Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. М. Кожевникова, Стабилизация решения первой смешанной задачи для эволюционного квазиэллиптического уравнения, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 7, 67–100

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1377>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 15:59:05

УДК 517.956.4

Л. М. Кожевникова

Стабилизация решения первой смешанной задачи для эволюционного квазиэллиптического уравнения

В цилиндрической области $D = (0, \infty) \times \Omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}_{n+1}$ – неограниченная область, рассматривается первая смешанная задача для уравнения высокого порядка

$$u_t + Lu = 0,$$

$$Lu \equiv \sum_{i=q}^k (-1)^i D_x^i (a_i(x, \mathbf{y}) D_x^i u) + \sum_{i=l}^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=i} (-1)^i D_{\mathbf{y}}^{\alpha} (b_{\alpha\beta}(x, \mathbf{y}) D_{\mathbf{y}}^{\beta} u),$$

$$q \leq k, \quad l \leq m, \quad q, k, l, m \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}_n,$$

с однородными краевыми условиями и финитной начальной функцией. Предлагается новый метод получения оценки сверху L_2 -нормы $\|u(t)\|$ решения задачи, пригодный для широкого класса областей и уравнений. В частности, для областей $\{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}_{n+1} : |y_1| < x^a\}$, $0 < a < q/l$, при некотором условии на символ оператора L эта оценка принимает вид

$$\|u(t)\| \leq M \exp(-\kappa_2 t^b) \|\varphi\|, \quad b = \frac{q - la}{q - la + 2laq}.$$

Доказана точность оценки в широком классе неограниченных областей при $q = k = l = m = 1$, т.е. для параболического уравнения второго порядка.

Библиография: 14 названий.

Введение

Пусть Ω – неограниченная область пространства $\mathbb{R}_{n+1} = \{(x, \mathbf{y}) : x \in \mathbb{R}, \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_n\}$. Ось Ox выделена в связи с конкретным видом рассматриваемого ниже уравнения. В цилиндрической области $D = \{t > 0\} \times \Omega$ для уравнения

$$u_t + Lu = 0,$$

$$Lu = \sum_{i=q}^k (-1)^i D_x^i (a_i(x, \mathbf{y}) D_x^i u) + \sum_{i=l}^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=i} (-1)^i D_{\mathbf{y}}^{\alpha} (b_{\alpha\beta}(x, \mathbf{y}) D_{\mathbf{y}}^{\beta} u), \quad (0.1)$$

$$q \leq k, \quad l \leq m, \quad q, k, l, m \in \mathbb{N},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-97912).

рассмотрим первую смешанную задачу

$$D_x^i u|_S = 0, \quad i < k; \quad D_{\mathbf{y}}^\alpha u|_S = 0, \quad |\alpha| < m; \quad S = \{t > 0\} \times \partial\Omega; \quad (0.2)$$

$$u(0, x, \mathbf{y}) = \varphi(x, \mathbf{y}), \quad \varphi \in L_2(\Omega). \quad (0.3)$$

Здесь α, β – мультииндексы, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.

Переменную t в уравнении будем называть временем. Функции $a_i(x, \mathbf{y})$, $i = \overline{q, k}$, измеримы и для п.в. $(x, \mathbf{y}) \in \Omega$ ограничены сверху и снизу положительными константами

$$\hat{a} \leq a_i(x, \mathbf{y}) \leq \bar{a}, \quad i = \overline{q, k}, \quad 0 < \hat{a} \leq \bar{a}. \quad (0.4)$$

Коэффициенты $b_{\alpha\beta}(x, \mathbf{y})$, $|\alpha| = |\beta| = \overline{l, m}$, – измеримые и для п.в. $(x, \mathbf{y}) \in \Omega$ ограниченные функции, симметричные по мультииндексам α, β . Будем требовать при п.в. $x \in \mathbb{R}$ неотрицательность интеграла

$$\sum_{i=l}^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=i} \int_{\mathbb{R}_n} b_{\alpha\beta}(x, \mathbf{y}) D_{\mathbf{y}}^\alpha g D_{\mathbf{y}}^\beta g d\mathbf{y} \geq 0 \quad (0.5)$$

для любой функции $g(x, \mathbf{y})$ из $C_0^\infty(\Omega)$.

Отметим, что для коэффициентов $b_{\alpha\beta}(x)$, зависящих только от x , неравенство

$$\sum_{i=l}^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=i} b_{\alpha\beta}(x) \mathbf{z}^\alpha \mathbf{z}^\beta \geq 0,$$

справедливое для п.в. $x \in \mathbb{R}$ и всех $\mathbf{z} \in \mathbb{R}_n$, ввиду равенства Планшереля, обеспечивает выполнение условия (0.5). Если коэффициенты $b_{\alpha\beta}(x, \mathbf{y})$ зависят и от $\mathbf{y}$, то для выполнения (0.5) достаточно, чтобы

$$\sum_{i=l}^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=i} b_{\alpha\beta}(x, \mathbf{y}) z_\alpha z_\beta \geq 0$$

для п.в. $(x, \mathbf{y}) \in \Omega$ и любого набора чисел z_α .

Легко видеть, что среди уравнений вида (0.1) содержатся, кроме квазиэллиптических (см. определение в работе [1]), также и некоторые вырождающиеся уравнения.

Мы будем иметь дело с обобщенным решением задачи (0.1)–(0.3). В тех случаях, когда оно не обладает некоторыми из следов, входящих в краевые условия (0.2), связь обобщенного решения с классической постановкой задачи (0.1)–(0.3) может теряться, но это не является препятствием для исследования поведения решения при $t \rightarrow \infty$.

Настоящая работа посвящена исследованию поведения при больших значениях времени $L_2(\Omega)$ -нормы решения $u(t, x, \mathbf{y})$ задачи (0.1)–(0.3). Предлагаются достаточно простые характеристики неограниченной области Ω , в терминах которых получены оценки скорости убывания при $t \rightarrow \infty$ решения задачи (0.1)–(0.3).

Первые исследования зависимости скорости убывания решения смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка от геометрии неограниченной области были выполнены А. К. Гушиным в работах [2], [3]. Для широкого класса областей в них для решения второй смешанной задачи установлена оценка

$$|u(t, \mathbf{y})| \leq \frac{\|\varphi\|_{L_1(Q)}}{v(\sqrt{t})}, \quad \mathbf{y} \in Q,$$

где $v(r) = \text{mes}\{\mathbf{y} \in Q : |\mathbf{y}| < r\}$. Доказана также точность этой оценки. Аналогичный результат установлен В. И. Ушаковым в работе [4] для третьей смешанной задачи. Более полные исследования зависимости поведения при большом значении времени решения второй смешанной задачи от геометрии области и от начальной функции выполнены А. В. Лежневым в [5].

Исследованием поведения L_2 -нормы решения смешанных задач для параболических уравнений высокого порядка при $t \rightarrow \infty$ занимались Ф. Х. Мукминов, А. Ф. Тедеев, И. М. Биккулов и др. В цитируемых ниже работах предполагалась финитность начальной функции $\text{supp } \varphi \subset B(R_0; (0, \mathbf{0}))$. (Здесь и далее через $B(r; (x, \mathbf{y}))$ обозначаем шар радиуса r с центром в точке $(x, \mathbf{y})$.) Отметим, что при отсутствии ограничений на носитель начальной функции скорость стабилизации решения зависит не только от области Ω , но и от начальной функции φ (см. [6]).

В работе [7] Ф. Х. Мукминовым рассматривалось уравнение

$$u_t + (-1)^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(t, \mathbf{y}) D^\beta u) = 0, \quad m \geq 1. \quad (0.1')$$

Коэффициенты уравнения – измеримые функции, удовлетворяющие для п.в. $(t, \mathbf{y}) \in (0, \infty) \times Q$ и любого набора чисел z_α неравенствам

$$c_1 \sum_{i=1}^n z_{m_i}^2 \leq \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta} z_\alpha z_\beta \leq c_2 \sum_{|\alpha|=m} z_\alpha^2,$$

где c_1, c_2 – положительные постоянные, $m_i = (0, \dots, m, \dots, 0)$ – мультииндекс, i -я компонента которого равна m , остальные равны нулю. На область Q налагались следующие требования: существует непрерывная монотонно невозрастающая функция $\mu(r)$, $r > 0$, удовлетворяющая условию

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \mu^{1/(2m)}(r) = \infty$$

и неравенству

$$0 < \mu(r) \leq \inf \left\{ \int_{Q^r} \left| \sum_{i=1}^n D_{y_i}^m g \right|^2 d\mathbf{y} : g(\mathbf{y}) \in C_0^\infty(Q), \int_{Q^r} g^2 d\mathbf{y} = 1 \right\},$$

где $Q^r = \{\mathbf{y} \in Q : |\mathbf{y}| < r\}$. При этих условиях для решения задачи (0.1'), (0.2), (0.3) с финитной начальной функцией φ при достаточно больших t получена оценка

$$\|u(t)\|_{L_2(Q)} \leq M \exp \left\{ -k \left[\frac{r^{2m}(t)}{t} \right]^{1/(2m-1)} \right\} \|\varphi\|_{L_2(Q)}. \quad (0.6)$$

Здесь $r(t)$, $t > 0$, – функция, обратная к функции $F(r) = r/[\mu(r)]^{(2m-1)/(2m)}$. Ранее в работе [8] Ф. Х. Мукминовым была доказана аналогичная оценка для решения первой смешанной задачи в случае параболического уравнения второго порядка и доказана ее точность в классе неограниченных монотонно расширяющихся областей вращения.

А. Ф. Тедеевым [9] рассматривалось параболическое квазилинейное уравнение высокого порядка в дивергентной форме

$$u_t + (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} D^\alpha A_\alpha(t, \mathbf{y}, u, Du, \dots, D^m u) = 0, \quad m \geq 1. \quad (0.1'')$$

Здесь $A_\alpha(t, \mathbf{y}, \xi)$ – каратеодориевы функции, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(t, \mathbf{y}, \xi) \xi_\alpha^m &\geq c_1 \sum_{|\alpha|=m} |\xi_\alpha^m|^p, \quad p \geq 2, \\ \sum_{|\alpha|=m} |A_\alpha(t, \mathbf{y}, \xi)| &\leq c_2 \sum_{|\alpha|=m} |\xi_\alpha^m|^{p-1} \end{aligned}$$

для любого вектора $\xi = (\xi^0, \xi^1, \dots, \xi^m)$, $\xi^i = (\xi_\alpha^i)$, $|\alpha| = i$, где c_1, c_2 – положительные постоянные.

Для области Q предполагались выполненными следующие условия:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \lambda(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \lambda(r) = \infty,$$

где $\lambda(r)$ – первое собственное значение задачи Дирихле в Q^r для оператора $-\Delta$. При $p = 2$ для решения задачи (0.1''), (0.2), (0.3) с финитной начальной функцией φ при достаточно больших t получена оценка (0.6), в которой $r(t)$, $t > 0$, – функция, обратная к функции $F(r) = r/[\lambda(r)]^{(2m-1)/2}$.

И. М. Биккулов, Ф. Х. Мукминов в [10] исследовали стабилизацию решения задачи Риккье для уравнений 4-го и 6-го порядков. В терминах функции $\lambda(r)$ ими получена оценка L_2 -нормы решения при $t \rightarrow \infty$ и установлена ее точность по порядку стремления к нулю.

В работе [11] получены оценки решений систем квазилинейных параболических уравнений в терминах некоторых геометрических характеристик неограниченной области Ω и выделен класс областей, в которых эти оценки точны.

Интересно отметить, что в работе [12] получена оценка решения двумерной системы уравнений Навье–Стокса, аналогичная (0.6) с $m = 1$.

Предлагаемый нами метод получения оценок сверху для решения задачи (0.1)–(0.3) позволяет единообразно рассматривать широкий класс эволюционных квазиэллиптических уравнений вида (0.1) в более широком классе неограниченных областей, чем в работах [8]–[12]. Точность полученных оценок в случае параболического уравнения второго порядка устанавливается также для существенно более широкого класса областей, чем это было сделано в работах [8], [11].

Введем обозначение $\Omega_a^b = \{(x, \mathbf{y}) \in \Omega : a < x < b\}$, значения параметров $a = -\infty$ или $b = \infty$ могут быть опущены. В обозначении цилиндра $D_c^d = (c, d) \times \Omega$ значение $c = 0$ может быть опущено. Положим $\gamma_r = \{(x, \mathbf{y}) \in \Omega : x = r\}$;

предполагается, что $\gamma_r \neq \emptyset$ для всех $r > 0$. Через $\|\cdot\|_Q$ обозначим норму в $L_2(Q)$, подразумевая, что $\|\cdot\| \equiv \|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$.

Будем использовать также следующие обозначения:

$$F(g) = A(g) + B(g) = \sum_{i=q}^k a_i(x, \mathbf{y})(D_x^i g)^2 + \sum_{i=l}^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=i} b_{\alpha\beta}(x, \mathbf{y}) D_{\mathbf{y}}^{\alpha} g D_{\mathbf{y}}^{\beta} g,$$

$$\lambda(r_1, r_2) = \inf \left\{ \int_{\Omega_{r_1}^{r_2}} F(g) dx d\mathbf{y} : g(x, \mathbf{y}) \in C_0^{\infty}(\Omega), \int_{\Omega_{r_1}^{r_2}} g^2 dx d\mathbf{y} = 1 \right\},$$

$$r_1 < r_2. \quad (0.7)$$

Для неотрицательных ρ положим

$$\rho^{[a,b]} = \begin{cases} \rho^a, & \rho < 1, \\ \rho^b, & \rho \geq 1, \end{cases} \quad a, b > 0.$$

Неограниченную возрастающую последовательность положительных чисел $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ назовем λ -последовательностью задачи (0.1)–(0.3), если существует число $\theta > 0$ такое, что справедливы неравенства

$$1 \leq \theta \lambda(x_j, x_{j+1}) (x_{j+1} - x_j)^{2[k,q]}, \quad j = \overline{0, \infty}. \quad (0.8)$$

Приведем необходимое и достаточное условие существования λ -последовательности:

$$\text{при любом } r_1 > 0 \text{ найдется } r_2 > r_1 \text{ такое, что } \lambda(r_1, r_2) > 0 \quad (0.9)$$

(см. следствие 1). При этом λ -последовательность можно построить, начиная с любого $x_0 > 0$.

