Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Ю. Аристов, Об аппроксимации плоских банаховых модулей свободными,
Матем. сб., 2005, том 196, номер 11, 3–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1387>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 03:46:00

УДК 517.98

О. Ю. Аристов

Об аппроксимации плоских банаховых модулей свободными

Рассмотрена локальная структура плоских банаховых модулей; в частности показано, что при наличии свойства аппроксимации плоский модуль является свободно аппроксимируемым, т.е. тождественный оператор на нем аппроксимируется операторами, каждый из которых допускает факторизацию через свободный банахов модуль, удовлетворяющий естественному условию конечности. Из участвующих в факторизации отображений первое аппроксимативно мультипликативно с точностью до ε на компактных множествах, а второе в точности является морфизмом модулей. Исследованы свойства свободно аппроксимируемых и аппроксимативно проективных модулей. Доказано, что стандартный комплекс для вычисления производного функтора Ext локально асимптотически точен в первом члене для произвольного второго аргумента тогда и только тогда, когда его первый аргумент является плоским банаховым модулем.

Библиография: 36 названий.

Среди банаховых модулей плоские образуют интересный класс, замечательный своей обширностью и прозрачной гомологической характеристикой. Плоские модули доказали свою полезность в структурной теории банаховых алгебр, а их группы когомологий (точнее, производные функторы) хорошо вычисляются. В частности, унитизация A_+ банаховой алгебры A является плоским A -бимодулем тогда и только тогда, когда A аменабельна по Б. Е. Джонсону [1], что равносильно ядерности для C^* -алгебры и аменабельности локально компактной группы для групповой банаховой алгебры (подробное изложение см. в [2]).

Плоские банаховы модули и тесно связанные с ними библиоские банаховы алгебры изучались А. Я. Хелемским (основные результаты см. в [1], [3]) и другими авторами [4]–[9]. В настоящей статье предприняты усилия по изучению внутренней структуры плоских банаховых модулей (произвольных или почти произвольных). В основе применяемых методов лежит систематическое использование отображений, являющихся мультипликативными не в точности, а лишь приближенно. Такой взгляд на плоские модули во многом вдохновлен рядом исследований в теории C^* -алгебр, где асимптотические методы давно доказали свою эффективность, в особенности в работе [10], где рассматривается представление ядерных C^* -алгебр из некоторого класса в виде индуктивных пределов конечномерных C^* -алгебр, причем связующие отображения предполагаются асимптотически мультипликативными (ср. сказанное выше о связи плоскости и ядерности), а также одним результатом Ф. Гурдо [11].

Напомним, что банахова алгебра A называется *аменабельной*, если всякое непрерывное дифференцирование (т.е. линейный оператор D , удовлетворяющий правилу Лейбница $D(ab) = a \cdot D(b) + D(a) \cdot b$) из A в дуальный банахов A -бимодуль Y^*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00928).

(состоящий из непрерывных линейных функционалов на A -бимодуле Y) является внутренним, т.е. существует $f \in Y^*$ такой, что $D(a) = a \cdot f - f \cdot a$, другими словами, первая группа непрерывных когомологий Хохшильда $\mathcal{H}^1(A, Y^*)$ тривиальна. Гурдо показал, во-первых, что A аменабельна тогда и только тогда, когда всякое непрерывное дифференцирование в бидуальный банахов A -бимодуль Y^{**} является внутренним (эквивалентно, $\mathcal{H}^1(A, Y^{**}) = 0$), и, во-вторых, что это равносильно тому, что всякое непрерывное дифференцирование D из A в Y является аппроксимативно внутренним в том смысле, что существует ограниченная сеть $(y_\lambda) \subset Y$ такая, что $(a \cdot y_\lambda - y_\lambda \cdot a) \rightarrow D(a)$ для каждого $a \in A$.

Непрерывные группы когомологий являются частным случаем производного функтора Ext , это видно из соотношений

$$\text{Ext}_A^n(X, Y) \cong \mathcal{H}^n(A, \mathcal{B}(X, Y)) \quad \text{и} \quad \mathcal{H}^n(A, Z) \cong \text{Ext}_{A-A}^n(A_+, Z),$$

где X и Y — левые банаховы A -модули, Z — банахов A -бимодуль, а Ext_A^n и Ext_{A-A}^n обозначают Ext -функтор для левых модулей и бимодулей соответственно (см. [1; теоремы III.4.12, III.4.9]). Подобно тому, как аменабельные алгебры характеризуются тривиальностью групп когомологий, плоские модули характеризуются тривиальностью Ext -функторов: X плоский тогда и только тогда, когда $\text{Ext}_A^1(X, Y^*) = 0$ для всех банаховых A -модулей Y [12; теорема 7.3.25(III)]. Начальной точкой наших рассуждений служит то, что в последнем утверждении дуальные модули также могут быть заменены на бидуальные (теорема 1.6). Это простое наблюдение имеет замечательные последствия. Благодаря принципу локальной рефлексивности конечномерный оператор со значениями в Y^{**} приближается операторами той же нормы со значениями в Y в слабой* операторной топологии, поэтому можно вместо стандартного комплекса для вычисления $\text{Ext}_A^1(X, Y^{**})$ использовать комплекс для $\text{Ext}_A^1(X, Y)$, который в случае плоского X оказывается точным в ослабленном, асимптотическом смысле. Исходя из этого получено необходимое и достаточное условие плоскости модуля X , где роль дифференцирования играет билинейный оператор $A \times X \rightarrow Y$, являющийся коциклом, а вместо сети элементов модуля Y используется ограниченная сеть (χ_λ) линейных операторов со значениями в Y (см. §6). Поскольку принцип локальной рефлексивности относится к конечномерным пространствам, в общем случае χ_λ определены на конечномерных подпространствах X и, таким образом, полученное описание плоских модулей носит локальный характер. Однако при наличии у X свойства аппроксимации можно добиться и того, чтобы χ_λ были определены на всем X .

Возможен и более прямой подход к плоским модулям — без использования стандартного комплекса. Дело в том, что хотя плоский банахов модуль и определяется обычным алгебраическим способом на основе тензорных произведений, существуют описания в терминах задач подъема с участием дуальных и (что для нас существенно) бидуальных модулей. На основе этого в §2 показано, что локальная структура плоского модуля может быть описана следующей диаграммой:

$$E \xrightarrow{\wr} F \xrightarrow{\sigma} X.$$

Здесь нижняя стрелка обозначает вложение конечномерного подпространства E в X , банахов модуль F свободен (т.е. обладает базисным подпространством), диаграмма аппроксимативно коммутативна, однако $\wr$, в отличие от σ , не является морфизмом модулей, да и само E не является подмодулем X — они являются морфизмом и соответственно модулем в асимптотическом смысле. В частности, можно

потребовать, чтобы $\|a \cdot \varkappa(x) - \varkappa(a \cdot x)\| < \varepsilon$, где ε произвольно, а a и x принадлежат заданным конечным подмножествам A и X , кроме того, $\|\sigma\| \|\varkappa\|$ не превосходит некоторой постоянной. Предложение 2.1.10 из [3], послужившее прообразом для достаточной части этой характеристики плоских модулей, утверждает, что замыкание возрастающей сети C -библических банаховых алгебр с общей постоянной C является C -библической банаховой алгеброй. При этом рассуждения могут быть без труда перенесены на случай сети C -плоских подмодулей. Но, как видим, требование, чтобы сеть состояла из подмодулей, излишне – достаточно линейных подпространств, близких к модулям по свойствам. Заметим также, что полученное утверждение может быть сформулировано на языке ультрапроизведений.

При наличии ограниченного свойства аппроксимации можно использовать операторы, определенные уже не на конечномерном подпространстве, а на всем X , и получить аппроксимативно коммутативную диаграмму

$$X \xleftarrow{\varkappa} F \xrightarrow{\sigma} X, \quad \text{с оператором } 1_X \text{ по дуге снизу.}$$

Более того, используя метод, разработанный Ю. В. Селивановым в [13] при исследовании проективных модулей, можно добиться того, что свободный модуль F будет обладать конечным базисом (точнее говоря, конечномерным базисным подпространством). Модули, удовлетворяющие этой специфической разновидности ограниченного свойства аппроксимации, где роль конечномерных операторов исполняют аппроксимативно мультипликативные отображения, аппроксимативно факторизующиеся через свободные банаховы модули, базисные подпространства которых конечномерны, рассмотрены в § 4 и названы там *свободно аппроксимируемыми*.

При ослаблении условий, а именно если F свободен, но не обязательно обладает конечномерным базисным подпространством, выделяется класс модулей, промежуточный между плоскими и свободно аппроксимируемыми. Он может быть значительно расширен, если (как в классическом определении А. Гротендика) аппроксимация предполагается равномерной на компактах без ограничений на норму. Такие модули могут быть описаны в рамках стандартных задач подъема – они названы *аппроксимативно проективными*. Термины “свободно аппроксимируемый” и “аппроксимативно проективный” сознательно выбраны так, чтобы подчеркнуть, что свободная аппроксимируемость есть свойство внутренней структуры, а аппроксимативная проективность носит гомологический характер и отвечает за взаимоотношения данного модуля с его собратьями. Хотя большинство известных плоских банаховых модулей являются аппроксимативно проективными, все-таки естественно ожидать, что это не всегда так, однако автор не располагает соответствующим примером. В § 7 аппроксимативно проективные модули использованы при изучении свойств аменабельных и библических алгебр, а также их обобщений.

Аппроксимативно проективные модули неоднократно возникали при исследовании плоских модулей, хотя и в неявном виде. Например, Джонсон в работе [14] близким способом выводит аменабельность банаховой алгебры из наличия аппроксимативной диагонали в ее проективном тензорном квадрате, а Ю. О. Головин в работе [9], доказывая достаточное условие пространственной плоскости операторной алгебры, фактически использует п. (А) теоремы 3.6, однако не формулирует ее явно. Другие типы аппроксимативной проективности вводились ранее в работах [15]–[17], сравнение содержится в замечании 5.8 и в § 7.

Любопытно, что в чистой алгебре имеется утверждение до некоторой степени родственное полученным локальным результатам о плоских банаховых модулях: *модуль над кольцом является плоским тогда и только тогда, когда он представляется как индуктивный предел конечно порожденных свободных модулей по направленному множеству* (Д. Лазар [18], В.Е. Говоров [19], см. также [20; 1.6.1]).

Автор благодарен Б. Блакадару, А.Ю. Пирковскому, С.Б. Табалдыеву и А.Я. Хелемскому за плодотворные обсуждения. Автор особенно признателен Ю.В. Селиванову за многочисленные полезные замечания.

§1. Плоские модули

Мы предполагаем, что норма оператора умножения в банаховых алгебрах и модулях равна 1, чего всегда можно достичь перенормировкой. Поскольку рассматриваются только банаховы модули и непрерывные морфизмы, иногда эпитеты “банахов” и “непрерывный” опускаются. Термин “модуль” без уточнения, какого он типа – левый, правый или двусторонний, означает модуль любого из этих трех типов.

Напомним некоторые определения и факты из гомологической теории банаховых модулей (см. [1]). Пусть A – банахова алгебра (вообще говоря, не обладающая единицей). Комплекс

$$0 \longrightarrow Y' \xrightarrow{\mu} Y \xrightarrow{\nu} Y'' \longrightarrow 0$$

банаховых A -модулей называется *допустимым*, если он расщепляется ограниченными линейными операторами; в этом случае μ называется *допустимым мономорфизмом*, а ν – *допустимым эпиморфизмом*. Левый банахов A -модуль X называется *относительно плоским*, если для любого допустимого комплекса правых банаховых A -модулей комплекс

$$0 \longrightarrow Y' \hat{\otimes}_A X \longrightarrow Y \hat{\otimes}_A X \longrightarrow Y'' \hat{\otimes}_A X \longrightarrow 0 \quad (1.1)$$

точен (здесь $\hat{\otimes}_A$ обозначает проективное тензорное произведение банаховых модулей над A). В частности, относительно плоским является всякий *относительно проективный* банахов модуль X , т.е. такой, что для любого допустимого эпиморфизма $\nu: Y \rightarrow Z$ и любого морфизма $\psi: X \rightarrow Z$ существует морфизм φ , дополняющий диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow \varphi & \downarrow \nu \\ X & \xrightarrow{\psi} & Z \end{array} \quad (1.2)$$

до коммутативной. Всякий *относительно свободный* банахов A -модуль F (т.е. содержащий замкнутое подпространство E такое, что для любого ограниченного линейного оператора ψ из E в произвольный банахов A -модуль Y существует единственный морфизм φ с нормой, не большей $\|\psi\|$, дополняющий диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & & F \\ & \nearrow \varphi & \uparrow \\ Y & \xleftarrow{\psi} & E \end{array}$$

до коммутативной) является относительно проективным. В этом случае E называется *базисным подпространством*. Всякий относительно свободный левый банахов A -модуль с базисным подпространством E изометрически изоморфен модулю $A_+ \widehat{\otimes} E$ (здесь A_+ – унитизация банаховой алгебры A , т.е. результат присоединения к ней единицы, а $\widehat{\otimes}$ обозначает $\widehat{\otimes}_A$ при $A = \mathbb{C}$).

Банахов модуль J называется *относительно инъективным*, если для любого допустимого мономорфизма $\mu: V \rightarrow W$ и любого морфизма $\psi: V \rightarrow J$ существует морфизм φ , дополняющий диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & & W \\ & \nearrow \varphi & \uparrow \mu \\ J & \xleftarrow{\psi} & V \end{array}$$

до коммутативной. Далее мы всюду опускаем слово “относительно”.

Для достижения заявленной цели – аппроксимации плоских банаховых модулей свободными – понадобятся оценки норм морфизмов, входящих в сформулированные выше определения, а также соответствующие видоизменения самих определений.

Пусть $C > 0$. Следуя работе [8], мы называем C -*мономорфизмом* инъективный морфизм банаховых модулей (в частности, ограниченный линейный оператор) $\mu: V \rightarrow W$ такой, что $\|v\| \leq C\|\mu(v)\|$ для любого $v \in V$, а C -*эпиморфизмом* – сюръективный морфизм $\nu: Y \rightarrow Z$ такой, что для каждого $z \in Z$ найдется его прообраз y , для которого $\|y\| \leq C\|z\|$. Кроме того, мы называем C -*изоморфизмом* изоморфизм, являющийся C -эпиморфизмом. Также назовем мономорфизм или эпиморфизм банаховых модулей C -*допустимым*, если он расщепляется линейным оператором с нормой, не превосходящей C . Очевидно, C -допустимый (моно)эпиморфизм является C -(моно)эпиморфизмом.

Следующие версии стандартных определений введены в [8]; во всех случаях $C \geq 1$. Банахов модуль P называется (относительно) C -*проективным*, если он проективен и для всякого C_1 -допустимого эпиморфизма ν из (1.2) морфизм φ можно выбрать так, чтобы $\|\varphi\| \leq CC_1\|\psi\|$. Двойственным образом определяется C -*инъективный* модуль. К сожалению, определение C -плоского модуля в [8] содержит досадную ошибку (не повлиявшую на использующие его результаты). Мы приведем здесь правильную формулировку. Левый банахов A -модуль X называется (относительно) C -*плоским*, если для любой короткой точной последовательности

$$0 \longrightarrow Y' \xrightarrow{\mu} Y \longrightarrow Y'' \longrightarrow 0$$

правых банаховых A -модулей такой, что $\mu - C_1$ -допустимый мономорфизм, $\mu \otimes_A 1_X$ является CC_1 -мономорфизмом (в этом случае последовательность (1.1) автоматически точна).

