Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Пастухова, О характере распределения поля температур в перфорированном теле с заданным его значением на внешней границе в условиях теплообмена на границе полостей по закону Ньютона, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 6, 85–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm138>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 16:54:59

УДК 517.953

С. Е. Пастухова

**О характере распределения поля температур
в перфорированном теле с заданным его значением
на внешней границе в условиях теплообмена
на границе полостей по закону Ньютона**

При $\varepsilon \in (0, 1)$ пусть $\Omega_\varepsilon = \Omega \cap \varepsilon\omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная область, $\varepsilon\omega$ – множество, полученное сжатием в ε^{-1} раз из ω – неограниченной области, имеющей 1-периодическую структуру, при этом множество $\mathbb{R}^d \setminus \omega$ – дисперсно. Тогда $\partial\Omega_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon \cup S_\varepsilon$, где Γ_ε – внешняя граница Ω_ε , S_ε – граница полостей, лежащих в Ω_ε .

Изучается эффект экспоненциально затухающего при $\varepsilon \rightarrow 0$ влияния ненулевого температурного режима, установленного на Γ_ε , на распределение температуры внутри изотропного тела, занимающего область Ω_ε , при условии, что теплообмен на границе S_ε со средой, заполняющей полости тела, осуществляется по закону Ньютона с коэффициентом пропорциональности $a_\varepsilon(x) = a(x/\varepsilon)$, где $a(y)$ – 1-периодическая функция, определенная на $\partial\omega$, такая, что $\int_S a(y) ds > 0$, если $S = \partial\omega \cap \{x \in \mathbb{R}^d : |x_i| < 1/2, i = \overline{1, d}\}$.

Библиография: 8 названий.

Введение

Пусть Ω – некоторая гладкая ограниченная область в $\mathbb{R}^d$, $\omega \in \mathbb{R}^d$ – неограниченная область с 1-периодической структурой. Предположим, что множество $\mathbb{R}^d \setminus \omega$ дисперсно, т.е. оно распадается на непересекающиеся компоненты, причем каждая из этих компонент есть гладкая замкнутая ограниченная область. Пусть в ячейке периодичности $Q = \{x \in \mathbb{R}^d : |x_i| < 1/2\}$ содержится лишь конечное число этих компонент и они не выходят на границу ∂Q , т.е., если $P = \omega \cap Q$ и $S = \partial(Q \setminus P)$, то $\rho(S, \partial Q) > 0$.

Для $\varepsilon > 0$ определим $\varepsilon\omega = \{x \in \mathbb{R}^d : \varepsilon^{-1}x \in \omega\}$, тогда получим “перфорированную” область $\Omega_\varepsilon = \Omega \cap \varepsilon\omega$, если удалим из Ω дисперсное множество $\Omega \setminus \varepsilon\omega$. Чем меньше ε , тем больше полостей оказывается внутри Ω_ε . Граница такой сильно перфорированной области имеет вид: $\partial\Omega_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon \cup S_\varepsilon$, где $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega \cap \varepsilon\omega$, $S_\varepsilon = \partial(\varepsilon\omega) \cap \Omega$. Будем называть Γ_ε внешней границей Ω_ε , а S_ε – границей полостей области Ω_ε . Пусть, далее, $n = (n_1, \dots, n_d)$ – вектор единичной внешней нормали на S_ε .

Рассмотрим стационарное распределение поля температур $u_\varepsilon(x)$ внутри изотропного тела, которое занимает область Ω_ε , при этом на внешней границе его Γ_ε поддерживается заданное поле температур, а на границе полостей S_ε осуществляется теплообмен трех различных типов:

- 1) поток тепла из Ω_ε на S_ε нулевой, т.е. $-(\nabla u_\varepsilon, n) = 0$ на S_ε ;
- 2) на границе S_ε поддерживается всюду нулевой температурный режим, т.е. $u_\varepsilon = 0$ на S_ε ;
- 3) теплообмен на границе S_ε идет по закону Ньютона, т.е. поверхностная плотность потока тепла из Ω_ε через S_ε пропорциональна температуре, установившейся на S_ε : $-(\nabla u_\varepsilon, n) = a_\varepsilon(x)u_\varepsilon$, и пусть коэффициент пропорциональности $a_\varepsilon(x) = a(x/\varepsilon)$, где $a(y)$ – гладкая 1-периодическая функция, определенная на $\partial\omega$.

Первые два случая хорошо изучены. В первом случае поле температур $u_\varepsilon(x)$ можно усреднять при $\varepsilon \rightarrow 0$ (см. [1], [2]): поле $u_\varepsilon(x)$ достаточно хорошо приближается полем температур $u_0(x)$, которое есть поле температур для однородного тела (без полостей), заполняющего область Ω , с тем же значением температур на внешней границе $\partial\Omega$, но с измененным по сравнению с первоначальным тензором теплопроводности, и формулы для нахождения этого нового усредненного тензора известны. Во втором случае поле температур $u_\varepsilon(x)$ будет экспоненциально сходиться к нулевому при $\varepsilon \rightarrow 0$ вне границы Γ_ε (см. [3, с. 135]), если отсутствуют объемные источники тепла внутри Ω_ε .