Ради некоторого упрощения формулировок результатов потребуем существование такого числа x_* , что $\lambda(-\infty, x_*) > 0$. Нетрудно доказать, что это условие будет выполнено и при любом $x > x_*$ (см. замечание после утверждения 2). Легко видеть, что при увеличении R_0 условие

$$\text{supp } \varphi \subset \Omega^{R_0} \quad (0.10)$$

на носитель начальной функции остается справедливым. При необходимости можно также сдвигать нумерацию индексов в λ -последовательности, полагая $\tilde{x}_j = x_{j+k}$. Поэтому, не ограничивая общность, в дальнейшем будем считать, что $R_0 = x_0$ и

$$\lambda(-\infty, x_0) > 0. \quad (0.11)$$

Определим невозрастающую функцию дискретного аргумента

$$\lambda(N) = \min\{\lambda(-\infty, x_0), \lambda(x_0, x_1), \dots, \lambda(x_{N-1}, x_N)\}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Тогда, очевидно, справедливо неравенство

$$\lambda(N) \int_{\Omega^{x_N}} g^2 dx d\mathbf{y} \leq \int_{\Omega^{x_N}} F(g) dx d\mathbf{y}, \quad g(x, \mathbf{y}) \in C_0^{\infty}(\Omega), \quad N \in \mathbb{N}. \quad (0.12)$$

Положим также

$$N(t) = \max \left\{ N \in \mathbb{N} : \frac{N}{\lambda(N)} < t \right\}. \quad (0.13)$$

При $t \in [0, 1/\lambda(1)]$ считаем, что $N(t) \equiv 0$. Очевидно, функция $N(t)$ является кусочно постоянной неубывающей функцией при $t \geq 0$.

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (0.9)–(0.11). Тогда существует λ -последовательность и найдутся такие положительные постоянные M, κ , зависящие только от $k, q, \theta, \hat{a}, \bar{a}, n$, что для решения $u(t, x, \mathbf{y})$ задачи (0.1)–(0.3) при $t > 2/\lambda(2)$ справедливо неравенство

$$\|u(t)\| \leq M \exp(-\kappa N(t)) \|\varphi\|. \quad (0.14)$$

Конечно, оценка (0.14) зависит от выбора λ -последовательности. Назовем $\bar{\lambda}$ -последовательность *оптимальной*, если существует постоянная $C(k, q, \theta, \hat{a}, \bar{a}, n)$ такая, что для любой другой λ -последовательности при всех достаточно больших t выполнено неравенство $N(t) \leq C\bar{N}(t)$. Здесь и далее элементы, относящиеся к оптимальной $\bar{\lambda}$ -последовательности, будем помечать чертой сверху. В §3 мы покажем, что оптимальной является λ -последовательность с минимально возможными, без нарушения условия (0.8), интервалами (x_j, x_{j+1}) (следствие 2).

В примерах будем требовать выполнение следующего условия. Пусть существует номер $s \in \overline{l, m}$ и постоянная $\hat{b} > 0$ такие, что для п.в. $x \in \mathbb{R}$ и любой функции $g(x, \mathbf{y}) \in C_0^\infty(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\int_{\mathbb{R}_n} B(g) d\mathbf{y} \geq \hat{b} \int_{\mathbb{R}_n} \{(D_{y_1}^s g)^2 + (D_{y_1}^m g)^2\} d\mathbf{y}. \quad (0.15)$$

Отметим, что для коэффициентов $b_{\alpha\beta}(x)$, зависящих только от x , неравенство

$$\sum_{i=l}^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=i} b_{\alpha\beta}(x) \mathbf{z}^\alpha \mathbf{z}^\beta \geq \hat{b}(z_1^{2s} + z_1^{2m}),$$

справедливое при п.в. $x \in \mathbb{R}$ и любых $\mathbf{z} \in \mathbb{R}_n$, гарантирует выполнение (0.15). В случае коэффициентов, зависящих и от $\mathbf{y}$, для выполнения (0.15) достаточно справедливости неравенства

$$\sum_{i=l}^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=i} b_{\alpha\beta}(x, \mathbf{y}) z_\alpha z_\beta \geq \hat{b}\{z_{s_1}^2 + z_{m_1}^2\}$$

для п.в. $(x, \mathbf{y}) \in \Omega$ и любого набора чисел z_α ; здесь $s_1 = (s, 0, \dots, 0)$, $m_1 = (m, 0, \dots, 0)$ – мультииндексы.

В качестве первого примера рассмотрим следующую область. Пусть $\{x_j\}_{j=0}^\infty$ – последовательность положительных чисел такая, что $x_{j+1} - x_j \geq 3$, $j = \overline{0, \infty}$. Пусть $\mathbb{R}_2^+ = \{(x, y_1) \in \mathbb{R}_2 : x > 0\}$ – полуплоскость и

$$\Omega = \mathbb{R}_2^+ \setminus \left(\bigcup_{j=0}^\infty \bigcup_{i=-\infty}^\infty B(a; (x_j + 1, i)) \right), \quad a \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

В силу неравенства (0.15) и периодичности в расположении кругов при всех $j = \overline{0, \infty}$ выполнено неравенство $\lambda(x_j, x_j + 2) \geq \text{const} > 0$. Тогда из неравенства (3.5) с $z = a = x_j$, $b = x_j + 2$, $c = x_{j+1}$, $i = q$ следует, что $\{x_j\}_{j=0}^\infty$ является λ -последовательностью и справедлива оценка (0.14).

Приведем другое следствие оценки (0.14).

Определим область типа слоя

$$\Omega[f] = \{(x, y) \in \mathbb{R}_{n+1} : x > d, |y_1| < f(x)\} \quad (0.16)$$

с положительной непрерывной функцией $f(x)$ ($d \in (-\infty, 0]$). Будем предполагать, что функция f удовлетворяет условию

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{f^{[m/k, s/q]}(x)} = \infty. \quad (0.17)$$

Введем обозначение

$$P^s(\rho, z) = \{(x, y_1) \in \mathbb{R}_2 : z < x < z + \rho, 0 < y_1 < \rho^{[k/m, q/s]}\}$$

для прямоугольника ширины ρ с левой нижней вершиной в точке z оси абсцисс. Символ $\Gamma_a^b(f)$ будет обозначать криволинейную трапецию

$$\Gamma_a^b(f) = \{(x, y_1) \in \mathbb{R}_2 : a < x < b, 0 < y_1 < f(x)\},$$

причем параметр $b = \infty$ может быть опущен. Пусть $\rho_*(r)$ — ширина наибольшего прямоугольника $P^s(\rho_*, z_*)$, содержащегося в $\Gamma_{x_0}^r(f)$.

Чтобы выразить оценку (0.14) для областей вида (0.16) в терминах функции $f(x)$, определим понятие П-последовательности. Неограниченную возрастающую последовательность положительных чисел $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ назовем Π^s -последовательностью, если справедливы равенства

$$\min\{f^{[m, s]}(x) : x \in [x_j, x_{j+1}]\} = (x_{j+1} - x_j)^{[k, q]}, \quad j = \overline{0, \infty}. \quad (0.18)$$

Отметим, что Π^s -последовательность можно построить всегда, начиная с произвольной точки $x_0 > 0$. Действительно, выберем ρ максимально возможным такое, что прямоугольник $P^s(\rho, x_0) \subset \Gamma_{x_0}(f)$. Положим $x_1 = x_0 + \rho$, тогда, очевидно, $\min_{[x_0, x_1]} f^{[m, s]}(x) = \rho^{[k, q]} = (x_1 - x_0)^{[k, q]}$. Таким же образом можно построить и остальные элементы Π^s -последовательности. В утверждении 5 доказывается, что если выполнено условие (0.15), то П-последовательность является λ -последовательностью.

Определим функцию $r(t)$, $t \geq 0$, равенством

$$\int_{x_0}^r \frac{dx}{f^{[m/k, s/q]}(x)} = \frac{t}{\rho_*^{2[k, q]}(r)}. \quad (0.19)$$

Ввиду возрастания функции

$$\rho_*^{2[k, q]}(r) \int_{x_0}^r \frac{dx}{f^{[m/k, s/q]}(x)}, \quad r \geq x_0,$$

равенство (0.19) однозначно определяет монотонно возрастающую функцию $r(t)$, $t \geq 0$.

Для областей $\Omega[f]$ типа слоя (0.16) в § 4 получено следствие оценки (0.14) (см. утверждение 6):

$$\|u(t)\|_{\Omega[f]} \leq M_1 \exp\left(-\kappa_1 \int_{x_0}^{r(t)} \frac{dx}{f^{[m/k, s/q]}(x)}\right) \|\varphi\|_{\Omega[f]}, \quad t \geq T_1. \quad (0.20)$$

Если существует постоянная $c \geq 1$ такая, что

$$\max\{f(z) : z \in [x - f^{[m/k, l/q]}(x), x + f^{[m/k, l/q]}(x)]\} \leq cf(x), \quad x \geq x_0, \quad (0.21)$$

то (0.20) при $s = l$ устанавливает такой же порядок убывания решения, что и оценка (0.14) с оптимальной $\bar{\lambda}$ -последовательностью (утверждение 7). В частности, для функции $f(r) = r^a$, $a < q/s$, $r > 0$, оценка (0.20) приобретает вид

$$\|u(t)\|_{\Omega[f]} \leq M_1 \exp(-\kappa_1 t^b) \|\varphi\|_{\Omega[f]}, \quad b = \frac{q - sa}{q - sa + 2saq}. \quad (0.22)$$

В случае параболического уравнения второго порядка для одного класса областей в § 5 получена оценка снизу неотрицательного решения задачи, подтверждающая точность оценки (0.14).

Определим область в $\mathbb{R}_{n+1}$, которую будем называть модельной трубкой. Пусть ломаная Γ , соединяющая точки $(a/2, \mathbf{0})$ и $(1 - a/2, \mathbf{0})$, $a \in (0, 1/2)$, такова, что ее ε -окрестность $U(\Gamma)$ лежит в слое $\Pi_0^1 = \{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}_{n+1} : 0 < x < 1\}$. Модельной трубкой M назовем односвязную область вида

$$M = \Pi_0^1 \cap (U(\Gamma) \cup B(a; (0, \mathbf{0})) \cup B(a; (1, \mathbf{0}))).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $k = q = m = l = 1$ и уравнение (0.1) является равнономерно параболическим уравнением второго порядка. Пусть область Ω и λ -последовательность $\{x_j\}_{j=0}^\infty$ таковы, что при всех $j = \overline{0, \infty}$ выполнены включения

$$(x_j, \mathbf{0}) + (x_{j+1} - x_j)\overline{M} \subset \Omega, \quad (0.23)$$

где левую часть следует понимать как гомотетию и параллельный перенос, примененные к замыканию $\overline{M}$. Пусть справедливы неравенства

$$\frac{1}{b} \leq \frac{x_{j+2} - x_{j+1}}{x_{j+1} - x_j} \leq b, \quad j = \overline{0, \infty}, \quad b \geq 1. \quad (0.24)$$

Тогда при выполнении условия (0.11) справедлива оценка (0.14) для неотрицательного решения задачи (0.1)–(0.3) с неотрицательной финитной начальной функцией $\varphi(x, \mathbf{y}) \not\equiv 0$, и она является точной. А именно существуют положительные постоянные κ_0 , M_0 , зависящие только от k , q , θ , $\hat{a}$, $\bar{a}$, n , $\hat{b}$, R_0 , Ω , φ , такие, что для решения $u(t, x, \mathbf{y})$ при

$$t > \max\left\{\frac{a^2(x_1 - R_0)^2}{64}, \frac{2}{\lambda(2)}\right\}$$

справедливы неравенства

$$M_0 \exp(-\kappa_0 N(t)) \leq \|u(t)\| \leq M \exp(-\kappa N(t)) \|\varphi\|. \quad (0.25)$$

Из этой теоремы следует, что оценка (0.20) с функцией f , удовлетворяющей условию (0.21), является точной при $k = q = m = l = 1$ (см. §5).

Приведем еще один класс примеров, для которых оценка (0.14) решения параболического уравнения второго порядка точна. Пусть $Q \subset \bar{\Pi}_0^1$ — такое замкнутое множество, что $\Pi_0^1 \setminus Q$ содержит модельную трубку M и

$$\lambda = \inf \left\{ \int_{\Pi_0^1 \setminus Q} F(g) dx dy : g \in C_0^\infty(\mathbb{R}_{n+1}), g|_Q = 0, \int_{\Pi_0^1 \setminus Q} g^2 dx dy = 1 \right\} > 0.$$

Пусть $\{x_j\}_{j=0}^\infty$ — некоторая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию (0.24). Пусть область Ω , удовлетворяющая условию (0.11), такова, что при $j = 0, \infty$ выполнены равенства

$$\Omega_{x_j}^{x_{j+1}} = (x_j, \mathbf{0}) + (x_{j+1} - x_j)(\Pi_0^1 \setminus Q)$$

и включения (0.23). Тогда при $k = q = m = l = 1$ $\{x_j\}_{j=0}^\infty$ является λ -последовательностью, справедлива оценка (0.14) и она точна.