Обозначим через $\mathcal{B}(X, Y)$ банахово пространство ограниченных линейных операторов между банаховыми пространствами X и Y . Если, кроме того, X и Y – банаховы модули, то замкнутое подпространство в $\mathcal{B}(X, Y)$, состоящее из морфизмов A -модулей, мы обозначаем через $h_A(X, Y)$ (для правых модулей) или ${}_A h(X, Y)$ (для левых). Если $\varphi: X \rightarrow X'$ – морфизм, то $h_A(\varphi, Y)$ обозначает канонический ограниченный линейный оператор между $h_A(X', Y)$ и $h_A(X, Y)$, отображающий ψ в $\psi\varphi$.

Напомним, что дуальное банахово пространство X^* (т.е. состоящее из непрерывных линейных функционалов) левого банахова модуля X является правым банаховым модулем с естественно определенными операциями. Докажем здесь пред-

ложение 4.9 из [8], усиливающее теорему VII.1.14 из [1], которая утверждает, что банахов модуль X является плоским тогда и только тогда, когда X^* инъективен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Левый банахов модуль X является C -плоским тогда и только тогда, когда правый банахов модуль X^* является C -инъективным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Модуль X является C -плоским тогда и только тогда, когда для любого C_1 -допустимого мономорфизма μ правых банаховых A -модулей $\mu \otimes_A 1_X$ является CC_1 -мономорфизмом. С другой стороны, из определения следует, что X^* является C -инъективным тогда и только тогда, когда $h_A(\mu, X^*)$ является CC_1 -эпиморфизмом для любого C_1 -допустимого мономорфизма μ . Заметим, что $\mu \otimes_A 1_X$ есть CC_1 -мономорфизм тогда и только тогда, когда $(\mu \otimes_A 1_X)^*$ есть CC_1 -эпиморфизм [21; В.3.8]. Однако морфизмы $(\mu \otimes_A 1_X)^*$ и $h_A(\mu, X^*)$ совпадают с точностью до изометрического изоморфизма. Этим все доказано.

Пусть X – левый банахов A -модуль. Важную роль в дальнейшем играет морфизм

$$A_+ \widehat{\otimes} X \rightarrow X: a \otimes x \mapsto a \cdot x.$$

Он всегда обозначается через π независимо от модуля X . Следующая лемма является аналогом [1; задача VII.2.8].

ЛЕММА 1.2. *Левый банахов A -модуль X является C -плоским тогда и только тогда, когда существует морфизм банаховых A -модулей $\rho: X \rightarrow (A_+ \widehat{\otimes} X)^{**}$ такой, что $\|\rho\| \leq C$ и диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} & (A_+ \widehat{\otimes} X)^{**} & \\ \nearrow \rho & \downarrow \pi^{**} & \\ X & \xrightarrow{\quad} & X^{**} \end{array}$$

(здесь $X \rightarrow X^{**}$ – каноническое вложение) коммутативна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 1.1 модуль X является C -плоским в том и только том случае, когда X^* является C -инъективным. Согласно [8; предложение 3.8] это равносильно тому, что существует морфизм правых банаховых модулей $\tilde{\rho}: \mathcal{B}(A_+, X^*) \rightarrow X^*$ такой, что $\tilde{\rho}\pi^* = 1_{X^*}$ (мы отождествляем $\mathcal{B}(A_+, X^*)$ и $(A_+ \widehat{\otimes} X)^*$) и $\|\tilde{\rho}\| \leq C$. Поскольку

$${}_A h(X, (A_+ \widehat{\otimes} X)^{**}) \cong h_A((A_+ \widehat{\otimes} X)^*, X^*) \quad \text{и} \quad {}_A h(X, X^{**}) \cong h_A(X^*, X^*)$$

изометрически, причем при последнем изоморфизме вложение $X \subset X^{**}$ соответствует 1_{X^*} , морфизм ρ , соответствующий $\tilde{\rho}$ при первом изоморфизме, и есть морфизм с требуемыми свойствами. И обратно, если существует морфизм ρ , то $\tilde{\rho} \in h_A((A_+ \widehat{\otimes} X)^*, X^*)$, соответствующий ему, обладает свойствами, равносильными C -плоскости X .

ЛЕММА 1.3. *Левый банахов модуль X является C -плоским тогда и только тогда, когда для любого C_1 -допустимого мономорфизма $\mu: V \rightarrow W$ правых банаховых модулей и любого морфизма левых банаховых модулей $\psi: X \rightarrow V^*$ существует морфизм $\zeta: X \rightarrow W^*$ такой, что $\psi = \mu^* \zeta$ и $\|\zeta\| \leq CC_1 \|\psi\|$, причем достаточно рассмотреть случай $C_1 = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ($\Leftarrow$) Пусть $\psi: X \rightarrow X^{**}$ – каноническое вложение. Возьмем $\pi^*: X^* \rightarrow (A_+ \widehat{\otimes} X)^*$ в качестве μ . Очевидно, он 1-допустим. Тогда согласно предположению существует морфизм $\rho: X \rightarrow (A_+ \widehat{\otimes} X)^{**}$, удовлетворяющий условиям леммы 1.2. Стало быть, X есть C -плоский модуль.

($\Rightarrow$) Пусть X – C -плоский модуль, а μ является C_1 -допустимым. Тогда X^* – C -инъективный. Следовательно, $h_A(\mu, X^*)$ является CC_1 -эпиморфизмом. А это означает, что и морфизм ${}_A h(X, \mu^*)$ является CC_1 -эпиморфизмом, что и требовалось доказать.

Из леммы 1.2 следует, что в лемме 1.3 можно заменить дуальные модули на бидуальные. Таким образом, C -плоскость характеризуется задачей подъема общего вида:

$$\begin{array}{ccc} & & Y^{**} \\ & \nearrow \zeta & \downarrow \nu^{**} \\ X & \xrightarrow{\psi} & Z^{**} \end{array} \quad (1.3)$$

где ν – 1-допустимый эпиморфизм.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Для удобства читателя перечислим некоторые условия, при которых банаховы модули являются или не являются плоскими.

(1) Если левый идеал I в A_+ обладает правой ограниченной аппроксимативной единицей (далее о.а.е.), то I и A_+/I плоские. Если, кроме того, морфизм $A_+^* \rightarrow I^*$, дуальный к вложению $I \subset A_+$, допустим, то из плоскости A_+/I следует наличие правой о.а.е. [4], [22].

(2) Пополняющий одномерный модуль над L^1 -алгеброй локально компактной топологической группы является плоским тогда и только тогда, когда группа аменабельна [1; теорема VII.2.23].

(3) Всякий банахов модуль над аменабельной банаховой алгеброй плоский [1; теорема VII.2.27]. В том числе, пространство любого инволютивного представления ядерной C^* -алгебры (в частности, C^* -алгебры аменабельной или связной локально компактной группы) является плоским банаховым модулем.

(4) Гильбертово пространство является плоским левым банаховым модулем над действующей в нем гиперфинитной алгеброй фон Неймана [23].

(5) Гильбертово пространство регулярного представления свободной группы с двумя образующими не является плоским банаховым модулем над ее алгеброй фон Неймана [24].

(6) Пусть A – CSL-алгебра, т.е. рефлексивная (автоматически замкнутая в слабой топологии) операторная алгебра в гильбертовом пространстве H такая, что решетка ее инвариантных подпространств коммутативна. Если A – неразложимая и конечной ширины, то модуль H является плоским тогда и только тогда, когда сумма любых двух собственных инвариантных подпространств отлична от H [9].

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Большинство плоских модулей, возникающих естественным образом в различных разделах функционального анализа, являются 1-плоскими. Однако существуют в точности C -плоские модули, т.е. C -плоские, но не C' -плоские при $C' < C$. Пусть G – конечная группа. Из [25; теорема 4.1] следует, что ее алгебра Фурье $A(G)$ является в точности M_G -плоским $A(G)$ -бимодулем, где $M_G = \sum_{\pi} (\dim \pi)^3 / \sum_{\pi} (\dim \pi)^2$, а суммы берутся по всем неприводимым представлениям G . Однако $M_G \geq 3/2$ для неабелевых групп [25; предложение 4.3]. (Под плоским A -бимодулем подразумевается модуль, который является левым плоским над $A_+ \widehat{\otimes} A_+^{\text{op}}$, где A_+^{op} – противоположная банахова алгебра к A_+ .)

В заключение этого параграфа докажем теорему, характеризующую плоские модули с помощью производного функтора Ext и бидуальных модулей. Определение функтора Ext для банаховых модулей можно найти в работах [1], [12], см. также § 6.

ТЕОРЕМА 1.6. *Левый банахов A -модуль X является плоским тогда и только тогда, когда $\text{Ext}_A^1(X, Y^{**}) = 0$ для всех левых банаховых A -модулей Y .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость тривиальна, так как X плоский тогда и только тогда, когда $\text{Ext}_A^1(X, Y^*) = 0$ для всех правых банаховых A -модулей Y [12; теорема 7.3.25 (III)].

($\Leftarrow$) В силу предложения 1.1 достаточно показать, что X^* является инъективным правым A -модулем. Пусть $K = \text{Ker } \pi$, где $\pi: A_+ \hat{\otimes} X \rightarrow X$ — морфизм, ассоциированный с умножением. В силу [1; предложение III.4.13] имеем

$$\text{Ext}_{A^{\text{op}}}^1(K^*, X^*) = \text{Ext}_A^1(X, K^{**}) = 0,$$

где A^{op} — противоположная к A банахова алгебра. Это означает [12; гл. 7, § 3.2], что всякое допустимое расширение банахова модуля K^* с помощью X^* расщепимо, в том числе и расширение

$$0 \longrightarrow X^* \xrightarrow{\pi^*} (A_+ \hat{\otimes} X)^* \longrightarrow K^* \longrightarrow 0.$$

Таким образом, X^* является прямым слагаемым в $(A_+ \hat{\otimes} X)^*$. Поэтому достаточно убедиться, что $(A_+ \hat{\otimes} X)^*$ инъективен. Однако он изоморфен заведомо инъективному правому модулю $\mathcal{B}(A_+, X^*)$ [1; предложение III.1.31], и этим все доказано.

§ 2. Локальная структура плоских модулей

Пусть X — левый банахов A -модуль. Для заданных конечных подмножеств $K = \{a_1, \dots, a_n\}$ и $L = \{x_1, \dots, x_n\}$ в A и X соответственно обозначим через $E_{K,L}$ линейную оболочку множества $\{x_1, \dots, x_n\} \cup \{a_1 \cdot x_1, \dots, a_n \cdot x_n\}$ и рассмотрим $E_{K,L} \subset X$ как конечномерное нормированное пространство с нормой, унаследованной из X .

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть X — левый банахов A -модуль. Следующие условия равносильны.*

(A) X является C -плоским.

(B) Для любых морфизма левых банаховых A -модулей $\psi: X \rightarrow Z$, 1-допустимого эпиморфизма левых банаховых A -модулей $\nu: Y \rightarrow Z$, конечных подмножеств $K = \{a_1, \dots, a_n\}$ и $L = \{x_1, \dots, x_n\}$ в A и X соответственно и $\varepsilon > 0$ существует линейный оператор $\varkappa: E_{K,L} \rightarrow Y$ с $\|\varkappa\| \leq C$ такой, что

(1) диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow \varkappa & \downarrow \nu \\ E_{K,L} & \xrightarrow{\psi|_{E_{K,L}}} & Z \end{array}$$

аппроксимативно коммутативна на L с точностью до ε в том смысле, что $\|\nu \varkappa(x_i) - \psi(x_i)\| < \varepsilon$ для всех $i = 1, \dots, n$;

(2) $\|a_i \cdot \varkappa(x_i) - \varkappa(a_i \cdot x_i)\| < \varepsilon$ для всех $i = 1, \dots, n$.

(С) Для любых конечных подмножеств $K = \{a_1, \dots, a_n\}$ и $L = \{x_1, \dots, x_n\}$ в A и X соответственно и $\varepsilon > 0$ существуют свободный банахов A -модуль F , линейный оператор $\varkappa: E_{K,L} \rightarrow F$ и морфизм A -модулей $\sigma: F \rightarrow X$ такие, что $\|\varkappa\| \leq C$, $\|\sigma\| \leq 1$ и

$$\|\sigma \varkappa(x_i) - x_i\| < \varepsilon, \quad \|a_i \cdot \varkappa(x_i) - \varkappa(a_i \cdot x_i)\| < \varepsilon$$

для всех $i = 1, \dots, n$.

Прежде чем доказывать теорему, напомним, что слабая* операторная топология в $\mathcal{B}(E, F^*)$, где E и F — банаховы пространства, задается системой преднорм $\{\|\tau\|_{x,y} = \langle \tau(x), y \rangle; x \in E, y \in F\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (А) $\Rightarrow$ (В). Если X является C -плоским, то существует морфизм $\zeta: X \rightarrow Y^{**}$, дополняющий диаграмму (1.3) до коммутативной и такой, что $\|\zeta\| \leq C$. Обозначим через ζ_0 ограничение ζ на $E_{K,L}$. В силу принципа локальной рефлексивности (см., например, [21; §28.1]) оператор ζ_0 может быть аппроксимирован в слабой* операторной топологии операторами из $\mathcal{B}(E_{K,L}, Y)$, норма которых не превосходит C .

Рассмотрим в $Z^n \times Y^n$ подмножество V , состоящее из элементов вида

$$(\nu \varkappa(x_1), \dots, \nu \varkappa(x_n), a_1 \cdot \varkappa(x_1) - \varkappa(a_1 \cdot x_1), \dots, a_n \cdot \varkappa(x_n) - \varkappa(a_n \cdot x_n)),$$

где $\varkappa$ — операторы из $\mathcal{B}(E_{K,L}, Y)$, принадлежащие шару радиуса C . Из того, что $\nu^{**}\zeta = \psi$, а ζ — морфизм A -модулей, следует, что

$$y = (\psi(x_1), \dots, \psi(x_n), 0, \dots, 0)$$

лежит в слабом замыкании V . Теорема Мазура утверждает, что сильное и слабое замыкания выпуклого подмножества в банаховом пространстве совпадают. Так как V выпукло, получаем, что y лежит в сильном замыкании V , следовательно, существует $\varkappa \in \mathcal{B}(E_{K,L}, Y)$ такой, что

$$\|\varkappa\| \leq C, \quad \|\nu \varkappa(x_i) - \psi(x_i)\| < \varepsilon, \quad \|a_i \cdot \varkappa(x_i) - \varkappa(a_i \cdot x_i)\| < \varepsilon$$

для всех $i = 1, \dots, n$.

(В) $\Rightarrow$ (С). Возьмем $\pi: A_+ \widehat{\otimes} X \rightarrow X$ в качестве ν , а 1_X — в качестве ψ и рассмотрим оператор $\varkappa$, существующий в силу условия (В). Тогда достаточно положить $F = A_+ \widehat{\otimes} X$ и $\sigma = \pi$.

(С) $\Rightarrow$ (А). (Рассуждения близки к доказательству предложения 2.1.10 из [3].) Согласно лемме (1.3) достаточно показать, что для любого 1-допустимого мономорфизма правых банаховых A -модулей $\mu: Y \rightarrow Z$ и любого морфизма левых банаховых A -модулей $\psi: X \rightarrow Y^*$ существует морфизм $\zeta: X \rightarrow Z^*$ такой, что $\|\zeta\| \leq C\|\psi\|$ и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & Z^* \\ & \nearrow \zeta & \downarrow \mu^* \\ X & \xrightarrow{\psi} & Y^* \end{array}$$

коммутативна, причем можно полагать, что $\psi \neq 0$.

