Общероссийский математический портал

С. В. Ревина, В. И. Юдович, L_p -оценки резольвенты оператора Стокса в бесконечном цилиндре, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 6, 97–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm139>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 12:47:26

УДК 517.95

С. В. Ревина, В. И. Юдович

L_p -оценки резольвенты оператора Стокса в бесконечном цилиндре

Известные для ограниченной области L_p -оценки резольвенты для оператора Стокса распространены на случай бесконечного цилиндра. В частности, доказано, что оператор Стокса порождает аналитическую полугруппу в $L_p(\mathfrak{D})$, $1 < p < \infty$.

Для решения уравнений, определяющих резольвенту оператора Стокса, получено представление давления в виде суммы затухающего на бесконечности слагаемого и слагаемого, имеющего ненулевой перепад. Формула для нахождения перепада давления выписана явно.

Библиография: 12 названий.

При доказательстве теорем типа ляпуновских о законности линеаризации в задачах устойчивости решений параболических уравнений и уравнений Навье–Стокса главный технический момент – вывод оценки резольвенты линеаризованного стационарного оператора, из которой следует, что соответствующая линейная полугруппа аналитична в некотором секторе.

Для ограниченной области эти результаты известны [1]. Цель данной статьи – получить соответствующую L_p -оценку резольвенты в случае бесконечного цилиндра. Мы ограничимся здесь исследованием уравнений Стокса, получаемых линеаризацией уравнений Навье–Стокса на нулевом равновесии. Это и есть наиболее трудный шаг исследования. Следующие шаги – исследование уравнений, линеаризованных на произвольном (из некоторого класса) стационарном или периодическом течении, с приложением к нелинейной системе – авторы надеются изложить в другой статье. Заметим, что подходы работы [1] здесь применимы с не очень существенными изменениями.

Расстояния точек цилиндра до его поверхности ограничены сверху, поэтому выполняется неравенство Фридрихса, и спектр оператора Стокса находится строго внутри устойчивой полуплоскости и вещественен. Это сближает задачу для цилиндра с задачей для ограниченной области. Априорная оценка старших производных решения через младшие получаются известным путем [1], и ее вывод, по существу, не зависит от того, является ли область ограниченной или нет, компактна ли ее граница. Однако изгнание младших производных в априорной оценке неожиданно вызывает осложнения.

В §1 кратко изложен вывод оценки резольвенты оператора Стокса в $L_2(\mathfrak{D})$ и изучено расположение его спектра. Эти результаты, полученные применением

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-013-17337).

хорошо известных методов теории самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, используются далее для вывода оценок в L_p .

В §2 выводятся оценки решения краевой задачи на сечении цилиндра, полученной из исходной применением преобразования Фурье по переменной z вдоль оси цилиндра.

Третий параграф посвящен оценкам резольвенты в $L_{2,p}(\mathfrak{D}) = L_p(\mathbb{R}, L_2(\Omega))$. Главный инструмент их вывода – векторнозначный аналог теоремы Михлина о мультипликаторах интеграла Фурье, доказанный Дж. Шварцем [2]. Теорема Михлина перенесена лишь на вектор-функции со значениями в гильбертовом пространстве, и неизвестно даже, верны ли какие-либо ее “банаховозначные” аналоги. Это печальное обстоятельство и вынуждает использовать те или иные промежуточные функциональные пространства, в качестве которых здесь выбраны $L_{2,p}(\mathfrak{D})$.

С применением этих пространств в §4 младшие члены изгоняются и выводится нужная L_p -оценка резольвенты вместе с оценками старших производных решения.

Специфика уравнений Стокса – чистых и со спектральным параметром – в цилиндрической области проявляется в поведении давления P на бесконечности. Если массовые силы достаточно быстро затухают, то P стремится к постоянным значениям $P_{\pm}$, когда осевая переменная z стремится к $\pm\infty$. При этом перепад давления $\gamma = P_+ - P_-$ не обязан обращаться в ноль. Для него получено явное выражение через осевую компоненту внешней силы и решение некоторой стандартной краевой задачи на сечении цилиндра. Давление, как обычно, определяется лишь с точностью до аддитивной постоянной, и можно считать, что оно затухает на бесконечности, если $\gamma = 0$. Получается, что этот факт имеет место лишь для внешних сил из некоторого подпространства коразмерности единица.

§1. Обобщенное решение, оценки в $S_2(\mathfrak{D})$

Пусть область $\mathfrak{D}$ представляет собой бесконечный цилиндр с сечением Ω :

$$\mathfrak{D} = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \in \Omega, z \in \mathbb{R}\}, \quad (1.1)$$

Ω – ограниченная область на плоскости $\mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega$.

Через $S_p(\mathfrak{D})$ (соответственно, $S_p^{(1)}(\mathfrak{D})$) обозначим банахово пространство, полученное замыканием по норме $L_p(\mathfrak{D})$ (соответственно, $W_p^{(1)}(\mathfrak{D})$) множества гладких, соленоидальных, финитных в $\mathfrak{D}$ векторных полей.

Рассмотрим краевую задачу с комплексным параметром σ в цилиндре $\mathfrak{D}$ (1.1):

$$\sigma u + \nu \Delta u = \nabla P + f, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad (1.3)$$

$$u|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}} = 0, \quad u|_{\infty} = 0, \quad (1.4)$$

где f – заданное векторное поле из $S_2(\mathfrak{D})$, ν – кинематическая вязкость, поле скоростей $u(x)$ и давление $P(x)$ подлежат определению.

Пусть Π – ортопроектор Вейля, действующий из $L_2(\mathfrak{D})$ на $S_2(\mathfrak{D})$. Применив его к (1.2)–(1.4), приходим к уравнению в $S_2(\mathfrak{D})$:

$$\sigma u - Au = f, \quad (1.5)$$

где A – оператор с областью определения $D(A) = W_2^{(2)}(\mathfrak{D}) \cap S_2^{(1)}(\mathfrak{D})$, действующий по правилу:

$$Au = -\nu \Pi \Delta u. \quad (1.6)$$

Оператор A симметричен и положительно определен в $S_2(\mathfrak{D})$. Его самосопряженное расширение по Фридрихсу называется оператором Стокса. Сохраним за оператором Стокса обозначение A .

Положим

$$\sigma_0 = \nu \lambda_0, \quad (1.7)$$

λ_0 – наименьшее собственное значение плоского оператора Лапласа

$$-\Delta_0 = -\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right)$$

в $L_2(\Omega)$ при граничном условии первого рода.