§1. Вспомогательные утверждения

Гильбертово пространство $\overset{\circ}{W}_F(\Omega)$ определим как пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|g\|_{\overset{\circ}{W}_F(\Omega)}^2 = \|g\|^2 + \|F(g)\|_{L_1(\Omega)}.$$

Пространства $\overset{\circ}{W}_F^0(D^T)$, $\overset{\circ}{W}_F^1(D^T)$ определим как пополнения $C_0^\infty(D_{-1}^{T+1})$ по нормам соответственно

$$\begin{aligned} \|u\|_{\overset{\circ}{W}_F^0(D^T)}^2 &= \int_0^T (\|u(t)\|^2 + \|F(u)(t)\|_{L_1(\Omega)}) dt, \\ \|u\|_{\overset{\circ}{W}_F^1(D^T)}^2 &= \int_0^T (\|u(t)\|^2 + \|u_t(t)\|^2 + \|F(u)(t)\|_{L_1(\Omega)}) dt. \end{aligned}$$

Обобщенным решением задачи (0.1)–(0.3) в D^T назовем функцию $u(t, x, \mathbf{y}) \in \overset{\circ}{W}_F^0(D^T)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \int_{D^T} \left[-uv_t + \sum_{i=q}^k a_i(x, \mathbf{y}) D_x^i u D_x^i v + \sum_{i=l}^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=i} b_{\alpha\beta}(x, \mathbf{y}) D_{\mathbf{y}}^\alpha u D_{\mathbf{y}}^\beta v \right] dx dy dt \\ &= \int_{\Omega} \varphi(x, \mathbf{y}) v(0, x, \mathbf{y}) dx dy \end{aligned} \quad (1.1)$$

для любой функции $v(t, x, \mathbf{y}) \in \overset{\circ}{W}_F^1(D^T)$, $v(T, x, \mathbf{y}) = 0$. Функцию $u(t, x, \mathbf{y})$ будем называть *решением задачи* (0.1)–(0.3) в D , если при всех $T > 0$ она является решением этой задачи в D^T .

Обобщенное решение задачи (0.1)–(0.3) существует и единственно. Существование доказывается методом галёркинских приближений аналогично доказательству для уравнения второго порядка [13; гл. III, § 4, теорема 4.1]. Единственность вытекает из следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Обобщенное решение $u(t, x, \mathbf{y})$ задачи (0.1)–(0.3) принадлежит классу $C([0, \infty) \rightarrow L_2(\Omega))$ и при всех $t \geq 0$ удовлетворяет равенству*

$$\|u(t)\|^2 + 2 \int_0^t \|F(u)(\tau)\|_{L_1(\Omega)} d\tau = \|\varphi\|^2. \quad (1.2)$$

Доказательство этого утверждения проводится так же, как для линейного параболического уравнения второго порядка [13; гл. III, § 2, теорема 2.1].

ЛЕММА 1. *Для любой функции $g(x) \in C^\infty[a, b]$ и любого $\varepsilon \leq (b-a)^2$ справедливо неравенство*

$$\int_a^b g_p^2 dx \leq \varepsilon^{-p} \int_a^b [\varepsilon^i g_i^2 + G_i g^2] dx, \quad p = \overline{0, i-1}, \quad (1.3)$$

где $g_p(x) = D_x^p g(x)$, $G_i \geq 1$ – постоянная, зависящая только от i . Здесь i – произвольное натуральное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО достаточно провести для отрезка $[0, 1]$. Общий случай сводится к этому заменой $x = a + (b-a)y$.

Для функции $g(x) \in C_0^\infty(0, 1)$ справедливы разложение в ряд Фурье

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k\pi x$$

и равенства Парсеваля

$$\|g_p\|^2 \equiv \int_0^1 g_p^2 dx = C\pi^{2p} \sum_{k=1}^{\infty} k^{2p} a_k^2, \quad p = \overline{0, i}.$$

Применив неравенство Юнга для $p = \overline{1, i-1}$

$$\pi^{2p} k^{2p} \leq \frac{p}{i} \varepsilon_1^{i-p} k^{2i} \pi^{2i} + \frac{i-p}{i} \varepsilon_1^{-p},$$

получим

$$\|g_p\|^2 \leq \varepsilon_1^{-p} (\varepsilon_1^i \|g_i\|^2 + \|g\|^2) \quad \forall \varepsilon_1 > 0. \quad (1.4)$$

Для $p = 0$ неравенство очевидно, поэтому (1.4) справедливо для $p = \overline{0, i-1}$.

Проведем теперь индукцией по i доказательство неравенств (1.3) для произвольной функции $g \in C^\infty[0, 1]$. При $i = 1$, $p = 0$ неравенство (1.3) очевидно. Пусть неравенства (1.3) справедливы до порядка i . Докажем в этом предположении, что

$$\|g_i\|^2 \leq \varepsilon^{-i} (\varepsilon^{i+1} \|g_{i+1}\|^2 + G_{i+1} \|g\|^2), \quad \varepsilon \leq 1.$$

Возьмем продолжение $\tilde{g} \in C^\infty[-1, 2]$ такое, что $\tilde{g}|_{[0,1]} = g$ и

$$\int_{-1}^2 \tilde{g}_p^2 dx \leq C(i) \int_0^1 g_p^2 dx, \quad p = \overline{0, i+1}, \quad (1.5)$$

где постоянная $C(i)$ зависит только от i .

Пусть $\eta(x) \in C_0^\infty(-1, 2)$ – срезающая функция, не превосходящая единицы, равная единице на $[0, 1]$. Тогда $v = \tilde{g}\eta \in C_0^\infty(-1, 2)$ и из (1.4) следует, что

$$\int_{-1}^2 v_i^2 dx \leq \varepsilon_2 \int_{-1}^2 v_{i+1}^2 dx + \varepsilon_2^{-i} \int_{-1}^2 v^2 dx, \quad \varepsilon_2 > 0. \quad (1.6)$$

Поскольку ввиду (1.5)

$$\int_{-1}^2 v_{i+1}^2 dx \leq C_i \sum_{p=0}^{i+1} \int_{-1}^2 \tilde{g}_p^2 dx \leq C_i C(i) \sum_{p=0}^{i+1} \int_0^1 g_p^2 dx,$$

то из (1.6) следует неравенство

$$\|g_i\|^2 \leq \varepsilon_2 C(i) C_i \sum_{p=0}^{i+1} \|g_p\|^2 + \varepsilon_2^{-i} C(i) \|g\|^2, \quad \varepsilon_2 > 0.$$

Сложив при $\varepsilon = 1$ неравенства индуктивного предположения (1.3), устанавливаем, что

$$\sum_{p=1}^{i-1} \|g_p\|^2 \leq (i-1) \|g_i\|^2 + (i-1) G_i \|g\|^2,$$

поэтому

$$\|g_i\|^2 \leq \varepsilon_2 C(i) C_i (\|g_{i+1}\|^2 + i \|g_i\|^2 + i G_i \|g\|^2) + \varepsilon_2^{-i} C(i) \|g\|^2, \quad \varepsilon_2 > 0.$$

Выбирая ε_2 так, чтобы $\varepsilon_2 C(i) C_i i \leq \delta < 1$, замечаем, что

$$\|g_i\|^2 \leq \frac{\varepsilon_2 C(i) C_i}{1 - \delta} \|g_{i+1}\|^2 + \frac{\varepsilon_2 C(i) i C_i G_i + \varepsilon_2^{-i} C(i)}{1 - \delta} \|g\|^2.$$

Полагая $\varepsilon = \varepsilon_2 C(i) C_i / (1 - \delta)$, находим, что $\varepsilon \in (0, \delta / (i(1 - \delta))] \equiv (0, 1]$ при подходящем выборе δ . Отсюда

$$\|g_i\|^2 \leq \varepsilon \|g_{i+1}\|^2 + G_{i+1} \varepsilon^{-i} \|g\|^2.$$

Производные меньшего порядка оцениваются при помощи (1.3). Лемма доказана.

§ 2. Оценка решения при больших x

Доказательство теоремы 1 опирается на оценку решения при больших x , устанавливаемую в нижеследующей теореме 3.

Ниже через $\Xi = \{k, q, \theta, \widehat{a}, \overline{a}, n\}$ будем обозначать набор постоянных. Зависимость других постоянных от этого набора будем указывать в круглых скобках.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия (0.9)–(0.11). Тогда существует λ -последовательность и найдутся положительные постоянные $\kappa(\Xi)$, $\widetilde{M}(\Xi)$ такие, что решение $u(t, x, \mathbf{y})$ задачи (0.1)–(0.3) при всех $t \geq 0$ и $N \geq 2$ удовлетворяет оценке

$$\|u(t)\|_{\Omega_{x_N}}^2 \leq \widetilde{M} \exp(-2\kappa N) \|\varphi\|^2. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим срезающую функцию $\xi(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Пусть $h(t) \in C^\infty[0, 1]$ – неубывающая функция, равная 0 и 1 в окрестности нуля и единицы соответственно. Пусть

$$a_i = 3^i \max_{t \in [0, 1]} |D^i h(t)|, \quad i = \overline{0, \infty}.$$

Из теоремы Лагранжа следует, что $a_{i+1} \geq a_i$.

Определим дифференциальные полиномы P_p от гладкой функции $\alpha(x)$ условиями $P_0 = 1$, $P_p = (D + 2\alpha)P_{p-1}$. Тогда

$$P_p = (D + 2\alpha)^{p-1} 2\alpha = \sum_{s=1}^p A_{sp}^{p_1 p_2 \dots p_s} \prod_{p_1 + 2p_2 + \dots + sp_s = p} \alpha^{p_1} (D\alpha)^{p_2} (D^{s-1}\alpha)^{p_s}, \quad (2.2)$$

$$p = \overline{1, \infty},$$

где $A_{sp}^{p_1 p_2 \dots p_s}$ – целые неотрицательные числа.

Положим

$$b_p = \sum_{s=1}^p A_{sp}^{p_1 p_2 \dots p_s} \prod_{p_1 + 2p_2 + \dots + sp_s = p} a_0^{p_1} a_1^{p_2} \dots a_{s-1}^{p_s}; \quad (2.3)$$

очевидно, $b_{p+1} \geq b_p$.

Выберем число $e_* > 1$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\exp\left(\frac{2}{e_*}\right) \left(\frac{\widetilde{b}}{e_*}\right)^2 k \left\{ 1 + (k - q + 1) \widehat{a} \max_{i=q, k} G_i \theta \right\} \leq 1, \quad (2.4)$$

где $\widetilde{b} = \frac{\overline{a}}{a} 2^k b_k$, G_i – константы из неравенства (1.3).

Зафиксируем натуральное число $N \geq 2$. Рассмотрим кусочно постоянную функцию $\beta(x)$ на промежутке $[x_0, x_{N+1})$ такую, что $\beta(x) = \delta_j$, $x \in [x_j, x_{j+1})$, $j = \overline{0, N}$, причем $\delta_0 = \delta_N = 0$ и $\delta_j^{-1} = e_* \Delta_j$, $j = \overline{1, N-1}$, где $\Delta_j = (x_{j+1} - x_j)$.

Построим функцию $\alpha(x) \leq \beta(x)$, сглаживая функцию $\beta(x)$ по следующему правилу. Если $\delta_{j-1} < \delta_j$, то на отрезке $[x_j, x_j + \Delta_j/3]$ функция $\alpha(x)$ определяется так:

$$\alpha(x) = \delta_{j-1} + (\delta_j - \delta_{j-1})h\left(\frac{3(x - x_j)}{\Delta_j}\right).$$

Если же $\delta_j > \delta_{j+1}$, то на отрезке $[x_{j+1} - \Delta_j/3, x_{j+1}]$ полагаем

$$\alpha(x) = \delta_j - (\delta_j - \delta_{j+1})h\left(1 + \frac{3(x - x_{j+1})}{\Delta_j}\right).$$

В оставшихся точках полагаем $\alpha(x) = \beta(x)$.

Очевидно, что во всех случаях производные функции $\alpha(x)$ подчиняются оценкам

$$|D^i \alpha(x)| \leq \left(\frac{3}{\Delta_j}\right)^i \delta_j \max_{t \in [0,1]} |D^i h(t)| \leq \frac{a_i \delta_j}{\Delta_j^i} = \frac{a_i}{e_* \Delta_j^{i+1}} \quad (2.5)$$

при всех $x \in [x_j, x_{j+1}]$, $j = \overline{1, N-1}$, $i \in \mathbb{N}$. Следовательно, полиномы P_p удовлетворяют неравенствам

$$|P_p| \leq \sum_{s=1}^p A_{sp}^{p_1 p_2 \dots p_s} \prod_{p_1 + 2p_2 + \dots + sp_s = p} \left(\frac{a_0}{e_* \Delta_j}\right)^{p_1} \dots \left(\frac{a_{s-1}}{e_* \Delta_j^s}\right)^{p_s} \leq \frac{b_p}{e_* \Delta_j^p}, \quad (2.6)$$

$$x \in [x_j, x_{j+1}], \quad j = \overline{1, N-1}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Установим двусторонние оценки интеграла $\int_{x_j}^{x_{j+1}} \alpha(t) dt$, $j = \overline{1, N-1}$:

$$\frac{1}{3e_*} = \frac{\delta_j \Delta_j}{3} = \int_{x_j + \Delta_j/3}^{x_j + 2\Delta_j/3} \delta_j dt \leq \int_{x_j}^{x_{j+1}} \alpha(t) dt \leq \int_{x_j}^{x_{j+1}} \delta_j dt = \delta_j \Delta_j = \frac{1}{e_*}. \quad (2.7)$$

Определим неубывающую гладкую функцию $\xi(x)$ на $\mathbb{R}$ условиями

$$\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_0; \\ \xi(x_1) h^{1/2}\left(\frac{3(x - x_0)}{\Delta_0}\right), & x_0 \leq x \leq x_0 + \frac{\Delta_0}{3}; \\ \exp\left(-\int_x^{x_N} \alpha(t) dt\right), & x_0 + \frac{\Delta_0}{3} \leq x \leq x_N; \\ 1, & x \geq x_N. \end{cases}$$

На промежутке $[x_1, x_N]$ справедливо уравнение $\xi' = \alpha \xi$ и ввиду (2.7) справедливо неравенства

$$\exp\left(\frac{1}{3e_*}\right) \leq \frac{\xi(x_{j+1})}{\xi(x_j)} \leq \exp\left(\frac{1}{e_*}\right), \quad j = \overline{1, N-1}. \quad (2.8)$$

Перемножая эти неравенства, находим, что $\exp\left(\frac{N-1}{3e_*}\right) \leq \frac{\xi(x_N)}{\xi(x_1)}$ и

$$\xi(x_1) \leq \exp\left(-\frac{N-1}{3e_*}\right). \quad (2.9)$$

Нетрудно доказать, что на промежутке $[x_1, x_N]$ справедливо соотношение

$$D^p \xi^2 = \xi^2 P_p, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (2.10)$$

Из определения функций $\alpha(x)$, $\xi(x)$ следует, что

$$\xi(x) = \xi(x_1), \quad x \in \left[x_0 + \frac{\Delta_0}{3}, x_1\right].$$

Оценим производные $D^p \xi^2$ на отрезке $[x_0, x_1]$:

$$|D^p \xi^2| \leq \xi^2(x_1) \left| D^p h\left(\frac{3(x-x_0)}{\Delta_0}\right) \right| \leq \frac{a_p}{\Delta_0^p} \xi^2(x_1). \quad (2.11)$$

Через $f_h(t)$ обозначим осреднение Стеклова $f_h(t) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(\tau) d\tau$. В тождестве (1.1) возьмем функцию $v = \omega_{-h}$, $0 < h \leq \delta$, $\omega \in C_0^\infty(D^{T-\delta})$. После простых преобразований придем к тождеству

$$\begin{aligned} & \int_{D^{T-\delta}} \left\{ (u_h)_t \omega + \sum_{i=q}^k a_i(x, \mathbf{y}) D_x^i u_h D_x^i \omega \right. \\ & \left. + \sum_{i=l}^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=i} b_{\alpha\beta}(x, \mathbf{y}) D_{\mathbf{y}}^\alpha u_h D_{\mathbf{y}}^\beta \omega \right\} dx d\mathbf{y} dt = 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

которое справедливо также для $\omega \in \mathring{W}_F^0(D^{T-\delta})$. Далее, ввиду произвольности $T > 0$ можем считать, что (2.12) справедливо в D^t , $t > 0$, при $\omega \in \mathring{W}_F^0(D^t)$.