Рассмотрим множество Λ , состоящее из элементов вида $\lambda = (K, L, \varepsilon)$, где K и L — конечные подмножества одинаковой мощности в A и X соответственно, а $\varepsilon > 0$. Упорядоченное естественным образом (т.е. $(K_1, L_1, \varepsilon_1) \succ (K, L, \varepsilon) \Leftrightarrow K_1 \supset K$,

$L_1 \supset L$ и $\varepsilon_1 \leq \varepsilon$) множество Λ является направленным. Пусть $\lambda = (K, L, \varepsilon) \in \Lambda$, и пусть F_λ – свободный банахов A -модуль, а $\varkappa_\lambda: E_{K,L} \rightarrow F_\lambda$ и $\sigma_\lambda: F_\lambda \rightarrow X$ – оператор и морфизм, соответствующие $K = \{a_1, \dots, a_n\}$, $L = \{x_1, \dots, x_n\}$ и $\varepsilon > 0$ согласно условию (С) теоремы.

Так как F_λ является 1-плоским, то существует морфизм $\xi_\lambda: F_\lambda \rightarrow Z^*$ такой, что $\|\xi_\lambda\| \leq \|\psi\|$, дополняющий диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & & Z^* & \\ & & \nearrow \xi_\lambda & \downarrow \mu^* & \\ E_{K,L} & \xrightarrow{\varkappa_\lambda} & F_\lambda & \xrightarrow{\sigma_\lambda} & X \xrightarrow{\psi} Y^* \end{array} \quad (2.1)$$

до коммутативной.

Каждому $\eta = (K, L, \varepsilon)$ и каждому $x \in L$ поставим в соответствие ограниченную сеть $(\xi_\lambda \varkappa_\lambda(x)) \subset Z^*$, где $\lambda \succcurlyeq \eta$. В силу слабой* компактности шара в Z^* существует предельная точка, которую обозначим через $\zeta_\eta(x)$. Мы определим отображение $\zeta_\eta: X \rightarrow Z^*$ для всех $x \in X$, положив $\zeta_\eta(x)$ как выше для $x \in L$ и $\zeta_\eta(x) = 0$ для $x \notin L$. Отображение ζ_η является элементом множества

$$M = \prod_{x \in X} \{f \in Z^* : \|f\| \leq C\|\psi\| \|x\|\}.$$

Снабдим каждый множитель в M слабой* топологией. Тогда M компактно относительно топологии прямого произведения. Тем самым, ζ_η имеет предельную точку, которую обозначим через ζ . Докажем, что отображение $\zeta: X \rightarrow Z^*$ является искомым морфизмом.

(а) Покажем, что ζ – линейный оператор и $\|\zeta\| \leq C\|\psi\|$. Пусть $u, v \in X$, $z \in Z$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует $\eta = (K, L, \varepsilon)$ такой, что $u, v, u + v \in L$ и $|\langle \zeta_\eta(x), z \rangle - \langle \zeta(x), z \rangle| < \varepsilon$ для $x \in \{u, v, u + v\}$ (здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает двойственность между Z^* и Z). По построению $\zeta_\eta(x)$ (где $x \in L$) является предельной точкой сети $(\xi_\lambda \varkappa_\lambda(x))$ в слабой* топологии. Следовательно, существует $\lambda \succcurlyeq \eta$ такой, что $|\langle \zeta_\eta(x) - \xi_\lambda \varkappa_\lambda(x), z \rangle| < \varepsilon$ для $x \in \{u, v, u + v\}$. Так как $\xi_\lambda \varkappa_\lambda$ аддитивно, то $|\langle \zeta(u), z \rangle + \langle \zeta(v), z \rangle - \langle \zeta(u + v), z \rangle| < 6\varepsilon$. Поскольку ε и z можно выбрать произвольно, получаем $\zeta(u) + \zeta(v) = \zeta(u + v)$. Однородность доказывается аналогично. Итак, ζ линейно. Неравенство $\|\zeta\| \leq C\|\psi\|$ следует из построения.

(б) Покажем, что ζ является морфизмом A -модулей. Пусть $a \in A$, $x \in X$, $z \in Z$ и $\varepsilon > 0$. Можно предполагать, что $\|a\| \leq 1$ и $\|x\| \leq 1$. Тогда существует $\eta = (K, L, \varepsilon)$ такой, что $a \in K$, $\{x, a \cdot x\} \subset L$, $|\langle \zeta_\eta(a \cdot x), z \rangle - \langle \zeta(a \cdot x), z \rangle| < \varepsilon$ и $|\langle \zeta_\eta(x), z \cdot a \rangle - \langle \zeta(x), z \cdot a \rangle| < \varepsilon$. Как и выше, существует $\lambda \succcurlyeq \eta$ такой, что

$$|\langle \zeta_\eta(a \cdot x) - \xi_\lambda \varkappa_\lambda(a \cdot x), z \rangle| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |\langle \zeta_\eta(x) - \xi_\lambda \varkappa_\lambda(x), z \cdot a \rangle| < \varepsilon.$$

Так как $\|a \cdot \xi_\lambda \varkappa_\lambda(x) - \xi_\lambda \varkappa_\lambda(a \cdot x)\| < \|\psi\|\varepsilon$, то $|\langle a \cdot \zeta(x), z \rangle - \langle \zeta(a \cdot x), z \rangle| < (4 + \|\psi\|)\varepsilon$. Тем самым, $a \cdot \zeta(x) = \zeta(a \cdot x)$.

(с) Покажем, что $\psi = \mu^* \zeta$. Пусть $x \in X$, $y \in Y$ и $\varepsilon > 0$. Можно предполагать, что $\|x\| \leq 1$ и $\|y\| \leq 1$. Тогда найдется $\eta = (K, L, \varepsilon)$ такой, что $x \in L$ и $|\langle \zeta_\eta(x), \mu(y) \rangle - \langle \zeta(x), \mu(y) \rangle| < \varepsilon$. Стало быть, существует $\lambda \succcurlyeq \eta$ такой, что $|\langle \zeta_\eta(x) - \xi_\lambda \varkappa_\lambda(x), \mu(y) \rangle| < \varepsilon$. В силу коммутативности (2.1)

$$\langle \xi_\lambda \varkappa_\lambda(x), \mu(y) \rangle = \langle \mu^* \xi_\lambda \varkappa_\lambda(x), y \rangle = \langle \psi \sigma_\lambda \varkappa_\lambda(x), y \rangle.$$

Поскольку $\|\sigma_\lambda \varkappa_\lambda(x) - x\| < \varepsilon$, имеем отсюда, что $|\langle \mu^* \zeta(x) - \psi(x), y \rangle| < (2 + \|\psi\|)\varepsilon$. Так как x, y и ε можно выбрать произвольно, то $\mu^* \zeta = \psi$.

В доказательстве импликации (C) $\Rightarrow$ (A) использовалось только то, что модуль F из условия теоремы является 1-плоским. Поэтому можно заменить в формулировке условия (C) “свободный” на “1-плоский” и результат останется верным.

Сравнивая теорему 2.1 с определением проективного модуля, обнаруживаем, что плоский модуль может быть назван “локально аппроксимативно проективным”.

При использовании операторов, заданных лишь локально, т.е. на конечномерных подпространствах, в теории банаховых пространств применяется техника ультрапроизведений (см., например, [2; раздел C.3]). Это удобный (хотя и в высшей степени неконструктивный) способ записывать условия, подобные сформулированному в теореме 2.1.

Напомним определения. Пусть $(E_s)_{s \in \mathbb{S}}$ – бесконечное семейство банаховых пространств, а $\mathcal{U}$ – свободный ультрафильтр на множестве $\mathbb{S}$. Ультрапроизведением называется факторпространство произведения банаховых пространств $\prod_{s \in \mathbb{S}} E_s$ по замкнутому подпространству, состоящему из таких элементов (x_s) , что

$$\lim_{\mathcal{U}} \|x_s\| = 0,$$

где $\lim_{\mathcal{U}}$ обозначает предел по ультрафильтру. Ультрапроизведение обозначается через $\prod E_s / \mathcal{U}$. В частном случае, когда $E_s = E$ для данного банахова пространства E , получаем ультрастепень (обозначается через $E^{\mathcal{U}}$). Соответствие $(E_s) \mapsto \prod E_s / \mathcal{U}$ является функтором, т.е. ограниченному семейству операторов $(\nu_s)_{s \in \mathbb{S}}$, $\nu_s \in \mathcal{B}(E_s, E'_s)$, соответствует оператор из $\mathcal{B}(\prod E_s / \mathcal{U}, \prod E'_s / \mathcal{U})$, который обозначим через $\nu^{\mathcal{U}}$, при этом $\|\nu^{\mathcal{U}}\| \leq \lim_{\mathcal{U}} \|\nu_s\|$. Более того, если E_s и E'_s – банаховы модули, а ν_s – морфизмы банаховых модулей, то $\prod E_s / \mathcal{U}$ и $\prod E'_s / \mathcal{U}$ являются банаховыми модулями, а $\nu^{\mathcal{U}}$ – их морфизмом. Если $\psi_s: X \rightarrow E'_s$ – ограниченное семейство морфизмов, то композицию морфизмов $X \rightarrow \prod E'_s \rightarrow \prod E'_s / \mathcal{U}$ обозначим через $\tilde{\psi}$.

ТЕОРЕМА 2.2. *Левый банахов A -модуль X является C -плоским тогда и только тогда, когда найдется множество $\mathbb{S}$ и свободный ультрафильтр $\mathcal{U}$ на нем такой, что для любых ограниченных семейств*

$$(\psi_s)_{s \in \mathbb{S}}, \quad \psi_s \in \text{Ah}(X, Z_s), \quad \text{и} \quad (\nu_s)_{s \in \mathbb{S}}, \quad \nu_s \in \text{Ah}(Y_s, Z_s),$$

где ν_s – 1-допустимые эпиморфизмы, существует морфизм банаховых A -модулей $\zeta: X \rightarrow \prod Y_s / \mathcal{U}$ такой, что $\|\zeta\| \leq C \lim_{\mathcal{U}} \|\psi_s\|$ и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & \prod Y_s / \mathcal{U} \\ & \nearrow \zeta & \downarrow \nu^{\mathcal{U}} \\ X & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & \prod Z_s / \mathcal{U} \end{array} \quad (2.2)$$

коммутативна. Более того, для C -плоскости достаточно выполнения этого условия для пары $\psi \in \text{Ah}(X, Z)$ и $\nu \in \text{Ah}(Y, Z)$ и ультрастепеней вместо ультрапроизведений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ($\Rightarrow$) Рассмотрим порядковый фильтр, соответствующий направленному множеству Λ , состоящему из элементов вида $\lambda = (K, L, \varepsilon)$, где $K = \{a_1, \dots, a_n\}$ и $L = \{x_1, \dots, x_n\}$ – конечные подмножества A и X соответственно, а $\varepsilon > 0$, и обозначим через $\mathcal{U}$ какой-нибудь мажорирующий его ультрафильтр. Пусть $(\nu_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, $\nu_\lambda \in {}_A\text{h}(Y_\lambda, Z_\lambda)$, – ограниченное семейство 1-допустимых эпиморфизмов, а $(\psi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, $\psi_\lambda \in {}_A\text{h}(X, Z_\lambda)$, – ограниченное семейство. Так как X – C -плоский, то в силу теоремы 2.1 существуют свободный банахов A -модуль F_λ , оператор $\varkappa_\lambda: E_{K,L} \rightarrow F_\lambda$ и морфизм $\sigma_\lambda: F_\lambda \rightarrow X$ такие, что $\|\varkappa_\lambda\| \leq C$, $\|\sigma_\lambda\| \leq 1$,

$$\|\sigma_\lambda \varkappa_\lambda(x_i) - x_i\| < \varepsilon \quad \text{и} \quad \|a_i \cdot \varkappa_\lambda(x_i) - \varkappa_\lambda(a_i \cdot x_i)\| < \varepsilon$$

для всех i . Поскольку F_λ является 1-проективным, для каждого λ существует $\xi_\lambda \in {}_A\text{h}(F_\lambda, Y_\lambda)$ такой, что $\|\xi_\lambda\| \leq \|\psi_\lambda\|$ и $\nu_\lambda \xi_\lambda = \psi_\lambda \sigma_\lambda$. Обозначим через $\tilde{\zeta}: X \rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ отображение такое, что $(\tilde{\zeta}(x))_\lambda = \xi_\lambda \varkappa_\lambda(x)$, если $x \in E_{K,L}$, и $(\tilde{\zeta}(x))_\lambda = 0$, если $x \notin E_{K,L}$. Отображение $\tilde{\zeta}$ не обязано быть линейным, однако его композиция с проекцией $\prod Y_\lambda \rightarrow \prod Y_\lambda / \mathcal{U}$ является морфизмом A -модулей. Обозначим его через ζ . Так как $\|\xi_\lambda \varkappa_\lambda\| \leq C \|\psi_\lambda\|$, то $\|\zeta\| \leq C \lim_{\mathcal{U}} \|\psi_\lambda\|$. Поскольку $\nu_\lambda \zeta_\lambda = \psi_\lambda \sigma_\lambda$, имеем $\nu^\mathcal{U} \zeta = \tilde{\psi}$.

($\Leftarrow$) Пусть $C' > C$. Предположим, что условия теоремы выполнены для ультрастепеней по некоторому ультрафильтру $\mathcal{U}$ на множестве $\mathbb{S}$. Покажем, что X является C' -плоским, для этого проверим выполнение условий теоремы 2.1. Положим $Y_s = A_+ \hat{\otimes} X$, $Z_s = X$ и возьмем в качестве ν_s и ψ_s морфизмы $\pi: A_+ \hat{\otimes} X \rightarrow X$ и 1_X . Пусть $\varepsilon > 0$, и пусть K, L и $E_{K,L}$ – такие, как в условии (C) теоремы 2.1. Можно предполагать, что $\|a_i\| \leq 1$ и $\|x_i\| \leq 1$. Рассмотрим в $E_{K,L}$ базис $e_1, \dots, e_r$. Пусть $\zeta: X \rightarrow (A_+ \hat{\otimes} X)^\mathcal{U}$ – морфизм, дополняющий диаграмму (2.2) до коммутативной. Выберем в $(A_+ \hat{\otimes} X)^\mathbb{S}$ прообразы $(e_{1,s})_s, \dots, (e_{r,s})_s$ элементов $\zeta(e_1), \dots, \zeta(e_r)$. Обозначим через $\varkappa_s$ линейный оператор $E_{K,L} \rightarrow A_+ \hat{\otimes} X$: $e_j \mapsto e_{j,s}$. Поскольку всякий $v \in E_{K,L}$ есть линейная комбинация $e_1, \dots, e_r$, то, учитывая $\|\psi\| = 1$, в силу определения ультрастепени имеем

$$\lim_{\mathcal{U}} \|\varkappa_s(v)\| = \|\zeta(v)\| \leq C \|v\| \quad \text{для всех } v \in E_{K,L},$$

а также

$$\lim_{\mathcal{U}} \|x_i - \pi \varkappa_s(x_i)\| = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\mathcal{U}} \|a_i \cdot \varkappa_s(x_i) - \varkappa_s(a_i \cdot x_i)\| = 0 \quad \text{для всех } i = 1, \dots, n.$$

Так как единичный шар $E_{K,L}$ компактен, то для $\varepsilon_1 > 0$ можно выбрать в нем ε_1 -сеть $v_1, \dots, v_m$. Тогда существует $T \in \mathcal{U}$ такое, что

$$\|\varkappa_s(v_k)\| < C' \|v_k\|, \quad \|x_i - \pi \varkappa_s(x_i)\| < \varepsilon, \quad \|a_i \cdot \varkappa_s(x_i) - \varkappa_s(a_i \cdot x_i)\| < \varepsilon$$

для всех $s \in T$, $k = 1, \dots, m$ и $i = 1, \dots, n$. Поскольку $\sup_s \|\varkappa_s\| < \infty$, а ε_1 можно взять сколь угодно малым, имеем $\|\varkappa_s(v)\| \leq C' \|v\|$ для всех $s \in T$ и всех v из единичного шара $E_{K,L}$. Таким образом, $\|\varkappa_s\| \leq C'$ для всех $s \in T$.