Определим для любого угла $\theta \in (0, \pi/2)$ на комплексной плоскости сектор $\Sigma(\sigma_0, \theta)$ с центром в точке σ_0 раствора $2(\pi - \theta)$:

$$\Sigma(\sigma_0, \theta) = \{\sigma \in \mathbb{C} : \theta < |\arg(\sigma - \sigma_0)| \leq \pi\}. \quad (1.8)$$

Из положительной определенности и самосопряженности оператора Стокса следует, что любое невещественное σ и любое $\sigma \in \mathbb{R} : \sigma < \sigma_0$, принадлежит резольвентному множеству оператора Стокса, причем для решения задачи (1.5) справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} \|u\|_{S_2(\mathfrak{D})} &\leq \frac{\|f\|_{S_2(\mathfrak{D})}}{|\operatorname{Im} \sigma|} \quad \forall \sigma : \operatorname{Im} \sigma \neq 0, \\ \|u\|_{S_2(\mathfrak{D})} &\leq \frac{\|f\|_{S_2(\mathfrak{D})}}{\sigma_0 - \operatorname{Re} \sigma} \quad \forall \sigma : \operatorname{Re} \sigma < \sigma_0, \end{aligned}$$

из которых так же, как в [1], выводится равномерная по $\sigma \in \Sigma(\sigma_0, \theta)$ оценка решения уравнения (1.5):

$$|\sigma - \sigma_0| \|u\|_{L_2(\mathfrak{D})} \leq C(\theta) \|f\|_{L_2(\mathfrak{D})}, \quad (1.9)$$

где $C(\theta) = \sqrt{2}/\operatorname{tg} \theta$, если $0 < \theta < \pi/4$, и $C(\theta) = \sqrt{2}$, если $\pi/4 \leq \theta < \pi/2$. Целью настоящей работы является получение аналогичной оценки в $L_p(\mathfrak{D})$, $1 < p < \infty$, $p \neq 2$.

Более точное представление о спектре дает применение к (1.5) преобразования Фурье по переменной z вдоль оси цилиндра $\mathfrak{D}$:

$$\mathfrak{F}u = \hat{u}(y, \alpha) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-i\alpha z) u(y, z) dz \quad (1.10)$$

на гладких функциях u . Далее под $\hat{\Pi}$ будем понимать проектор Вейля, перенесенный в пространство образов Фурье:

$$\hat{\Pi} = \mathfrak{F} \Pi \mathfrak{F}^{-1}. \quad (1.11)$$

Применив к обеим частям уравнения (1.5) преобразование Фурье по переменной z , приходим к задаче на сечении Ω цилиндра с параметрами σ и α :

$$(\sigma - \nu\alpha^2)\hat{u} - A_0\hat{u} = \hat{f}, \quad (1.12)$$

где $A_0 = -\nu\hat{\Pi}\Delta_0$. При этом $\hat{u}, \hat{f}$ принадлежат гильбертову пространству $H(\alpha)$ – образу сужения оператора Фурье на $S_2(\mathfrak{D})$ при фиксированном $\alpha \in \mathbb{R}$ – со скалярным произведением:

$$(\hat{u}, \hat{v})_{H(\alpha)} = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 \hat{u}_j(y, \alpha) \hat{v}_j^*(y, \alpha) dy.$$

Хорошо известными приемами (см., например, [1]) доказывается следующая

ЛЕММА 1.1. *Оператор A_0 симметричен, положительно определен в пространстве $H(\alpha)$ и имеет вполне непрерывный обратный.*

Отсюда следует, что оператор A_0 в $H(\alpha)$ имеет чисто точечный спектр, состоящий из бесконечной последовательности положительных собственных чисел

$$0 < \lambda_1(\alpha) \leq \lambda_2(\alpha) \leq \dots \leq \lambda_k(\alpha) \rightarrow \infty$$

конечной кратности. Соответствующие собственные векторы образуют полную ортогональную систему в $H(\alpha)$.

Разложение решения уравнения (1.12) в ряд по собственным функциям приводит к неравенству:

$$\|\hat{u}\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{\|\hat{f}\|_{L_2(\Omega)}}{\inf_k |\sigma - \nu\alpha^2 - \lambda_k(\alpha)|}, \quad (1.13)$$

из которого следуют оценки:

$$\|\hat{u}\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{1}{|\operatorname{Im} \sigma|} \|\hat{f}\|_{L_2(\Omega)} \quad \forall \sigma: \operatorname{Im} \sigma \neq 0, \quad (1.14)$$

и

$$\|\hat{u}\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{1}{\sigma_0 - \operatorname{Re} \sigma + \nu\alpha^2} \|\hat{f}\|_{L_2(\Omega)} \quad \forall \sigma: \operatorname{Re} \sigma < \sigma_0 + \nu\alpha^2. \quad (1.15)$$

В свою очередь, из (1.14) и (1.15) выводится неравенство:

$$\|\hat{u}\|_{L_2(\Omega)} \leq C(\theta) \frac{\|\hat{f}\|_{L_2(\Omega)}}{|\sigma - \sigma_0 - \nu\alpha^2|} \quad (1.16)$$

с той же константой $C(\theta)$, что и в (1.9). Заметим, что из (1.13) следует также, что в (1.9) и (1.16) константу σ_0 (1.7) можно заменить на $\sigma_1 \geq \sigma_0$:

$$\sigma_1 = \inf \{ \lambda_1(\alpha), \alpha \in \mathbb{R} \}. \quad (1.17)$$

Таким образом, доказана следующая

ЛЕММА 1.2. *Оценка (1.9) остается справедливой, если вместо σ_0 взять σ_1 (см. (1.17)).*

Следовательно, любое σ , не лежащее на луче

$$E = \{ \sigma \in \mathbb{R} : \sigma \geq \sigma_1 > 0 \},$$

принадлежит резольвентному множеству оператора Стокса.

§ 2. Краевая задача на сечении цилиндра

Применив преобразование Фурье по переменной z к (1.2)–(1.4), приходим к краевой задаче на сечении Ω :

$$(\sigma - \nu\alpha^2)\hat{u}_j + \nu\Delta_0\hat{u}_j = \frac{\partial\hat{P}}{\partial x_j} + \hat{f}_j, \quad j = 1, 2, \quad (2.1)$$

$$(\sigma - \nu\alpha^2)\hat{u}_3 + \nu\Delta_0\hat{u}_3 = i\alpha\hat{P} + \hat{f}_3, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial\hat{u}_1}{\partial y_1} + \frac{\partial\hat{u}_2}{\partial y_2} + i\alpha\hat{u}_3 = 0, \quad (2.3)$$

$$\hat{u}_l|_{\partial\Omega} = 0, \quad l = 1, 2, 3. \quad (2.4)$$

Под решением этой задачи (при фиксированном α) будем понимать пару $(\hat{u}, \hat{P})$, где $\hat{u}(y, \alpha)$ принадлежит подпространству векторных полей из $\overset{\circ}{W}_p^{(1)}(\Omega) \cap W_p^{(2)}(\Omega)$, для которых выполнено условие “соленоидальности” (2.3), $\widehat{\nabla_0 P}$ принадлежит $L_p(\Omega)$, и удовлетворяются уравнения (2.1), (2.2).