Положим в (2.12) $\omega = u_h \xi^2(x) \in \mathring{W}_F^0(D^t)$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (u_h \xi)^2(t) dx d\mathbf{y} + 2 \int_{D^t} \left\{ \sum_{i=q}^k a_i(x, \mathbf{y}) D_x^i u_h D_x^i (u_h \xi^2) + \xi^2 B(u_h) \right\} dx d\mathbf{y} d\tau \\ & = \int_{\Omega} (u_h \xi)^2(0) dx d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

После предельного перехода при $h \rightarrow 0$ получаем (с учетом того, что $\xi\varphi \equiv 0$)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (u\xi)^2(t) dx d\mathbf{y} + 2 \int_{D^t} F(u) \xi^2 dx d\mathbf{y} d\tau \\ & = -2 \sum_{i=q}^k \int_{D^t} a_i(x, \mathbf{y}) D_x^i u \left(\sum_{p=1}^i C_i^p D^p(\xi^2) D_x^{i-p} u \right) dx d\mathbf{y} d\tau. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Оценим правую часть с учетом (2.10) и того, что $D_x(\xi^2) \equiv 0$ вне промежутка $[x_0, x_N]$. На промежутке $[x_j, x_{j+1}]$, $j = \overline{1, N-1}$, рассмотрим интеграл

$$I_j \equiv 2\bar{a} \sum_{i=q}^k \int_0^t \int_{\Omega_{x_j}^{x_{j+1}}} \xi^2 |D_x^i u| \sum_{p=1}^i C_i^p |P_p| |D_x^{i-p} u| dx dy d\tau.$$

Согласно (2.6) имеем

$$\begin{aligned} I_j &\leq 2\bar{a} \sum_{i=q}^k \int_0^t \int_{\Omega_{x_j}^{x_{j+1}}} \xi^2 |D_x^i u| \sum_{p=1}^i \frac{C_i^p b_p}{e_* \Delta_j^p} |D_x^{i-p} u| dx dy d\tau \\ &\leq \hat{a} \sum_{i=q}^k \int_0^t \int_{\Omega_{x_j}^{x_{j+1}}} \xi^2 (D_x^i u)^2 dx dy d\tau \\ &\quad + \frac{\bar{a}^2}{\hat{a}} \sum_{i=q}^k \int_0^t \int_{\Omega_{x_j}^{x_{j+1}}} \xi^2 \left(\sum_{p=1}^i \frac{C_i^p b_p}{e_* \Delta_j^p} |D_x^{i-p} u| \right)^2 dx dy d\tau \\ &\equiv \hat{I}_j + \bar{I}_j. \end{aligned}$$

Применив ко второму слагаемому неравенство Коши–Буняковского, пользуясь леммой 1 с $\varepsilon = \Delta_j^2$, находим, что

$$\begin{aligned} \bar{I}_j &\leq \frac{\bar{a}^2}{\hat{a}} \xi^2(x_{j+1}) \left(\frac{2^k b_k}{e_*} \right)^2 \sum_{i=q}^k \int_0^t \int_{\Omega_{x_j}^{x_{j+1}}} \sum_{p=1}^i \frac{|D_x^{i-p} u|^2}{\Delta_j^{2p}} dx dy d\tau \\ &\leq \left(\frac{\tilde{b}}{e_*} \right)^2 \hat{a} \xi^2(x_{j+1}) \sum_{i=q}^k \int_0^t \int_{\Omega_{x_j}^{x_{j+1}}} i \left[(D_x^i u)^2 + G_i \frac{u^2}{\Delta_j^{2i}} \right] dx dy d\tau. \end{aligned}$$

Далее, применив соотношение (2.8) и определение λ -последовательности (0.8), (0.7), установим

$$\begin{aligned} \bar{I}_j &\leq \left(\frac{\tilde{b}}{e_*} \right)^2 \hat{a} \exp\left(\frac{2}{e_*}\right) \xi^2(x_j) \sum_{i=q}^k \int_0^t \int_{\Omega_{x_j}^{x_{j+1}}} i \left[(D_x^i u)^2 \right. \\ &\quad \left. + G_i \lambda^{-1}(x_j, x_{j+1}) \frac{F(u)}{\Delta_j^{2[k, q]}} \right] dx dy d\tau \\ &\leq \left(\frac{\tilde{b}}{e_*} \right)^2 \exp\left(\frac{2}{e_*}\right) k \int_0^t \int_{\Omega_{x_j}^{x_{j+1}}} \left[A(u) + (k - q + 1) \hat{a} \max_{i=q, k} G_i \theta F(u) \right] \xi^2 dx dy d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда ввиду неравенств (0.5), (2.4) получим

$$I_j \leq 2 \int_0^t \int_{\Omega_{x_j}^{x_{j+1}}} F(u) \xi^2 dx dy d\tau, \quad j = \overline{1, N-1}.$$

Теперь из (2.13) следует, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{x_N}} u^2(t, x, \mathbf{y}) dx d\mathbf{y} &\leq I_0 \\ &\equiv 2\bar{a} \sum_{i=q}^k \int_0^t \int_{\Omega_{x_0}^{x_1}} |D_x^i u| \sum_{p=1}^i C_i^p |D^p(\xi^2)| |D_x^{i-p} u| dx d\mathbf{y} d\tau. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Далее, согласно (2.11) имеем

$$I_0 \leq 2\bar{a}\xi^2(x_1) \sum_{i=q}^k \int_0^t \int_{\Omega_{x_0}^{x_1}} |D_x^i u| \sum_{p=1}^i \frac{C_i^p a_p}{\Delta_0^p} |D_x^{i-p} u| dx d\mathbf{y} d\tau.$$

Интеграл I_0 оценивается аналогично I_j :

$$I_0 \leq \bar{a}\xi^2(x_1) \sum_{i=q}^k \int_0^t \int_{\Omega_{x_0}^{x_1}} \left[(1 + \tilde{a}^2 i) |D_x^i u|^2 + \frac{i G_i \tilde{a}^2}{\Delta_0^{2i}} u^2 \right] dx d\mathbf{y} d\tau,$$

где $\tilde{a} = a_k 2^k$. Таким образом, ввиду (0.7), (0.8), (0.5), (1.2) получим

$$\begin{aligned} I_0 &\leq \bar{a}\xi^2(x_1) \int_0^t \int_{\Omega_{x_0}^{x_1}} \left[\frac{(1 + \tilde{a}^2 k)}{\hat{a}} A(u) \right. \\ &\quad \left. + (k - q + 1) \max_{i=q, k} G_i \frac{k \tilde{a}^2 \lambda^{-1}(x_0, x_1)}{\Delta_0^{2[k, q]}} F(u) \right] dx d\mathbf{y} d\tau \\ &\leq 2C\xi^2(x_1) \int_0^t \int_{\Omega_{x_0}^{x_1}} F(u) dx d\mathbf{y} d\tau \leq C\xi^2(x_1) \|\varphi\|^2, \end{aligned}$$

где

$$C = \frac{\bar{a}}{2\hat{a}} \left(1 + \tilde{a}^2 k + (k - q + 1) k \max_{i=q, k} G_i \tilde{a}^2 \hat{a} \theta \right).$$

Теперь оценка (2.1) следует из (2.14) и (2.9). Тем самым, установлено неравенство (2.1) с $\kappa = 1/(3e_*) < 1/3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Выберем произвольное натуральное число $N \geq 2$. Из теоремы 3 имеем

$$\int_{\Omega_{x_N}} u^2(t, x, \mathbf{y}) dx d\mathbf{y} \leq \widetilde{M} \exp(-2\kappa N) \|\varphi\|^2 \equiv \varepsilon(N).$$

Следовательно, ввиду (0.12)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^2(t, x, \mathbf{y}) dx d\mathbf{y} &\leq \varepsilon(N) + \int_{\Omega_{x_N}} u^2(t, x, \mathbf{y}) dx d\mathbf{y} \\ &\leq \varepsilon(N) + \lambda^{-1}(N) \int_{\Omega_{x_N}} F(u) dx d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Теперь из (1.2) следует, что

$$\|u(t)\|^2 \leq \varepsilon(N) - \frac{\lambda^{-1}(N)}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|^2.$$

Решая это дифференциальное неравенство, будем иметь

$$\|u(t)\|^2 \leq \widetilde{M} \exp(-2\kappa N) \|\varphi\|^2 + \exp(-2\lambda(N)t) \|\varphi\|^2. \quad (2.15)$$

Выбрав $N = N(t)$ и учитывая, что $\kappa < 1/3$, получим неравенство (0.14) теоремы 1 при $t > 2/\lambda(2)$.

§ 3. О λ -последовательностях

В этом параграфе докажем существование оптимальной $\bar{\lambda}$ -последовательности с произвольным $\bar{x}_0 > 0$.

ЛЕММА 2. Пусть a, d, c — такие действительные числа, что $0 \leq a < a + d \leq c$, $\Delta = (0, a) \cup (a + d, c)$, $|\Delta| = c - d$. Тогда для любой функции $g(x) \in C^\infty[0, c]$ при $2c \geq 3d$ справедливы неравенства

$$\int_{\Delta} g^2(x) dx \leq e_p \int_a^{a+d} g^2(x) dx + 3^p c^{2p} \int_0^c g_p^2(x) dx, \quad p \geq 1, \quad (3.1)$$

где $g_p = D_{x^p} g$ и числа e_p подчиняются неравенствам

$$e_p \leq \bar{e}_p \left(\frac{c}{d} \right)^{2p-1} \quad (3.2)$$

с числами $\bar{e}_p$, зависящими только от p .

Если же $2c \leq 3d$, то выполнены неравенства

$$\int_{\Delta} g^2(x) dx \leq \tilde{e}_p \int_a^{a+d} g^2(x) dx + (4|\Delta|c)^p \int_0^c g_p^2(x) dx, \quad p \geq 1, \quad (3.3)$$

с числами $\tilde{e}_p$, зависящими только от p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возведя равенство

$$g(x) = g(y) + \int_y^x g'(t) dt, \quad 0 \leq y < x \leq c,$$

в квадрат, получаем

$$g^2(x) \leq 2g^2(y) + 2c \int_0^c g'^2(t) dt.$$

После интегрирования по $x \in \Delta$ и $y \in [a, a + d]$ будем иметь

$$d \int_{\Delta} g^2(x) dx \leq 2|\Delta| \left(\int_a^{a+d} g^2(y) dy + dc \int_0^c g'^2(t) dt \right). \quad (3.4)$$

Отсюда получаем начальный шаг индукции как для (3.1), так и для (3.3). Предположим, что эти неравенства справедливы до некоторого значения p . Установим их для значения $p + 1$.

1) Пусть $2|\Delta| \geq d$. Заменив в (3.4) функцию g на g_p и умножив на $3^p c^{2p} / d$, будем иметь

$$3^p c^{2p} \int_{\Delta} g_p^2(x) dx \leq \frac{2|\Delta|}{d} 3^p c^{2p} \int_a^{a+d} g_p^2(x) dx + 2 \cdot 3^p c^{2p+2} \int_0^c g_{p+1}^2(x) dx.$$

Сложив это неравенство с (3.1), получим при $2|\Delta| \geq d$

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} g^2(x) dx &\leq e_p \int_a^{a+d} g^2(x) dx + \frac{4|\Delta|}{d} 3^p c^{2p} \int_a^{a+d} g_p^2(x) dx \\ &\quad + 2 \cdot 3^p c^{2p+2} \int_0^c g_{p+1}^2(x) dx. \end{aligned}$$

К среднему интегралу применим (1.3) с $\varepsilon = d^2$ и $i = p + 1$. Тогда, поскольку $4|\Delta|d = 4(c-d)d \leq c^2$,

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} g^2(x) dx &\leq \left\{ e_p + 4 \cdot 3^p G_{p+1} \left(\frac{c}{d} \right)^{2p+1} \right\} \\ &\quad \times \int_a^{a+d} g^2(x) dx + 3^{p+1} c^{2p+2} \int_0^c g_{p+1}^2(x) dx. \end{aligned}$$

Тем самым, неравенство (3.1) доказано. Неравенство (3.2) следует из рекуррентной формулы

$$e_{p+1} = e_p + 4 \cdot 3^p G_{p+1} \left(\frac{c}{d} \right)^{2p+1}.$$

2) Пусть теперь $2|\Delta| \leq d$. Пользуясь (3.4), запишем неравенство

$$\begin{aligned} 4^p (|\Delta|c)^p \int_{\Delta} g_p^2(x) dx &\leq \frac{2|\Delta|}{d} 4^p (|\Delta|c)^p \int_a^{a+d} g_p^2(x) dx \\ &\quad + 2 \cdot 4^p (|\Delta|c)^{p+1} \int_0^c g_{p+1}^2(x) dx. \end{aligned}$$

Сложив это неравенство с (3.3), получим при $2|\Delta| \leq d$

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} g^2(x) dx &\leq \tilde{e}_p \int_a^{a+d} g^2(x) dx + 2 \cdot 4^p (|\Delta|c)^p \int_a^{a+d} g_p^2(x) dx \\ &\quad + 2 \cdot 4^p (|\Delta|c)^{p+1} \int_0^c g_{p+1}^2(x) dx. \end{aligned}$$

К среднему интегралу применим (1.3) с $\varepsilon = |\Delta|c$ и $i = p + 1$. Тогда неравенство

$$\int_{\Delta} g^2(x) dx \leq \{\tilde{e}_p + 2 \cdot 4^p G_{p+1}\} \int_a^{a+d} g^2(x) dx + (4|\Delta|c)^{p+1} \int_0^c g_{p+1}^2(x) dx$$

доказывает (3.3).