Итак, $\pi: A_+ \hat{\otimes} X \rightarrow X$ и операторы $\varkappa_s: E_{K,L} \rightarrow A_+ \hat{\otimes} X$ для произвольного $s \in T$ удовлетворяют условию (C) теоремы 2.1. Следовательно, X является C' -плоским для всех $C' > C$. Как известно [8; предложение 4.13], отсюда следует, что он C -плоский.

Сравнивая (1.3) и (2.2), обнаруживаем, что в (1.3) можно заменить бидуальные модули на ультрапроизведения, в частности на ультрастепени. Впрочем, это не удивительно, поскольку для любого банахова пространства E бидуальное пространство E^{**} является дополняемым подпространством в некоторой ультрастепени E . Однако в отличие от (1.3) в задаче подъема (2.2) не только вертикальная, но и горизонтальная стрелка является морфизмом специального вида.

§ 3. Аппроксимация в плоских модулях

При наличии у модуля свойства аппроксимации возможно усиление теоремы 2.1: операторы, заданные на конечномерных подпространствах, можно заменить на операторы, определенные на всем модуле.

Необходимые сведения о свойстве аппроксимации. Напомним, что согласно определению банахово пространство E обладает свойством аппроксимации (сокращенно СА), если для любого компакта K в E и любого $\varepsilon > 0$ найдется конечномерный оператор $\varphi: E \rightarrow E$ такой, что $\|\varphi(x) - x\| < \varepsilon$ для всех $x \in K$. Если, кроме того, можно выбрать φ так, чтобы $\|\varphi\| \leq C$, то говорят, что E обладает ограниченным СА с постоянной C .

Пусть E и E_1 — банаховы пространства. Будем говорить, что сеть (τ_λ) операторов из $\mathcal{B}(E, E_1^*)$ сходится к τ в *ис w^* -топологии*, если для любого $y \in E_1$ сеть $\langle \tau_\lambda(x), y \rangle$ сходится к $\langle \tau(x), y \rangle$ равномерно на компактных подмножествах X .

В дальнейшем будет использовано следующее утверждение об аппроксимации.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть E и E_1 — банаховы пространства. Рассмотрим $\mathcal{B}(E, E_1)$ как подпространство $\mathcal{B}(E, E_1^{**})$.

(А) Если E обладает СА, то множество конечномерных операторов из E в E_1 плотно в $\mathcal{B}(E, E_1^{**})$ в *ис w^* -топологии*.

(В) Если E обладает ограниченным СА с постоянной C , то множество конечномерных операторов из E в E_1 с нормой, не превосходящей C , плотно в единичном шаре $\mathcal{B}(E, E_1^{**})$ в *слабой* операторной топологии* (*ис w^* -топологии*).

Для доказательства понадобится лемма, которая получается стандартными рассуждениями.

ЛЕММА 3.2. На ограниченных множествах топология равномерной сходимости на компактах совпадает с сильной операторной топологией, а *ис w^* -топология* — со *слабой* операторной топологией*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. (А) Пусть $\tau \in \mathcal{B}(E, E_1^{**})$, K — компакт в E , $f_1, \dots, f_n \in E_1^*$ и $\varepsilon > 0$. Достаточно показать, что найдутся конечномерное подпространство E_0 в E_1^{**} и операторы $\sigma: E \rightarrow E_0$, $\chi: E_0 \rightarrow E_1$ такие, что

$$|\langle f_i, \chi\sigma(x) \rangle - \langle f_i, \tau(x) \rangle| < \varepsilon \quad (3.1)$$

для всех $x \in K$ и всех i . Можно предполагать, что K содержится в единичном шаре и $\|f_i\| \leq 1$.

Из наличия СА следует, что найдется конечномерный $\sigma \in \mathcal{B}(E, E_1^{**})$ такой, что $\|\sigma(x) - \tau(x)\| < \varepsilon/2$ для всех $x \in K$. Стало быть, $|\langle f_i, \sigma(x) \rangle - \langle f_i, \tau(x) \rangle| < \varepsilon/2$ для всех $x \in K$ и всех i . Положим $E_0 = \text{Im } \sigma$. Согласно принципу локальной рефлексивности вложение $E_0 \subset E_1^{**}$ может быть аппроксимировано в *слабой* операторной топологии* операторами из единичного шара $\mathcal{B}(E_0, E_1)$. В силу леммы 3.2 это равносильно аппроксимации в *ис w^* -топологии*. Тем самым, поскольку $\sigma(K)$ — компакт, существует $\chi: E_0 \rightarrow E_1$ такой, что

$$|\langle f_i, \chi\sigma(x) \rangle - \langle f_i, \sigma(x) \rangle| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $x \in K$ и всех i . Итак, (3.1) выполнено для всех $x \in K$ и всех i .

Доказательство (В) аналогично с очевидными изменениями.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Для наших приложений в ограниченном случае (см. использование теоремы 3.1 в доказательстве части (С) теоремы 3.6) хватило бы аппроксимации произвольными операторами, а не обязательно конечномерными. Однако и тогда нельзя обойтись без ограниченного СА, поскольку согласно [27; следствие 4.5] существуют банахово пространство E , обладающее (неограниченным) СА, банахово пространство E_1 , обладающее ограниченным СА с постоянной 1, и $\tau \in \mathcal{B}(E, E_1^{**})$ такие, что $\|\sigma_\lambda\| \rightarrow \infty$ для любой сети $(\sigma_\lambda) \subset \mathcal{B}(E, E_1)$, сходящейся к τ в слабой* операторной топологии.

Свойство аппроксимации будет также использовано далее в следующей тензорной форме.

ТЕОРЕМА 3.4 [13; лемма 1]. *Банахово пространство E обладает СА тогда и только тогда, когда для всякого банахова пространства E_1 существует сеть конечномерных линейных операторов $\varphi_\lambda: E \rightarrow E$ такая, что*

$$(1 \otimes \varphi_\lambda)(u) \rightarrow u$$

равномерно на компактных подмножествах $E_1 \hat{\otimes} E$. Необходимым и достаточным для того, чтобы E обладало ограниченным СА с постоянной C , является то же условие, что и при выполнении неравенства $\|\varphi_\lambda\| \leq C$.

В § 7 нам понадобится и более общее утверждение. Пусть $E_i, i = 1, 2, 3$, и E — банаховы пространства, и пусть $\psi \in \mathcal{B}(E_1 \times E_2, E_3)$, т.е. ψ является ограниченным билинейным оператором. Тогда корректно определен ограниченный билинейный оператор

$$\psi^E: E_1 \times (E \hat{\otimes} E_2) \rightarrow E \hat{\otimes} E_3: (x, y \otimes z) \mapsto y \otimes \psi(x, z),$$

причем $\|\psi^E\| = \|\psi\|$.

ТЕОРЕМА 3.5. *Пусть сеть $(\varphi_\lambda) \subset \mathcal{B}(E_1 \times E_2, E_3)$ сходится к ψ равномерно на компактных подмножествах E_1 и E_2 . Тогда для всякого банахова пространства E сеть $(\varphi_\lambda^E) \subset \mathcal{B}(E_1 \times (E \hat{\otimes} E_2), E \hat{\otimes} E_3)$ сходится к ψ^E равномерно на компактных подмножествах E_1 и $E \hat{\otimes} E_2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K и L — компакты в E_1 и $E \hat{\otimes} E_2$, а $\varepsilon > 0$. В силу [26; предложение VII.2.9] существуют сходящиеся к нулю последовательности $(y_n) \subset E$ и $(z_n) \subset E_2$ такие, что всякий $u \in L$ имеет вид $\sum_n c_n y_n \otimes z_n$, где $\sum_{n=1}^\infty |c_n| \leq 1$. Можно предполагать, что $\|y_n\| \leq 1$ для всех n . Поскольку $\{z_n\} \cup \{0\}$ компактно, при достаточно больших λ имеем $\|\varphi_\lambda(x, z_n) - \psi(x, z_n)\| < \varepsilon$ для всех $x \in K$ и всех $n \in \mathbb{N}$. Тем самым,

$$\|\varphi_\lambda^E(x, u) - \psi^E(x, u)\| = \left\| \sum_n c_n y_n \otimes (\varphi_\lambda(x, z_n) - \psi(x, z_n)) \right\| \leq \varepsilon \sum_n |c_n| \leq \varepsilon$$

для всех $x \in K$ и $u \in L$.

Условия плоскости.

ТЕОРЕМА 3.6. *Пусть X — левый банахов A -модуль.*

(А) *Для того чтобы X был C_0 -плоским, достаточно, чтобы существовала сеть $(\rho_\lambda) \subset \mathcal{B}(X, A_+ \hat{\otimes} X)$ с $\|\rho_\lambda\| \leq C_0$ такая, что*

- (1) $\pi \rho_\lambda(x) \rightarrow x$ для всех $x \in X$;
- (2) $[a \cdot \rho_\lambda(x) - \rho_\lambda(a \cdot x)] \rightarrow 0$ для всех $a \in A$ и $x \in X$.

(В) Если X обладает СА, то необходимым условием плоскости является наличие сети (ρ_λ) (не обязательно ограниченной), удовлетворяющей условиям (1) и (2) из (А), более того, можно потребовать, чтобы обе сети сходились равномерно на компактных подмножествах A и X .

(С) Если X обладает ограниченным СА с постоянной C , то необходимым условием C_0 -плоскости является наличие сети (ρ_λ) такой, как в части (В), и такой, что $\|\rho_\lambda\| \leq CC_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (А) Здесь можно воспользоваться теоремой 2.1, однако мы пойдем прямым путем. Продолжим каждый ρ_λ до оператора из X в $(A_+ \widehat{\otimes} X)^{**}$. Заметим, что $\mathcal{B}(X, (A_+ \widehat{\otimes} X)^{**}) \cong (X \widehat{\otimes} (A_+ \widehat{\otimes} X)^*)^*$ является дуальным банаховым пространством, причем на ограниченных подмножествах слабая* операторная топология совпадает со слабой* топологией. Из слабой* компактности шара следует наличие у сети (ρ_λ) предельной точки $\rho: X \rightarrow (A_+ \widehat{\otimes} X)^{**}$ такой, что $\|\rho\| \leq C_0$. Из условия (1) получаем, что $\pi^{**}\rho(x) = x$ для любого $x \in X$, а из условия (2) вытекает, что ρ – морфизм A -модулей. Далее применяем лемму 1.2.

(В) Пусть X – плоский левый банахов A -модуль, обладающий СА, K и L – компакты в A и X соответственно, и пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим морфизм $\rho: X \rightarrow (A_+ \widehat{\otimes} X)^{**}$ из леммы 1.2. В силу теоремы 3.1, (А) можно аппроксимировать ρ в usc^* -топологии конечномерными операторами $\tau: X \rightarrow A_+ \widehat{\otimes} X$.

Согласно [26; лемма VII.2.2] существуют сходящиеся к 0 последовательности $(a_m) \subset A$ и $(x_n) \subset X$ такие, что замыкания их абсолютно выпуклых оболочек содержат K и L соответственно. Рассмотрим в $Y := c_0(\mathbb{N}, X) \times c_0(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, A_+ \widehat{\otimes} X)$ подмножество V , состоящее из элементов вида

$$((\pi\tau(x_n))_n, (a_m \cdot \tau(x_n) - \tau(a_m \cdot x_n))_{m,n}),$$

где $\tau \in \mathcal{B}(X, A_+ \widehat{\otimes} X)$. Поскольку Y^* изометрически изоморфно

$$\ell_1(\mathbb{N}, X^*) \oplus \ell_1(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, (A_+ \widehat{\otimes} X)^*),$$

слабая топология на Y определяется системой преднорм, каждая из которых задается парой $((f_n)_n, (g_{m,n})_{m,n})$, где

$$f_n \in X^*, \quad g_{m,n} \in (A_+ \widehat{\otimes} X)^* \quad \text{и} \quad \sum_n \|f_n\| + \sum_{m,n} \|g_{m,n}\| < \infty.$$

Поэтому из того, что ρ – морфизм модулей, а $\pi^{**}\rho(x) = x$, следует, что $((x_n)_n, 0)$ лежит в слабом замыкании V . Очевидно, что V выпукло, так что, применяя теорему Мазура, получаем, что $((x_n)_n, 0)$ содержится в сильном замыкании V , т.е. существует $\rho_\lambda \in \mathcal{B}(X, A_+ \widehat{\otimes} X)$, где $\lambda = (K, L, \varepsilon)$ такой, что $\|\pi\rho_\lambda(x_n) - x_n\| < \varepsilon$ и $\|a_m \cdot \rho_\lambda(x_n) - \rho_\lambda(a_m \cdot x_n)\| < \varepsilon$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$. Отсюда получаем, что

$$\|\pi\rho_\lambda(x) - x\| < \varepsilon \quad \text{и} \quad \|a \cdot \rho_\lambda(x) - \rho_\lambda(a \cdot x)\| < \varepsilon$$

для всех $a \in K$ и $x \in L$. Упорядочив индексы λ естественным образом, получаем сеть $(\rho_\lambda) \subset \mathcal{B}(X, A_+ \widehat{\otimes} X)$ такую, что $\pi\rho_\lambda(x) \rightarrow x$ и $[a \cdot \rho_\lambda(x) - \rho_\lambda(a \cdot x)] \rightarrow 0$ равномерно на компактных подмножествах A и X .

(С) Согласно лемме 1.2 можно выбрать $\rho: X \rightarrow (A_+ \widehat{\otimes} X)^{**}$ так, чтобы $\|\rho\| \leq C_0$. В силу теоремы 3.1, (В) можно аппроксимировать ρ в usc^* -топологии конечномерными операторами из $\mathcal{B}(X, A_+ \widehat{\otimes} X)$ такими, что $\|\tau\| \leq CC_0$. Рассмотрев множество V как выше (с ограничением на норму $\|\tau\|$), заметим, что оно также выпукло. Рассуждая аналогично, получаем нужную сеть с оценкой $\|\rho_\lambda\| \leq CC_0$.

Отметим, что теорема 3.6 утверждает, в частности, что *при наличии ограниченного СА левый банахов модуль является плоским тогда и только тогда, когда существует ограниченная сеть (ρ_λ) , удовлетворяющая условиям (1) и (2).*

Далее мы используем идею Селиванова из [13], примененную им к проективным модулям. Основное утверждение теоремы 1 из [13] можно сформулировать так: *если A -модуль X проективен и обладает СА, то для любого компакта $L \subset X$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся конечномерное подпространство E в X и морфизм $\varkappa: X \rightarrow A_+ \widehat{\otimes} E$ такие, что $\|\pi \varkappa(x) - x\| < \varepsilon$ для всех $x \in L$.* (Для упрощения обозначений мы отождествляем $A_+ \widehat{\otimes} E$ с подпространством в $A_+ \widehat{\otimes} X$. Это возможно, поскольку E конечномерно.) В наших рассуждениях морфизмы A -модулей заменены на “почти морфизмы”.

ТЕОРЕМА 3.7. *Пусть X – плоский левый банахов A -модуль, обладающий СА. Тогда для любых компактных подмножеств K и L в A и X соответственно и любого $\varepsilon > 0$ найдутся конечномерное банахово пространство E , ограниченный оператор $\varkappa: X \rightarrow A_+ \widehat{\otimes} E$ и морфизм A -модулей $\sigma: A_+ \widehat{\otimes} E \rightarrow X$ такие, что*

- (1) $\|\sigma \varkappa(x) - x\| < \varepsilon$ для всех $x \in L$,
- (2) $\|a \cdot \varkappa(x) - \varkappa(a \cdot x)\| < \varepsilon$ для всех $a \in K$ и $x \in L$.