В меньшей степени изучен третий случай с теплообменом на границе полостей, идущим по закону Ньютона. Отметим работы [1, с. 151] и [3], где этот случай рассматривался при условии, что $\int_S a(y) ds = 0$. Было установлено, что при этом условии поле температур при $\varepsilon \rightarrow 0$ можно усреднять, и процедура усреднения сходна с той, что существует в первом случае отсутствия теплообмена через границу S_ε .

Наконец, рассмотрим случай, когда для третьего типа теплообмена на границе S_ε коэффициент $a_\varepsilon(x) = a(x/\varepsilon)$ удовлетворяет условию:

$$\frac{1}{\text{mes } S} \int_S a(y) ds = \text{const} > 0. \quad (1)$$

В этом случае налицо отток тепла из Ω_ε через S_ε в тех точках x , где температура $u_\varepsilon(x) > 0$ и коэффициент $a_\varepsilon(x) > 0$. Поэтому, учитывая условие (1), естественно в этой ситуации ожидать такого же качественного распределения поля температур $u_\varepsilon(x)$ внутри Ω_ε при $\varepsilon \rightarrow 0$, как при нулевом режиме температур на границе S_ε , а именно: $u_\varepsilon(x)$ экспоненциально близко к нулю в интегральной метрике H^1 вне любой окрестности внешней границы Γ_ε , если отсутствуют объемные источники тепла внутри Ω_ε . Но также естественно ожидать, что порядок убывания к нулю будет различным при этих двух различных типах теплообмена на границе S_ε . Убывание к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ будет более быстрое при нулевом температурном режиме на границе S_ε .

Приведенные выше качественные результаты для третьего типа теплообмена на границе полостей S_ε с условием (1) точно сформулированы и доказаны в §2, в теореме 2, основной для этой работы. Заметим, что интерес представляет даже частный случай рассматриваемой задачи, когда коэффициент пропорциональности

$$a_\varepsilon(x) = k = \text{const} > 0, \quad (1')$$

и распределение температуры дается решением смешанной задачи для эллиптического оператора с классическим краевым условием на границе S_ε третьего типа. Только в этом частном случае результат можно получить технически значительно проще, чем при общем условии (1) (при условии (1') нет надобности в оценках (5), (22), крайне необходимых при общем условии (1)).

Условие (1) предполагает возможным помимо случая (1') рассматривать и другой, часто встречающийся в граничных задачах с третьим краевым условием, случай:

$$a_\varepsilon(x)|_{S_\varepsilon} \geq 0, \quad a_\varepsilon(x) \neq 0, \quad (1'')$$

(так как $a(y)$ — гладкая, то неотрицательность $a(y)$ влечет автоматически выполнение (1), если $a(y) \neq 0$). Отметим, что похожая смешанная задача стационарной теплопроводности рассматривалась также в [5], [6], где охватывался случай, когда теплообмен на границе полостей S_ε идет по закону Ньютона в предположении (1') или (1''). Но, если в настоящей работе основная цель — продемонстрировать эффект экспоненциально затухающего влияния ненулевого температурного режима, установленного на внешней границе Γ_ε , на участки Ω_ε , отстоящие от Γ_ε на положительном расстоянии, в предположении, что отсутствуют объемные тепловые источники внутри Ω_ε (или их плотность равна нулю), то в [5], [6] обсуждались совсем другие аспекты изучаемой задачи. Более точно, в [5], [6] рассматривался случай, когда объемные источники тепла есть и они лежат строго на некотором удалении от внешней границы Γ_ε , т.е. правая часть в уравнении теплопроводности (плотность объемных тепловых источников) является функцией из класса $D(\Omega)$, а на внешней границе Γ_ε поддерживается нулевая температура. При таких предположениях в [5], [6] в соответствии с известной методикой (см. [1], [2]) построены асимптотики $u_\varepsilon(x)$ по степеням ε : $u_\varepsilon(x) \sim \varepsilon u_0(x) + \varepsilon^2 u_1(x, x/\varepsilon) + \dots$. Интересно, что полученные в настоящей работе результаты можно приложить для обоснования асимптотических разложений $u_\varepsilon(x)$ из [5], [6] в случае, когда объемные источники тепла могут выходить на внешнюю границу Γ_ε (т.е. правая часть в уравнении теплопроводности не финитна в Ω). Подробно аналогичные приложения граничных эффектов к обоснованию асимптотических разложений в случае задачи Дирихле для уравнения теплопроводности в перфорированной области приведены в [3, гл. III].

Для изучения поставленной задачи при условии (1), даже в простейшем его частном случае (1'), требуются некоторые дополнительные результаты о соотношениях между различными интегральными формами и нормами в перфорированных областях. Часть из них приведена в §1, отметим среди них особенно важные для настоящей работы оценки (4), (5). С помощью этих же вспомогательных результатов удастся также доказать теорему существования и единственности стационарного распределения температур в перфорированном теле (тривиальную при условии (1') или даже (1''), но не тривиальную, если отказаться от условия неотрицательности коэффициента $a_\varepsilon(x)$ во всех точках S_ε) с указанным выше граничным теплообменом в предположении (1) — вопрос, остававшийся открытым, несмотря на то, что постановка задачи находится в традиционных рамках смешанной эллиптической задачи с краевым условием I и III типов на границе.