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\sigma \in \Sigma(\sigma_0, \theta)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\partial\Omega \in C^2$, $\hat{f} \in L_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Тогда при любом $\alpha \neq 0$ существует единственное решение краевой задачи (2.1)–(2.4), и для него при любом $\varepsilon > 0$ справедлива оценка:

$$|\sigma - \nu\alpha^2 - \sigma_0| \|\hat{u}\|_{L_p(\Omega)} + \|D_y^2 \hat{u}\|_{L_p(\Omega)} + \|\widehat{D_y P}\|_{L_p(\Omega)} \leq C \|\hat{f}\|_{L_p(\Omega)}, \quad (2.5)$$

где $\sigma \in \overline{\Sigma}(\sigma_0 - \varepsilon, \theta)$, $|\alpha| \geq \alpha_0 > 0$, константа C зависит только от Ω , p , θ , α_0 , ε .

Доказательство этого утверждения проводится по той же схеме, что и доказательство L_p -оценок резольвенты оператора Стокса в ограниченной области (см. [1, гл. 1, теорема 6.1]). Младшие нормы в априорной оценке изгоняются с помощью (1.16).

Теперь рассмотрим краевую задачу в полубесконечном цилиндре

$$\mathfrak{D}_+ = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \in \Omega, z > 0\},$$

где Ω – ограниченная область на плоскости $\mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega \in C^2$:

$$\sigma u + \nu\Delta u = \nabla P, \quad (2.6)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad (2.7)$$

$$u|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}} = 0, \quad u|_{z=0} = F, \quad u|_{\infty} = 0. \quad (2.8)$$

Из результатов работ [3]–[5] (см. также [6], [7]) и теоремы 2.1 можно вывести, что решение этой задачи экспоненциально затухает на бесконечности. Точнее, справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 2.1. Пусть $F \in C_0^\infty(\Omega)$. Тогда существует единственное решение задачи (2.6)–(2.8), причем найдется $\beta > 0$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$, для любого $\delta \in (0, 1)$ существует константа $C = C(\Omega, \theta, \varepsilon)$ такая, что решение подчиняется оценкам:

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, z)\|_{W_2^{(1)}(\Omega)} + \|P(\cdot, z)\|_{L_2(\Omega)} \\ \leq C e^{-\beta z} (\|u(\cdot, 0)\|_{W_2^{(1)}(\Omega)} + \|P(\cdot, 0)\|_{L_2(\Omega)}), \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, z)\|_{W_2^{(2)}(\Omega)} + \|\nabla_0 P(\cdot, z)\|_{L_2(\Omega)} \\ \leq C(1 + z^{-\delta}) e^{-\beta z} (\|u(\cdot, 0)\|_{W_2^{(1)}(\Omega)} + \|P(\cdot, 0)\|_{L_2(\Omega)}), \end{aligned} \quad (2.10)$$

равномерным по σ в любой ограниченной части сектора $\overline{\Sigma}(\sigma_0 - \varepsilon, \theta)$.

Теперь предположим, что в (2.1)–(2.4) параметр α принадлежит некоторой полосе Ψ_δ комплексной плоскости:

$$\Psi_\delta = \{\alpha = \mu + i\omega : |\omega| < \delta\}. \quad (2.11)$$

ЛЕММА 2.2. Пусть в исходной задаче (1.2)–(1.4) $f \in C_0^\infty(\mathfrak{D})$, $\sigma \in \Sigma(\sigma_0, \theta)$. Тогда для решения задачи (2.1)–(2.4) справедливы утверждения:

- 1) преобразование Фурье $\widehat{u}(y, \alpha)$ представляет собой вектор-функцию от α , аналитическую в некоторой полосе Ψ_δ в пространствах $L_2(\Omega)$, $W_{2,\text{loc}}^{(2)}(\Omega)$;
- 2) $\alpha \widehat{P}(y, \alpha)$ и $\widehat{\nabla_0 P}(y, \alpha)$ аналитичны по $\alpha \in \Psi_\delta$ в $L_{2,\text{loc}}(\Omega)$;
- 3) существует константа γ такая, что $i\alpha \widehat{P}(y, \alpha) \rightarrow \gamma$ при $\alpha \rightarrow 0$ в $L_{2,\text{loc}}(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первый пункт утверждения леммы легко доказать, непосредственно оценивая интеграл Фурье $\widehat{u}(y, \alpha)$ и его производную по α $\widehat{u}'(y, \alpha)$ при помощи неравенств (1.9), (2.9) и (2.10). Связь между аналитичностью преобразования Фурье и экспоненциальным затуханием функции хорошо известна [8]. Принадлежность функции u пространству $W_{2,\text{loc}}^{(2)}(\mathfrak{D})$ также установлена [9].

Для доказательства второго пункта утверждения леммы достаточно выразить $\widehat{\nabla_0 P}(y, \alpha)$ и $i\alpha \widehat{P}(y, \alpha)$ непосредственно из уравнений (2.1), (2.2) и воспользоваться первым пунктом.

Далее, поскольку $i\alpha \widehat{P}(y, \alpha)$ аналитична в $L_{2,\text{loc}}(\Omega)$ в окрестности $\alpha = 0$, то существует $\lim_{\alpha \rightarrow 0} i\alpha \widehat{P}(y, \alpha) = \gamma(y)$, $\gamma \in L_{2,\text{loc}}(\Omega)$. Но из аналитичности $\widehat{\nabla_0 P}(y, \alpha)$ следует, что $\nabla_0 \gamma = 0$. Лемма доказана.

Заметим, что сама функция $\widehat{P}(y, \alpha)$, вообще говоря, не аналитична по α в окрестности $\alpha = 0$. Причина состоит в том, что давление P в задаче для полуцилиндра (2.6)–(2.8) определено с точностью до аддитивной постоянной, причем для полуцилиндров $z > M$ и $z < -M$ соответствующие постоянные, как правило, различны. Их разность γ – перепад давления – согласно лемме 2.2, есть не что иное,

как вычет функции $i\widehat{P}(y, \alpha)$ в точке $\alpha = 0$. Этот вычет равен нулю лишь для полей f из некоторого подпространства – см. ниже теорему 2.2.

Пусть выполняются условия леммы 2.2. Наша задача состоит в том, чтобы перейти к пределу $\alpha \rightarrow 0$ в (2.1)–(2.4) и доказать, что оценка (2.5) справедлива и при $\alpha = 0$.

