напомним, что *показателем иррациональности* вещественного иррационального числа α называется величина

$$\mu = \mu(\alpha) := \inf \left\{ c \in \mathbb{R} : \text{неравенство } \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq |q|^{-c} \text{ имеет} \right. \\ \left. \text{конечное число решений в } p, q \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Отметим также равенство $\mu(\alpha) = \mu(\alpha^{-1})$, непосредственно вытекающее из этого определения.

ТЕОРЕМА. *Имеют место следующие оценки для показателей иррациональности:*

$$\mu(\pi) \leq 57.53011083 \dots, \quad (6)$$

$$\mu(\pi\sqrt{2}) \leq 13.93477619 \dots, \quad (7)$$

$$\mu(\pi\sqrt{3}) \leq 44.12528464 \dots, \quad (8)$$

$$\mu(\pi\sqrt{10005}) \leq 10.02136339 \dots \quad (9)$$

По существу программа, которой мы придерживаемся далее, была анонсирована Чудновскими в [4], [6], где в качестве приложений приводились (без детальных доказательств) оценки меры иррациональности чисел $\pi\sqrt{2}$ и $\pi\sqrt{640320} = 8\pi\sqrt{10005}$, худшие, чем оценки (7) и (9). Мы упрощаем аналитическое и арифметическое изложения конструкции из [5], что дает возможность компактно доказать теорему, уточнив результаты из [4], [6].

Следует отметить, что для получения оценок меры иррациональности числа π и некоторых его кратных существуют и другие методы, дающие лучшие результаты. Так, наши оценки (6) и (8) хуже оценок

$$\mu(\pi) \leq 8.01604539\dots, \quad \mu(\pi\sqrt{3}) \leq 4.60157912\dots,$$

полученных Хатой в [7]. В общем случае для чисел вида $\pi\sqrt{d}$, где d – натуральное число, справедлива оценка

$$\mu(\pi\sqrt{d}) \leq 10.88248501\dots,$$

вытекающая из результата $\mu(\pi^2) \leq 5.44124250\dots$ Рина и Виолы [8]. Поэтому оценка (7) также не улучшает уже известную, и лишь оценка (9) в случае $d = 10005$ ее усиливает. Подчеркнем, однако, что в условиях постоянного появления новых формул рамануджанова типа методы настоящей работы могут найти дальнейшие теоретико-числовые приложения.

§ 1. Совместные приближения Паде

Параметрами следующей далее конструкции будут целые числа M и N , связанные условием

$$M < N \leq \left(1 + \frac{1}{m}\right)M - 1. \quad (10)$$

Определяя многочлен

$$\begin{aligned} Q(x) &= \sum_{\mu=0}^M (-1)^\mu \binom{M}{\mu} \frac{b(N-M)b(N-M+1)\cdots b(N-M+\mu-1)}{a(0)a(1)\cdots a(\mu-1)} x^\mu \\ &= {}_{m+1}F_m \left(\begin{matrix} -M, N-M+b_1, N-M+b_2, \dots, N-M+b_m \\ a_1, a_2, \dots, a_m \end{matrix} \middle| x \right), \end{aligned} \quad (11)$$

находим

$$\begin{aligned} Q(z^{-1})f_i(z) &= \sum_{l=0}^{\infty} z^{l-M} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu \geq M-l}}^M (-1)^\mu \binom{M}{\mu} (\mu+l-M)^i \\ &\quad \times \frac{b(N-M)\cdots b(N-M+\mu-1)}{a(0)\cdots a(\mu-1)} \frac{a(0)a(1)\cdots a(\mu+l-M-1)}{b(0)b(1)\cdots b(\mu+l-M-1)} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} c_{l,i} z^{l-M}, \quad i = 0, 1, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (12)$$

Для удобства запишем получающиеся формулы для коэффициентов $c_{l,i}$ в (12) отдельно на каждом из следующих промежутков:

а) при $0 \leq l < M$

$$c_{l,i} = \sum_{\mu=M-l}^M (-1)^\mu \binom{M}{\mu} (\mu + l - M)^i \times \frac{b(N-M)b(N-M+1) \cdots b(N-M+\mu-1)}{a(\mu+l-M) \cdots a(\mu-1) \cdot b(0) \cdots b(\mu+l-M-1)}; \quad (13)$$

б) при $M \leq l \leq N$

$$c_{l,i} = \frac{1}{b(0)b(1) \cdots b(N-M-1)} \sum_{\mu=0}^M (-1)^\mu \binom{M}{\mu} (\mu + l - M)^i \times a(\mu) \cdots a(\mu+l-M-1) \cdot b(\mu-M+l) \cdots b(\mu-M+N-1); \quad (14)$$

в) при $l > N$

$$c_{l,i} = \sum_{\mu=0}^M (-1)^\mu \binom{M}{\mu} (\mu + l - M)^i \times \frac{a(\mu) \cdots a(\mu+l-M-1)}{b(0) \cdots b(N-M-1) \cdot b(\mu-M+N) \cdots b(\mu-M+l-1)}. \quad (15)$$

Следующее утверждение доказывается в [5] чрезвычайно непросто. Идея элементарного доказательства заимствована нами из [9].