§1. Необходимые обозначения. Вспомогательные утверждения о нормах и интегральных формах в перфорированной области Ω_ε

Далее нормы в пространствах $L^2(\Omega_\varepsilon)$, $L^2(S_\varepsilon)$ будем обозначать, соответственно, через $|\cdot|_\varepsilon$, $|\cdot|'_\varepsilon$, а скалярные произведения в $L^2(\Omega_\varepsilon)$, $L^2(S_\varepsilon)$, соответственно, — через $(\cdot, \cdot)_\varepsilon$, $(\cdot, \cdot)'_\varepsilon$.

Пусть $V_\varepsilon = H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$ — замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ в норме $H^1(\Omega_\varepsilon)$. Для функции $u \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ пусть $|\nabla u|_\varepsilon^2 \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u, \frac{\partial}{\partial x_i} u \right)_\varepsilon$, здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до d .

Пусть $\langle w \rangle_M = \frac{1}{\text{mes } M} \int_M w \, ds$ — интегральное среднее функции w по множеству M , и, значит, условие (1) принимает вид: $\langle a \rangle_S = \text{const} > 0$. Через C_i , c_i , $i \in \mathbb{N}$, обозначаем далее константы, не зависящие от ε .

ЛЕММА 1. *При всех ε достаточно малых ($\varepsilon < \varepsilon^0 = \text{const}(\Omega, P)$) для любых функций $u \in V_\varepsilon$ верны неравенства:*

$$|u|_\varepsilon \leq C_1 |\nabla u|_\varepsilon, \quad (2)$$

$$|u|'_\varepsilon{}^2 \leq C_2 (\varepsilon^{-1} |u|_\varepsilon^2 + \varepsilon |\nabla u|_\varepsilon^2), \quad (3)$$

$$|u|_\varepsilon^2 \leq C_3 (\varepsilon |u|'_\varepsilon{}^2 + \varepsilon^2 |\nabla u|_\varepsilon^2), \quad (4)$$

$$\left| \int_{S_\varepsilon} \gamma \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) u^2 \, ds \right| \leq C_4 \gamma_0 (2 |u|_\varepsilon |\nabla u|_\varepsilon + \varepsilon |\nabla u|_\varepsilon^2), \quad (5)$$

где $\gamma(y) \in C^\infty(\partial\omega, \mathbb{R}^1)$ — 1-периодическая по всем переменным такая, что $\langle \gamma \rangle_S = 0$ и $\gamma_0 = |\gamma|_{C(S)}$, $C_i = \text{const}(\Omega, P)$, $i = 1, 4$.

Оценка (2) хорошо известна и неоднократно использовалась в работах по усреднению (ее доказательство см., например, в [3, гл. III]). Доказательство оценок (3), (5) дано в [7], [8]. Оценка (4) доказывается аналогичным способом с помощью техники продолжения (см. [2, с. 43–44], а также [3, гл. III]) с использованием соотношений подобия на основании хорошо известного неравенства:

$$|u(y)|_{L^2(P)}^2 \leq C_5 \left(|u(y)|_{L^2(S)}^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y_i}, \frac{\partial u}{\partial y_i} \right)_{L^2(P)} \right), \quad (6)$$

справедливого для любой функции $u(y) \in H^1(P)$, где $C_5 = \text{const}(P)$.

§2. Точная постановка задачи.

Основные результаты и их доказательство

Поскольку изучается распределение температуры в изотропном теле, то его тензор теплопроводности имеет вид: $K_{ij} = k_0 \delta_{ij}$, где $k_0 = \text{const} > 0$ — коэффициент удельной теплопроводности, и поэтому без ограничения общности можно считать, что $k_0 \equiv 1$. Тогда стационарное поле температур $u_\varepsilon(x)$ в области Ω_ε с заданным его значением на внешней границе Γ_ε и при теплообмене на границе полостей S_ε ,

идущим по закону Ньютона в предположении (1), если объемная плотность источников тепла есть $f(x)$, задается решением следующей смешанной задачи для оператора Лапласа Δ :

$$\begin{cases} \Delta u_\varepsilon = -f & \text{в } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = g & \text{на } \Gamma_\varepsilon, \\ \frac{\partial}{\partial n} u_\varepsilon + a_\varepsilon(x) u_\varepsilon = 0 & \text{на } S_\varepsilon. \end{cases} \quad (7)$$

Эту смешанную задачу будем рассматривать в обобщенном смысле, предполагая заданными функции $f \in L^2(\Omega_\varepsilon)$, $g \in H^1(\Omega_\varepsilon)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $u \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ – решение (обобщенное) задачи (7), если $u = g$ на Γ_ε и выполняется равенство с любой функцией $v \in V_\varepsilon$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} u, \frac{\partial}{\partial x_i} v \right)_\varepsilon + (a_\varepsilon(x) u, v)'_\varepsilon = (f, v)_\varepsilon. \quad (8)$$

Для дальнейшего удобно и другое (эквивалентное) определение обобщенного решения задачи (7).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $u \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ вида $u = g + w$, где $w \in V_\varepsilon$, является решением (обобщенным) задачи (7), если для w выполняется равенство с любой функцией $v \in V_\varepsilon$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} w, \frac{\partial}{\partial x_i} v \right)_\varepsilon + (a_\varepsilon(x) w, v)'_\varepsilon = - \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g, \frac{\partial}{\partial x_i} v \right)_\varepsilon - (a_\varepsilon(x) g, v)'_\varepsilon + (f, v)_\varepsilon. \quad (9)$$

Далее в пространстве V_ε будем рассматривать норму $\| \cdot \|_\varepsilon$, определяемую соотношением: $\|u\|_\varepsilon^2 = |\nabla u|_\varepsilon^2 + |u|_\varepsilon'^2$.