Из уравнения неразрывности (2.3) и краевых условий (2.4) следует, что для любых α в окрестности нуля, $\alpha \neq 0$, выполняется равенство: $\int_{\Omega} \widehat{u}_3(y, \alpha) dy = 0$. По непрерывности, это условие выполняется и при $\alpha = 0$. Согласно лемме 2.2 при $\alpha = 0$ система (2.1)–(2.4) распадается на две краевые задачи:

$$\sigma \widehat{u}_j(y, 0) + \nu \Delta_0 \widehat{u}_j(y, 0) = \frac{\partial \widehat{P}}{\partial x_j}(y, 0) + \widehat{f}_j(y, 0), \quad j = 1, 2, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \widehat{u}_2}{\partial y_2} = 0, \quad (2.13)$$

$$\widehat{u}_j|_{\partial\Omega} = 0, \quad j = 1, 2, \quad (2.14)$$

и

$$\sigma \widehat{u}_3(y, 0) + \nu \Delta_0 \widehat{u}_3(y, 0) = \gamma + \widehat{f}_3(y, 0), \quad (2.15)$$

$$\widehat{u}_3(y, 0)|_{\partial\Omega} = 0, \quad \int_{\Omega} \widehat{u}_3(y, 0) dy = 0. \quad (2.16)$$

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $f \in C_0^\infty(\mathfrak{D})$, $\sigma \in \Sigma(\sigma_0, \theta)$. Тогда

1) в (2.15) константа γ определяется по формуле:

$$\gamma = -\frac{(\widehat{f}_3(\cdot, 0), g)_{L_2(\Omega)}}{(1, g)_{L_2(\Omega)}}, \quad (2.17)$$

где $g(y)$ является решением краевой задачи:

$$\sigma^* g(y) + \nu \Delta_0 g(y) = 1, \quad g|_{\partial\Omega} = 0; \quad (2.18)$$

2) существует единственное решение задачи (2.12)–(2.16), причем при любом $\varepsilon > 0$ найдутся такие константы $C = C(\Omega, p, \theta, \varepsilon)$, что выполняются оценки:

$$|\gamma| \leq C \|\widehat{f}_3(\cdot, 0)\|_{L_p(\Omega)} \quad (2.19)$$

и

$$\begin{aligned} |\sigma - \sigma_0| \|\widehat{u}(\cdot, 0)\|_{L_p(\Omega)} + \|D_y^2 \widehat{u}(\cdot, 0)\|_{L_p(\Omega)} \\ + \|\widehat{D_y P}(\cdot, 0)\|_{L_p(\Omega)} \leq C \|\widehat{f}(\cdot, 0)\|_{L_p(\Omega)}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

равномерно по $\sigma \in \overline{\Sigma}(\sigma_0 - \varepsilon, \theta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Константу γ определим из условия разрешимости задачи (2.15), (2.16). Пусть $G(y, s, \sigma)$ – функция Грина оператора $\sigma I + \nu \Delta_0$ в $L_2(\Omega)$ с граничным условием первого рода. Тогда решение задачи (2.15), (2.16) имеет вид

$$\hat{u}_3(y, 0) = \int_{\Omega} G(y, s, \sigma) [\gamma + \hat{f}_3(s, 0)] ds. \quad (2.21)$$

Условие равенства потока приводит к соотношению:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} dy \int_{\Omega} G(y, s, \sigma) [\gamma + \hat{f}_3(s, 0)] ds \\ &= \int_{\Omega} \left[(\gamma + \hat{f}_3(s, 0)) \int_{\Omega} G(y, s, \sigma) dy \right] ds \\ &= (\hat{f}_3(\cdot, 0) + \gamma, g)_{L_2(\Omega)}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где $g(y)$ – решение краевой задачи (2.18). Отсюда следует (2.17).

Теперь докажем оценку (2.19). Пусть $\{\phi_k\}_1^{\infty}$ – ортонормированный базис пространства $L_2(\Omega)$, состоящий из собственных функций оператора $-\nu \Delta_0$ с граничным условием первого рода, $\{\lambda_k\}_1^{\infty}$ – соответствующие собственные значения. Тогда для решения задачи (2.18) справедливо представление:

$$\int_{\Omega} g(y) dy = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k^2}{\sigma^* - \lambda_k}, \quad (2.23)$$

где $C_k = (1, \phi_k)_{L_2(\Omega)}$. Рассмотрим два случая:

- 1) $\operatorname{Re} \sigma < \sigma_0$;
- 2) $\operatorname{Re} \sigma \geq \sigma_0$, $|\operatorname{Im} \sigma| \geq |\operatorname{Re}(\sigma - \sigma_0)| \operatorname{tg} \theta$.

В первом случае имеем оценку:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} g(y) dy \right|^2 &\geq \left(\frac{C_1^2(\lambda_1 - \operatorname{Re} \sigma)}{(\operatorname{Re} \sigma - \lambda_1)^2 + (\operatorname{Im} \sigma)^2} \right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{C_1^2 |\operatorname{Im} \sigma|}{(\operatorname{Re} \sigma - \lambda_1)^2 + (\operatorname{Im} \sigma)^2} \right)^2 = \frac{C_1^4}{|\sigma - \sigma_0|^2}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Здесь учтено, что $\lambda_1 = \sigma_0$, и $C_1 = (1, \phi_1)_{L_2(\Omega)} \neq 0$.

Во втором случае воспользуемся неравенством:

$$|\sigma - \sigma_0| \leq \sqrt{2} \max(\operatorname{Re} \sigma - \sigma_0, |\operatorname{Im} \sigma|).$$

Тогда, если $\operatorname{Re} \sigma - \sigma_0 \geq |\operatorname{Im} \sigma|$, из (2.23) следует оценка:

$$\left| \int_{\Omega} g(y) dy \right|^2 \geq \frac{C_1^4 |\operatorname{Im} \sigma|^2}{|\sigma - \sigma_0|^4} \geq \frac{C_1^4 \operatorname{tg}^2 \theta}{2 |\sigma - \sigma_0|^2}, \quad (2.25)$$

если же $\operatorname{Re} \sigma - \sigma_0 < |\operatorname{Im} \sigma|$, то из (2.23) имеем оценку:

$$\left| \int_{\Omega} g(y) dy \right|^2 \geq \frac{C_1^4 |\operatorname{Im} \sigma|^2}{|\sigma - \sigma_0|^4} \geq \frac{C_1^4}{2|\sigma - \sigma_0|^2}. \quad (2.26)$$

Из (2.17), (2.24)–(2.26) и известной оценки решения задачи (2.18):

$$|\sigma - \sigma_0| \|g\|_{L_p(\Omega)} \leq C$$

следует неравенство (2.19).

Применив результаты из [1] к системе (2.12)–(2.14), определяющей резольвенту плоского оператора Стокса, получим требуемые оценки первой и второй компонент скорости, а также градиента давления. Тогда из (2.19) и известных результатов для эллиптических уравнений следует (2.20). Теорема доказана.