Если, кроме того, X обладает ограниченным СА с постоянной C и известно, что он C_0 -плоский, то $\varkappa$ и σ можно выбрать так, чтобы $\|\varkappa\| \leq C^2 C_0$ и $\|\sigma\| \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если X обладает СА, то в силу части (В) теоремы 3.6 найдется $\rho \in \mathcal{B}(X, A_+ \widehat{\otimes} X)$ такой, что $\|\pi \rho(x) - x\| < \varepsilon/2$ и $\|a \cdot \rho(x) - \rho(a \cdot x)\| < \varepsilon/3$ для всех $a \in K$ и $x \in L$. В силу компактности K и L можно применить теорему 3.4, чтобы получить конечномерный оператор $\varphi: X \rightarrow X$ такой, что

$$\begin{aligned} \|(1 \otimes \varphi)\rho(x) - \rho(x)\| &< \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|(1 \otimes \varphi)\rho(a \cdot x) - \rho(a \cdot x)\| < \frac{\varepsilon}{3}, \\ \|(1 \otimes \varphi)(a \cdot \rho(x)) - a \cdot \rho(x)\| &< \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

для всех $a \in K$ и $x \in L$. Обозначив через E образ φ , положим $\varkappa = (1 \otimes \varphi)\rho$. Тогда для всех $a \in K$ и $x \in L$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \|\pi \varkappa(x) - x\| &\leq \|\pi[(1 \otimes \varphi)\rho(x) - \rho(x)]\| + \|\pi \rho(x) - x\| < \varepsilon, \\ \|a \cdot \varkappa(x) - \varkappa(a \cdot x)\| &= \|(1 \otimes \varphi)[a \cdot \rho(x) - \rho(a \cdot x)]\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Если X обладает ограниченным СА с постоянной C и является C_0 -плоским, то в силу части (С) теоремы 3.6 и теоремы 3.4 можно выбрать ρ и φ так, чтобы $\|\rho\| \leq C C_0$ и $\|\varphi\| \leq C$. Тогда, очевидно, $\|\varkappa\| \leq C^2 C_0$.

§ 4. Свободно аппроксимируемые банаховы модули

Мы рассмотрим специфическое свойство аппроксимации для банаховых модулей (в двух вариантах: ограниченном и неограниченном), к которому естественно приводит вышеизложенное. В случае $A = \mathbb{C}$ это свойство совпадает со свойствами аппроксимации для банаховых пространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Назовем левый банахов A -модуль X *свободно аппроксимируемым*, если для любых компактных подмножеств K и L в A и X соответственно и любого $\varepsilon > 0$ найдутся свободный банахов A -модуль F с конечномерным

базисным подпространством, линейный оператор $\varkappa: X \rightarrow F$ и морфизм банаховых A -модулей $\sigma: F \rightarrow X$ такие, что

- (1) $\|\sigma\varkappa(x) - x\| < \varepsilon$ для всех $x \in L$,
- (2) $\|a \cdot \varkappa(x) - \varkappa(a \cdot x)\| < \varepsilon$ для всех $a \in K$ и $x \in L$.

Если, кроме того, существует постоянная C такая, что $\varkappa$ и ρ можно выбрать так, чтобы $\|\varkappa\| \leq C$ и $\|\sigma\| \leq 1$, то назовем X *свободно аппроксимируемым с постоянной C* .

Учитывая то, что $1 \otimes E$ является базисным подпространством свободного модуля $A_+ \widehat{\otimes} E$, из теоремы 3.7 и определения 4.1 получаем

СЛЕДСТВИЕ 4.2. *Всякий плоский банахов A -модуль, обладающий CA , является свободно аппроксимируемым. Всякий C_0 -плоский банахов A -модуль, обладающий ограниченным CA с постоянной C , является свободно аппроксимируемым с постоянной C^2C_0 .*

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. (1) Утверждение леммы 3.2 выполнено также и для билинейных операторов. Отсюда легко получить, что для того, чтобы X являлся свободно аппроксимируемым с постоянной C , достаточно выполнения условий определения 4.1 на конечных множествах, т.е. достаточно, чтобы для любых $a_1, \dots, a_n \in A$, $x_1, \dots, x_n \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ нашлись свободный банахов A -модуль F с конечномерным базисным подпространством, линейный оператор $\varkappa: X \rightarrow F$ и морфизм A -модулей $\sigma: F \rightarrow X$ такие, что $\|\varkappa\| \leq C$, $\|\sigma\| \leq 1$, $\|\sigma\varkappa(x_i) - x_i\| < \varepsilon$ и $\|a_i \cdot \varkappa(x_i) - \varkappa(a_i \cdot x_i)\| < \varepsilon$ для всех $i = 1, \dots, n$. (Разумеется, это не так в неограниченном случае.)

(2) Нетрудно показать, что если банахов модуль является свободно аппроксимируемым с постоянной C , то он удовлетворяет условиям определения 4.1 для более широкого класса свободных модулей: тех, у которых базисное пространство обладает ограниченным CA с постоянной 1.

Пусть левый идеал I в банаховой алгебре A обладает правой а.е. (e_λ) . Назовем ее *стабильной*, если $ae_\lambda \rightarrow a$ равномерно на компактных подмножествах I . Аналогично определяются правая и двусторонняя стабильные а.е. Интересные примеры стабильных а.е. можно найти в [28], [29], где они названы “а.е., удовлетворяющими условию (U)”.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. *Если левый замкнутый идеал в банаховой алгебре A обладает стабильной правой а.е., то он является свободно аппроксимируемым левым банаховым A -модулем. Если он обладает правой о.а.е. с $\|e_\lambda\| \leq C$, то он свободно аппроксимируем с постоянной C .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть I — наш идеал, а (e_λ) — аппроксимативная единица. Достаточно положить $F = A_+$, в качестве $\varkappa$ взять вложение $I \subset A_+$, а в качестве σ — оператор $a \mapsto ae_\lambda$ для достаточно большого λ .

§ 5. Аппроксимативно проективные банаховы модули

Исходя из условий (1) и (2) теоремы 3.6 рассмотрим следующее определение. При этом удобно сразу рассмотреть более общую задачу подъема.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. (А) Назовем левый банахов A -модуль X *аппроксимативно проективным*, если для любого допустимого эпиморфизма $\nu: Y \rightarrow Z$ и любого морфизма банаховых A -модулей $\psi: X \rightarrow Z$ существует сеть $(\zeta_\lambda) \subset \mathcal{B}(X, Y)$ такая, что

(1) диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow \zeta_\lambda & \downarrow \nu \\ X & \xrightarrow{\psi} & Z \end{array} \quad (5.1)$$

аппроксимативно коммутативна в том смысле, что $\nu\zeta_\lambda(x) \rightarrow \psi(x)$ равномерно на компактных подмножествах X ,

(2) $[a \cdot \zeta_\lambda(x) - \zeta_\lambda(a \cdot x)] \rightarrow 0$ равномерно на компактных подмножествах A и X .

(В) Если ν является 1-допустимым и (ζ_λ) можно выбрать так, чтобы

$$\|\zeta_\lambda\| \leq C\|\psi\|,$$

то назовем X *аппроксимативно C -проективным*.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Банахов модуль является проективным (плоским) тогда и только тогда, когда он является C -проективным (C -плоским) для некоторой $C \geq 1$. Однако аппроксимативная проективность и аппроксимативная C -проективность — существенно разные понятия.

ТЕОРЕМА 5.3. (А) Для того чтобы левый банахов A -модуль X был аппроксимативно проективным, необходимо и достаточно, чтобы для любых компактных подмножеств K и L в A и X соответственно и любого $\varepsilon > 0$ нашлись свободный банахов A -модуль F , ограниченный оператор $\varkappa: X \rightarrow F$ и морфизм банаховых A -модулей $\sigma: F \rightarrow X$ такие, что

(1) $\|\sigma\varkappa(x) - x\| < \varepsilon$ для всех $x \in L$,

(2) $\|a \cdot \varkappa(x) - \varkappa(a \cdot x)\| < \varepsilon$ для всех $a \in K$ и $x \in L$.

(В) Для того чтобы левый банахов A -модуль X был аппроксимативно C -проективным, необходимо и достаточно, чтобы существовали F , $\varkappa$ и σ , для которых выполнены условия части (А), такие, что $\|\varkappa\| \leq C$ и $\|\sigma\| \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства необходимости возьмем в определении 5.1 в качестве ν морфизм $\pi: A_+ \hat{\otimes} X \rightarrow X$ и положим $F = A_+ \hat{\otimes} X$.

($\Leftarrow$) Рассмотрим, как и раньше, направленное множество, состоящее из элементов $\lambda = (K, L, \varepsilon)$, где K и L — компакты в A и X , а $\varepsilon > 0$. Поставим в соответствие каждому λ свободный модуль F_λ , оператор $\varkappa_\lambda: X \rightarrow F_\lambda$ и морфизм $\sigma_\lambda: F_\lambda \rightarrow X$, удовлетворяющие условиям (1) и (2). Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & & & Y \\ & & & \nearrow \xi_\lambda & \downarrow \nu \\ X & \xrightarrow{\varkappa_\lambda} & F_\lambda & \xrightarrow{\sigma_\lambda} & X & \xrightarrow{\psi} & Z \end{array} \quad (5.2)$$

Здесь ξ_λ — морфизм, дополняющий треугольник до коммутативного. Он существует в силу того, что F_λ , будучи свободным, является проективным. Тогда $\zeta_\lambda = \xi_\lambda \varkappa_\lambda$ обладает нужными свойствами.

Если, кроме того, $\|\sigma_\lambda\| \leq 1$ и $\|\varkappa_\lambda\| \leq C$, то поскольку F_λ является 1-проективным, можно выбрать ξ_λ так, чтобы $\|\xi_\lambda\| \leq \|\psi\|$. Тогда $\|\zeta_\lambda\| \leq C\|\psi\|$.

СЛЕДСТВИЕ 5.4. Всякий свободно аппроксимируемый банахов модуль является аппроксимативно проективным. Всякий банахов модуль, свободно аппроксимируемый с постоянной C , является аппроксимативно C -проективным.

Обратные утверждения неверны, так как всякое банахово пространство является свободным $\mathbb{C}$ -модулем, но существуют банаховы пространства, не обладающие (ограниченным) СА.

Из доказательства теоремы 5.3 видно, что в определении 5.1 достаточно проверить выполнение условий определения для $\pi: A_+ \widehat{\otimes} X \rightarrow X$ в качестве ν . Таким образом, мы имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5. *Левый банахов A -модуль X аппроксимативно проективен тогда и только тогда, когда существует сеть $(\rho_\lambda) \subset \mathcal{B}(X, A_+ \widehat{\otimes} X)$ такая, что*

- (1) $\pi \rho_\lambda(x) \rightarrow x$ равномерно на компактных подмножествах X ,
- (2) $[a \cdot \rho_\lambda(x) - \rho_\lambda(a \cdot x)] \rightarrow 0$ равномерно на компактных подмножествах A и X .

Необходимым и достаточным для аппроксимативной C -проективности является выполнение тех же условий вместе с $\|\rho_\lambda\| \leq C$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.6. (1) Итак, для того чтобы убедиться в том, что данный модуль аппроксимативно проективен или аппроксимативно C -проективен для некоторой $C \geq 1$, достаточно рассмотреть одну единственную задачу подъема. Поэтому можно ослабить условия определения 5.1, (В), заменяя равномерную оценку $\|\zeta_\lambda\| \leq C\|\psi\|$ на предположение об ограниченности сети (ζ_λ) .

(2) Легко проверить, что для аппроксимативной C -проективности достаточно сходимости указанных сетей в сильной топологии (ср. замечание 4.3).

Объединяя теорему 3.6 с предложением 5.5 и следствием 5.4, получаем

СЛЕДСТВИЕ 5.7. *Всякий плоский банахов модуль, обладающий СА, аппроксимативно проективен. Всякий C_0 -плоский банахов модуль, обладающий ограниченным СА с постоянной C , является аппроксимативно CC_0 -проективным. Всякий аппроксимативно C -проективный (в частности, свободно аппроксимируемый с постоянной C) банахов модуль является C -плоским.*

Отметим, что из (ограниченной) свободной аппроксимируемости банахова модуля не следует наличие (ограниченного) СА. Достаточно рассмотреть обладающий конечномерным базисным подпространством свободный модуль над алгеброй без (ограниченного) СА.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.8. Исследуя эквивалентность банаховых алгебр по Морите, Грюнбек в [15] также ввел понятие аппроксимативно проективного банахова модуля. В определении Грюнбека рассматривается диаграмма (5.1), однако предполагается, что эпиморфизм ν не обязательно допустим, а (ζ_λ) — ограниченная сеть морфизмов A -модулей. Отказ от требования допустимости эпиморфизма равносильна замене относительного плоского модуля на строго плоский [1]. Нетрудно доказать аналог части (А) теоремы 3.6 для строго плоских модулей и получить отсюда, что аппроксимативно проективный по Грюнбеку модуль является строго плоским [15; предложение 1.4]. Напомним, что предпочтение относительной теории, сделанное в [1], обусловлено ее тесной связью с непрерывными когомологиями Хохшильда, в то время как строго плоские (проективные, инъективные) банаховы модули до сих пор не имеют прозрачной когомологической интерпретации.

§6. Аппроксимация коциклов

Согласно теореме 1.6 плоскость банахова A -модуля X характеризуется тривиальностью $\text{Ext}_A^1(X, Y^{**})$ для всех Y и, следовательно, точностью соответствующего комплекса в первом члене. Здесь мы рассмотрим стандартный комплекс для вычисления $\text{Ext}_A^n(X, Y)$ и используем его для описания плоских модулей.

Пусть X и Y – левые банаховы A -модули. Производный функтор $\text{Ext}_A^n(X, Y)$ можно вычислять с помощью нормализованной бар-резольвенты [12; определение 7.3.6]:

$$0 \longleftarrow X \xleftarrow{\pi} A_+ \widehat{\otimes} X \xleftarrow{\delta_0} A_+ \widehat{\otimes} A \widehat{\otimes} X \longleftarrow \cdots \longleftarrow A_+ \widehat{\otimes} A^{\widehat{\otimes} n} \widehat{\otimes} X \longleftarrow \cdots.$$

Это означает, что $\text{Ext}_A^n(X, Y)$ есть n -я гомология комплекса

$$0 \rightarrow {}_A\text{h}(A_+ \widehat{\otimes} X, Y) \rightarrow {}_A\text{h}(A_+ \widehat{\otimes} A \widehat{\otimes} X, Y) \rightarrow \cdots \rightarrow {}_A\text{h}(A_+ \widehat{\otimes} A^{\widehat{\otimes} n} \widehat{\otimes} X, Y) \rightarrow \cdots,$$

который в силу изоморфизма функторов ${}_A\text{h}(A_+ \widehat{\otimes} X, Y) \cong \mathcal{B}(X, Y)$ изоморфен комплексу

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}(X, Y) \xrightarrow{d_0} \mathcal{B}(A \times X, Y) \xrightarrow{d_1} \cdots \longrightarrow \mathcal{B}(A^n \times X, Y) \xrightarrow{d_n} \cdots, \quad (6.1)$$

где, как нетрудно проверить, d_0 и d_1 имеют вид

$$\begin{aligned} d_0(\chi) &: (a, x) \mapsto a \cdot \chi(x) - \chi(a \cdot x), \\ d_1(\psi) &: (a, b, x) \mapsto a \cdot \psi(b, x) - \psi(ab, x) + \psi(a, b \cdot x). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Распространяя на наш случай терминологию, принятую для стандартного когомологического комплекса, будем называть ψ такой, что $d_n(\psi) = 0$, коциклом, а ψ , равный $d_{n-1}(\chi)$ для некоторого χ , – кограницей. Мы получим два утверждения об аппроксимации коциклов: “локальное”, характеризующее плоские модули, и “аппроксимационное”, характеризующее аппроксимативно проективные модули. Суть первого утверждения может быть приблизительно выражена так: “модуль плоский тогда и только тогда, когда всякий одномерный коцикл может быть аппроксимирован локальными кограницами”.