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $i = q$ или k и числа $0 < z \leq a < b \leq c$ удовлетворяют неравенству $2(c-z) \geq 3(b-a)$. Тогда

$$\lambda^{-1}(z, c) \leq (e_i + 1) \lambda^{-1}(a, b) + \frac{3^i}{a} (c-z)^{2i}. \quad (3.5)$$

Если, дополнительно,

$$\widehat{a}(\bar{e}_i + 1)(b-a)^{1-2i} \leq 3^i (c-z) \lambda(a, b), \quad (3.6)$$

то

$$\widehat{a} \leq 2 \cdot 3^i (c-z)^{2i} \lambda(z, c). \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим неравенство (3.1) к интервалам $(a, b) \subset (z, c)$ и функции $g(x, \mathbf{y}) \in C_0^\infty(\Omega)$, продолженной нулем вне Ω , в следующем виде:

$$\int_{\Delta} g^2(x, \mathbf{y}) dx \leq e_i \int_a^b g^2(x, \mathbf{y}) dx + 3^i (c - z)^{2i} \int_z^c g_i^2(x, \mathbf{y}) dx, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}_n,$$

где $g_i = D_x^i g$ и $\Delta = (z, a) \cup (b, c)$. После интегрирования по $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_n$ находим, что

$$\int_{\Omega_z^c} g^2(x, \mathbf{y}) dx d\mathbf{y} \leq (e_i + 1) \int_{\Omega_a^b} g^2(x, \mathbf{y}) dx d\mathbf{y} + 3^i (c - z)^{2i} \int_{\Omega_z^c} g_i^2(x, \mathbf{y}) dx d\mathbf{y}.$$

Применив (0.7), (0.4), (0.5), получим соотношение

$$\int_{\Omega_z^c} g^2(x, \mathbf{y}) dx d\mathbf{y} \leq (e_i + 1) \lambda^{-1}(a, b) \int_{\Omega_a^b} F(g) dx d\mathbf{y} + \frac{3^i}{a} (c - z)^{2i} \int_{\Omega_z^c} F(g) dx d\mathbf{y}.$$

Тем самым, установлено неравенство (3.5). Отсюда, пользуясь (3.2) и (3.6), выводим (3.7).

ЗАМЕЧАНИЕ. Если неравенство $\lambda(-\infty, x_*) > 0$ выполнено при некотором x_* , то оно выполнено при любом $x > x_*$. В самом деле, пользуясь (3.1), запишем для функции $g(x, \mathbf{y}) \in C_0^\infty(\Omega)$ неравенства

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{x_*}^x} g^2(x, \mathbf{y}) dx d\mathbf{y} \\ & \leq e_q \int_{\Omega_{2x_*-x}^{x_*}} g^2(x, \mathbf{y}) dx d\mathbf{y} + 6^q (x - x_*)^{2q} \int_{\Omega_{2x_*-x}^x} g_q^2(x, \mathbf{y}) dx d\mathbf{y} \\ & \leq \left(\frac{e_q}{\lambda(-\infty, x_*)} + \frac{6^q (x - x_*)^{2q}}{\widehat{a}} \right) \int_{\Omega_{-\infty}^x} F(g) dx d\mathbf{y}, \end{aligned}$$

из которых следует требуемое.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если область удовлетворяет условию (0.9), то λ -последовательность задачи (0.1), (0.2) существует при произвольном $x_0 > 0$ с числом $\theta \geq 2 \cdot 3^q / \widehat{a}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть уже построен элемент λ -последовательности x_j с числом $\theta \geq 2 \cdot 3^q / \widehat{a}$ и по предположению (0.9) $\lambda(x_j, x_*) \neq 0$. В качестве следующего элемента λ -последовательности можно взять произвольное x_{j+1} , удовлетворяющее неравенствам $x_{j+1} \geq x_j + 1$, $2x_{j+1} \geq 3x_* - x_j$, $\widehat{a}(\bar{e}_q + 1) \times (x_* - x_j)^{1-2q} \leq 3^q (x_{j+1} - x_j) \lambda(x_j, x_*)$. Соотношение (0.8) следует из утверждения 2 при $i = q$, $a = z = x_j$, $b = x_*$, $c = x_{j+1}$.

Построим специальную $\bar{\lambda}$ -последовательность с $\bar{\theta} \geq 2 \cdot 3^k / \widehat{a}$ и докажем, что она является оптимальной.

Сначала докажем неравенство

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow r_2} \lambda(r_1, r) \leq \lambda(r_1, r_2). \quad (3.8)$$

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и ненулевую функцию $f \in C_0^\infty(\Omega)$ такую, что

$$(\lambda(r_1, r_2) + \varepsilon) \int_{\Omega_{r_1}^{r_2}} f^2(x, \mathbf{y}) dx d\mathbf{y} \geq \int_{\Omega_{r_1}^{r_2}} F(f) dx d\mathbf{y}.$$

Пользуясь абсолютной непрерывностью интеграла Лебега, нетрудно установить существование такого $\delta > 0$, что

$$(\lambda(r_1, r_2) + 2\varepsilon) \int_{\Omega_{r_1}^{r_2}} f^2(x, \mathbf{y}) dx d\mathbf{y} \geq \int_{\Omega_{r_1}^{r_2}} F(f) dx d\mathbf{y}$$

при всех r таких, что $|r - r_2| < \delta$. Отсюда следует неравенство

$$\lambda(r_1, r) \leq \lambda(r_1, r_2) + 2\varepsilon, \quad r : |r - r_2| < \delta.$$

Тем самым, (3.8) установлено.

Опишем индуктивное построение элементов $\bar{\lambda}$ -последовательности. Пусть построен элемент $\bar{x}_\nu$. Положим

$$\bar{x}_{\nu+1} = \inf \{x > \bar{x}_\nu : 1 \leq \bar{\theta} \lambda(\bar{x}_\nu, x) (x - \bar{x}_\nu)^{2[k, q]}\}.$$

Непустота множества под знаком $\inf$ при условии (0.9) и $\bar{\theta} \geq 2 \cdot 3^k / \hat{a}$ вытекает из следствия 1. Благодаря (3.8) будем иметь неравенство

$$1 \leq \bar{\theta} \lambda(\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}) (\bar{x}_{\nu+1} - \bar{x}_\nu)^{2[k, q]}. \quad (3.9)$$

Кроме того, при любом $c \in (\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1})$ выполнено противоположное неравенство

$$1 > \bar{\theta} \lambda(\bar{x}_\nu, c) (c - \bar{x}_\nu)^{2[k, q]}. \quad (3.10)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть $\{x_j\}_{j=0}^\infty$ — произвольная λ -последовательность. Пусть $\{\bar{x}_\nu\}_{\nu=0}^\infty$ — специальная $\bar{\lambda}$ -последовательность. Тогда найдется число $D(\Xi) > 1$ такое, что справедлива импликация

$$(x_L \leq \bar{x}_N) \Rightarrow (L \leq (D + 1)N). \quad (3.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно установить неравенство

$$\bar{x}_{\nu+1} - \bar{x}_\nu \leq D(x_{j+1} - x_j) \quad (3.12)$$

для вложенных отрезков $[x_j, x_{j+1}] \subset [\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}]$. Действительно, на промежутке $[\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1})$ расположится не более D целых отрезков $[x_j, x_{j+1}]$ и, возможно, два не-целых отрезка на концах. Всего отрезок $[\bar{x}_0, \bar{x}_N]$ будет содержать не более $(D+1)N$ отрезков $[x_j, x_{j+1}]$, поэтому будет справедливо (3.11). Для доказательства (3.12) установим неравенство

$$(c - \bar{x}_\nu) \leq D(x_{j+1} - x_j) \quad (3.13)$$

при некотором $c \geq \bar{x}_{\nu+1}$.

Напомним, что $\bar{\theta} \geq 2 \cdot 3^k / \hat{a}$. Применим утверждение 2 к числам $z = \bar{x}_\nu$, $a = x_j$, $b = x_{j+1}$, число c выберем ниже. Положим

$$D = \max\left(\frac{3}{2}, \theta \frac{\hat{a}(\bar{e}_k + 1)}{3^k}, \theta \frac{\hat{a}(\bar{e}_q + 1)}{3^q}\right),$$

число c_1 выберем из равенства

$$\frac{c_1 - \bar{x}_\nu}{x_{j+1} - x_j} = D, \quad (3.14)$$

обеспечивающего (3.13). Если окажется, что $c_1 - \bar{x}_\nu < 1$, то $x_{j+1} - x_j < 1$. В таком случае при $i = k, q$

$$\frac{3^i(c_1 - \bar{x}_\nu)}{\theta(x_{j+1} - x_j)} \geq \hat{a}(\bar{e}_i + 1) \geq \frac{\hat{a}(\bar{e}_i + 1)}{\theta \lambda(x_j, x_{j+1})(x_{j+1} - x_j)^{2i}}$$

и условие (3.6) выполнено. Положим $c = \max(c_1, x_{j+1})$. Тогда из (3.7) при $i = k, q$ получаем, что точка $\bar{x}_{\nu+1}$ специальной $\bar{\lambda}$ -последовательности должна удовлетворять неравенству $\bar{x}_{\nu+1} \leq c$. Поскольку $x_{j+1} < \bar{x}_{\nu+1}$, то $c = c_1$ и (3.13) справедливо.

Если же окажется, что $c_1 - \bar{x}_\nu \geq 1$, то из (3.14) следует, что $D(x_{j+1} - x_j) \geq 1$. Положим $i = q$ и выберем c_2 из (3.6), считая его равенством. При этом

$$\frac{c_2 - \bar{x}_\nu}{x_{j+1} - x_j} = \frac{\hat{a}(\bar{e}_q + 1)}{3^q \lambda(x_j, x_{j+1})(x_{j+1} - x_j)^{2q}} \leq \theta \frac{\hat{a}(\bar{e}_q + 1)}{3^q}.$$

Положим

$$c = \max\left(c_2, \bar{x}_\nu + 1, \bar{x}_\nu + \frac{3(x_{j+1} - x_j)}{2}, x_{j+1}\right).$$

Тогда при $c > x_{j+1}$ соотношения (3.6), (3.13) остаются выполненными. Применяя утверждение 2 с $i = q$, из (3.7), как и раньше, устанавливаем, что $\bar{x}_{\nu+1} \leq c$. Утверждение 3 доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть N, ν таковы, что $x_N \geq \bar{x}_{\nu+1}$. Тогда существует постоянная $E(\Xi) \geq 1$ такая, что справедливо неравенство

$$\lambda(N) \leq E\lambda(\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}). \quad (3.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай, когда $\bar{x}_{\nu+1} - \bar{x}_\nu > 1$. Тогда в силу (3.9) можно подобрать $c < \bar{x}_{\nu+1}$ так, чтобы выполнялись неравенства $\delta_\nu = c - \bar{x}_\nu > 1$ и

$$\frac{1}{2} \leq \bar{\theta} \lambda(\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}) \delta_\nu^{2q}. \quad (3.16)$$

Кроме того, ввиду (3.8) найдется такая функция $f \in C_0^\infty(\Omega)$, $\int_Q f^2 dx dy = 1$, $Q = \Omega_{\bar{x}_\nu}^c$, что

$$\int_Q F(f) dx dy \leq 2\lambda(\bar{x}_\nu, c) \leq 3\lambda(\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}). \quad (3.17)$$

Покажем, что существует $\varepsilon(\Xi) > 0$ такое, что

$$\delta = \int_{\Omega_a^b} f^2 dx d\mathbf{y} \geq \frac{1}{2\tilde{e}_q}, \quad (3.18)$$

где $a = \bar{x}_\nu + \varepsilon\delta_\nu$, $b = c - \varepsilon\delta_\nu$. Для этого запишем неравенство, следующее из (3.3):

$$\int_{Q \setminus \Omega_a^b} f^2 dx d\mathbf{y} \leq \tilde{e}_q \int_{\Omega_a^b} f^2 dx d\mathbf{y} + \frac{(8\varepsilon\delta_\nu^2)^q}{\hat{a}} \int_Q F(f) dx d\mathbf{y}, \quad \varepsilon \leq \frac{1}{6}. \quad (3.19)$$

Из неравенства (3.19) при помощи (3.17), (3.10) выводим соотношение $1 - \delta \leq \tilde{e}_q \delta + \frac{2(8\varepsilon)^q}{\hat{a}\bar{\theta}}$. Тогда при $\delta < \frac{1}{4}$, $\varepsilon = \min\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{8}\left(\frac{\hat{a}\bar{\theta}}{8}\right)^{1/q}\right)$, поскольку $\tilde{e}_q > 2$, из него выводим $\delta \geq \frac{1}{2\tilde{e}_q}$. Тем самым, (3.18) доказано.