ЛЕММА 1. Для всех $i = 0, 1, \dots, t-1$ и целых l из промежутка $M \leq l \leq N$ выполнено $c_{l,i} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция

$$(\mu + l - M)^i \cdot a(\mu) \cdots a(\mu + l - M - 1) \cdot b(\mu - M + l) \cdots b(\mu - M + N - 1)$$

является многочленом от μ степени не выше

$$i + m(l - M) + m(N - l) \leq (m - 1) + m(N - M) \leq -1 + M$$

(в последней оценке мы воспользовались условием (10)). С другой стороны, для любого многочлена $P(x)$ степени меньше M выполнено

$$\sum_{\mu=0}^M (-1)^\mu \binom{M}{\mu} P(\mu) = 0,$$

поскольку любая производная многочлена

$$\sum_{\mu=0}^M (-1)^\mu \binom{M}{\mu} x^\mu = (1 - x)^M$$

порядка меньшего M обращается в точке $x = 1$ в нуль. С учетом формул (14) это дает требуемое утверждение.

Как следствие мы получаем, что система

$$R_i(z) = \sum_{l=N+1}^{\infty} c_{l,i} z^{l-M} = Q(z^{-1}) f_i(z) - P_i(z^{-1}), \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \quad (16)$$

$$P_i(x) = \sum_{l=0}^{M-1} c_{l,i} x^{M-l}, \quad i = 0, 1, \dots, m-1,$$

реализует совместные приближения (Паде в случае $N+1 = (1+1/m)M$) к совокупности функций $1, f_0(z), \dots, f_{m-1}(z)$. Поскольку приведенная конструкция зависит от натуральных параметров M, N , в ряде ситуаций будет важно указывать эту зависимость в явном виде: мы будем писать

$$Q(x; M, N) = Q(x),$$

$$P_i(x; M, N) = P_i(x), \quad R_i(z; M, N) = R_i(z), \quad i = 0, 1, \dots, m-1.$$

В дальнейшем нам понадобится следующая тривиальная оценка остатков приближений (16).

ЛЕММА 2. Пусть $N = (1+1/m)M - 1$, числа a_j, b_j в разложениях (5) положительны, причем $b_j \geq 1, j = 1, \dots, m$. Тогда при $|z| < 1/2^m$

$$\overline{\lim}_{M \rightarrow \infty} \frac{\log |R_i(z; M, N)|}{M} \leq \frac{\log |z|}{m} + (m+2) \log 2 \quad (17)$$

для каждого $i = 0, 1, \dots, m-1$.

В частности, при $|z| < 1/2^{m(m+2)}$

$$\overline{\lim}_{M \rightarrow \infty} \frac{\log |R_i(z; M, N)|}{M} < 0 \quad \text{для каждого } i = 0, 1, \dots, m-1. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим коэффициенты (15). Считая $a_j \leq A$ для некоторого целого $A \geq 1, j = 1, \dots, m$, при $l > N$ находим

$$|c_{l,i}| \leq \sum_{\mu=0}^M \binom{M}{\mu} l^i \cdot \frac{a(M)a(M+1) \cdots a(l-1)}{b(0)b(1) \cdots b(l-M-1)}$$

$$\leq 2^M l^{m-1} \cdot \left(\frac{(A+M)(A+M+1) \cdots (A+l-1)}{(l-M)!} \right)^m$$

$$= 2^M \binom{A+l-1}{l-M}^m l^{m-1} \leq 2^{M+m(A+l-1)} l^{m-1}, \quad i = 0, 1, \dots, m-1.$$

Поэтому при $|z| < 1/2^m$

$$|R_i(z)| \leq \sum_{l=N+1}^{\infty} |z|^{l-M} |c_{l,i}| \leq 2^{M+m(A-1)} |z|^{-M} \sum_{l=N+1}^{\infty} l^{m-1} (2^m |z|)^l$$

$$< 2^{M+m(A-1)} |z|^{-M} \cdot \frac{(N+m)^m (2^m |z|)^{N+1}}{(1-2^m |z|)^m}, \quad i = 0, 1, \dots, m-1,$$

откуда (ввиду $N = (1+1/m)M - 1$) и следует предельное соотношение (17).

ЗАМЕЧАНИЕ. Аргументы z у гипергеометрических рядов, стоящих в левых частях формул (1)–(4), удовлетворяют неравенству $|z| < 1/2^{m(m+2)}$ с $m = 3$.

§ 2. Арифметические аспекты

Наш дальнейший выбор будет связан с гипергеометрическими рядами в (1)–(4); поэтому будем считать

$$m = 3, \quad M = 3n, \quad N = 4n - 1,$$

где n – растущий натуральный параметр. Положим также

$$Q_n(x) = Q(x; M, N), \\ P_{i,n}(x) = P_i(x; M, N), \quad R_{i,n}(z) = R_i(z; M, N), \quad i = 0, 1, \dots, m-1.$$

Кроме того, многочлен $b(x)$ в (5) будет всегда равен $(x+1)^3$, в то время как для многочлена $a(x)$ будут рассматриваться следующие возможности:

- (I) $a(x) = (x+1/4)(x+1/2)(x+3/4)$;
- (II) $a(x) = (x+1/3)(x+1/2)(x+2/3)$;
- (III) $a(x) = (x+1/6)(x+1/2)(x+5/6)$.