Как и в §2, для заданных конечных подмножеств $K = \{a_1, \dots, a_n\}$ и $L = \{x_1, \dots, x_n\}$ в банаховой алгебре A и левом банаховом A -модуле X соответственно обозначим через $E_{K,L}$ линейную оболочку множества

$$\{x_1, \dots, x_n\} \cup \{a_1 \cdot x_1, \dots, a_n \cdot x_n\}.$$

ТЕОРЕМА 6.1. *Левый банахов A -модуль X является плоским тогда и только тогда, когда для всякого левого банахова A -модуля Y и всякого одномерного коцикла $\psi \in \mathcal{B}(A \times X, Y)$ (т.е. удовлетворяющего $d_1(\psi) = 0$) существует постоянная $C \geq 1$ такая, что для любых конечных подмножеств $K = \{a_1, \dots, a_n\}$ и $L = \{x_1, \dots, x_n\}$ в A и X соответственно и $\varepsilon > 0$ существует линейный оператор $\chi: E_{K,L} \rightarrow Y$ с $\|\chi\| \leq C$, для которого*

$$\|[d_0(\chi)](a_i, x_i) - \psi(a_i, x_i)\| < \varepsilon \quad \text{при всех } i = 1, \dots, n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ($\Rightarrow$) Предположим, что X плоский. Пусть

$$\psi \in \mathcal{B}(A \times X, Y)$$

и $d_1(\psi) = 0$. Можно считать ψ билинейным оператором из $A \times X$ в Y^{**} . В силу теоремы 1.6 имеем $\text{Ext}_A^1(X, Y^{**}) = 0$. Это означает, что комплекс (6.1) с Y^{**} вместо Y точен в первом члене. Тем самым, существует $\chi' \in \mathcal{B}(X, Y^{**})$ такой, что $d_0(\chi') = \psi$, т.е.

$$a \cdot \chi'(x) - \chi'(a \cdot x) = \psi(a, x) \quad \text{для всех } a \in A, \ x \in X. \quad (6.3)$$

Обозначим $\|\chi'\|$ через C . В силу принципа локальной рефлексивности оператор $\chi'|_{E_{K,L}}$ может быть аппроксимирован в слабой* операторной топологии операторами из $\mathcal{B}(E_{K,L}, Y)$ с нормой, не превосходящей C .

Рассмотрим в Y^n подмножество V , состоящее из элементов вида

$$(a_1 \cdot \chi(x_1) - \chi(a_1 \cdot x_1), \dots, a_n \cdot \chi(x_n) - \chi(a_n \cdot x_n)),$$

где χ — операторы из $\mathcal{B}(E_{K,L}, Y)$ такие, что $\|\chi\| \leq C$. Из (6.3) следует, что $y = (\psi(a_1, x_1), \dots, \psi(a_n, x_n))$ лежит в слабом замыкании V . Так как V выпукло, из теоремы Мазура следует, что y лежит в сильном замыкании V , следовательно, существует $\chi \in \mathcal{B}(E_{K,L}, Y)$ такой, что $\|\chi\| \leq C$ и для всех i

$$\|a_i \cdot \chi(x_i) - \chi(a_i \cdot x_i) - \psi(a_i, x_i)\| < \varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Проверим выполнение условий части (C) теоремы 2.1. Пусть, как обычно, $\pi: A_+ \widehat{\otimes} X \rightarrow X$ — оператор, ассоциированный с умножением. Положим $Y := \text{Ker } \pi$ и

$$\psi(a, x) := a \otimes x - 1 \otimes a \cdot x.$$

Легко видеть, что $d_1(\psi) = 0$. В силу сделанных предположений существует $C \geq 1$ такая, что для любых $K = \{a_1, \dots, a_n\} \subset A$, $L = \{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ и $\varepsilon > 0$ найдется $\chi \in \mathcal{B}(E_{K,L}, Y)$ такой, что $\|\chi\| \leq C$ и $\|[d_0(\chi)](a_i, x_i) - \psi(a_i, x_i)\| < \varepsilon$ для всех i . Положим

$$\varkappa: E_{K,L} \rightarrow A_+ \widehat{\otimes} X: x \mapsto 1 \otimes x - \chi(x).$$

Очевидно, $\|\chi\| \leq 1 + C$. Далее, $\pi \varkappa(x) = x$ для любого $x \in E_{K,L}$, так как

$$\chi(x) \in Y = \text{Ker } \pi.$$

Тем самым,

$$\|a_i \cdot \varkappa(x_i) - \varkappa(a_i \cdot x_i)\| = \|a_i \otimes x_i - a_i \cdot \chi(x_i) - 1 \otimes a_i \cdot x_i + \chi(a_i \cdot x_i)\| < \varepsilon$$

для всех i . Итак, в силу теоремы 2.1 модуль X является $(C + 1)$ -плоским.

Теперь немного изменим рассуждения, чтобы получить аналогичную характеризацию аппроксимативно проективных модулей как модулей, для которых стандартный комплекс асимптотически точен в первом члене, и заодно убедиться в том, что сеть (ζ_λ) из определения 5.1 можно выбрать так, что аппроксимативно коммутативная диаграмма (5.1) будет в точности коммутативной.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть X — левый банахов A -модуль. Тогда следующие условия равносильны.

(A) X аппроксимативно проективен (аппроксимативно C -проективен для некоторого $C \geq 1$).

(B) Для всякого левого банахова A -модуля Y и всякого $\psi \in \mathcal{B}(A \times X, Y)$ такого, что $d_1(\psi) = 0$, существует сеть (ограниченная сеть) $(\chi_\lambda) \subset \mathcal{B}(X, Y)$ такая, что

$$[d_0(\chi_\lambda)](a, x) \rightarrow \psi(a, x)$$

равномерно на компактных подмножествах A и X .

(C) Для любого допустимого эпиморфизма $\nu: Y \rightarrow Z$ и любого морфизма банаховых A -модулей $\psi: X \rightarrow Z$ существует сеть (ограниченная сеть) $(\zeta_\lambda) \subset \mathcal{B}(X, Y)$ такая, что диаграмма (5.1) коммутативна и

$$[a \cdot \zeta_\lambda(x) - \zeta_\lambda(a \cdot x)] \rightarrow 0$$

равномерно на компактных подмножествах A и X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (A) $\Rightarrow$ (B). Заметим сначала, что для любого свободного модуля F и любого $\psi' \in \mathcal{B}(A \times F, Y)$, для которого $d_1(\psi') = 0$, существует $\chi' \in \mathcal{B}(F, Y)$ такой, что $d_0(\chi') = \psi'$, причем $\|\chi'\| \leq \|\psi'\|$. Действительно, если $F = A_+ \hat{\otimes} E$, где E – банахово пространство, то достаточно положить

$$\chi'(a \otimes e) := -\psi'(a, 1 \otimes e) \quad (a \in A_+, e \in E).$$

(Фактически, мы показали, что $\text{Ext}_A^1(F, Y) = 0$.)

Предположим, что X аппроксимативно проективен. Пусть $\psi \in \mathcal{B}(A \times X, Y)$ таков, что $d_1(\psi) = 0$, и пусть K и L – компактные подмножества A и X соответственно, а $\varepsilon > 0$. Достаточно рассмотреть случай $\|\psi\| = 1$. Поскольку K ограничено, не умаляя общности, можно также считать, что $\|a\| \leq 1$ для всех $a \in K$. В силу теоремы 5.3 существуют свободный банахов A -модуль F , ограниченный оператор $\varkappa: X \rightarrow F$ и морфизм A -модулей $\sigma: F \rightarrow X$ такие, что $\|\sigma \varkappa(x) - x\| < \varepsilon$ и $\|a \cdot \varkappa(x) - \varkappa(a \cdot x)\| < \varepsilon$ для всех $a \in K, x \in L$, при этом можно полагать, что $\|\sigma\| \leq 1$. Для произвольных $a \in A$ и $f \in F$ положим

$$\psi'(a, f) := \psi(a, \sigma(f)).$$

Поскольку σ – морфизм, из (6.2) следует, что $d_1(\psi') = 0$. Пусть $\chi' \in \mathcal{B}(F, Y)$ таков, что $d_0(\chi') = \psi'$, причем $\|\chi'\| \leq \|\psi'\|$. Поскольку $\|\psi'\| \leq \|\sigma\| \|\psi\|$, имеем $\|\chi'\| \leq 1$. Пусть $a \in K, x \in L$, тогда

$$\|\psi(a, \sigma \varkappa(x)) - \psi(a, x)\| < \varepsilon \quad \text{и} \quad \|\chi'(a \cdot \varkappa(x)) - \chi'(\varkappa(a \cdot x))\| < \varepsilon.$$

Обозначив $\chi' \varkappa$ через χ_λ , где $\lambda = (K, L, \varepsilon)$, и учитывая, что

$$\psi'(a, \varkappa(x)) = a \cdot \chi'(\varkappa(x)) - \chi'(a \cdot \varkappa(x)),$$

получаем

$$\|a \cdot \chi_\lambda(x) - \chi_\lambda(a \cdot x) - \psi(a, x)\| < 2\varepsilon.$$

Таким образом, $[d_0(\chi_\lambda)](a, x) \rightarrow \psi(a, x)$ равномерно на компактных подмножествах A и X .

Если X аппроксимативно C -проеективен для некоторого $C \geq 1$, то в силу теоремы 5.3 можно дополнительно полагать, что $\|\varkappa\| \leq C$. Следовательно, $\|\chi_\lambda\| \leq C$.

(B) $\Rightarrow$ (C). Как и в доказательстве теоремы 6.1, положим

$$Y := \text{Ker } \pi \quad \text{и} \quad \psi(a, x) := a \otimes x - 1 \otimes a \cdot x.$$

Предположим, что существует сеть (χ_λ) такая, что $[d_0(\chi_\lambda)](a, x)$ сходится к $a \otimes x - 1 \otimes a \cdot x$ равномерно на компактных подмножествах A и X , и положим

$$\rho_\lambda: X \rightarrow A_+ \hat{\otimes} X: x \mapsto 1 \otimes x - \chi_\lambda(x).$$

Тогда $\pi \rho_\lambda(x) = x$ для любого $x \in X$ и

$$[a \cdot \rho_\lambda(x) - \rho_\lambda(a \cdot x)] = [a \otimes x - a \cdot \chi_\lambda(x) - 1 \otimes a \cdot x + \chi_\lambda(a \cdot x)]$$

сходится к 0 равномерно на компактных подмножествах A и X . Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\rho_\lambda} & A_+ \hat{\otimes} X & \xrightarrow{\pi} & X & \xrightarrow{\psi} & Z \\ & & & \nearrow \xi & & \downarrow \nu & \\ & & & & & Y & \end{array}$$

Здесь морфизм ξ существует в силу того, что $A_+ \hat{\otimes} X$ является свободным. Тогда $\zeta_\lambda = \xi \rho_\lambda$ обладает нужными свойствами.

Если же сеть (χ_λ) можно выбрать так, чтобы $\|\chi_\lambda\| \leq C$ для некоторого $C \geq 1$, а $\nu - 1$ -допустимый эпиморфизм, то $\|\rho_\lambda\| \leq 1 + C$. Поскольку ξ можно выбрать так, что $\|\xi\| \leq \|\psi\|$, то сеть (ζ_λ) ограничена.

(C) $\Rightarrow$ (A). Аппроксимативная проективность X следует непосредственно из определения 5.1. Если же мы предполагаем существование ограниченных сетей, то достаточно положить $\nu = \pi$, $\psi = 1_X$ и применить предложение 5.5.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.3. Из доказательства видно, что

- (1) для того чтобы банахов модуль был C -аппроксимативно проективным для некоторой $C \geq 1$, достаточно аппроксимации одного единственного коцикла ограниченной сетью операторов с нужными свойствами;
- (2) из C -аппроксимативной проективности следует, что для каждого коцикла ψ существует сеть (χ_λ) с равномерной оценкой нормы $\|\chi_\lambda\| \leq C\|\psi\|$ (ср. замечание 5.6).

Ввиду следствий 5.4 и 5.7 теорема 6.2 применима к свободно аппроксимируемым модулям, в частности, к плоским модулям, обладающим СА.

Выше уже была отмечена связь между свободной аппроксимируемостью (и аппроксимативной проективностью) и стабильными а.е. (предложение 4.4). Теперь мы можем доказать еще одно утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4 (ср. замечание 1.4, (1)). Пусть A – банахова алгебра, а I – левый замкнутый идеал в A_+ такой, что эпиморфизм $\sigma: A_+ \rightarrow A_+/I$ допустим. Тогда левый банахов A -модуль A_+/I является аппроксимативно проективным тогда и только тогда, когда I обладает стабильной правой а.е.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ($\Rightarrow$) Предположим, что A_+/I аппроксимативно проективен. Поскольку $\sigma: A_+ \rightarrow A_+/I$ является допустимым, в силу теоремы 6.2 существует сеть $(\zeta_\lambda) \subset \mathcal{B}(A_+/I, A_+)$ такая, что $\sigma\zeta_\lambda = 1$ и $[a \cdot \zeta_\lambda(x) - \zeta_\lambda(a \cdot x)] \rightarrow 0$ равномерно на компактных подмножествах A и A_+/I . Положим $e_\lambda = 1 - \zeta_\lambda(1 + I)$. Так как $\sigma(e_\lambda) = 0$, то $e_\lambda \in I$. Поскольку $[a \cdot \zeta_\lambda(1 + I) - \zeta_\lambda(a + I)] \rightarrow 0$ равномерно на компактных подмножествах A и $ae_\lambda = a - a \cdot \zeta_\lambda(1 + I)$, сеть ae_λ сходится к a равномерно на компактных подмножествах I .

($\Leftarrow$) Предположим, что I обладает стабильной правой а.е. (e_λ) , и пусть $\tau \in \mathcal{B}(A_+/I, A_+)$ таков, что $\sigma\tau = 1$. Положим

$$\varkappa_\lambda(x) := \tau(x) - \tau(x)e_\lambda \quad (x \in A_+/I).$$

Очевидно, $\sigma\varkappa_\lambda = 1$. Заметим, что из $\sigma(a \cdot \tau(x)) = a \cdot \sigma\tau(x) = a \cdot x = \sigma\tau(a \cdot x)$ следует, что $[a \cdot \tau(x) - \tau(a \cdot x)] \in I$. Поэтому

$$a \cdot \varkappa_\lambda(x) - \varkappa_\lambda(a \cdot x) = (a \cdot \tau(x) - \tau(a \cdot x)) - (a \cdot \tau(x) - \tau(a \cdot x))e_\lambda$$

сходится к нулю равномерно на компактных подмножествах A и A_+/I . Из части (A) теоремы 5.3 следует, что A_+/I аппроксимативно проективен.

Поскольку A_+ – свободный левый банахов A -модуль, базисное подпространство которого одномерно, условия предложения 6.4 равносильны свободной аппроксимируемости A_+/I .