ТЕОРЕМА 1. При всех ε достаточно малых ($\varepsilon < \varepsilon^0 = \text{const}(\Omega, P, a(y))$) для любых $f \in L^2(\Omega_\varepsilon)$, $g \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ существует и единственно решение задачи (7), и оно удовлетворяет оценкам:

$$\|u\|_\varepsilon \leq C_6(|f|_\varepsilon + \|g\|_\varepsilon), \quad (10)$$

$$|u|_\varepsilon \leq C_7(\sqrt{\varepsilon}(|f|_\varepsilon + \|g\|_\varepsilon) + |g|_\varepsilon), \quad (11)$$

где

$$C_i = \text{const}(\Omega, P, a(y)), \quad i = 6, 7.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства утверждения теоремы 1 воспользуемся теоремой Лакса–Мильграма (см. [2, с. 13]). Докажем, что билинейная форма $\mathcal{B}(w, v)$, определяемая левой частью равенства (9), удовлетворяет всем необходимым условиям этой теоремы. В самом деле,

$$\mathcal{B}(w, w) \geq |\nabla w|_\varepsilon^2 + \langle a \rangle_S |w|_S'^2 - C_4 a_0 (2|w|_\varepsilon |\nabla w|_\varepsilon + \varepsilon |\nabla w|_\varepsilon^2)$$

на основании неравенства (5), если положить $a_0 = |a(y) - \langle a \rangle_S|_{C(S)}$. Применим неравенство $|\alpha \cdot \beta| \leq \frac{1}{2}\rho\alpha^2 + \frac{1}{2}\rho^{-1}\beta^2$, справедливое для любого $\rho > 0$, считая, что $\alpha = |\nabla w|_\varepsilon$, $\beta = |w|_\varepsilon$, тогда, продолжая оценку $\mathcal{B}(w, w)$ снизу, получаем:

$$\mathcal{B}(w, w) \geq \langle a \rangle_S |w|_\varepsilon'^2 + (1 - a_0 C_4 \varepsilon - a_0 C_4 \rho) |\nabla w|_\varepsilon^2 - C_4 a_0 \rho^{-1} |w|_\varepsilon^2. \quad (12)$$

Последние слагаемые в (12) оценим в силу неравенства (4). В итоге получим:

$$\mathcal{B}(w, w) \geq \lambda_1(\varepsilon) |\nabla w|_\varepsilon^2 + \lambda_2(\varepsilon) |w|_\varepsilon'^2, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_1(\varepsilon) &= 1 - a_0 C_4 \rho - a_0 C_4 \varepsilon - C_4 a_0 \rho^{-1} C_3 \varepsilon^2, \\ \lambda_2(\varepsilon) &= \langle a \rangle_S - C_4 a_0 \rho^{-1} C_3 \varepsilon. \end{aligned}$$

Положив сначала ρ достаточно малым (например, $\rho \leq \frac{1}{2}(a_0 C_4)^{-1}$), выбираем далее ε достаточно малым ($\varepsilon < \varepsilon^0$) так, чтобы были обеспечены следующие три неравенства:

$$a_0 C_4 \varepsilon < \frac{1}{8}, \quad C_4 a_0 \rho^{-1} C_3 \varepsilon^2 < \frac{1}{8}, \quad C_4 a_0 \rho^{-1} C_3 \varepsilon < \frac{1}{2} \langle a \rangle_S.$$

В случае их выполнения имеем равномерную по ε оценку при $\varepsilon < \varepsilon^0$:

$$\lambda_1(\varepsilon) \geq C_8, \quad \lambda_2(\varepsilon) \geq C_8, \quad C_8 = \text{const}(\Omega, P, a(y)) = 0. \quad (14)$$

И, значит, из (13), (14) вытекает оценка:

$$\mathcal{B}(w, w) \geq C_8 \|w\|_\varepsilon^2, \quad (15)$$

означающая положительную определенность формы $\mathcal{B}(w, w)$ в пространстве V_ε относительно нормы $\|\cdot\|_\varepsilon$ при $\varepsilon < \varepsilon^0$.

Легко вывести оценку:

$$|\mathcal{B}(w, v)| \leq C_9 \|w\|_\varepsilon \|v\|_\varepsilon. \quad (16)$$

Если $\mathcal{L}(v)$ – линейный функционал, определяемый правой частью равенства (9), то, используя оценку (2), можно доказать, что

$$|\mathcal{L}(v)| \leq C_{10} (\|g\|_\varepsilon + |f|_\varepsilon) \|v\|_\varepsilon. \quad (17)$$

Из (15)–(17) в силу теоремы Лакса–Мильграмма вытекает существование единственного элемента $w \in V_\varepsilon$ такого, что $\mathcal{B}(w, v) = \mathcal{L}(v)$ при любых функциях $v \in V_\varepsilon$, при этом

$$\|w\|_\varepsilon \leq C_{11} (\|g\|_\varepsilon + |f|_\varepsilon),$$

и, значит, функция $u = g + w$ есть единственное решение задачи (7) и для нее выполнена оценка (10). Оценка (11) есть следствие оценки (10), если учесть неравенство (4). Теорема 1 доказана.