Из теорем 2.1, 2.2, в частности, вытекает следующая оценка старших производных решения задачи (1.2)–(1.4) в пространстве $L_2(\mathfrak{D})$.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $\partial\Omega \in C^2$, $f \in L_2(\mathfrak{D})$. Тогда существует единственное решение (u, P) краевой задачи (1.2)–(1.4) такое, что $u \in W_2^{(2)}(\mathfrak{D})$, $\nabla P \in L_2(\mathfrak{D})$, и для него справедлива оценка:

$$\|D_x^2 u\|_{L_2(\mathfrak{D})} + \|\nabla P\|_{L_2(\mathfrak{D})} \leq C \|f\|_{L_2(\mathfrak{D})}, \quad (2.27)$$

где $\sigma \in \overline{\Sigma}(\sigma_0 - \varepsilon, \theta)$, C зависит лишь от Ω , θ , ε .

Из теорем 2.1, 2.2 и теоремы об обратимости оператора, близкого к единичному, легко получается следствие.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть в (2.1)–(2.4) параметр α принимает комплексные значения: $\alpha = \mu + i\omega$, $\sigma \in \Sigma(\sigma_0, \theta)$, $\partial\Omega \in C^2$, $\hat{f} \in L_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Тогда существует $\sigma > 0$ такое, что для любого α из полосы Ψ_δ (2.11) существует единственное решение краевой задачи (2.1)–(2.4), и для него справедлива оценка (2.5), равномерная по $\sigma \in \overline{\Sigma}(\sigma_0 - \varepsilon, \theta)$, $\alpha \in \Psi_\delta$.

§3. Оценка резольвенты оператора Стокса в $L_{2,p}(\mathfrak{D})$

Введем банахово пространство $L_{2,p}(\mathfrak{D})$ измеримых вектор-функций на $\mathbb{R}$, со значениями в $L_2(\Omega)$, норма в котором определяется равенством:

$$\|v\|_{L_{2,p}(\mathfrak{D})} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|v(\cdot, z)\|_{L_2(\Omega)}^p dz \right)^{1/p}, \quad 1 < p < \infty, \quad (3.1)$$

$x = (y, z)$ – точка цилиндра $\mathfrak{D}$, $y \in \Omega$, $z \in \mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\partial\Omega \in C^2$, $f \in L_{2,p}(\mathfrak{D})$, $1 < p < \infty$, $\sigma \in \Sigma(\sigma_0, \theta)$. Тогда существует единственное решение (u, P) краевой задачи (1.2)–(1.4) такое, что u , $D_x^2 u \in L_{2,p}(\mathfrak{D})$, $\nabla P \in L_{2,p}(\mathfrak{D})$, и выполняется оценка:

$$|\sigma - \sigma_0| \|u\|_{L_{2,p}(\mathfrak{D})} + \|D_x^2 u\|_{L_{2,p}(\mathfrak{D})} + \|\nabla P\|_{L_{2,p}(\mathfrak{D})} \leq C \|f\|_{L_{2,p}(\mathfrak{D})}, \quad (3.2)$$

где $\sigma \in \overline{\Sigma}(\sigma_0 - \varepsilon, \theta)$, $C = C(\Omega, \theta, p, \varepsilon)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вывод оценки (3.2) основан на применении преобразования Фурье по переменной z вдоль оси цилиндра и проверке условий векторнозначной теоремы Михлина о мультипликаторах интеграла Фурье, полученной Дж. Шварцем [2].

Пусть f – векторное поле из $C_0^\infty(\mathfrak{D})$. Тогда $f \in L_{2,p}(\mathfrak{D}) \cap L_2(\mathfrak{D})$, следовательно, по теореме 2.3 для f существует единственное решение задачи (1.2)–(1.4). Докажем, что оно удовлетворяет оценке (3.2).

На множестве функций $\hat{f}(y, \alpha)$, аналитических по параметру $\alpha \in \mathbb{R}$ и финитных, бесконечно дифференцируемых по $y \in \Omega$, определим операторы $W(\alpha)$, $Q(\alpha)$, полагая

$$\hat{u} = W(\alpha)\hat{f}, \quad \hat{P} = Q(\alpha)\hat{f}. \quad (3.3)$$

Согласно результату [2] для доказательства оценки (3.2) достаточно проверить два неравенства для мультипликаторов интеграла Фурье:

$$|\sigma - \sigma_0| \|W(\alpha)\|_{L_2 \rightarrow L_2} + \|D_y^2 W(\alpha)\|_{L_2 \rightarrow L_2} + \|\alpha^2 W(\alpha)\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq C, \quad (3.4)$$

$$\|D_y Q(\alpha)\|_{L_2 \rightarrow L_2} + \|\alpha Q(\alpha)\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq C \quad (3.5)$$

и еще два для их производных по α :

$$|\alpha| \{ |\sigma - \sigma_0| \|W'(\alpha)\|_{L_2 \rightarrow L_2} + \|D_y^2 W'(\alpha)\|_{L_2 \rightarrow L_2} + \|\alpha^2 W'(\alpha)\|_{L_2 \rightarrow L_2} \} \leq C, \quad (3.6)$$

$$|\alpha| \{ \|D_y Q'(\alpha)\|_{L_2 \rightarrow L_2} + \|\alpha Q'(\alpha)\|_{L_2 \rightarrow L_2} \} \leq C. \quad (3.7)$$

Оценки (3.4), (3.5) следуют из теорем 2.1 и 2.2 при $p = 2$. Проверим неравенства (3.6), (3.7). Введем обозначения:

$$w(y, \alpha) = W'(\alpha)\hat{f}, \quad q(y, \alpha) = Q'(\alpha)\hat{f}. \quad (3.8)$$

Согласно (2.1)–(2.4) пара $(w(y, \alpha), q(y, \alpha))$ образует решение краевой задачи:

$$(\sigma - \nu\alpha^2)w_j + \nu\Delta_0 w_j = \frac{\partial q}{\partial y_j} + 2\nu\alpha\hat{u}_j, \quad j = 1, 2, \quad (3.9)$$

$$(\sigma - \nu\alpha^2)w_3 + \nu\Delta_0 w_3 = i\alpha q + 2\nu\alpha\hat{u}_3 + i\hat{P}, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_2}{\partial y_2} + i\alpha w_3 = -i\hat{u}_3, \quad (3.11)$$

$$w_l|_{\partial\Omega} = 0, \quad l = 1, 2, 3. \quad (3.12)$$

Положим

$$\tilde{w}(\alpha, z) = \alpha w(\alpha, z), \quad \tilde{q}(\alpha, z) = \alpha q(\alpha, z). \quad (3.13)$$