СЛЕДСТВИЕ 6.5. Одномерный левый A -модуль с тривиальным умножением аппроксимативно проективен тогда и только тогда, когда A обладает стабильной правой а.е.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Одномерный левый A -модуль с тривиальным умножением изоморфен A_+/A . Рассмотрим банахову алгебру A как левый идеал в A_+ и применим предложение 6.4.

§ 7. Аппроксимативная проективность и свойства библиоских алгебр

Этот параграф содержит приложения (и не столько полученных результатов, сколько самого метода исследования) к библиоским и аменабельным банаховым алгебрам, а также к их естественным обобщениям, связанным с аппроксимацией в топологии равномерной сходимости на компактах.

Утверждения и определения §§ 4 и 5 справедливы не только для односторонних модулей, но и для бимодулей с тем отличием, что свободный банахов A -бимодуль изоморфен $A_+ \widehat{\otimes} E \widehat{\otimes} A_+$ для некоторого банахова пространства E . При этом условия (2) из определений 4.1 и 5.1 удобнее формулировать отдельно для левого и правого умножения. Далее, при ссылке на бимодульный вариант какого-либо предложения имеется в виду именно такая модификация условий.

Напомним, что банахова алгебра A называется библиоской, если она является плоским банаховым бимодулем над собой или, другими словами, если она является плоским левым банаховым модулем над алгеброй $A_+ \widehat{\otimes} A_+^{\text{op}}$ [1]. Определение аменабельной банаховой алгебры сформулировано во введении. Будем называть *аппроксимативно библиоской* (аппроксимативно C -библиоской) алгебру, которая является аппроксимативно проективным (аппроксимативно C -проективным) бимодулем над собой.

В работе [16] Й. Занг рассматривает другое понятие аппроксимативной библиоскости. С одной стороны, он предполагает, что сеть (ρ_λ) , асимптотически расширяющаяся $\pi_A: A \widehat{\otimes} A \rightarrow A$ (линейный оператор, ассоциированный с умножением в A), состоит из морфизмов бимодулей (ср. замечание 5.8), с другой стороны, он отказывается от предположения об ограниченности (ρ_λ) и предполагает, что $\pi \rho_\lambda \rightarrow 1$ лишь в сильной операторной топологии.

Для нас важны следующие связи между библиоскостью и аменабельностью:

- A аменабельна $\Leftrightarrow A_+$ библиоская [1];
- A аменабельна $\Leftrightarrow A$ библиоская и обладает о.а.е. [1];
- A аменабельна $\Leftrightarrow A \widehat{\otimes} A$ содержит аппроксимативную диагональ Джонсона, т.е. ограниченную сеть $(d_\lambda) \subset A \widehat{\otimes} A$ такую, что $(a \cdot d_\lambda - d_\lambda \cdot a) \rightarrow 0$ и $\pi_A(d_\lambda)a \rightarrow a$ для всех $a \in A$ [14; лемма 1.2, теорема 1.3].

ТЕОРЕМА 7.1. (А) Банахова алгебра A аменабельна тогда и только тогда, когда A_+ является аппроксимативно C -библиоской для некоторого $C \geq 1$.

(В) Банахова алгебра A аменабельна тогда и только тогда, когда A является аппроксимативно C -библиоской для некоторого $C \geq 1$ и обладает о.а.е.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (А) Аменабельность A равносильна аменабельности A_+ , а та, в свою очередь, — существованию аппроксимативной диагонали Джонсона $(d_\lambda) \subset A_+ \widehat{\otimes} A_+$. Поскольку $A_+ \widehat{\otimes} A_+$ — свободный бимодуль, а его базисное подпространство одномерно, то, взяв в качестве $\varkappa$ и σ из определения 4.1 соответственно оператор $A_+ \rightarrow A_+ \widehat{\otimes} A_+ : a \mapsto d_\lambda \cdot a$ для достаточно большого λ и π_{A_+} , получим, что из аменабельности A следует, что банахов бимодуль A_+ свободно аппроксимируем с постоянной $\sup \|d_\lambda\|$. С другой стороны, если A_+ аппроксимативно C -библиоска для некоторого C , то из следствия 5.7 вытекает, что $A_+ -$

плоский банахов бимодуль, а это равносильно аменабельности A .

(В) Если A аменабельна, то $A \widehat{\otimes} A$ содержит аппроксимативную диагональ (d_λ) , в частности, A обладает о.а.е. Положим

$$\begin{aligned} \varkappa_\lambda: A &\rightarrow A_+ \widehat{\otimes} A \widehat{\otimes} A_+: a \mapsto (d_\lambda \otimes 1)(1 \otimes d_\lambda) \cdot a, \\ \sigma: A_+ \widehat{\otimes} A \widehat{\otimes} A_+ &\rightarrow A: a \otimes b \otimes c \mapsto abc, \end{aligned} \quad (7.1)$$

где $A_+ \widehat{\otimes} A \widehat{\otimes} A_+$ рассматривается и как алгебра, и как правый A -модуль. Тогда, очевидно, $\sigma \varkappa_\lambda(a) \rightarrow a$, а $\varkappa_\lambda$ является морфизмом правых модулей. Проверим условие (2) из теоремы 5.3 для умножения слева. Для $a, b \in A$ и $\varepsilon > 0$ выберем λ настолько большим, чтобы $\|d_\lambda \cdot a - a \cdot d_\lambda\| < \varepsilon$. Учитывая равенство

$$(d_\lambda \cdot a \otimes 1)(1 \otimes d_\lambda) = (d_\lambda \otimes 1)(1 \otimes a \cdot d_\lambda),$$

имеем

$$\begin{aligned} \|\varkappa_\lambda(ab) - a \cdot \varkappa_\lambda(b)\| &\leq \|(d_\lambda \otimes 1)(1 \otimes d_\lambda \cdot ab) - (d_\lambda \otimes 1)(1 \otimes a \cdot d_\lambda \cdot b)\| \\ &\quad + \|(d_\lambda \cdot a \otimes 1)(1 \otimes d_\lambda \cdot b) - (a \cdot d_\lambda \otimes 1)(1 \otimes d_\lambda \cdot b)\| \leq 2\varepsilon \|d_\lambda\| \|b\|. \end{aligned}$$

Поскольку $A_+ \widehat{\otimes} A \widehat{\otimes} A_+$ — свободный банахов A -бимодуль, получаем отсюда, что A аппроксимативно $(\sup \|d_\lambda\|^2)$ -бипроективна.

Пусть A аппроксимативно C -бипроективна и обладает о.а.е. В силу следствия 5.7 A — плоский банахов A -бимодуль. Из наличия о.а.е. следует, что A_+/A является плоским левым и плоским правым банаховым A -модулем (см. замечание 1.4, (1)). Так как $A_+/A \cong \mathbb{C}$, то банахов бимодуль A_+/A изоморфен бимодулю $(A_+/A) \widehat{\otimes} (A_+/A)$, который является плоским, будучи тензорным произведением плоских модулей [1; предложение VII.2.4]. Итак, в допустимой последовательности

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A_+ \longrightarrow A_+/A \longrightarrow 0$$

крайние члены являются плоскими бимодулями, следовательно, бимодуль A_+ также плоский. Это означает, что A аменабельна.

Из доказательства видно, что банахова алгебра A аменабельна $\Leftrightarrow A_+$ является свободно аппроксимируемым банаховым A -бимодулем для некоторой постоянной $C \geq 1$.

Хотя бимодуль $A \widehat{\otimes} A$, вообще говоря, не является свободным, а морфизм $\pi_A: A \widehat{\otimes} A \rightarrow A$ — допустимым, их можно использовать для характеристики биплоских алгебр. Действительно, банахова алгебра A является биплоской тогда и только тогда, когда существует морфизм банаховых A -бимодулей $\rho: A \rightarrow (A \widehat{\otimes} A)^{**}$ такой, что $\pi_A^{**} \rho$ есть каноническое вложение $A \rightarrow A^{**}$ [1; задача VII.2.8] (см. также [7; предложение 2.2.9]).

ТЕОРЕМА 7.2. *Для того чтобы банахова алгебра A была аппроксимативно C^2 -бипроективной, достаточно, чтобы существовала сеть операторов $(\rho_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, $\rho_\lambda \in \mathcal{B}(A, A \widehat{\otimes} A)$, $\|\rho_\lambda\| \leq C$, такая, что*

- (1) $\pi_A \rho_\lambda(a) \rightarrow a$ для всех $a \in A$,
- (2) $[a \cdot \rho_\lambda(b) - \rho_\lambda(ab)] \rightarrow 0$ и $[\rho_\lambda(a) \cdot b - \rho_\lambda(ab)] \rightarrow 0$ для всех $a, b \in A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 5.5 и замечания 5.6 достаточно с помощью сети $(\rho_\lambda) \subset \mathcal{B}(A, A \widehat{\otimes} A)$, ограниченной постоянной C и удовлетворяющей условиям (1) и (2), построить сеть в $\mathcal{B}(A, A_+ \widehat{\otimes} A \widehat{\otimes} A_+)$, ограниченную постоянной C^2 и удовлетворяющую тем же условиям с заменой π_A на морфизм σ , определенный в (7.1). Воспользуемся той же конструкцией, что и в доказательстве части (В) теоремы 7.1.

Пусть K – конечное подмножество A и $\varepsilon > 0$. Заметим, что $\sigma = \pi_r(\pi_l \otimes 1)$, где $\pi_l: A_+ \widehat{\otimes} A \rightarrow A$ и $\pi_r: A \widehat{\otimes} A_+ \rightarrow A$ – операторы, ассоциированные с умножением. Из (1) и (2) следует, что существует $\mu \in \Lambda$ такой, что

$$\|\pi_r \rho_\mu(a) - a\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|a \cdot \rho_\mu(b) - \rho_\mu(ab)\| < \frac{\varepsilon}{2C}, \quad \|\rho_\mu(a) \cdot b - \rho_\mu(ab)\| < \frac{\varepsilon}{C}$$

для всех $a, b \in K$. Применив теорему 3.5 к сети линейных операторов $(\pi_l \rho_\lambda) \subset \mathcal{B}(A, A)$ и сети билинейных операторов $\delta_\lambda: A \times A \rightarrow A: (a, b) \mapsto a \cdot \rho_\lambda(b) - \rho_\lambda(ab)$ и воспользовавшись леммой 3.2, получим, что $(\pi_l \rho_\lambda \otimes 1) \rightarrow 1 \otimes 1$ и $\delta_\lambda^A \rightarrow 0$ в сильной операторной топологии. Стало быть, найдется $\lambda \in \Lambda$ такой, что

$$\|(\pi_l \rho_\lambda \otimes 1) \rho_\mu(a) - \rho_\mu(a)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad \|a \cdot (\rho_\lambda \otimes 1) \rho_\mu(b) - (\rho_\lambda \otimes 1)(a \cdot \rho_\mu(b))\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $a, b \in K$. Положим $\rho'_{K,\varepsilon} = (\rho_\lambda \otimes 1) \rho_\mu$. Очевидно, что $\|\rho'_{K,\varepsilon}\| \leq C^2$. Поскольку $\sigma \rho'_{K,\varepsilon} = \pi_r(\pi_l \rho_\lambda \otimes 1) \rho_\mu$, имеем $\|\sigma \rho'_{K,\varepsilon}(a) - a\| < \varepsilon$ для всех $a \in K$. Далее,

$$\begin{aligned} \|\rho'_{K,\varepsilon}(ab) - a \cdot \rho'_{K,\varepsilon}(b)\| &\leq \|(\rho_\lambda \otimes 1) \rho_\mu(ab) - (\rho_\lambda \otimes 1)(a \cdot \rho_\mu(b))\| \\ &\quad + \|(\rho_\lambda \otimes 1)(a \cdot \rho_\mu(b)) - a \cdot (\rho_\lambda \otimes 1) \rho_\mu(b)\| < \varepsilon, \\ \|\rho'_{K,\varepsilon}(ab) - \rho'_{K,\varepsilon}(a) \cdot b\| &= \|(\rho_\lambda \otimes 1) \rho_\mu(ab) - (\rho_\lambda \otimes 1)(\rho_\mu(a) \cdot b)\| \\ &\leq C \|\rho_\mu(ab) - \rho_\mu(a) \cdot b\| < \varepsilon \end{aligned}$$

для всех $a, b \in K$. Упорядочив индексы естественным образом, получим ограниченную сеть $(\rho'_{K,\varepsilon})$, удовлетворяющую нужным условиям.

ТЕОРЕМА 7.3. Пусть A – банахова алгебра.

(А) Если A аппроксимативно C -бипроективна, то она является C -би-плоской.

(В) Если A обладает СА, то необходимым условием ее би-плоскости является наличие сети (ρ_λ) , удовлетворяющей условиям (1) и (2) теоремы 7.2. Более того, можно потребовать, чтобы сети сходились равномерно по a и b на компактных подмножествах A .

(С) Если A обладает ограниченным СА с постоянной C , то из ее би-плоскости следует также, что сеть (ρ_λ) можно выбрать ограниченной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку би-плоскость A равносильна существованию морфизма A -бимодулей $\rho: A \rightarrow (A \widehat{\otimes} A)^{**}$ такого, что $\pi_A^{**} \rho(a) = a$ для всех $a \in A$, рассуждения из доказательств теоремы 3.6, предложения 5.5 и вытекающего из них следствия 5.7 проходят практически без изменений.

Автору неизвестно, всякая ли би-плоская банахова алгебра является аппроксимативно C -бипроективной. Напротив, легко видеть, что алгебр, аппроксимативно C -бипроективных для некоторой постоянной C , значительно больше, чем аменабельных. Действительно, всякая бипроективная банахова алгебра является аппроксимативно C -бипроективной, однако существуют неаменабельные бипроективные алгебры, например c_0 или ℓ_1 с поточечным умножением. Но имеются и более интересные примеры.

ПРИМЕР 7.4. Почти все известные примеры биплоских банаховых алгебр получаются из аменабельных и бипроективных путем стандартных конструкций. Исключением является $\mathcal{K}(\ell_p \widehat{\otimes} \ell_q)$ (алгебра компактных операторов), где $p, q > 1$ и $1/p + 1/q \geq 1$, – пример, недавно рассмотренный Селивановым в [30] (см. случай $p = q = 2$ в [7] или [2; §4.3]). Как установлено в работах [7] и [30], эта алгебра является биплоской для всех $p, q > 1$, но при $1/p + 1/q \geq 1$ не имеет СА и не аменабельна, обладая лишь левой о.а.е.

Мы покажем, используя теорему 7.2, что $A = \mathcal{K}(E)$, где $E = \ell_p \widehat{\otimes} \ell_q$, $p, q > 1$, является аппроксимативно 1-бипроективной банаховой алгеброй. Заметим, что E является дуальным банаховым пространством с преддуальным $E_* = \ell_{p'} \widehat{\otimes} \ell_{q'}$, где $1/p + 1/p' = 1$ и $1/q + 1/q' = 1$, а $\widehat{\otimes}$ – знак инъективного тензорного произведения. Обозначим через I множество всех операторов из $\mathcal{B}(E)$ вида T^* , где $T \in \mathcal{K}(E_*)$. Тогда I является замкнутым левым идеалом в A , содержащим левую о.а.е. (e_μ) для A .