Следующая теорема 2 показывает, что решение задачи (7) экспоненциально близко к нулю в интегральной метрике вне $\mathcal{O}$ – произвольной окрестности Γ_ε в Ω_ε , если $\text{supp } f \subset \mathcal{O}$. Эта теорема является аналогом леммы 8 из главы III [3], где рассматривалась подобная задача с нулевым условием Дирихле на границе S_ε .

ТЕОРЕМА 2. Пусть u_ε – решение задачи (7) с функцией $f \equiv 0$ вне $\mathcal{O}$ ($\mathcal{O}$ – некоторая окрестность Γ_ε в Ω_ε). Тогда для любой области Ω' такой, что $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, $\overline{\Omega'} \cap \mathcal{O} = \emptyset$, при всех ε достаточно малых ($\varepsilon < \varepsilon^0$) справедлива оценка:

$$|u_\varepsilon|_{H^1(\Omega' \cap \Omega_\varepsilon)}^2 \leq C \exp\left(-\frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}}\right) (|g|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 + |f|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2), \quad (18)$$

где C, δ – положительные константы, которые не зависят от ε , но зависят от $\Omega, \Omega', P, a(y)$.

СЛЕДСТВИЕ. Если $f \equiv 0$, то оценка (18) выполняется для любой области Ω' такой, что $\overline{\Omega'} \subset \Omega$.

Теорема 2 следует из одной экспоненциальной оценки для решения (7), которая будет приведена в теореме 3. Прежде чем сформулировать теорему 3, введем вспомогательные функцию и множество. Пусть $\tau(x)$ – гладкая финитная неотрицательная функция такая, что $\text{supp } \tau \subset \Omega$ и для всех $x \in \text{supp } \tau$ с некоторой константой $M > 0$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i} \tau(x) \right| \leq M, \quad i = \overline{1, d}. \quad (19)$$

После фиксации функции $\tau(x)$ выберем ε столь малым, чтобы нашлась область Ω_1 такая, что $\overline{\Omega_1} \subset \Omega$ и Ω_1 – множество внутренних точек множества $\bigcup_{z \in T_\varepsilon} \varepsilon(Q + z)$, где T_ε – некоторое подмножество из $\mathbb{Z}^d$, при этом граница $\partial\Omega_1$ лежит в окрестности $\partial\Omega$, где $\tau \equiv 0$. Положим, далее, $\Omega_1 \cap \Omega_\varepsilon = \Omega_1^\varepsilon$, $S_1^\varepsilon = (\partial\Omega_1^\varepsilon) \setminus \partial\Omega_1$.

Для дальнейшего понадобятся также некоторые варианты оценок (4), (5) для области Ω_1^ε и функций $u \in H^1(\Omega_\varepsilon)$, не обращающихся в нуль на Γ_ε , которые приводятся в следующей лемме.

ЛЕММА 2. Пусть функция $\gamma(y)$ такая же, как в лемме 1, с нормой $\gamma_0 = |\gamma(y)|_{C(S)}$, а $\tau(x)$ и Ω_1^ε – функция и множество, определенные согласованным между собой образом перед леммой 2. Тогда при всех достаточно малых ε ($\varepsilon < \varepsilon^0$) для любой функции $u \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ выполняются оценки:

$$|u|_{L^2(\Omega_1^\varepsilon)}^2 \leq C_5 (\varepsilon |u|_{L^2(S_1^\varepsilon)}^2 + \varepsilon^2 |\nabla_x u|_{L^2(\Omega_1^\varepsilon)}^2), \quad (20)$$

$$\left| \int_{S_1^\varepsilon} \gamma\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u^2 ds \right| \leq C_{12} \gamma_0 (2 |u|_{L^2(\Omega_1^\varepsilon)} |\nabla_x u|_{L^2(\Omega_1^\varepsilon)} + \varepsilon |\nabla_x u|_{L^2(\Omega_1^\varepsilon)}^2), \quad (21)$$

$$\left| \int_{S_1^\varepsilon} \gamma\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u^2 ds \right| \leq C_{13} \gamma_0 \sqrt{\varepsilon} (|\nabla u|_{L^2(\Omega_1^\varepsilon)}^2 + |u|_{L^2(S_1^\varepsilon)}^2), \quad (22)$$

$$\int_{\Omega_1^\varepsilon} u^2 \psi_\varepsilon dx \leq C_{14} \left(\varepsilon \int_{S_1^\varepsilon} u^2 \psi_\varepsilon ds + \varepsilon^2 \int_{\Omega_1^\varepsilon} |\nabla u|^2 \psi_\varepsilon dx \right), \quad (23)$$

где C_5 – константа из неравенства (6), $\psi_\varepsilon(x) = \exp(\mu\tau(x))$, $C_i = \text{const}(P)$, $i = \overline{12, 14}$, константа $\mu = \mu(\varepsilon)$ определяется соотношением:

$$\mu = M^{-1} \sigma (C_5 \varepsilon)^{-1/2}, \quad (24)$$

где C_5, M – константы из оценок (6), (19), а $\sigma \in (0, 1)$ – произвольный параметр, не зависящий от ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Оценки (20), (21) доказываются аналогично, как оценки (4), (5), соответственно, и даже проще, потому что в этом случае не надо пользоваться техникой продолжения функций $v \in V_\varepsilon$ во внешность области Ω_ε , поскольку множества S_1^ε , Ω_1^ε целиком состоят из компонент гомотетичных S и P , соответственно. Применяя неравенство (20) к одному из сомножителей, стоящих в правой части (21), легко вывести и оценку (22).