Чтобы избавиться от неоднородности в правой части (3.11), векторное поле $\tilde{w}$ представим в виде:

$$\tilde{w} = \tilde{u} + (\hat{u}_1, \hat{u}_2, 0). \quad (3.14)$$

Тогда $\tilde{u}$ является решением краевой задачи:

$$(\sigma - \nu\alpha^2)\tilde{u}_j + \nu\Delta_0\tilde{u}_j = \frac{\partial\tilde{q}}{\partial y_j} - (\sigma - \nu\alpha^2)\hat{u}_j - \nu\Delta_0\hat{u}_j, \quad (3.15)$$

$$(\sigma - \nu\alpha^2)\tilde{u}_3 + \nu\Delta_0\tilde{u}_3 = i\alpha\tilde{q} + 2\nu\alpha^2\hat{u}_3 + i\alpha\hat{P}, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial\tilde{u}_1}{\partial y_1} + \frac{\partial\tilde{u}_2}{\partial y_2} + i\alpha\tilde{u}_3 = 0, \quad (3.17)$$

$$\tilde{u}_l|_{\partial\Omega} = 0, \quad l = 1, 2, 3. \quad (3.18)$$

Так как $\hat{u}$, $\hat{P}$ уже оценены в (3.4), (3.5), выполнение неравенств (3.6), (3.7) при $|\alpha| \geq \alpha_0$ следует из теоремы 2.1.

Для проверки неравенств (3.6), (3.7) при $|\alpha| \leq \alpha_0$ достаточно показать, что к задаче (3.15)–(3.18) применимы выводы теоремы 2.2. Теперь аналитичность $\tilde{u}(y, \alpha)$ и существование предела $i\alpha\tilde{q}$ при $\alpha \rightarrow 0$ доказываются иначе, чем в лемме 2.2.

Прежде всего заметим, что функция $w(y, \alpha)$ аналитична по α в некоторой полосе Ψ_δ комплексной плоскости в пространствах $L_2(\Omega)$, $W_{2,\text{loc}}^{(2)}(\Omega)$. Действительно, аналитичность $\hat{u}(y, \alpha)$ уже доказана, а производную по α этой функции можно представить в виде:

$$\hat{u}'(y, \alpha) = w(y, \alpha) + v(y, \alpha), \quad (3.19)$$

где $w(y, \alpha)$ определена в (3.8), а $v(y, \alpha)$ удовлетворяет системе вида (2.1)–(2.4) с $\hat{f}'(y, \alpha)$ в правой части. Тогда из аналитичности функций $\hat{u}'(y, \alpha)$, $v(y, \alpha)$ и представления (3.19) следует аналитичность $w(y, \alpha)$.

Воспользовавшись выражениями (3.13) и (3.14), заключаем, что, во-первых, $\tilde{u}(y, \alpha)$ аналитична по $\alpha \in \Psi_\delta$ в $L_2(\Omega)$, $W_{2,\text{loc}}^{(2)}(\Omega)$, во-вторых,

$$\tilde{u}_3(y, 0) = \tilde{w}_3(y, 0) = 0. \quad (3.20)$$

Теперь, переходя к пределу при $\alpha \rightarrow 0$ в уравнении (3.16), с учетом (3.20) получим, что $i\alpha q + i\alpha P \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$ в $L_{2,\text{loc}}(\Omega)$. Следовательно, $i\alpha q \rightarrow -\gamma$ при $\alpha \rightarrow 0$ в $L_{2,\text{loc}}(\Omega)$, константа γ определена в (2.17). Тогда по теореме 2.2 неравенства (3.6), (3.7) доказаны и для $|\alpha| \leq \alpha_0$.

Существование решения задачи (1.2)–(1.4), удовлетворяющего оценке (3.2), для любой $f \in L_{2,p}(\mathfrak{D})$ доказано. Единственность следует из леммы 2.1. Теорема доказана.

Рассмотрим условия, при которых давление принадлежит пространству $L_{2,p}(\mathfrak{D})$.

ЛЕММА 3.1. Пусть $f \in C_0^\infty(\mathfrak{D})$, $\sigma \in \Sigma(\sigma_0, \theta)$ и выполняются условия:

$$(\hat{f}_3(\cdot, 0), g)_{L_2(\Omega)} = 0, \quad (3.21)$$

$$(\hat{f}_3'(\cdot, 0), g)_{L_2(\Omega)} = 0, \quad (3.22)$$

где g есть решение краевой задачи (2.18). Тогда для решения задачи (1.2)–(1.4) справедливо утверждение: существует константа M такая, что $P_0 = P - M$ принадлежит пространству $L_{2,p}(\mathfrak{D})$, причем

$$(\hat{P}_0(\cdot, 0), g)_{L_2(\Omega)} = 0, \quad (3.23)$$

и для любого $\varepsilon > 0$ выполняется равномерная по $\sigma \in \overline{\Sigma}(\sigma_0 - \varepsilon, \theta)$ оценка:

$$\|P_0\|_{L_{2,p}(\mathfrak{D})} \leq C \|f\|_{L_{2,p}(\mathfrak{D})}, \quad (3.24)$$

где $C = C(\Omega, \theta, p, \varepsilon)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (2.17) из условия (3.21) следует, что перепад давления равен нулю. Тогда $\widehat{P}(y, \alpha)$ есть преобразование Фурье обычной функции, если в качестве P рассматривать $P_0 = P - M$, где $M = \lim_{z \rightarrow \pm\infty} P(y, z)$ в $L_{2,\text{loc}}(\Omega)$. Всюду в доказательстве под P будем подразумевать P_0 .

Пусть $\widehat{P}$, q удовлетворяют системам (2.1)–(2.4) и (3.9)–(3.12), соответственно. Чтобы установить (3.24), согласно [2] достаточно оценить мультипликатор интеграла Фурье:

$$\|\widehat{P}(\cdot, \alpha)\|_{L_2(\Omega)} \leq C \|\widehat{f}(\cdot, \alpha)\|_{L_2(\Omega)} \quad (3.25)$$

и его производную по α :

$$|\alpha| \|q(\cdot, \alpha)\|_{L_2(\Omega)} \leq C \|\widehat{f}(\cdot, \alpha)\|_{L_2(\Omega)}. \quad (3.26)$$

Из (3.5) и (3.7) следует, что неравенства (3.5), (3.26) выполняются $\forall \alpha_0 > 0$, $\forall \alpha: |\alpha| \geq \alpha_0$. Докажем, что эти оценки справедливы и при $\alpha = 0$.