Для каждого $n = 1, 2, \dots$ обозначим через D_n наименьший общий знаменатель коэффициентов многочлена $Q_n(x)$. При рассмотрении приведенных случаев будет также показано, что

$$D_n P_{i,n}(x) \in \mathbb{Z}[x], \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \quad n = 1, 2, \dots$$

(I) В этом случае подстановка в формулу (11) дает

$$Q_n(x) = \sum_{\mu=0}^M (-1)^\mu 4^{4\mu} x^\mu \frac{M! (N-M+\mu)!^3}{(M-\mu)! (N-M)!^3 (4\mu)!}$$

и согласно формуле (13) для коэффициентов многочленов $P_{i,n}(x)$ имеем

$$c_{l,i} = 4^{4(M-l)} \sum_{\mu=M-l}^M (-1)^\mu (\mu+l-M)^i \frac{(4(\mu+l-M))!}{(\mu+l-M)!^4} \cdot \frac{M! (N-M+\mu)!^3}{(M-\mu)! (N-M)!^3 (4\mu)!}.$$

Множители

$$(\mu+l-M)^i \frac{(4(\mu+l-M))!}{(\mu+l-M)!^4}$$

в последнем выражении являются целыми, так что элементы требуемой последовательности $D_n = D_n^{(1)}$ при каждом n являются наименьшими общими знаменателями чисел

$$\frac{M! (N-M+\mu)!^3}{(M-\mu)! (N-M)!^3 (4\mu)!} = \frac{(3n)! (n+\mu)!^3}{(3n-\mu)! n!^3 (4\mu)!} \cdot \left(\frac{n}{n+\mu} \right)^3, \quad \mu = 0, 1, \dots, 3n.$$

Определим целозначную функцию

$$\varphi(x, y) = \lfloor 3x - y \rfloor + 3\lfloor x \rfloor + \lfloor 4y \rfloor - \lfloor 3x \rfloor - 3\lfloor x + y \rfloor + 3\lambda(x+y) - 3\lambda(x), \quad (19)$$

где

$$\lambda(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{x\} = 0, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

а $\lfloor \cdot \rfloor$ и $\{ \cdot \}$ – соответственно целая и дробная части числа. Поскольку для любого простого числа p и любого целого положительного N

$$\text{ord}_p N! = \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{p^3} \right\rfloor + \dots, \quad \text{ord}_p N = \lambda\left(\frac{N}{p}\right) + \lambda\left(\frac{N}{p^2}\right) + \lambda\left(\frac{N}{p^3}\right) + \dots,$$

в соответствии с определением функции $\varphi(x, y)$ заключаем, что при каждом $\mu = 0, 1, \dots, 3n$ имеет место следующее равенство:

$$\prod_p p^{-\varphi(n/p, \mu/p) - \varphi(n/p^2, \mu/p^2) - \dots} = \frac{(3n)!(n+\mu)!^3}{(3n-\mu)!n!^3(4\mu)!} \cdot \left(\frac{n}{n+\mu}\right)^3. \quad (20)$$

Поэтому, определяя

$$\varphi_0(x) = \max_{0 \leq y \leq 3x} \varphi(x, y), \quad (21)$$

согласно (20) мы получаем требуемый знаменатель D_n в виде

$$D_n = \prod_p p^{\varphi_0(n/p) + \varphi_0(n/p^2) + \varphi_0(n/p^3) + \dots}.$$

Функция (19) является 1-периодической по каждому аргументу; следовательно, в соответствии с асимптотическим законом распределения простых чисел простые $p \leq \sqrt{3n}$ дают вклад порядка $O(e^{\text{const} \cdot \sqrt{n}})$ в асимптотику D_n при $n \rightarrow \infty$. Это, в частности, означает, что можно рассматривать другую последовательность

$$\tilde{D}_n = \prod_{p > \sqrt{3n}} p^{\varphi_0(n/p)},$$

причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log D_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tilde{D}_n}{n}.$$

Определим теперь еще одну вспомогательную функцию

$$\varphi_1(x) = \max_{y \in \mathbb{R}} \varphi(x, y) = \max_{0 \leq y < 1} \varphi(x, y),$$

которая, в отличие от функции (21), является 1-периодической, что позволяет явно ее вычислить:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 3, & \text{если } \{x\} \in [\frac{1}{4}], \\ 2, & \text{если } \{x\} \in [0, \frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}) \cup [\frac{1}{2}], \\ 1, & \text{если } \{x\} \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}) \cup [\frac{3}{4}], \\ 0, & \text{если } \{x\} \in [\frac{2}{3}, \frac{3}{4}) \cup (\frac{3}{4}, 1) \end{cases}$$

(через $[x]$ обозначено множество, состоящее из одного элемента x). В то же время, при $x \geq 1/3$ мы, очевидно, имеем $\varphi_0(x) = \varphi_1(x)$. Поэтому нам остается подсчитать функцию (21) на множестве $0 \leq x < 1/3$:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 3, & \text{если } x \in [\frac{1}{4}], \\ 2, & \text{если } x \in [\frac{1}{6}, \frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}), \\ 1, & \text{если } x \in [\frac{1}{12}, \frac{1}{6}), \\ 0, & \text{если } x \in [0, \frac{1}{12}). \end{cases}$$

Таким образом, для вычисления асимптотического поведения величины

$$\tilde{D}_n = \prod_{p > 3n} p^{\varphi_0(n/p)} \cdot \prod_{\sqrt{3n} < p \leq 3n} p^{\varphi_1(n/p)}$$