2) Для доказательства (23) применим оценку (20) к функции $u \exp(\mu\tau/2)$. Это дает:

$$J \equiv \int_{\Omega_1^\varepsilon} u^2 e^{\mu\tau} dx \leq C_5 \varepsilon \int_{S_1^\varepsilon} u^2 e^{\mu\tau} ds + C_5 \varepsilon^2 \int_{\Omega_1^\varepsilon} |\nabla (u e^{\mu\tau/2})|^2 dx \equiv J_1 + J_2. \quad (25)$$

Оценим слагаемое J_2 из (25). Для этого заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (u e^{\mu\tau/2}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} u + \frac{1}{2} \mu \frac{\partial \tau}{\partial x_j} u \right) e^{\mu\tau/2}, \quad j = \overline{1, d}.$$

Поэтому

$$J_2 \leq C_5 \varepsilon^2 \left(2 \int_{\Omega_1^\varepsilon} |\nabla u|^2 e^{\mu\tau} dx + \frac{1}{2} \mu^2 M^2 d \int_{\Omega_1^\varepsilon} u^2 e^{\mu\tau} dx \right).$$

Далее всюду считаем, что $\varepsilon < 1/d$, тогда имея в виду соотношение (24), получаем, учитывая, что $\sigma \in (0, 1)$, оценку:

$$C_5 \varepsilon^2 \frac{d}{2} \mu^2 M^2 = \frac{d}{2} \sigma^2 \varepsilon \leq \frac{d}{2} \varepsilon \leq \frac{1}{2},$$

пользуясь которой на основании последнего неравенства для J_2 , выводим из (25) справедливость оценки (23). И лемма 2 доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть u – решение задачи (7) с функцией $f \equiv 0$ на Ω_1^ε , а функция $\tau(x)$ и множество Ω_1^ε определены перед леммой 2. Тогда при всех достаточно малых ε ($\varepsilon < \varepsilon^0$) имеет место оценка с константой C_{15} , не зависящей от ε :

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1} \int_{\Omega_1^\varepsilon} u^2 \psi_\varepsilon dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 \psi_\varepsilon dx + \int_{S_\varepsilon} u^2 \psi_\varepsilon ds \\ \leq C_{15} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx + \int_{S_\varepsilon} u^2 ds \right), \end{aligned} \quad (26)$$

где весовая функция $\psi_\varepsilon(x)$ определена в лемме 2 с достаточно малым параметром σ ($\sigma < \sigma^0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Если u – решение задачи (7), то с любой функцией $v \in V_\varepsilon$ выполняется интегральное равенство (8). Пусть в этом равенстве $v = (\exp(\mu\tau(x)) - 1)u$, где множитель $\mu = \mu(\varepsilon)$ определяется формулой (24). Тогда это равенство можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 e^{\mu\tau} dx + \int_{S_1^\varepsilon} a_\varepsilon(x) u^2 e^{\mu\tau} ds \\ = \int_{S_1^\varepsilon} a_\varepsilon(x) u^2 ds + \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx - \mu \int_{\Omega_1^\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \tau}{\partial x_i} u e^{\mu\tau} dx. \end{aligned} \quad (27)$$

В равенстве (27) в некоторых интегралах область интегрирования $\Omega_\varepsilon, S_\varepsilon$ заменена на $\Omega_1^\varepsilon, S_1^\varepsilon$, соответственно, что возможно в силу согласованного выбора функции $\tau(x)$ и области Ω_1^ε : $\tau \equiv 0$ вне Ω_1^ε и, значит, $v \equiv 0$ вне Ω_1^ε . По той же причине в (27) отсутствует слагаемое $(f, v)_\varepsilon$, так как оно оказывается нулевым в силу предположений на функцию f .

Ввиду оценки (22), если ее применить с весовой функцией $\gamma(y) = a(y) - \langle a \rangle_S$ (и тогда окажется $\gamma_0 = |\gamma|_{C(S)} = |a(y) - \langle a \rangle_S|_{C(S)} \equiv a_0$) к функции $u \exp(\mu\tau/2)$, получаем:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &\equiv \left| \int_{S_1^\varepsilon} a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) u^2 e^{\mu\tau} ds - \langle a \rangle_S \int_{S_1^\varepsilon} u^2 e^{\mu\tau} ds \right| \\ &\leq C_{13} a_0 \sqrt{\varepsilon} (|\nabla(u e^{\mu\tau/2})|_{L^2(\Omega_1^\varepsilon)}^2 + |u e^{\mu\tau/2}|_{L^2(S_1^\varepsilon)}^2). \end{aligned}$$