Теперь выберем срезающую функцию $h(x) \in C_0^\infty(\bar{x}_\nu, c)$, равную 1 на $[a, b]$, такую, что

$$|D_x^i h| \leq \frac{\bar{a}_i}{(\varepsilon\delta_\nu)^i}, \quad \bar{a}_{i+1} \geq \bar{a}_i.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I &= \int_Q F(hf) dx d\mathbf{y} = \int_Q \left(h^2 B(f) + \sum_{i=q}^k a_i(x, \mathbf{y}) \left[\sum_{p=0}^i C_i^p D_x^p h D_x^{i-p} f \right]^2 \right) dx d\mathbf{y} \\ &\leq \int_Q \left(B(f) + \bar{a} 2^{2k} \bar{a}_k^2 \sum_{i=q}^k \sum_{p=0}^i \frac{(D_x^{i-p} f)^2}{(\varepsilon\delta_\nu)^{2p}} \right) dx d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Пользуясь леммой 1, находим, что

$$\begin{aligned} I &\leq \int_Q \left(B(f) + \bar{a} 2^{2k} \bar{a}_k^2 \sum_{i=q}^k i \left[(D_x^i f)^2 + G_i \frac{f^2}{(\varepsilon\delta_\nu)^{2i}} \right] \right) dx d\mathbf{y} \\ &\leq \int_Q B(f) dx d\mathbf{y} + \bar{a} 2^{2k} \bar{a}_k^2 k \int_Q \left(\frac{A(f)}{\hat{a}} + \frac{(k-q+1) \max_{i=\overline{q,k}} G_i f^2}{\varepsilon^{2k} \delta_\nu^{2q}} \right) dx d\mathbf{y} \\ &\leq E_1(\Xi) \int_Q \left(F(f) + \frac{f^2}{\varepsilon^{2k} \delta_\nu^{2q}} \right) dx d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Далее, применяя (3.17) и (3.16), будем иметь

$$I \leq E_1(\Xi) \left(3\lambda(\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}) + \frac{2\bar{\theta}\lambda(\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1})}{\varepsilon^{2k}} \right) \leq E_2(\Xi) \lambda(\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}).$$

Учитывая, что

$$\lambda(N) \leq I \left(\int_Q (hf)^2 dx d\mathbf{y} \right)^{-1} \leq I \left(\int_{\Omega_a^b} f^2 dx d\mathbf{y} \right)^{-1} \leq 2\tilde{e}_q E_2(\Xi) \lambda(\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}),$$

устанавливаем неравенство (3.15).

Доказательство утверждения 4 в случае $\bar{x}_{\nu+1} - \bar{x}_\nu \leq 1$ проводится аналогично.

СЛЕДСТВИЕ 2. При $t > \max\{\bar{\lambda}^{-1}(1), \lambda^{-1}(1)\}$ справедливо неравенство

$$N(t) \leq C(\Xi)\bar{N}(t), \quad C(\Xi) = 2(D + E).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $N(t) > (D + 1)(\bar{N}(t) + 1)$. По утверждению 3 имеем $x_{N(t)} \geq \bar{x}_{\bar{N}(t)+1}$. По утверждению 4, примененному ко всем $\nu \leq \bar{N}(t)$, имеем $\lambda(N(t)) \leq E\lambda(\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1})$. Кроме того, справедливы неравенства $\lambda(N(t)) \leq \lambda(1) \leq \lambda(-\infty, x_0) = \lambda(-\infty, \bar{x}_0)$. Поэтому имеем неравенство $\lambda(N(t)) \leq E\bar{\lambda}(\bar{N}(t) + 1)$. Отсюда $N(t) \leq t\lambda(N(t)) \leq Et\bar{\lambda}(\bar{N}(t) + 1) \leq E(\bar{N}(t) + 1)$. Следствие доказано.

§ 4. Примеры

Для областей типа слоя (0.16) естественно выразить оценку (0.14) в терминах функции $f(x)$. С этой целью докажем следующее утверждение.

ЛЕММА 3. Рассмотрим область $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}_2 : 0 < x < r, y > 0\}$ и функцию $g(x, y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_2)$, равную нулю в окрестности луча $\{(x, y) \in \mathbb{R}_2 : x = 0, y > h\}$. Справедливо обобщенное неравенство Фридрихса–Стеклова

$$\int_Q g^2(x, y) dx dy \leq E_p \left\{ r^{2i} \int_Q (D_x^i g)^2 dx dy + h^{2p} \int_Q (D_y^p g)^2 dx dy \right\}, \quad p, i \in \mathbb{N}, \quad (4.1)$$

E_p – положительная постоянная, зависящая от p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду того что $g(0, y) = 0$ при $y > h$, можем записать неравенство Фридрихса–Стеклова при каждом фиксированном $y, y > h$:

$$\int_0^r g^2(x, y) dx \leq r^2 \int_0^r (D_x g)^2(x, y) dx.$$

Применяя последнее i раз и интегрируя по $y, y > h$, устанавливаем, что

$$\int_0^r \int_{y>h} g^2(x, y) dx dy \leq r^{2i} \int_0^r \int_{y>h} (D_x^i g)^2(x, y) dx dy. \quad (4.2)$$

Далее, при каждом $x, 0 < x < r$, запишем неравенство

$$\int_0^h g^2(x, y) dy \leq e_p \int_h^{2h} g^2(x, y) dy + 12^p h^{2p} \int_0^{2h} (D_y^p g)^2(x, y) dy,$$

которое следует из (3.1) при $a = h, d = h, c = 2h$. Проинтегрировав последнее по $x, 0 < x < r$, выводим

$$\int_0^r \int_0^h g^2(x, y) dx dy \leq e_p \int_0^r \int_h^{2h} g^2 dx dy + 12^p h^{2p} \int_0^r \int_0^{2h} (D_y^p g)^2 dx dy. \quad (4.3)$$

Соединяя (4.2), (4.3), получаем требуемое (4.1).

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Пусть коэффициенты уравнения (0.1) подчиняются дополнительному требованию (0.15). Тогда Π^s -последовательность является λ -последовательностью для $\Omega[f]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО выведем из леммы 3.

Функцию $g(x, \mathbf{y}) \in C_0^\infty(\Omega[f])$ продолжим нулем вне $\Omega[f]$. Обозначим через $\hat{x}_j$ точку минимума функции $f(x)$ на $[x_j, x_{j+1}]$: $f(\hat{x}_j) = \min_{[x_j, x_{j+1}]} f(x)$. Рассмотрим область $Q = \{(x, y_1) \in \mathbb{R}_2 : x_j < x < x_{j+1}, |y_1| < f(x)\}$. Обозначим

$$Q_1^\pm = \{(x, y_1) \in \mathbb{R}_2 : x_j < x < \hat{x}_j, \pm y_1 > 0\},$$

$$Q_2^\pm = \{(x, y_1) \in \mathbb{R}_2 : \hat{x}_j < x < x_{j+1}, \pm y_1 > 0\}.$$

Предположим сначала, что $\Delta_j \geq 1$. Воспользовавшись неравенством (4.1) для полуполосы Q_1^+ , получим

$$\begin{aligned} & \int_{Q_1^+} g^2(x, \mathbf{y}) dx dy_1 \\ & \leq E_s \left\{ (\hat{x}_j - x_j)^{2q} \int_{Q_1^+} (D_x^q g)^2 dx dy_1 + f^{2s}(\hat{x}_j) \int_{Q_1^+} (D_{y_1}^s g)^2 dx dy_1 \right\}. \end{aligned}$$

Аналогичные неравенства установим для Q_1^-, Q_2^+, Q_2^- . Отметим, что из определения Π^s -последовательности следует равенство $f^{2s}(\hat{x}_j) = \Delta_j^{2q}$. Сложив четыре неравенства, будем иметь

$$\int_Q g^2(x, \mathbf{y}) dx dy_1 \leq E_s \Delta_j^{2q} \int_Q \{(D_x^q g)^2 + (D_{y_1}^s g)^2\} dx dy_1.$$

Аналогично при $\Delta_j < 1$ установим неравенство

$$\int_Q g^2(x, \mathbf{y}) dx dy_1 \leq E_m \Delta_j^{2k} \int_Q \{(D_x^k g)^2 + (D_{y_1}^m g)^2\} dx dy_1.$$

Таким образом, из двух неравенств имеем

$$\begin{aligned} & \int_Q g^2(x, \mathbf{y}) dx dy_1 \\ & \leq \max(E_s, E_m) \Delta_j^{2[k, q]} \int_Q [(D_x^k g)^2 + (D_x^q g)^2 + (D_{y_1}^m g)^2 + (D_{y_1}^s g)^2] dx dy_1. \end{aligned}$$

Проинтегрируем последнее по $y' = (y_2, y_3, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_{n-1}$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{x_j}^{x_{j+1}}[f]} g^2(x, \mathbf{y}) dx d\mathbf{y} \leq \max(E_s, E_m) \Delta_j^{2[k, q]} \\ & \times \int_{\Omega_{x_j}^{x_{j+1}}[f]} \{(D_x^k g)^2 + (D_x^q g)^2 + (D_{y_1}^m g)^2 + (D_{y_1}^s g)^2\} dx d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Используя условия (0.15), (0.4), получаем

$$\int_{\Omega_{x_j^{j+1}}[f]} g^2(x, y) dx dy \leq \frac{\max(E_s, E_m)}{\min(\widehat{a}, \widehat{b})} \Delta_j^{2[k, q]} \int_{\Omega_{x_j^{j+1}}[f]} F(g) dx dy.$$

Таким образом, имеем оценку

$$1 \leq \frac{\max(E_s, E_m)}{\min(\widehat{a}, \widehat{b})} \Delta_j^{2[k, q]} \lambda(x_j, x_{j+1}; \Omega[f]).$$

Утверждение доказано для $\theta \geq \max(E_s, E_m) \min^{-1}(\widehat{a}, \widehat{b})$.

Для функции $\rho^{[a, b]}$ приведем некоторые неравенства, которые будут использованы в дальнейшем:

$$\begin{aligned} \text{если } \rho \leq \varrho, \text{ то } \rho^{[a, b]} &\leq \varrho^{[a, b]}; \\ \text{если } c \geq 1, \text{ то } (c\rho)^{[a, b]} &\leq \rho^{[a, b]} c^{\max(a, b)}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Поскольку для Π^s -последовательности справедливы неравенства

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{dx}{f^{[m/k, s/q]}(x)} \leq \frac{x_{j+1} - x_j}{\min_{[x_j, x_{j+1}]} f^{[m/k, s/q]}(x)} = 1, \quad j = \overline{0, \infty},$$

то

$$\int_{x_0}^{x_N} \frac{dx}{f^{[m/k, s/q]}(x)} \leq N, \quad N \in \mathbb{N}. \quad (4.5)$$

Обозначим $\delta(N) = \max_{j=\overline{0, N-1}} \Delta_j$, $N \in \mathbb{N}$. Поскольку Π^s -последовательность является λ -последовательностью для $\Omega[f]$, то имеем

$$\rho_*^{2[k, q]}(x_N) \geq \delta^{2[k, q]}(N) = \max_{j=\overline{0, N-1}} \Delta_j^{2[k, q]} \geq \frac{1}{\theta \min_{j=\overline{0, N-1}} \lambda(x_j, x_{j+1})}.$$

Кроме того, ввиду (0.11) можно подобрать ϵ , $0 < \epsilon < 1$:

$$\rho_*^{2[k, q]}(x_N) \geq \delta^{2[k, q]}(N) \geq \delta^{2[k, q]}(1) = \Delta_0^{2[k, q]} \geq \frac{\epsilon}{\theta \lambda(-\infty, x_0)}.$$

В итоге установлено неравенство

$$\lambda(N) \geq \frac{\epsilon}{\theta \delta^{2[k, q]}(N)} \geq \frac{\epsilon}{\theta \rho_*^{2[k, q]}(x_N)}, \quad N \in \mathbb{N}. \quad (4.6)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Для областей $\Omega[f]$ вида (0.16) при условии (0.17) и дополнительном требовании (0.15) на коэффициенты уравнения решение задачи (0.1)–(0.3) при $t \geq T_1$ удовлетворяет оценке (0.20):

$$\|u(t)\|_{\Omega[f]} \leq M_1 \exp\left(-\kappa_1 \int_{x_0}^{r(t)} \frac{dx}{f^{[m/k, s/q]}(x)}\right) \|\varphi\|_{\Omega[f]},$$

в которой функция $r(t)$, $t \geq 0$, определяется равенством (0.19). Здесь $\kappa_1(\Xi, R_0, m, s, f)$, $M_1(\Xi)$, $T_1(R_0, f, m, s, k, q)$ – положительные постоянные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{x_j\}_{j=0}^\infty$ — Π^s -последовательность, для нее справедливо неравенство (4.5). Ввиду (0.15) согласно утверждению 5 такая последовательность является λ -последовательностью для области $\Omega[f]$, поэтому имеет место неравенство (4.6).

Отметим, что из условия (0.17) следует, что $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \infty$. Поэтому можем выбрать T_1 такое, что при $t \geq T_1$ $r(t) \geq x_2$. Зафиксируем t , $t \geq T_1$. Пусть $r(t) \in [x_N, x_{N+1})$. Тогда по (4.6) имеем

$$\lambda(N) \geq \frac{\epsilon}{\theta \rho_*^{2[k,q]}(x_N)} \geq \frac{\epsilon}{\theta \rho_*^{2[k,q]}(r(t))}. \quad (4.7)$$

Далее, согласно (4.5) установим

$$\int_{x_0}^{r(t)} \frac{dx}{f^{[m/k, s/q]}(x)} \leq \int_{x_0}^{x_{N+1}} \frac{dx}{f^{[m/k, s/q]}(x)} \leq N + 1. \quad (4.8)$$

Подставляя (4.7), (4.8) в (2.15), получаем

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{\Omega[f]}^2 &\leq \left[\widetilde{M} \exp \left(-2\kappa \left(\int_{x_0}^{r(t)} \frac{dx}{f^{[m/k, s/q]}(x)} - 1 \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \exp \left(-\frac{2\epsilon t}{\theta \rho_*^{2[k,q]}(r(t))} \right) \right] \|\varphi\|_{\Omega[f]}^2. \end{aligned}$$

Отсюда благодаря (0.19) выводим (0.20).