Сначала установим, что при выполнении условия калибровки (3.23) выполняется требуемая оценка мультипликатора:

$$\|\widehat{P}(\cdot, 0)\|_{L_2(\Omega)} \leq C \|\widehat{f}(\cdot, 0)\|_{L_2(\Omega)}. \quad (3.27)$$

Действительно, рассмотрим функцию

$$s(y) = \widehat{P}(y, 0) - T, \quad (3.28)$$

константа T подбирается из условия $(s, 1)_{L_2(\Omega)} = 0$:

$$T = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \widehat{P}(y, 0) dy.$$

Другое выражение для T получим, воспользовавшись условием (3.23):

$$T = -\frac{(s, g)_{L_2(\Omega)}}{(1, g)_{L_2(\Omega)}}. \quad (3.29)$$

В силу теоремы 2.2 справедливо неравенство:

$$\|\widehat{\nabla_0 P}(\cdot, 0)\|_{L_2(\Omega)} \leq C \|\widehat{f}(\cdot, 0)\|_{L_2(\Omega)}. \quad (3.30)$$

Поскольку $\nabla_0 \widehat{P}(y, 0) = \nabla_0 s$ и $(s, 1)_{L_2(\Omega)} = 0$, то из (3.30) и неравенства Пуанкаре имеем оценку:

$$\|s\|_{L_2(\Omega)} \leq C \|\widehat{f}(\cdot, 0)\|_{L_2(\Omega)}. \quad (3.31)$$

Тогда из (3.28), (3.29) следует неравенство:

$$\|\widehat{P}(\cdot, 0)\|_{L_2(\Omega)} \leq \|s\|_{L_2(\Omega)} + \left| \frac{(s, g)_{L_2(\Omega)}}{(1, g)_{L_2(\Omega)}} \right| |\Omega|^{1/2}. \quad (3.32)$$

Второе слагаемое в (3.32) оценивается так же, как γ в теореме 2.2. Следовательно, из (3.31) и (3.32) вытекает (3.27).

Теперь докажем, что при выполнении условий (3.21), (3.22) справедливо равенство (3.23). Как и при доказательстве теоремы 3.1, воспользуемся представлением:

$$\begin{aligned} \widehat{u}'(y, \alpha) &= w(y, \alpha) + v(y, \alpha), \\ \widehat{P}'(y, \alpha) &= q(y, \alpha) + r(y, \alpha), \end{aligned} \quad (3.33)$$

где (w, q) образуют решение краевой задачи (3.9)–(3.12), а пара (v, r) является решением краевой задачи (2.1)–(2.4) с $\widehat{f}'(y, \alpha)$ вместо $\widehat{f}(y, \alpha)$ в правой части.

Так как выполнено условие (3.21), то $\widehat{P}(y, \alpha)$ есть аналитическая функция в некоторой окрестности вещественной оси, и, следовательно, $i\alpha\widehat{P}'(y, \alpha) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$. В силу условия (3.22) функция $i\alpha r(y, \alpha) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$. Тогда из (3.33) следует, что $i\alpha q(y, \alpha) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$ в $L_{2, \text{loc}}(\Omega)$. Отсюда заключаем, что, во-первых, неравенство (3.26) выполняется при $\alpha = 0$. Во-вторых, (учитывая (3.10)), что компонента $w_3(y, 0)$ определяется как решение краевой задачи:

$$\begin{aligned} \sigma w_3(y, 0) + \nu \Delta_0 w_3(y, 0) &= i\widehat{P}(y, 0), \\ w_3(y, 0)|_{\partial\Omega} &= 0, \quad \int_{\Omega} w_3(y, 0) dy = 0. \end{aligned}$$

Из условия разрешимости этой задачи и следует равенство (3.23).

Таким образом, оценка (3.25) доказана. Попутно мы установили, что неравенство (3.26) справедливо при $\alpha = 0$. Теорема доказана.

Далее нам понадобится вспомогательная задача для определения векторного потенциала поля u :

$$\operatorname{div} B = 0, \quad \operatorname{rot} B = u, \quad (3.34)$$

$$(B, n)|_{\partial\Omega} = 0, \quad B|_{\infty} = 0. \quad (3.35)$$

Через $S_{2,p}(\mathfrak{D})$ обозначим банахово пространство, полученное замыканием по норме $L_{2,p}(\mathfrak{D})$ множества гладких, соленоидальных, финитных в $\mathfrak{D}$ векторных полей. Снова применив векторнозначный аналог теоремы Михлина о мультипликаторах интеграла Фурье, нетрудно доказать следующее утверждение.

ЛЕММА 3.2. Пусть $u \in S_{2,p}(\mathfrak{D})$. Тогда существует единственное решение задачи (3.34), (3.35) такое, что $B, D_x B \in L_{2,p}(\mathfrak{D})$, и выполняется оценка:

$$\|B\|_{L_{2,p}(\mathfrak{D})} + \|D_x B\|_{L_{2,p}(\mathfrak{D})} \leq C \|u\|_{L_{2,p}(\mathfrak{D})}. \quad (3.36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u принадлежит плотному в $S_{2,p}(\mathfrak{D})$ множеству бесконечно дифференцируемых, финитных, соленоидальных векторных полей. Рассмотрим задачу, полученную из (3.34), (3.35) применением преобразования Фурье по переменной z :

$$\widehat{\operatorname{div}} \widehat{B} = 0, \quad \widehat{\operatorname{rot}} \widehat{B} = \widehat{u}, \quad (3.37)$$

$$(\widehat{B}, n)|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.38)$$

Здесь $\widehat{\operatorname{div}} = \mathfrak{F} \operatorname{div} \mathfrak{F}^{-1}$, $\widehat{\operatorname{rot}} = \mathfrak{F} \operatorname{rot} \mathfrak{F}^{-1}$, оператор Фурье $\mathfrak{F}$ определен в (1.10).

Так же, как в работе [1], доказывается, что для любых α_0 , α : $|\alpha| \geq \alpha_0 > 0$, существует единственное решение задачи (3.37), (3.38) $\widehat{B} \in W_2^{(1)}(\Omega)$, и для него справедлива оценка:

$$|\alpha| \|\widehat{B}\|_{L_2(\Omega)} + \|\widehat{B}\|_{W_2^{(1)}(\Omega)} \leq C \|\widehat{u}\|_{L_2(\Omega)} \quad (3.39)$$

с константой C , зависящей лишь от Ω , α_0 .