В силу свойств функции $\tau(x)$, используя неравенство (23), имеем:

$$\begin{aligned} &|\nabla(u e^{\mu\tau/2})|_{L^2(\Omega_1^\varepsilon)}^2 \\ &\leq 2 \int_{\Omega_1^\varepsilon} |\nabla u|^2 e^{\mu\tau} dx + \frac{d}{2} \mu^2 M^2 \int_{\Omega_1^\varepsilon} u^2 e^{\mu\tau} dx \\ &\leq \left(2 + \frac{d}{2} \mu^2 M^2 C_{14} \varepsilon^2\right) \int_{\Omega_1^\varepsilon} |\nabla u|^2 e^{\mu\tau} dx + \frac{d}{2} C_{14} \mu^2 M^2 \int_{S_1^\varepsilon} e^{\mu\tau} ds. \end{aligned}$$

Поэтому, если учесть точную зависимость множителя $\mu = \mu(\varepsilon)$ от параметров ε и $\sigma \in (0, 1)$ (см. (24)), при достаточно малых ($\varepsilon < \varepsilon^0$) две последние оценки вкуче дают следующее неравенство:

$$\Delta_1 \leq C_{16} \sqrt{\varepsilon} \left(\int_{\Omega_1^\varepsilon} |\nabla u|^2 e^{\mu\tau} dx + \int_{S_1^\varepsilon} u^2 e^{\mu\tau} ds \right), \quad (28)$$

где C_{16} – константа, не зависящая от ε и $\sigma \in (0, 1)$.

Оценив последнее слагаемое правой части в (27) по неравенству Коши–Буняковского, выводим из (27), (28) в силу определения величины Δ_1 основное для

дальнейшего доказательства неравенство:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 e^{\mu\tau} dx + \langle a \rangle_S \int_{S_1^\varepsilon} u^2 e^{\mu\tau} ds \\
& \leq C_{17} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx + \int_{S_1^\varepsilon} u^2 ds \right) \\
& \quad + C_{17} \sqrt{\varepsilon} \left(\int_{\Omega_1^\varepsilon} |\nabla u|^2 e^{\mu\tau} dx + \int_{S_1^\varepsilon} u^2 e^{\mu\tau} ds \right) \\
& \quad + C_{17} \mu M \left(\int_{\Omega_1^\varepsilon} |\nabla u|^2 e^{\mu\tau} dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega_1^\varepsilon} u^2 e^{\mu\tau} dx \right)^{1/2}. \quad (29)
\end{aligned}$$

Оценивая второй множитель в последнем слагаемом неравенства (29) в силу неравенства (23) и выбирая ε достаточно малым, так чтобы $C_{17} \sqrt{\varepsilon} < \frac{1}{2}$, $C_{17} \sqrt{\varepsilon} < \frac{1}{2} \langle a \rangle_S$, выводим из (29) следующую оценку:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 e^{\mu\tau} dx + \int_{S_1^\varepsilon} u^2 e^{\mu\tau} ds \\
& \leq C_{18} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx + \int_{S_1^\varepsilon} u^2 ds \right) \\
& \quad + C_{18} \mu M \sqrt{\varepsilon} \int_{S_1^\varepsilon} u^2 e^{\mu\tau} ds \\
& \quad + C_{18} \mu M \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} |\nabla u|^2 e^{\mu\tau} dx, \quad (30)
\end{aligned}$$

где константа C_{18} не зависит от ε , σ .

Если необходимо, уменьшим допустимые значения ε так, чтобы

$$C_{18} \mu M \varepsilon < \frac{1}{2}, \quad (31)$$

и с этого момента считаем достаточно малым и параметр σ так, чтобы (см. (24))

$$C_{18} \mu M \sqrt{\varepsilon} = C_{18} (C_5)^{-1/2} \sigma < \frac{1}{2}. \quad (32)$$

Тогда из (30)–(32) вытекает оценка:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 e^{\mu\tau} dx + \int_{S_1^\varepsilon} u^2 e^{\mu\tau} ds \leq C_{19} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx + \int_{S_1^\varepsilon} u^2 ds \right),$$

откуда, используя (23), получаем также:

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^{-1} \int_{\Omega_1^\varepsilon} u^2 e^{\mu\tau} dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 e^{\mu\tau} dx + \int_{S_1^\varepsilon} u^2 e^{\mu\tau} ds \\
& \leq C_{20} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx + \int_{S_1^\varepsilon} u^2 ds \right).
\end{aligned}$$

И в последнем неравенстве S_1^ε можно заменить на S_ε , считая $C_{20} \geq 1$ (в противном случае заменим константу C_{20} единичной константой), так как $\exp(\mu\tau) \equiv 1$ на $S_\varepsilon \setminus S_1^\varepsilon$. Учитывая это замечание, выводим отсюда оценку (26). И теорема 3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Для фиксированной области Ω' такой, что $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, $\overline{\Omega'} \cap \overline{\theta} = \emptyset$, найдем число $\rho = \rho(\Omega', \theta) > 0$ и возьмем в качестве промежуточной области между Ω и Ω' область Ω_1 — множество внутренних точек множества $\bigcup_{z \in T_\varepsilon} \varepsilon(Q + z)$, где T_ε — некоторое подмножество $\mathbb{Z}^d$, так чтобы $\overline{\Omega'} \subset \Omega_1$, $\overline{\Omega_1} \cap \overline{\theta} = \emptyset$, $\rho(\partial\Omega_1, \Omega') > \rho/2$. Если ε достаточно мало, то задача построения такого множества Ω_1 выполнима. Пусть, далее, $\Omega_1^\varepsilon = \Omega_1 \cap \Omega_\varepsilon$.