при $n \rightarrow \infty$ остается вновь воспользоваться асимптотическим законом распределения простых чисел:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tilde{D}_n}{n} &= \int_0^{1/3} \varphi_0(x) d\left(-\frac{1}{x}\right) + \int_0^{1/3} \varphi_1(x) d\left(\psi(x) + \frac{1}{x}\right) \\ &\quad + \int_{1/3}^1 \varphi_1(x) d\psi(x) \\ &= 18 + 2\gamma + \psi\left(\frac{1}{3}\right) + \psi\left(\frac{2}{3}\right) = 18 - 3 \log 3 = 14.70416313 \dots, \end{aligned}$$

где $\psi(\cdot)$ обозначает логарифмическую производную гамма-функции и $\gamma = -\psi(1)$ — постоянная Эйлера.

Подытоживая проделанную работу, сформулируем следующий окончательный результат.

ЛЕММА 3. *Асимптотическое поведение наименьших общих знаменателей $D_n = D_n^{(I)}$ многочленов $Q_n(x)$ и $P_{i,n}(x)$, $i = 0, 1, \dots, t$, в случае (I) определяется предельным соотношением*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log D_n^{(I)}}{n} = 18 - 3 \log 3 = 14.70416313 \dots$$

(II) Реализуя вычисления в соответствии с формулами (11) и (13), получаем, что в этом случае $D_n = D_n^{(II)}$ является наименьшим общим знаменателем чисел

$$\begin{aligned} \frac{M! (N - M + \mu)!^3 \mu!}{(M - \mu)! (N - M)!^3 (2\mu)! (3\mu)!} &= \frac{(3n)! (n + \mu)!^3 \mu!}{(3n - \mu)! n!^3 (2\mu)! (3\mu)!} \cdot \left(\frac{n}{n + \mu}\right)^3, \\ \mu &= 0, 1, \dots, 3n. \end{aligned}$$

Поэтому вспомогательная функция $\varphi(x, y)$ имеет вид

$$\varphi(x, y) = [3x - y] + 3[x] + [2y] + [3y] - [3x] - 3[x + y] - [y] + 3\lambda(x + y) - 3\lambda(x),$$

и вычисление соответствующих $\varphi_0(x)$ (при $0 \leq x < 1/3$) и $\varphi_1(x)$ дает следующий результат:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 3, & \text{если } x \in [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}), \\ 2, & \text{если } x \in [\frac{1}{6}, \frac{2}{9}), \\ 1, & \text{если } x \in [\frac{1}{9}, \frac{1}{6}), \\ 0, & \text{если } x \in [0, \frac{1}{9}), \end{cases}$$

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 3, & \text{если } \{x\} \in [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}), \\ 2, & \text{если } \{x\} \in [0, \frac{2}{9}) \cup [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}), \\ 1, & \text{если } \{x\} \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}), \\ 0, & \text{если } \{x\} \in [\frac{2}{3}, 1). \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \int_0^{1/3} \varphi_0(x) d\left(-\frac{1}{x}\right) + \int_0^{1/3} \varphi_1(x) d\left(\psi(x) + \frac{1}{x}\right) + \int_{1/3}^1 \varphi_1(x) d\psi(x) \\ &= 15 + 2\gamma - \psi\left(\frac{2}{9}\right) + 2\psi\left(\frac{1}{3}\right) + \psi\left(\frac{2}{3}\right) \\ &= 15 - \frac{9}{2} \log 3 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \gamma - \psi\left(\frac{2}{9}\right) = 13.33336442 \dots, \end{aligned}$$

и мы приходим к следующему утверждению.

ЛЕММА 4. Асимптотическое поведение знаменателей $D_n = D_n^{(\text{II})}$ определяется предельным соотношением

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log D_n^{(\text{II})}}{n} = 15 - \frac{9}{2} \log 3 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \gamma - \psi\left(\frac{2}{9}\right) = 13.33336442 \dots$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Известная формула Гаусса (см., например, [10; с. 19]) позволяет вычислить значения функции $\psi(x)$ в терминах элементарных функций. Однако подобные выражения достаточно громоздки, к примеру

$$\begin{aligned} -\psi\left(\frac{2}{9}\right) &= \gamma + \frac{5}{2} \log 3 + \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{9} + 2 \cos \frac{\pi}{9} \log\left(2 \sin \frac{2\pi}{9}\right) \\ &\quad - 2 \cos \frac{2\pi}{9} \log\left(2 \sin \frac{4\pi}{9}\right) - 2 \cos \frac{4\pi}{9} \log\left(2 \sin \frac{\pi}{9}\right). \end{aligned}$$

(III) Рассуждая как и в предыдущих случаях, заключаем, что для каждого n число $D_n = D_n^{(\text{III})}$ является наименьшим общим знаменателем чисел

$$\frac{M! (N - M + \mu)!^3 (3\mu)!}{(M - \mu)! (N - M)!^3 \mu! (6\mu)!} = \frac{(3n)! (n + \mu)!^3 (3\mu)!}{(3n - \mu)! n!^3 \mu! (6\mu)!} \cdot \left(\frac{n}{n + \mu}\right)^3,$$

$$\mu = 0, 1, \dots, 3n.$$

Поэтому

$$\varphi(x, y) = [3x - y] + 3[x] + [y] + [6y] - [3x] - 3[x + y] - [3y] + 3\lambda(x + y) - 3\lambda(x),$$