Конечно, в общем случае оценка (0.20) оказывается загрубленной по отношению к оценке (0.14). Докажем, что если выполнено условие (0.21) и $s = l$, то оценка будет того же порядка.

Заметим сначала, что если непрерывные функции $f(x)$, $g(x)$, определенные на $\mathbb{R}$, удовлетворяют неравенству $g(x) \leq f(x)$, $x \in [a, b]$, то

$$\lambda(a, b; \Omega[f]) \leq \lambda(a, b; \Omega[g]). \quad (4.9)$$

Это следует из того, что для $\Omega[g]$ сужается множество, по которому берется инфимум в (0.7). Рассмотрим теперь плоский слой $\Omega[h]$, $h = \text{const}$, и установим оценки

$$\gamma_1 h^{-2[m,l]} \leq \lambda(a, b; \Omega[h]) \leq \gamma_2 h^{-2[m,l]}. \quad (4.10)$$

Положим

$$G(g) = \sum_{i=q}^k (D_x^i g)^2 + \sum_{i=l}^m \sum_{|\alpha|=i} (D_{\mathbf{y}}^\alpha g)^2;$$

тогда ввиду неравенства $F(g) \leq C_1 G(g)$, вытекающего из ограниченности коэффициентов уравнения (0.1), имеем

$$\lambda(a, b; \Omega[h]) \leq C_1 \inf_{g(x, \mathbf{y}) \in C_0^\infty(\Omega[h])} \left\{ \int_{\Omega_a^b[h]} G(g) dx dy : \int_{\Omega_a^b[h]} g^2 dx dy = 1 \right\}.$$

Аналогично при $j = l$ или m из (0.15), справедливого для $s = l$, следует неравенство

$$\lambda(a, b; \Omega[h]) \geq \widehat{b} \inf_{g(x, \mathbf{y}) \in C_0^\infty(\Omega[h])} \left\{ \int_{\Omega_a^b[h]} (D_{y_1}^j g)^2 dx dy : \int_{\Omega_a^b[h]} g^2 dx dy = 1 \right\} \equiv \widehat{b} \lambda_j.$$

Очевидно,

$$\lambda \equiv \inf_{g(x, \mathbf{y}) \in C_0^\infty(\Omega[h])} \frac{\int_{\Omega_a^b[h]} \sum_{i=l}^m (D_{y_1}^i g)^2 dx dy}{\int_{\Omega_a^b[h]} g^2 dx dy} \leq \inf_{g(x, \mathbf{y}) \in C_0^\infty(\Omega[h])} \frac{\int_{\Omega_a^b[h]} G(g) dx dy}{\int_{\Omega_a^b[h]} g^2 dx dy}. \quad (4.11)$$

Легко видеть, что в действительности в (4.11) имеет место равенство. Поэтому $\widehat{b} \lambda_j \leq \lambda(a, b; \Omega[h]) \leq C_1 \lambda$. Если $h \geq 1$, то, совершая замену переменных $y_1 = h\tau$, получаем

$$\begin{aligned} \lambda &= \inf_{g(y_1) \in C_0^\infty(-h, h)} \frac{\int_{-h}^h \sum_{i=l}^m (D_{y_1}^i g)^2 dy_1}{\int_{-h}^h g^2 dy_1} \\ &= \inf_{g(\tau) \in C_0^\infty(-1, 1)} \frac{\int_{-1}^1 \sum_{i=l}^m h^{-2i} (D_\tau^i g)^2 d\tau}{\int_{-1}^1 g^2 d\tau} \leq \frac{C_2}{h^{2l}}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Таким образом,

$$\frac{C_3}{h^{2l}} = \widehat{b} \lambda_l \leq \lambda(a, b; \Omega[h]) \leq \frac{C_4}{h^{2l}}.$$

Если же $h < 1$, то совершенно аналогично, вынося в (4.12) множитель $1/h^{2m}$, получаем

$$\frac{C_3}{h^{2m}} = \widehat{b} \lambda_m \leq \lambda(a, b; \Omega[h]) \leq \frac{C_4}{h^{2m}}.$$

Неравенства (4.10) установлены.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Пусть выполнены условия (0.15), (0.21) и $s = l \leq m$. Тогда для областей $\Omega[f]$ вида (0.16) оценка (0.20) решения задачи (0.1)–(0.3) будет того же порядка, что и оценка (0.14). При этом Π^l -последовательность является оптимальной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для первого утверждения достаточно установить неравенства

$$\alpha_1 N \leq \int_{x_0}^r \frac{dx}{f^{[m/k, l/q]}(x)} \leq \alpha_2 N, \quad (4.13)$$

$$\beta_1 \rho_*^{-2[k, q]}(r) \leq \lambda(N) \leq \beta_2 \rho_*^{-2[k, q]}(r) \quad (4.14)$$

при $r \in [x_N, x_{N+1})$, $N \geq 1$. Правое неравенство (4.13) и левое (4.14) уже доказаны (см. неравенства (4.8), (4.7)). Из определения Π^l -последовательности имеем

$$\Delta_j = x_{j+1} - x_j = f^{[m/k, l/q]}(\hat{x}_j), \quad (0.18')$$

где $\min_{[x_j, x_{j+1}]} f(x) = f(\hat{x}_j)$. Пользуясь (0.18'), из неравенства (0.21) выводим

$$\max\{f(z) : z \in [\hat{x}_j - \Delta_j, \hat{x}_j + \Delta_j]\} \leq cf(\hat{x}_j).$$

Ввиду включения $[x_j, x_{j+1}] \subset [\hat{x}_j - \Delta_j, \hat{x}_j + \Delta_j]$ имеем

$$f(\hat{x}_j) \leq f(x) \leq cf(\hat{x}_j), \quad x \in [x_j, x_{j+1}]. \quad (0.21')$$

Применяя (4.4), (0.18'), устанавливаем

$$\begin{aligned} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{dx}{f^{[m/k, l/q]}(x)} &\geq \frac{x_{j+1} - x_j}{\max_{[x_j, x_{j+1}]} f^{[m/k, l/q]}(x)} \geq \frac{x_{j+1} - x_j}{(cf)^{[m/k, l/q]}(\hat{x}_j)} \\ &\geq \frac{1}{c^{\max(m/k, l/q)}}. \end{aligned}$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\int_{x_0}^r \frac{dx}{f^{[m/k, l/q]}(x)} \geq \int_{x_0}^{x_N} \frac{dx}{f^{[m/k, l/q]}(x)} \geq \frac{N}{c^{\max(m/k, l/q)}}.$$

Итак, неравенства (4.13) доказаны.

Далее, выведем неравенства

$$\delta(N) \leq \rho_*(x_N) \leq 2\delta(N), \quad N \geq 1. \quad (4.15)$$

Левое неравенство очевидно, докажем правое. Пусть z_* — вершина прямоугольника $P^l(\rho_*(x_N), z_*)$ максимальной ширины $\rho_*(x_N)$, содержащегося в $\Gamma_{x_0}^{x_N}(f)$. Середина его стороны $-z_* + \rho_*(x_N)/2$. Пусть x_{j*} и x_{j*+1} — точки на оси Ox , ближайшие к $z_* + \rho_*(x_N)/2$ слева и справа соответственно. Если $z_* - x_{j*} \geq 0$ или $x_{j*+1} - z_* \geq \rho_*(x_N)$, то $x_{j*+1} - x_{j*} \geq \rho_*(x_N)/2$. Иначе $z_* < x_{j*} < x_{j*+1} < z_* + \rho_*(x_N)$. Тогда прямоугольник $P^l(\Delta_{j*}, x_{j*}) \subset P^l(\rho_*(x_N), z_*)$, поэтому не является максимальным, каковым его выбирали при построении x_{j*+1} . Получили противоречие. Итак, справедливо правое неравенство (4.15).

Докажем неравенства

$$\gamma_3 f^{-2[m, l]}(\hat{x}_j) \leq \lambda(a, b; \Omega[f]) \leq \gamma_2 f^{-2[m, l]}(\hat{x}_j), \quad (4.16)$$

справедливые для любого отрезка $[a, b] \subset [x_j, x_{j+1}]$. Они следуют из (4.9) благодаря (0.21') и (4.10).

Пользуясь равенством (0.18'), из (4.16), (4.6) нетрудно вывести неравенства

$$\gamma_4 \delta^{-2[k, q]}(N) \leq \lambda(N) \leq \gamma_2 \delta^{-2[k, q]}(N), \quad N \geq 1. \quad (4.17)$$

Очевидно, $f(\widehat{x}_{j+1}) \leq f(x_{j+1})$, поэтому из (0.21') имеем $f(\widehat{x}_{j+1}) \leq cf(\widehat{x}_j)$. Легко видеть, что верно и симметричное неравенство $f(\widehat{x}_j) \leq cf(\widehat{x}_{j+1})$. Снова, используя равенства (0.18'), при помощи (4.4) оцениваем отношения

$$\frac{\Delta_{j+1}}{\Delta_j} \leq c^{\max(m/k, l/q)}, \quad j = \overline{0, \infty}. \quad (4.18)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \delta(N+1) &= \max\{\delta(N), \Delta_N\} \leq \max\{\delta(N), c^{\max(m/k, l/q)} \delta(N)\} \\ &\leq c^{\max(m/k, l/q)} \delta(N), \quad N \geq 1. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Далее, из (4.17), (4.19), (4.15) выводим

$$\lambda(N) \leq \frac{\gamma_2}{\delta^{2[k, q]}(N)} \leq \frac{\gamma_5}{\delta^{2[k, q]}(N+1)} \leq \frac{\beta_2}{\rho_*^{2[k, q]}(x_{N+1})} \leq \frac{\beta_2}{\rho_*^{2[k, q]}(r)}.$$

Неравенства (4.14) установлены. Первая часть утверждения доказана.

При доказательстве второй части утверждения величины, относящиеся к Π^l -последовательности $\{\bar{x}_j\}_{j=0}^\infty$, будем помечать чертой сверху. Сначала установим для Π^l -последовательности импликацию утверждения 3. Пусть $\{x_j\}_{j=0}^\infty$ — произвольная λ -последовательность. Для вложенных отрезков $[x_j, x_{j+1}] \subset [\bar{x}_\nu, \bar{x}_{\nu+1}]$ из определения λ -последовательности, (4.16) и (0.18') следуют неравенства

$$\Delta_j^{2[k, q]} \geq \frac{1}{\theta \lambda(x_j, x_{j+1})} \geq \frac{f^{2[m, l]}(\widehat{x}_\nu)}{\theta \gamma_2} = \frac{\overline{\Delta}_\nu^{2[k, q]}}{\theta \gamma_2},$$

доказывающие импликацию.

Докажем неравенство (3.15) утверждения 4. Обозначим $Q_\nu = P^l(\overline{\Delta}_\nu, \bar{x}_\nu) \times \{y' = (y_2, y_3, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_{n-1}\}$. При $x_N \geq \bar{x}_{\nu+1}$ ввиду вложений $Q_\nu \subset \Omega_{\bar{x}_\nu}^{\bar{x}_\nu+1}[f] \subset \Omega^{x_N}[f] \subset \Omega[f]$ из (0.12) следует

$$\lambda(N) \leq C_1 \inf_{g(x, \mathbf{y}) \in C_0^\infty(Q_\nu)} \left\{ \int_{Q_\nu} G(g) dx d\mathbf{y} : \int_{Q_\nu} g^2 dx d\mathbf{y} = 1 \right\}. \quad (4.20)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \lambda_* &\equiv \inf_{g(x, \mathbf{y}) \in C_0^\infty(Q_\nu)} \frac{\int_{Q_\nu} \left\{ \sum_{i=q}^k (D_x^i g)^2 + \sum_{i=l}^m (D_{y_1}^i g)^2 \right\} dx d\mathbf{y}}{\int_{Q_\nu} g^2 dx d\mathbf{y}} \\ &\leq \inf_{g(x, \mathbf{y}) \in C_0^\infty(Q_\nu)} \frac{\int_{Q_\nu} G(g) dx d\mathbf{y}}{\int_{Q_\nu} g^2 dx d\mathbf{y}}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Легко видеть, что в действительности в (4.21) имеет место равенство. Поэтому $\lambda(N) \leq C_1 \lambda_*$. Если $\overline{\Delta}_\nu \geq 1$, то, совершая замену переменных $x = \overline{\Delta}_\nu \sigma + \overline{x}_\nu$, $y_1 = \overline{\Delta}_\nu^{q/l} \tau$, получаем

$$\begin{aligned} \lambda_* &= \inf_{g(x, y_1) \in C_0^\infty(P^l(\overline{\Delta}_\nu, \overline{x}_\nu))} \frac{\int_{P^l(\overline{\Delta}_\nu, \overline{x}_\nu)} \left\{ \sum_{i=q}^k (D_x^i g)^2 + \sum_{i=l}^m (D_{y_1}^i g)^2 \right\} dx dy_1}{\int_{P^l(\overline{\Delta}_\nu, \overline{x}_\nu)} g^2 dx dy_1} \\ &= \inf_{g(\sigma, \tau) \in C_0^\infty(P^l(1, 0))} \frac{\int_0^1 \int_0^1 \left\{ \sum_{i=q}^k \overline{\Delta}_\nu^{-2i} (D_\sigma^i g)^2 + \sum_{i=l}^m \overline{\Delta}_\nu^{-2qi/l} (D_\tau^i g)^2 \right\} d\sigma d\tau}{\int_0^1 \int_0^1 g^2 d\sigma d\tau} \\ &\leq \frac{C_2}{\overline{\Delta}_\nu^{2q}}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Таким образом,

$$\lambda(N) \leq \frac{C_3}{\overline{\Delta}_\nu^{2q}}$$

и неравенство (0.8), записанное для Π -последовательности $\{\overline{x}_j\}_{j=0}^\infty$, обеспечивает (3.15). Если же $\overline{\Delta}_\nu < 1$, то рассуждаем аналогично, при этом в (4.22) делаем замену переменных $x = \overline{\Delta}_\nu \sigma + \overline{x}_\nu$, $y_1 = \overline{\Delta}_\nu^{k/m} \tau$ и выносим множитель $C_2 / \overline{\Delta}_\nu^{2k}$.