Пусть $\tau(x)$ — гладкая финитная неотрицательная функция со следующими свойствами: $\tau \equiv 1$ на Ω' , $\tau \equiv 0$ вне $\rho/2$ -окрестности множества Ω' , $\left| \frac{\partial \tau(x)}{\partial x_j} \right| \leq c_1 \rho^{-1} = M$ для всех $j = \overline{1, d}$, $x \in \text{supp } \tau$ с некоторой константой c_1 .

Применим к решению задачи (7) последовательно оценки (26) (выбор множества Ω_1^ε и функции $\tau(x)$ согласован так же, как в теореме 3), (10), (3), тогда получим цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1} \int_{\Omega_1^\varepsilon} u^2 \psi_\varepsilon dx + \int_{\Omega_1^\varepsilon} |\nabla u|^2 \psi_\varepsilon dx &\leq C_{15} \|u\|_\varepsilon^2 \leq C_{21} (\|g\|_\varepsilon^2 + |f|_\varepsilon^2) \\ &\leq C_{22} (\varepsilon^{-1} |g|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 + |f|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2). \end{aligned} \quad (33)$$

Предполагая $\varepsilon < 1$ и вспоминая вид весовой функции $\psi_\varepsilon(x)$, определенной в лемме 2: $\psi_\varepsilon(x) = \exp\left(\frac{\delta_1}{\sqrt{\varepsilon}} \tau(x)\right)$, где δ_1 — константа, не зависящая от ε , а также используя свойство функции $\tau(x)$: $\tau(x) = 1$ на Ω' , выводим из (33), сужая область интегрирования в левой части до Ω' :

$$e^{\delta_1/\sqrt{\varepsilon}} |u|_{H^1(\Omega'_\varepsilon)}^2 \leq C_{22} (\varepsilon^{-1} |g|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 + |f|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2). \quad (34)$$

Если $\varepsilon^{-1} e^{-\delta_1/(2\sqrt{\varepsilon})} \leq c_0$ для всех $\varepsilon \in (0, 1)$, то из оценки (34) вытекает оценка (18) с $\delta = \delta_1/2$ и константой $C = \max(c_0 C_{22}, C_{22})$. Теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В аналогичной задаче стационарной теплопроводности для перфорированного тела с заданным температурным режимом на внешней границе Γ_ε , не равным тождественно нулю, и постоянным нулевым температурным режимом на границе полостей S_ε получается аналогичная, как в теореме 2, оценка решения, только в ней экспоненциальный множитель вида $\exp(-\delta/\varepsilon)$ (см. [3, с. 135]). Отсюда ясно, что поле температур убывает к нулю вне границы Γ_ε при отсутствии объемных источников тепла с бóльшим экспоненциальным порядком по параметру ε при $\varepsilon \rightarrow 0$, чем в рассматриваемой задаче.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Сильную неоднородность задаче (7) придает сильная неоднородность границы области Ω_ε (за счет большого количества полостей в Ω_ε при $\varepsilon \rightarrow 0$), а также быстрая осцилляция при $\varepsilon \rightarrow 0$ коэффициента $a_\varepsilon(x)$ из закона Ньютона, по которому идет теплообмен на границе полостей. Но можно усилить неоднородность задачи (7), если рассматривать тело с тензором теплопроводности, имеющим ε -периодические коэффициенты $K_{ij}^\varepsilon(x) = K_{ij}(x/\varepsilon)$, где $K_{ij}(y)$ — гладкие 1-периодические по всем переменным функции. Результаты теорем 1 и 2 обобщаются и на этот случай.

Список литературы

1. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
2. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шаммаев А. С.* Математические задачи теории сильно неоднородных сред. М.: Изд-во МГУ, 1990.
3. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. М.: Наука, 1993.
4. *Сукретный В. И.* Усреднение краевых задач для эллиптических уравнений в перфорированных областях // УМН. 1983. Т. 38. №6. С. 125–126.
5. *Сукретный В. И.* Асимптотическое разложение решений третьей краевой задачи для эллиптических уравнений второго порядка в перфорированных областях // УМН. 1984. Т. 39. №4. С. 120–121.
6. *Сукретный В. И.* О задаче стационарной теплопроводности в перфорированных областях // Препринт 84.48. Киев: Институт математики АН УССР, 1984.
7. *Пастухова С. Е.* Метод компенсированной компактности Тартара в усреднении спектра смешанной задачи для эллиптического уравнения в перфорированной области с третьим краевым условием // Матем. сб. 1995. Т. 186. №5. С. 127–144.
8. *Пастухова С. Е.* О погрешности усреднения для задачи Стеклова в перфорированной области // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. №6. С. 1042–1054.

Московский институт
радиотехники, электроники, автоматики

Поступила в редакцию
27.06.1995