откуда

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \begin{cases} 2, & \text{если } x \in [\frac{1}{6}, \frac{1}{3}), \\ 1, & \text{если } x \in [\frac{1}{18}, \frac{1}{6}), \\ 0, & \text{если } x \in [0, \frac{1}{18}), \end{cases} \quad 0 \leq x < \frac{1}{3}, \\ \varphi_1(x) &= \begin{cases} 2, & \text{если } \{x\} \in [0, \frac{1}{3}) \cup [\frac{1}{2}], \\ 1, & \text{если } \{x\} \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}) \cup [\frac{13}{18}, \frac{5}{6}], \\ 0, & \text{если } \{x\} \in [\frac{2}{3}, \frac{13}{18}) \cup (\frac{5}{6}, 1), \end{cases} \end{aligned}$$

значит,

$$\begin{aligned} & \int_0^{1/3} \varphi_0(x) d\left(-\frac{1}{x}\right) + \int_0^{1/3} \varphi_1(x) d\left(\psi(x) + \frac{1}{x}\right) + \int_{1/3}^1 \varphi_1(x) d\psi(x) \\ &= 24 + 2\gamma + \psi\left(\frac{1}{3}\right) + \psi\left(\frac{2}{3}\right) + \psi\left(\frac{5}{6}\right) - \psi\left(\frac{13}{18}\right) \\ &= 24 - 3\log 3 + \psi\left(\frac{5}{6}\right) - \psi\left(\frac{13}{18}\right) = 20.97202138\dots, \end{aligned}$$

и мы получаем следующий результат.

ЛЕММА 5. *Асимптотическое поведение знаменателей $D_n = D_n^{(\text{III})}$ определяется предельным соотношением*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log D_n^{(\text{III})}}{n} = 24 - 3\log 3 + \psi\left(\frac{5}{6}\right) - \psi\left(\frac{13}{18}\right) = 20.97202138\dots$$

§ 3. Асимптотика приближений

Сразу отметим, что в оригинальной работе [5] предложены конструктивные методы вычисления асимптотического поведения многочленов $Q_n(z^{-1})$ и приближений $R_{i,n}(z)$ при $n \rightarrow \infty$. Однако, как собственно и получилось в [5], детальное обоснование эмпирических соображений остается за пределами любой статьи среднего объема, так что мы приводим далее иной способ решения указанной проблемы.

Согласно общей теории Уильфа–Цайльбергера все построенные нами объекты — многочлены $Q_n(x)$, $P_{i,n}(x)$ и линейные формы $R_{i,n}(z)$ — удовлетворяют разностным уравнениям относительно натурального параметра n . Наиболее “удобными” (по крайней мере, с алгоритмической точки зрения) являются многочлены $Q_n(x)$, поскольку они допускают простое представление (11) в виде гипергеометрического ряда. Следующее утверждение фактически является частным случаем теоремы 4.4.1 в [11]. Через $\mathcal{N}$ мы обозначаем оператор сдвига по переменной n .

ЛЕММА 6. *Существует разностный оператор*

$$\Delta = F_0(x, n) + F_1(x, n)\mathcal{N} + \cdots + F_s(x, n)\mathcal{N}^s \in \mathbb{Z}[x, n][\mathcal{N}]$$

такой, что

$$\begin{aligned} \Delta Q_n(x) &= F_0(x, n)Q_n(x) + F_1(x, n)Q_{n+1}(x) + \cdots + F_s(x, n)Q_{n+s}(x) = 0, \\ n &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

ЛЕММА 7. *Пусть $\Delta = \Delta(x, n, \mathcal{N})$ – разностный оператор из утверждения леммы 6. Тогда для всех натуральных $n \geq n_0$ и каждого $i = 0, 1, \dots, m-1$ выполнено*

$$\Delta(x, n, \mathcal{N})P_{i,n}(x) = 0, \quad \Delta(z^{-1}, n, \mathcal{N})R_{i,n}(z) = 0.$$

Иными словами, последовательности остатков приближений удовлетворяют тому же разностному уравнению, что и последовательность знаменателей $Q_n(x)$ приближений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого n положим

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{i,n}(x) &= \Delta(x, n, \mathcal{N})P_{i,n}(x) \\ &= \sum_{j=0}^s F_j(x, n)P_{i,n+j}(x) \in \mathbb{Q}[x], \quad i = 0, 1, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (22)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{i,n}(z^{-1}) &= \Delta(z^{-1}, n, \mathcal{N})P_{i,n}(z^{-1}) \\ &= \Delta(z^{-1}, n, \mathcal{N})(Q_n(z^{-1})f_i(z) - R_{i,n}(z)) = -\Delta(z^{-1}, n, \mathcal{N})R_{i,n}(z) \\ &= -\sum_{j=0}^s F_j(z^{-1}, n)R_{i,n+j}(z), \quad i = 0, 1, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (23)$$

Степени многочленов $F_j(x, n)$ по совокупности переменных ограничены некоторой абсолютной постоянной. Поэтому, применяя в области $|z| < 1/2^m = 1/2^3$ оценки для $R_{i,n+j}(z)$, $j = 0, 1, \dots, s$, вытекающие из предельного соотношения (17) леммы 2, заключаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $n_1 = n_1(\varepsilon)$ такое, что

$$\frac{\log |\tilde{P}_{i,n}(z^{-1})|}{n} < \log |z| + 3 \cdot 5 \log 2 + \varepsilon \quad (24)$$