Из результатов, доказанных в [31], следует, что $\mathcal{K}(E_*)$ аменабельна (см. подробное изложение в [2; пример 3.1.12 и теоремы 3.1.9, 3.1.11]). Более того, анализ доказательства теоремы 3.1.11 из работы [2] показывает, что $\mathcal{K}(E_*)$ 1-аменабельна, т.е. существует аппроксимативная диагональ Джонсона, ограниченная 1. Так как банахова алгебра I изометрически антиизоморфна $\mathcal{K}(E_*)$, она тоже 1-аменабельна. Следовательно, существует аппроксимативная диагональ Джонсона $(d_\lambda) \subset I \widehat{\otimes} I$ такая, что $\|d_\lambda\| \leq 1$. Положим $\rho_\lambda: A \rightarrow A \widehat{\otimes} A: a \mapsto d_\lambda \cdot a$ (поскольку I обладает левой о.а.е., ограниченной 1, из [32; II.1.9] следует, что можно рассматривать $I \widehat{\otimes} I$ как подпространство в $A \widehat{\otimes} A$). Очевидно, $\|\rho_\lambda\| \leq 1$. Нетрудно проверить, что из того, что I содержит левую о.а.е. для A , следует, что $(\pi_A(d_\lambda))$ – левая о.а.е. не только для I , но и для A . Отсюда вытекает справедливость условия (1) теоремы 7.2. Пусть $a, b \in A$, $\varepsilon > 0$, и пусть μ таков, что $\|e_\mu b - b\| < \varepsilon$. Тогда существует λ_0 такой, что $\|d_\lambda \cdot (ae_\mu) - (ae_\mu) \cdot d_\lambda\| < \varepsilon$ и $\|d_\lambda \cdot e_\mu - e_\mu \cdot d_\lambda\| < \varepsilon$ для всех $\lambda \succcurlyeq \lambda_0$. Тем самым,

$$\begin{aligned} \|a \cdot \rho_\lambda(b) - \rho_\lambda(ab)\| &= \|a \cdot d_\lambda \cdot b - d_\lambda \cdot (ab)\| \\ &\leq \|a \cdot d_\lambda \cdot b - a \cdot d_\lambda \cdot (e_\mu b)\| + \|a \cdot d_\lambda \cdot (e_\mu b) - (ae_\mu) \cdot d_\lambda \cdot b\| \\ &\quad + \|(ae_\mu) \cdot d_\lambda \cdot b - d_\lambda \cdot (ae_\mu b)\| + \|d_\lambda \cdot (ae_\mu b) - d_\lambda \cdot (ab)\| \\ &\leq \|a\|\varepsilon + \|a\| \|b\|\varepsilon + \|b\|\varepsilon + \|a\|\varepsilon \end{aligned}$$

для всех $\lambda \succcurlyeq \lambda_0$. Отсюда получаем, что $[a \cdot \rho_\lambda(b) - \rho_\lambda(ab)] \rightarrow 0$. Очевидно, что $\rho_\lambda(a) \cdot b = \rho_\lambda(ab)$. Итак, условие (2) теоремы 7.2 выполнено. Следовательно, A аппроксимативно 1-бипроективна. В частности, A является биплоской. (Оригинальное доказательство Селиванова биплоскости алгебры A использует более сильное утверждение: если I – замкнутый левый идеал в A , содержащий левую о.а.е. для A , и I – биплоская алгебра, то A биплоская [7; предложение 5.3.1].)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.5. Если банахова алгебра A биплоская и обладает одной-сторонней о.а.е., то A аппроксимативно C -бипроективна для некоторого $C \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай левой о.а.е. Для правой о.а.е. рассуждения аналогичны. Итак, пусть A биплоская и обладает левой о.а.е. Тогда, как заметил Селиванов (ср. [30]), $A \widehat{\otimes} A$ содержит левую аппроксимативную диагональ, т.е. ограниченную сеть (d_λ) такую, что

$$(d_\lambda \cdot a - a \cdot d_\lambda) \cdot b \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \pi(d_\lambda) \cdot a \rightarrow a \quad \text{для любых} \quad a, b \in A. \quad (7.2)$$

(Доказательство этого факта близко к рассуждениям Б. Е. Джонсона [14], см. также [33].) Тогда $\rho_\lambda: a \mapsto d_\lambda \cdot a$ является сетью, существование которой достаточно для аппроксимативной C -бипроективности A (для некоторого C) в силу теоремы 7.2. Действительно, $\pi_A \rho_\lambda \rightarrow 0$ в сильной операторной топологии, ρ_λ является морфизмом правых модулей, а из (7.2) следует, что $[a \cdot \rho_\lambda(b) - \rho_\lambda(ab)] \rightarrow 0$ для любых a и b .

Таким образом, все известные примеры биплоских алгебр оказываются аппроксимативно C -бипроективными: алгебра $\mathcal{K}(\ell_p \widehat{\otimes} \ell_q)$ для $1/p + 1/q \geq 1$ и аменабельные алгебры рассматривались выше, а для бипроективных это очевидно. Применение стандартных конструкций мало что меняет: например, если A биплоская и обладает левой о.а.е., а B биплоская и обладает правой о.а.е., то $A \widehat{\otimes} B$ является аппроксимативно C -бипроективной, хотя не обладает даже односторонней о.а.е. (Можно положить, например, $A = \mathcal{K}(\ell_2 \widehat{\otimes} \ell_2)$ и $B = A^{\text{op}}$.)

§ 8. Заключительные замечания

8.1. Плоскость и аппроксимативная проективность. Нетрудно проверить, что плоские модули из пп. (2)–(4) и (6) замечания 1.4 являются свободно аппроксимируемыми (большинство с постоянной 1). Автору неизвестно, существуют ли плоские банаховы модули, которые не являются аппроксимативно C -проективными ни для какого C . В частности, если I – замкнутый левый идеал в A_+ , обладающий правой о.а.е., то всегда ли найдется C такое, что плоский левый банахов модуль A_+/I аппроксимативно C -проективен (см. замечание 1.4, (1))?

8.2. Аменабельность и свойство аппроксимации. Биплоские банаховы алгебры без СА существуют: например $\mathcal{K}(\ell_p \widehat{\otimes} \ell_q)$ при $1/p + 1/q \geq 1$ из примера 7.4, однако автору неизвестно, существуют ли аменабельные банаховы алгебры без СА.

8.3. Аппроксимативные и локальные связности. Можно переформулировать теоремы 6.1 и 6.2, используя терминологию и обозначения, заимствованные из некоммутативной геометрии. Рассмотрим коцикл $\psi(a, x) = a \otimes x - 1 \otimes a \cdot x$, использованный в доказательстве обеих теорем, и ассоциированный с ним оператор $\tilde{\psi}: a \otimes x \mapsto a \otimes x - 1 \otimes a \cdot x$. Легко видеть, что $\tilde{\psi}$ является проекцией $A_+ \widehat{\otimes} X$ на $\text{Кер } \pi$. Обозначим его ограничение на $A \widehat{\otimes} X$ через σ . Так как ядро $\tilde{\psi}$ есть $\mathbb{C} \otimes X$, то σ является изоморфизмом банаховых пространств. Более того, если ввести на $A \widehat{\otimes} X$ новое внешнее умножение $\triangleright$ по формуле

$$a \triangleright (b \otimes x) := ab \otimes x - a \otimes b \cdot x,$$

то σ является изоморфизмом левых банаховых A -модулей.

Предположим теперь, что X проективен. Тогда $\text{Ext}_A^1(X, \text{Кер } \pi) = 0$ и, поскольку $d_1(\psi) = 0$, существует $\chi \in \mathcal{B}(X, \text{Кер } \pi)$ такой, что $d_0(\chi) = \psi$. Обозначим $\sigma^{-1}(-\chi)$ через ∇ . Этот оператор из X в $A \widehat{\otimes} X$ удовлетворяет условию

$$\nabla(a \cdot x) = a \triangleright \nabla(x) + a \otimes x, \quad a \in A, \quad x \in X,$$

и называется *левой связностью* на X . Нетрудно показать и обратное, что из существования левой связности следует проективность X (см. подробности в [34; раздел 2.2.4] и [35]).

Используя умножение $\triangleright$, получаем другую формулировку теоремы 6.2:

Левый банахов A -модуль X является аппроксимативно проективным тогда и только тогда, когда существует сеть $(\nabla_\lambda) \subset \mathcal{B}(X, A \hat{\otimes} X)$ такая, что

$$(\nabla_\lambda(a \cdot x) - a \triangleright \nabla_\lambda(x)) \rightarrow a \otimes x$$

равномерно на компактных подмножествах A и X .

Аналогично, из теоремы 6.1 можно получить следующее утверждение:

Левый банахов A -модуль X является плоским тогда и только тогда, когда существуют постоянная $C \geq 1$, упорядоченная по возрастанию сеть (E_λ) конечномерных подпространств X и сеть $(\tilde{\nabla}_\lambda) \subset \mathcal{B}(E_\lambda, A \hat{\otimes} X)$ такие, что $\|\tilde{\nabla}_\lambda\| \leq C$ и для $a \in A$, $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ найдется λ_0 такой, что $\{x, a \cdot x\} \subset E_{\lambda_0}$ и

$$\|\tilde{\nabla}_\lambda(a \cdot x) - a \triangleright \tilde{\nabla}_\lambda(x) - a \otimes x\| < \varepsilon \quad \text{для всех } \lambda \geq \lambda_0.$$

Сети (∇_λ) и $(\tilde{\nabla}_\lambda)$ естественно назвать *аппроксимативной левой связностью* и *локальной левой связностью*.

8.4. Строго плоские модули. Результаты §§ 2–5 могут быть без труда перенесены на случай строго плоских модулей (см. замечание 5.8). Разумеется, при этом надо заменить относительно свободные модули на строго свободные, т.е. такие, у которых существует не только базисное подпространство, но и абсолютный базис S – подмножество единичной сферы, произвольное отображение из которого единственным образом продолжается до морфизма с сохранением нормы. Всякий строго свободный банахов модуль изометрически изоморфен $A_+ \hat{\otimes} \ell_1(S)$, т.е. его базисное подпространство является ℓ_1 -пространством. Вопрос о строении строго плоских модулей нетривиален уже в случае $A = \mathbb{C}$, и для его исследования требуется существенное использование локальной теории банаховых пространств. Если X – строго плоский банахов $\mathbb{C}$ -модуль, то X^* – строго инъективный $\mathbb{C}$ -модуль, другими словами, инъективное банахово пространство. Тогда согласно [36; теорема II.5.7(ii)] X изоморфно $\mathcal{L}_1$ -пространству (т.е. локально устроено как ℓ_1 -пространство). С другой стороны, из [36; теорема II.5.9] следует, что всякое $\mathcal{L}_1$ -пространство является свободно аппроксимируемым в строгом смысле с некоторой постоянной, в частности, строго плоским банаховым $\mathbb{C}$ -модулем.

Список литературы

1. Хелемский А. Я. Гомология в банаховых и топологических алгебрах. М.: Изд-во МГУ, 1986.
2. Runde V. Lectures on Amenability. Berlin: Springer-Verlag, 2002. (Lecture Notes in Math. V. 1774.)
3. Хелемский А. Я. Плоские банаховы модули и аменабельные алгебры // Труды ММО. 1984. Т. 47. С. 179–218.
4. Шейнберг М. В. Гомологические свойства замкнутых идеалов, обладающих ограниченной аппроксимативной единицей // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1972. № 4. С. 39–45.
5. Пугач Л. И. Проективные и плоские идеалы функциональных алгебр, их связь с аналитической структурой // Матем. заметки. 1982. Т. 31. № 2. С. 239–245.
6. Selivanov Yu. V. Cohomological characterizations of biprojective and biflat Banach algebras // Monatsh. Math. 1999. V. 128. P. 35–60.
7. Селиванов Ю. В. Когомологии банаховых и близких к ним алгебр // Дис ... докт. физ.-матем. наук. М., 2002.
8. White M. C. Injective modules for uniform algebras // Proc. London Math. Soc. (3). 1996. V. 73. P. 155–184.

9. Головин Ю. О. Условия пространственных плоскости и инъективности неразложимой CSL-алгебры конечной ширины // Матем. заметки. 1998. Т. 63. №1. С. 9–20.
10. Blackadar B., Kirchberg E. Generalized inductive limits of finite-dimensional C^* -algebras // Math. Ann. 1997. V. 307. P. 343–380.
11. Gourdeau F. Amenability and the second dual of Banach algebras // Stud. Math. 1997. V. 125. №1. P. 75–81.
12. Хелемский А. Я. Банаховы и полинормированные алгебры. Общая теория, представления, гомологии. М.: Наука, 1989.
13. Селиванов Ю. В. Проективные модули Фреше со свойством аппроксимации // УМН. 1995. Т. 50. №1. С. 209–210.
14. Johnson B. E. Approximate diagonals and cohomology of certain annihilator Banach algebras // Amer. J. Math. 1972. V. 94. P. 685–698.
15. Grønbaek N. Morita equivalence for Banach algebras // J. Pure Appl. Algebra. 1995. V. 99. P. 183–219.
16. Zhang Y. Nilpotent ideals in a class of Banach algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1999. V. 127. P. 3237–3242.
17. Ghahramani F., Loy R. J. Generalized notions of amenability // J. Funct. Anal. 2004. V. 208. P. 229–260.
18. Lazard D. Sur les modules plats // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. 1964. V. 258. P. 6313–6316.
19. Говоров В. Е. О плоских модулях // Сиб. матем. журн. 1965. Т. 6. №2. С. 300–304.
20. Бурбаки Н. Алгебра. Гл. X. Гомологическая алгебра. М.: Наука, 1987.
21. Пуч А. Операторные идеалы. М.: Мир, 1982.
22. Хелемский А. Я. Периодическое произведение модулей над банаховыми алгебрами // Функц. анализ и его прилож. 1971. Т. 5. №1. С. 95–96.
23. Helemskii A. Ya. The spatial flatness and injectiveness of Connes operator algebras // Extracta Math. 1994. V. 9. P. 75–81.
24. Polyakov M. E. An example of a spatially non-flat von Neumann algebra // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 2001. V. 4. №1. P. 1–9.
25. Johnson B. E. Nonamenability of the Fourier algebra of a compact group // J. London Math. Soc. (2). 1994. V. 50. P. 361–374.
26. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.
27. Рейнов О. И. Аппроксимация операторов в нормированных операторных идеалах // Дис. . . . докт. физ.-матем. наук. С.-Пб., 2003.
28. Zhang Y. Unbounded approximate identities in algebras of compact operators on Banach spaces // Proc. Cambridge Philos. Soc. 2002. V. 134. P. 187–192.
29. Zhang Y. Approximate identities for ideals of Segal algebras on a compact group // J. Funct. Anal. 2002. V. 191. P. 123–131.
30. Selivanov Yu. V. Superbiprojective and superbiflat Banach algebras // Preprint. Odense, 2001.
31. Grønbaek N., Johnson B. E., Willis G. A. Amenability of Banach algebras of compact operators // Israel J. Math. 1994. V. 87. P. 289–324.
32. Cigler J., Losert V., Michor P. Banach modules and functors on categories of Banach spaces. New York: Marcel Dekker, 1979.
33. Aristov O. Yu. Amenability and compact type for Hopf-von Neumann algebras from the homological point of view // Banach algebras and their applications. Proceeding of the 16th International Conference. University of Alberta. Edmonton, Canada, July 27–August 9, 2003. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2004. P. 15–37. (Contemp. Math. V. 363.)
34. Baehr H. Stability of continuous cyclic cohomology and operator ideals on Hilbert space. Schriftenreihe des Mathematischen Instituts der Universität Münster, 3. Ser. 30, 2002.
35. Cuntz J., Quillen D. G. Algebra extensions and nonsingularity // J. Amer. Math. Soc. 1995. V. 8. P. 251–289.
36. Lindenstrauss J., Tsafriri L. Classical Banach spaces. Berlin: Springer-Verlag, 1973. (Lecture Notes in Math. V. 338.)

Обнинский государственный технический
университет атомной энергетики
E-mail: aristov@iate.obninsk.ru
aristov@future.org.ru

Поступила в редакцию
10.08.2004 и 26.07.2005