Далее, оптимальность Π^l -последовательности устанавливается точно так же, как в следствии 2. Утверждение 7 доказано.

Для монотонно неубывающей функции, удовлетворяющей (0.21), справедливо неравенство

$$\varepsilon_1 f^{[m/k, s/q]}(r) \leq \rho_*(r) \leq f^{[m/k, s/q]}(r), \quad r > 0. \quad (4.23)$$

В самом деле, пусть $P^s(\rho_*, z_*)$ — прямоугольник максимальной ширины ρ_* , содержащийся в $\Gamma_{x_0}^r(f)$. Ввиду монотонного неубывания функции $f(x)$ справедливо равенство $f^{[m/k, s/q]}(z_*) = r - z_* = \rho_*(r)$. Согласно (0.21) имеем

$$f(r) = \max_{[z_* - f^{[m/k, s/q]}(z_*), z_* + f^{[m/k, s/q]}(z_*)]} f(z) \leq cf(z_*),$$

откуда следует правое неравенство (4.23) с $\varepsilon_1 = c^{-\max(m/k, s/q)}$.

Тогда функция $r(t)$, $t \geq 0$, в неравенстве (0.20) может быть определена из равенства

$$\int_{x_0}^r \frac{dx}{f^{[m/k, s/q]}(x)} = \frac{t}{f^{2[m, s]}(r)}. \quad (0.19')$$

В частности, взяв функцию $f(r) = r^a$, $a < q/s$, $r > 0$, можно определить функцию

$$r(t) = t^{q/(q-sa+2qsa)}, \quad t \geq 0.$$

Тогда оценка (0.20) приобретает вид (0.22). При $k = q = m = l = 2$ будем иметь

$$\|u(t)\|_{\Omega[f]} \leq M_2 \exp(-\kappa_2 t^{(1-a)/(1+3a)}) \|\varphi\|_{\Omega[f]}. \quad (0.22')$$

При несколько других краевых условиях для уравнений 4-го порядка в работе [10] была получена такая же по форме оценка и установлена ее точность.

§ 5. Оценка снизу

Доказательство теоремы 2 основано на неравенстве Гарнака, установленном Ю. Мозером в [14]. Сформулируем неравенство Гарнака в удобном для нас виде: для неотрицательного в цилиндре $Q = (0, 9\rho^2] \times B(2\rho, \mathbf{0}) \subset \mathbb{R}_{n+1}$ решения уравнения (0.1) при $k = q = m = l = 1$ справедливо неравенство

$$\max_{Q^-} u(t, x, \mathbf{y}) \leq \widehat{H} \min_{Q^+} u(t, x, \mathbf{y}),$$

в котором постоянная $\widehat{H} \geq 1$ зависит только от n и констант параболичности уравнения второго порядка,

$$\begin{aligned} Q^- &= [\rho^2, 2\rho^2] \times B(\rho, \mathbf{w}), \\ Q^+ &= [8\rho^2, 9\rho^2] \times B(\rho, \mathbf{w}). \end{aligned}$$

Из неравенства Гарнака вытекает следующее утверждение.

ЛЕММА 4. Пусть $\widehat{M} = M \cup B(2\rho; (0, \mathbf{0})) \cup B(2\rho; (1, \mathbf{0}))$, где M – модельная трубка из введения, $\rho = a/8$. Тогда найдутся числа $h > 16\rho^2 = a^2/4$, $H > 0$ такие, что неотрицательное в $\widehat{D} = (0, \infty) \times \widehat{M}$ решение $u(t, x, \mathbf{y})$ уравнения (0.1) при $k = q = m = l = 1$ удовлетворяет неравенству

$$u(\rho^2, 0, \mathbf{0}) \leq Hu(\rho^2 + h, 1, \mathbf{0}). \quad (5.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия леммы цилиндр Q лежит в $\widehat{D}$. Положим $t_0 = \rho^2$, $t_1 = 8\rho^2 + t_0$, $\mathbf{v}_0 = (0, \mathbf{0})$, $\mathbf{v}_1 = (\rho, \mathbf{0})$. Очевидно, что $(t_0, \mathbf{v}_0) \in Q^-$ и $(t_1, \mathbf{v}_1) \in Q^+$. Тогда согласно неравенству Гарнака имеем

$$u(t_0, \mathbf{v}_0) \leq \max_{Q^-} u(t, x, \mathbf{y}) \leq \widehat{H} \min_{Q^+} u(t, x, \mathbf{y}) \leq \widehat{H} u(t_1, \mathbf{v}_1). \quad (5.2)$$

Далее, остается построить последовательность касающихся шаров $B(\rho_i, \mathbf{w}_i)$, первым и последним из которых являются соответственно шары $B(\rho; (0, \mathbf{0}))$ и $B(\rho; (1, \mathbf{0}))$, а затем записать неравенства, аналогичные (5.2), взяв в качестве $\mathbf{v}_i$ точки касания шаров. При этом шары следует выбирать достаточно малыми, чтобы удвоенные шары лежали в $\widehat{M}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Легко видеть, что при гомотетиях и параллельных переносах области $\widehat{D}$ остается справедливым неравенство вида (5.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2 для простоты проведем для значения $b = 4$.

Положим $\mathbf{v}_j = (x_j, \mathbf{0})$, $\rho_j = a(x_{j+1} - x_j)/8$, $t_0 = \rho_0^2$, $t_{j+1} = t_j + h(x_{j+1} - x_j)^2$, $j = \overline{0, \infty}$. Из условия (0.24) следуют неравенства

$$\rho_{j+1} \leq 4\rho_j, \quad j = \overline{0, \infty}. \quad (5.3)$$

Индукцией по j установим соотношения

$$t_j \geq \rho_j^2, \quad j = \overline{0, \infty}. \quad (5.4)$$

Действительно, по выбору $t_0 \geq \rho_0^2$ и предположению индукции, пользуясь (5.3), получаем

$$t_{j+1} = t_j + h(x_{j+1} - x_j)^2 \geq \rho_j^2 + 16\rho_j^2 \geq \rho_{j+1}^2.$$

Ввиду (5.4) и включений $\mathbf{v}_j + (x_{j+1} - x_j)\widehat{M} \subset \Omega$ по лемме 4 для пар $(t_j, \mathbf{v}_j)$, $(t_{j+1}, \mathbf{v}_{j+1})$, $j = \overline{0, \infty}$, устанавливаем неравенства

$$u(t_j, \mathbf{v}_j) \leq Hu(t_{j+1}, \mathbf{v}_{j+1}). \quad (5.5)$$

Конечно, при $j = 0$ включение может не выполняться, но тем не менее точка $(x_0, \mathbf{0})$ является внутренней для области Ω , поэтому неравенство (5.5) будет так же выполняться и при $j = 0$, возможно с другой постоянной H .

Зафиксируем некоторое положительное число $t > t_0$ и положим $N = N(t)$. Пусть $r \leq N$ – первый номер, для которого $\delta(N+1) = \max_{j=\overline{0, N}} \Delta_j = x_{r+1} - x_r$. Далее, положим

$$\rho_j = \rho_r, \quad t_j = t_r + \frac{a^2}{8}\delta(N+1)^2(j-r), \quad \mathbf{v}_j = \mathbf{v}_r, \quad j = \overline{r+1, \infty}.$$

Очевидно, для пар $(t_j, \mathbf{v}_j)$, $(t_{j+1}, \mathbf{v}_{j+1})$, $j = \overline{r, \infty}$, выполнено неравенство Гарнака.

Обозначим через p первый номер, начиная с $p \geq r+1$, для которого $t_p \geq t$.

Согласно (5.1), ввиду того, что $\hat{H} \leq H$, справедливо неравенство

$$u(t_p, \mathbf{v}_p) \geq H^{-p}u(t_0, \mathbf{v}_0).$$

Более того, имеет место неравенство

$$\min_{(x, \mathbf{y}) \in B(\rho_r, \mathbf{v}_r)} u(t_p, x, \mathbf{y}) \geq H^{-p}u(t_0, x_0, \mathbf{0}). \quad (5.6)$$

При этом справедливы соотношения

$$p = r + (p - r) \leq N + \left(1 + \frac{8t}{a^2\delta^2(N+1)}\right).$$

Поскольку последовательность $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ является λ -последовательностью, то справедливо неравенство (4.6). Применяя (4.6), полагая $N = N(t)$ и пользуясь определением (0.13) функции $N(t)$, выводим

$$p \leq N + 1 + \frac{8\theta t \lambda(N+1)}{a^2\epsilon} < \left(1 + \frac{8\theta}{a^2\epsilon}\right)(N(t) + 1). \quad (5.7)$$

Учитывая монотонное невозрастание функции $E(t) \equiv \|u(t)\|$, $t \geq 0$, заключаем справедливость следующих неравенств

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^2(t, x, \mathbf{y}) dx d\mathbf{y} &\geq \int_{\Omega} u^2(t_p, x, \mathbf{y}) dx d\mathbf{y} \\ &\geq \int_{B(\rho_r, \mathbf{v}_r)} u^2(t_p, x, \mathbf{y}) dx d\mathbf{y} \geq C_1 \min_{(x, \mathbf{y}) \in B(\rho_r, \mathbf{v}_r)} u^2(t_p, x, \mathbf{y}) \rho_r^n. \end{aligned}$$

Используя (5.6), (5.7), при $t > t_0$ получаем

$$\begin{aligned} \|u(t)\|^2 &\geq \frac{a^n C_1}{8^n} u^2(t_0, x_0, \mathbf{0}) \delta^n (N(t) + 1) \exp \left[-(N(t) + 1) \left(2 + \frac{16\theta}{a^2 \epsilon} \right) \ln H \right] \\ &\geq C_2 \delta^n (1) \exp[-C_3 N(t)]. \end{aligned} \quad (5.8)$$

В условиях теоремы справедлива оценка (0.14) теоремы 1. В итоге для неотрицательного решения задачи при $t > T_0 = \max(t_0, 2/\lambda(2))$ получаем неравенства (0.25). Теорема 2 доказана.

Построенная в § 4 для области типа слоя (0.15) Π^l -последовательность $\{x_j\}_{j=0}^\infty$ при выполнении условия (0.21) удовлетворяет неравенству (4.18). Аналогичными рассуждениями доказывается неравенство

$$\frac{\Delta_{j+1}}{\Delta_j} \geq \frac{1}{c^{\max(m/k, l/q)}}, \quad j = \overline{0, \infty}.$$

Поэтому имеет место условие (0.24). Ввиду вложений

$$\{(x, y_1) \in \mathbb{R}_2 : x_j \leq x \leq x_{j+1}, -\Delta_j < y_1 < \Delta_j\} \times \mathbb{R}_{n-1} \subset \Omega[f], \quad j = \overline{0, \infty},$$

условие (0.23) при $k = q = l = m = 1$ выполнено очевидным образом.

Автор выражает искреннюю благодарность Ф. Х. Мукминову за предложенную тематику исследований, а также А. К. Гушину и В. П. Михайлову за стимулирующие обсуждения и полезные замечания.

Список литературы

1. Кондратьев В. А., Эйдельман С. Д. О свойствах решений линейных эволюционных систем с эллиптической пространственной частью // Матем. сб. 1970. Т. 81(123). С. 398–429.
2. Гушин А. К. Об оценках решений краевых задач для параболического уравнения второго порядка // Труды МИАН. 1973. Т. 126. С. 5–45.
3. Гушин А. К. Стабилизация решений второй краевой задачи для параболического уравнения второго порядка // Матем. сб. 1976. Т. 101(143). С. 459–499.
4. Ушаков В. И. Стабилизация решений третьей смешанной задачи для параболического уравнения в нецилиндрической области // Матем. сб. 1980. Т. 111(153). С. 95–115.
5. Лежнев А. В. О поведении при больших значениях времени неотрицательных решений второй смешанной задачи для параболического уравнения // Матем. сб. 1986. Т. 129. № 2. С. 186–200.
6. Мукминов Ф. Х. Стабилизация решений первой смешанной задачи для системы уравнений Навье–Стокса // Дис. . . . докт. физ.-матем. наук. М.: МИРАН, 1994.
7. Мукминов Ф. Х. Об убывании нормы решения смешанной задачи для параболического уравнения высокого порядка // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 10. С. 1172–1180.
8. Мукминов Ф. Х. Стабилизация решений первой смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка // Матем. сб. 1980. Т. 111(153). № 4. С. 503–521.
9. Тедеев А. Ф. Стабилизация решений первой смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения высокого порядка // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 3. С. 491–498.

10. Биккулов И. М., Мукминов Ф. Х. О стабилизации нормы решения одной смешанной задачи для параболических уравнений 4-го и 6-го порядков в неограниченной области // Матем. сб. 2004. Т. 195. № 3. С. 115–142.
11. Кожевникова Л. М., Мукминов Ф. Х. Оценки скорости стабилизации при $t \rightarrow \infty$ решения первой смешанной задачи для квазилинейной системы параболических уравнений второго порядка // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 2. С. 91–131.
12. Хисамутдинова Н. А. Стабилизация решения двумерной системы уравнений Навье–Стокса в неограниченной области с несколькими выходами на бесконечность // Матем. сб. 2003. Т. 194. № 3. С. 83–114.
13. Ладьженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
14. Moser J. A. Harnack inequality for parabolic differential equations // Comm. Pure Appl. Math. 1964. V. 17. № 1. P. 101–134.

Стерлитамакская государственная
педагогическая академия
E-mail: kozul@mail.ru

Поступила в редакцию
25.10.2004