при всех $n \geq n_1(\varepsilon)$. Выберем $\varepsilon = \log 2$ и проведем дальнейшую часть рассуждений для каждого $n \geq n_0 = n_1(\log 2)$ и $i = 0, 1, \dots, m-1$. Подставляя вместо $x = z^{-1}$ целые числа $q > 2^3$, согласно (24) (с $\varepsilon = \log 2$) находим, что

$$|\tilde{P}_{i,n}(q)| < 2^{16n} q^{-n}. \quad (25)$$

В то же время многочлен (22) имеет фиксированный знаменатель, при умножении на который числа в левой части (25) становятся целыми. Это означает, что $\tilde{P}_{i,n}(q) = 0$ для всех $q \geq q_0$. Таким образом, многочлен $\tilde{P}_{i,n}(x)$ принимает нулевые значения в бесконечном числе точек, откуда $\tilde{P}_{i,n}(x) \equiv 0$ для любого $n \geq n_0$ и $i = 0, 1, \dots, m-1$. С учетом определения (22) многочлена $\tilde{P}_{i,n}(x)$ и соотношений (23) мы получаем требуемое утверждение.

На самом деле, для вычисления разностного оператора из формулировки леммы 6 существует алгоритм Госпера–Цайльбергера созидательного телескопирования [11; гл. 6]. Применяя его, в случае (I) мы находим (в явном, но очень громоздком виде) разностный оператор $\Delta = \Delta^{(I)}(x, n, \mathcal{N})$ такой, что

$$\deg_x \Delta^{(I)} = 6, \quad \deg_n \Delta^{(I)} = 33, \quad \deg_{\mathcal{N}} \Delta^{(I)} = 4.$$

Наиболее ценная для вычисления асимптотики информация содержится в характеристическом многочлене этого разностного оператора:

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{N}) &= \chi^{(I)}(\mathcal{N}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta^{(I)}(x, n, \mathcal{N})}{n^{33}} \\ &= 2^{31} 3^3 (2048x - 243) (3^9 (524288x^2 - 248832x - 59049) (\mathcal{N}^4 + 1) \\ &\quad + 2^2 (524288x^2 - 248832x - 59049) \\ &\quad \times (4194304x^3 - 5308416x^2 + 1399680x - 19683) \mathcal{N}^3 \\ &\quad + 2 \cdot 3^4 (32768x^2 + 55296x + 729) (524288x^2 - 248832x - 59049) \mathcal{N}^2 \\ &\quad + 2^2 3^7 (64x - 9) (524288x^2 - 248832x - 59049) \mathcal{N}). \end{aligned} \quad (26)$$

В случае (II) соответствующий разностный оператор $\Delta = \Delta^{(II)}(x, n, \mathcal{N})$ таков, что

$$\deg_x \Delta^{(II)} = 6, \quad \deg_n \Delta^{(II)} = 41, \quad \deg_{\mathcal{N}} \Delta^{(II)} = 4;$$

при этом его характеристический многочлен отличается от $\chi^{(I)}(\mathcal{N})$ умножением на постоянный множитель:

$$\chi^{(II)}(\mathcal{N}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta^{(II)}(x, n, \mathcal{N})}{n^{41}} = \frac{3^{15}}{2^{18}} \chi(\mathcal{N})$$

(что, впрочем, неудивительно).

Наконец, в случае (III) для разностного оператора $\Delta = \Delta^{(III)}(x, n, \mathcal{N})$ получаем

$$\deg_x \Delta^{(III)} = 6, \quad \deg_n \Delta^{(III)} = 41, \quad \deg_{\mathcal{N}} \Delta^{(III)} = 4$$

и

$$\chi^{(III)}(\mathcal{N}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta^{(III)}(x, n, \mathcal{N})}{n^{41}} = \frac{3^{15}}{2^2} \chi(\mathcal{N}).$$

Таким образом, асимптотическое поведение построенных приближений (многочленов и линейных форм) при каждом фиксированном $z = 1/x$ из области $0 < |z| < 1$ полностью определяется нулями характеристического многочлена $\chi(\mathcal{N})$. Это факт следует из лемм 6, 7 и следующего обобщения теоремы Пуанкаре (см. [12; теорема 1]).

ЛЕММА 8. Пусть последовательность u_n , $n = n_0, n_0 + 1, \dots$, является нетривиальным решением невырожденного линейного разностного уравнения с характеристическим многочленом $\chi(\mathcal{N})$, $\chi(0) \neq 0$. Тогда верхний предел $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |u_n|^{1/n}$ существует и равен модулю $|\mathcal{N}_0|$ одного из нулей $\chi(\mathcal{N})$. Более того, если модули остальных нулей многочлена $\chi(N)$ отличны от $|\mathcal{N}_0|$, то верхний предел можно заменить на обычный.

§ 4. Меры иррациональности

Для получения оценок меры иррациональности нам понадобится следующее утверждение, доказанное в [13; предложение 3.3] (см. также [7; замечание 2.1] по поводу уточнения формулировки).

ЛЕММА 9. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ иррационально. Предположим, что последовательность линейных форм $q_n x - p_n$ с целыми коэффициентами из поля рациональных чисел или мнимого квадратичного поля удовлетворяет соотношениям

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |q_n|}{n} = C_1, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |q_n \alpha - p_n|}{n} \leq -C_0,$$

где C_0 и C_1 — некоторые положительные вещественные числа. Тогда $\mu(\alpha) \leq 1 + C_1/C_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Остановимся подробно на выводе оценки (6). Для этого в случае (I) определим при каждом $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} P_n(x) &= 21460P_{1,n}(x) + 1123P_{0,n}(x), \\ R_n(z) &= 21460R_{1,n}(z) + 1123R_{0,n}(z) \\ &= Q_n(z^{-1}) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1/4)_{\nu}(1/2)_{\nu}(3/4)_{\nu}}{\nu!^3} (21460\nu + 1123)z^{\nu} - P_n(z^{-1}) \end{aligned}$$

и рассмотрим соответствующие числовые формы, получающиеся при подстановке $z = -1/882^2$ и домножении на общий знаменатель $D_n = D_n^{(I)}$ коэффициентов многочленов $Q_n(x)$ и $P_n(x)$:

$$\begin{aligned} r_n &= D_n R_n(-882^{-2}) = D_n Q_n(-882^2) \cdot \frac{4 \cdot 882}{\pi} - D_n P_n(-882^2) \\ &= q_n \cdot \frac{1}{\pi} - p_n \in \mathbb{Z} \frac{1}{\pi} + \mathbb{Z}, \quad n = 1, 2, \dots; \end{aligned} \quad (27)$$

именно здесь мы применили (1). Последовательности $Q_n(-882^2)$ и $R_n(-1/882^2)$, начиная с некоторого номера n , удовлетворяют одному и тому же разностному уравнению с оператором $\Delta^{(I)}(-882^2, n, \mathcal{N})$. При этом первая последовательность нетривиальна, что также выполнено и для второй ввиду (27) и иррациональности числа $1/\pi$. Согласно лемме 8 асимптотическое поведение этих последовательностей определяется некоторыми нулями $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$ характеристического многочлена (26) при $x = -882^2$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |Q_n(-882^2)|}{n} = \log |\mathcal{N}_1|, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |R_n(-1/882^2)|}{n} \leq \log |\mathcal{N}_2|.$$

После сокращения на числовой множитель характеристический многочлен принимает вид

$$\mathcal{N}^4 - 401273814916233455620\mathcal{N}^3 + 163210109239302\mathcal{N}^2 - 22127620\mathcal{N} + 1$$

и для его нулей (два из которых вещественны, а два комплексно сопряжены) имеем

$$\begin{aligned}\log |\mathcal{N}_1| &= 47.44117569\dots, \\ \log |\mathcal{N}_2| &= \log |\mathcal{N}_2'| = -15.80349476\dots, \quad \log |\mathcal{N}_2''| = -15.83418617\dots\end{aligned}$$

При выборе нуля, мажорирующего асимптотику последовательности $R_n(-882^{-2})$, мы воспользовались тривиальной оценкой (18) леммы 2. Теперь для вычисления асимптотики линейных форм (27) с целыми коэффициентами остается воспользоваться леммой 3. В обозначениях леммы 9 имеем

$$\begin{aligned}C_0 &= -\log |\mathcal{N}_2| - (18 - 3\log 3) = 1.09933162\dots, \\ C_1 &= \log |\mathcal{N}_1| + (18 - 3\log 3) = 62.14533883\dots,\end{aligned}$$

откуда

$$\mu(\pi^{-1}) \leq 1 + \frac{C_1}{C_0} = 57.53011083\dots$$

С учетом равенства $\mu(\pi) = \mu(\pi^{-1})$ это дает нам требуемую оценку (6).

Для вывода оценки (7) мы пользуемся формулой (2). В этом случае асимптотика последовательности D_n при $n \rightarrow \infty$ также определяется леммой 3, а соответствующий характеристический многочлен (26) при $z = 1/99^4$ равен (с точностью до умножения на числовой множитель)

$$\begin{aligned}\mathcal{N}^4 &+ 755528641771136725636176380\mathcal{N}^3 \\ &+ 2488600714253930502\mathcal{N}^2 + 2732361980\mathcal{N} + 1.\end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned}C_0 &= 20.62568987\dots - 14.70416313\dots = 5.92152673\dots, \\ C_1 &= 61.88945992\dots + 14.70416313\dots = 76.59362305\dots\end{aligned}$$

и получаем оценку

$$\mu\left(\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\right) \leq 1 + \frac{C_1}{C_0} = 13.93477619\dots,$$

из которой собственно и следует (7).

Оценки (8) и (9) отвечают применению формул (3) (случай (II)) и (4) (случай (III)) соответственно. При $z = -1/500^2$ характеристический многочлен имеет вид

$$\begin{aligned}19683\mathcal{N}^4 &- 262145327105399680078732\mathcal{N}^3 \\ &+ 331773760512118098\mathcal{N}^2 - 139968078732\mathcal{N} + 19683,\end{aligned}$$

так что в случае (II)

$$\begin{aligned} C_0 &= 14.66365222 \dots - 13.33336442 \dots = 1.33028779 \dots, \\ C_1 &= 44.03567538 \dots + 13.33336442 \dots = 57.36903981 \dots, \end{aligned}$$

откуда с помощью леммы 9 мы получаем оценку (8). Наконец, при $z = -1/53360^3$ характеристический многочлен равен

$$\begin{aligned} &19683\mathcal{N}^4 - 58838593699430396423147427221766247926046392398732\mathcal{N}^3 \\ &+ 122534920953081108757902878834806098\mathcal{N}^2 \\ &- 85062121695608910732\mathcal{N} + 19683; \end{aligned}$$

поэтому в случае (III)

$$\begin{aligned} C_0 &= 34.90377291 \dots - 20.97202138 \dots = 13.93175152 \dots, \\ C_1 &= 104.71137186 \dots + 20.97202138 \dots = 125.68339324 \dots, \end{aligned}$$

и мы приходим к оценке (9). Теорема доказана полностью.

§ 5. Заключительные замечания

Конечно же, можно было рассмотреть и случай другого выбора параметров M и N . Однако мы обнаружили, что во всех рассмотренных случаях приведенный выбор параметров оптимален. Кроме того, вычисление асимптотики коэффициентов и приближающих форм в общем случае становится существенно сложнее не только с технической, но и с обосновательной точки зрения. Отметим также, что разностные уравнения для последовательностей многочленов $P_{i,n}(x)$ и форм $R_{i,n}(z)$ могут быть получены непосредственно, поскольку каждый из этих объектов является двойным гипергеометрическим рядом, к которому применима соответствующая версия алгоритма созидательного телескопирования. Правда, техническая реализация подобной затеи требует огромных временных ресурсов.

Относительно других приложений методов настоящей работы нам представляется важным наблюдение Гиллеры [14]. Он отмечает, что формулы рамануджанова типа тесно связаны с быстро сходящимися рядами для логарифмов алгебраических чисел и других интересных математических постоянных. Именно, рассматривая в [14] ряды типа

$$F(k) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1/4+k)_{\nu}(1/2+k)_{\nu}(3/4+k)_{\nu}}{(1+k)_{\nu}^3} (21460(\nu+k) + 1123) \cdot \frac{(-1)^{\nu}}{882^{2(\nu+k)+1}}$$

(ср. с (1)), он обнаруживает, что их значения не только при $k = 0$, но и при $k = 1/2$ допускают элементарные выражения. Так, в приведенном примере

$$F(0) = \frac{4}{\pi}, \quad F\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \log\left(\frac{2 \cdot 3^{10}}{7^6}\right)$$

(первое равенство согласно (1)). Множество других рядов из списка в [14] позволяет предположить существование широкого класса формул для математических постоянных, к которому методы настоящей работы могут успешно применяться. К сожалению, нам неизвестна сколь-нибудь систематическая теория по этому поводу; полученные примеры следует отнести скорее к приятным случайностям.

Список литературы

1. *Ramanujan S.* Modular equations and approximations to π // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1914. V. 45. P. 350–372; // Collected papers of Srinivasa Ramanujan / ed. G. H. Hardy et al. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1927. P. 23–39; 2nd reprinted edition. New York: Chelsea Publ., 1962.
2. *Heng Huat Chan, Wen-Chin Liaw, Tan V.* Ramanujan's class invariant λ_n and a new class of series for $1/\pi$ // J. London Math. Soc. (2). 2001. V. 64. №1. P. 93–106.
3. *Guillera J.* Some binomial series obtained by the WZ-method // Adv. Appl. Math. 2002. V. 29. P. 599–603.
4. *Chudnovsky D. V., Chudnovsky G. V.* Approximations and complex multiplication according to Ramanujan // Ramanujan revisited (Urbana-Champaign, Ill., 1987). Boston, MA: Academic Press, 1988. P. 375–472.
5. *Chudnovsky G. V.* Padé approximations to the generalized hypergeometric functions. I // J. Math. Pures Appl. (9). 1979. V. 58. №4. P. 445–476.
6. *Chudnovsky D. V., Chudnovsky G. V.* Transcendental methods and theta-functions // Theta functions (Bowdoin, 1987). Part 2. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1989. P. 167–232. (Proc. Symposia Pure Math. V. 49.)
7. *Hata M.* Rational approximations to π and some other numbers // Acta Arith. 1993. V. 63. №4. P. 335–349.
8. *Rhin G., Viola C.* On a permutation group related to $\zeta(2)$ // Acta Arith. 1996. V. 77. №1. P. 23–56.
9. *Hata M., Huttner M.* Padé approximation to the logarithmic derivative of the Gauss hypergeometric function // Analytic number theory / ed. C. Jia, K. Matsumoto. Netherlands: Kluwer Acad. Publ., 2002. P. 157–172.
10. *Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G.* Higher transcendental functions. V. 1. New York: McGraw-Hill Book Co., 1953.
11. *Petkovšek M., Wilf H. S., Zeilberger D.* $A = B$. Wellesley, MA: A. K. Peters, Ltd., 1996.
12. *Буслаев В. И.* Соотношения для коэффициентов и особые точки функции // Матем. сб. 1986. Т. 131(173). №3(11). С. 357–384.
13. *Hata M.* Legendre type polynomials and irrationality measures // J. Reine Angew. Math. 1990. V. 407. №1. P. 99–125.
14. *Guillera J.* Series closely related to Ramanujan formulas for π // Unpublished manuscript, 8 pages (December 2003).

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
E-mail: wadim@ips.ras.ru

Поступила в редакцию
18.08.2004