Устремляя в (3.37), (3.38) параметр α к нулю, для первой и второй компонент вектора $\widehat{B}$ приходим к задаче нахождения векторного потенциала в двумерной области Ω :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{B}_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \widehat{B}_2}{\partial y_2} &= 0, & \frac{\partial \widehat{B}_2}{\partial y_1} - \frac{\partial \widehat{B}_1}{\partial y_2} &= \widehat{u}_3(y, 0), \\ (\widehat{B}, n)|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned}$$

оценка решения которой известна [1]:

$$\|\widehat{B}_k(\cdot, 0)\|_{W_2^{(1)}(\Omega)} \leq C \|\widehat{u}(\cdot, 0)\|_{L_2(\Omega)}, \quad k = 1, 2. \quad (3.40)$$

Третья компонента векторного потенциала удовлетворяет уравнениям:

$$\frac{\partial \widehat{B}_3}{\partial y_2}(y, 0) = \widehat{u}_1(y, 0), \quad -\frac{\partial \widehat{B}_3}{\partial y_1} = \widehat{u}_2(y, 0).$$

Заметим, что из первого уравнения (3.37) и краевого условия (3.38) следует выполнение при $\alpha \neq 0$ равенства:

$$\int_{\Omega} \widehat{B}_3(y, \alpha) dy = 0. \quad (3.41)$$

По непрерывности, (3.41) справедливо и при $\alpha = 0$. Следовательно, $\widehat{B}_3(y, 0)$ определяется однозначно, и неравенство (3.40) выполняется при $k = 3$. Итак, неравенство (3.39) выполняется для всех α из $\mathbb{R}$, с константой C , не зависящей от α , и требуемая в условии векторнозначной теоремы Михлина оценка мультипликаторов интеграла Фурье доказана.

Чтобы оценить производные мультипликаторов по α , рассмотрим краевую задачу в области Ω :

$$\widehat{\operatorname{div}} w = -i\widehat{B}_3, \quad \widehat{\operatorname{rot}} w = (iB_2, -iB_1, 0), \quad (3.42)$$

$$(w, n)|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.43)$$

При $\alpha \neq 0$ решение задачи (3.42), (3.43) будем искать в виде: $w = v - a$, где $a = (\widehat{B}_1/\alpha, \widehat{B}_2/\alpha, 0)$. Тогда v есть решение краевой задачи вида (3.37)–(3.38):

$$\widehat{\operatorname{div}} v = 0, \quad \widehat{\operatorname{rot}} v = \left(0, 0, \frac{\partial a_2}{\partial y_1} - \frac{\partial a_1}{\partial y_2}\right),$$

$$(v, n)|_{\partial\Omega} = 0,$$

и, применив (3.39), получим оценку:

$$|\alpha| \|D_y w\|_{L_2(\Omega)} + |\alpha|^2 \|w\|_{L_2(\Omega)} \leq C \|\widehat{u}\|_{L_2(\Omega)}, \quad (3.44)$$

для любых α : $|\alpha| \geq \alpha_0 > 0$; $C = C(\Omega, \alpha_0)$.

При $\alpha = 0$ краевая задача (3.42), (3.43) распадается на две:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_2}{\partial y_2} &= -i\widehat{B}_3(y, 0), & \frac{\partial w_2}{\partial y_1} - \frac{\partial w_1}{\partial y_2} &= 0, \\ (w, n)|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned} \quad (3.45)$$

и

$$\frac{\partial w_3}{\partial y_2} = i\widehat{B}_2(y, 0), \quad \frac{\partial w_3}{\partial y_1} = i\widehat{B}_1(y, 0). \quad (3.46)$$

В силу (3.41) условие разрешимости задачи (3.45) выполнено. Полагая $(w_1, w_2) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial y_2}\right)$, получим, что φ является решением краевой задачи Неймана:

$$\Delta_0 \varphi = -i\widehat{B}_3(y, 0), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \int_{\Omega} \varphi dy = 0,$$

оценка которого известна:

$$\|\varphi\|_{W_2^{(2)}(\Omega)} \leq C \|\widehat{B}_3(\cdot, 0)\|_{L_2(\Omega)} \leq C \|\widehat{u}(\cdot, 0)\|_{L_2(\Omega)}. \quad (3.47)$$

Далее, из первого уравнения (3.42) и краевого условия (3.43) следует равенство $\int_{\Omega} w_3(y, \alpha) dy = 0$, которое выполняется при всех α . Поэтому $w_3(y, 0)$ определяется однозначно из (3.46), и справедливо неравенство:

$$\|w_3(\cdot, 0)\|_{W_2^{(1)}(\Omega)} \leq C \|\widehat{B}(\cdot, 0)\|_{L_2(\Omega)} \leq C \|\widehat{u}(\cdot, 0)\|_{L_2(\Omega)}. \quad (3.48)$$

Из (3.47) и (3.48) вытекает, что неравенство (3.44) выполняется для всех α из $\mathbb{R}$, с константой C , не зависящей от α , следовательно, выполняется требуемая в условии векторнозначной теоремы Михлина оценка производной мультипликатора интеграла Фурье. Лемма доказана.

Воспользовавшись известными оценками решений эллиптических уравнений в цилиндре [10], приходим к следующему результату.

ЛЕММА 3.3. Пусть $u \in S_p(\mathfrak{D})$, $1 < p < \infty$. Тогда существует единственное решение задачи (3.34), (3.35), удовлетворяющее оценке:

$$\|B\|_{L_p(\mathfrak{D})} + \|D_x B\|_{L_p(\mathfrak{D})} \leq C \|u\|_{L_p(\mathfrak{D})}, \quad (3.49)$$

где $C = C(\Omega, p)$.

§ 4. Оценка резольвенты в $L_p(\mathfrak{D})$

Этот параграф посвящен доказательству основного результата работы – теоремы 4.1 об оценке резольвенты оператора Стокса для цилиндрической области.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $f \in L_p(\mathfrak{D})$, $1 < p < \infty$, $\sigma \in \Sigma(\sigma_0, \theta)$, $\partial\Omega \in C^2$. Тогда существует единственное решение (u, P) краевой задачи (1.2)–(1.4) такое, что $u \in W_p^{(2)}(\mathfrak{D})$, $\nabla P \in L_p(\mathfrak{D})$, и для него при любом $\varepsilon > 0$ справедлива оценка:

$$|\sigma - \sigma_0| \|u\|_{L_p(\mathfrak{D})} + \|D_x^2 u\|_{L_p(\mathfrak{D})} + \|\nabla P\|_{L_p(\mathfrak{D})} \leq C \|f\|_{L_p(\mathfrak{D})}, \quad (4.1)$$

равномерная по $\sigma \in \overline{\Sigma}(\sigma_0 - \varepsilon, \theta)$; $C = C(\Omega, p, \theta, \varepsilon)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать оценку (4.1) для плотного в $L_p(\mathfrak{D})$ множества векторных полей $f \in C_0^\infty(\mathfrak{D})$. В этом случае согласно теореме 3.1 существует единственное решение задачи (1.2)–(1.4) такое, что $u, D_x^2 u, \nabla P \in L_{2,p}(\mathfrak{D})$. Теперь нужно установить, что оно удовлетворяет неравенству (4.1). Доказательство разобьем на несколько пунктов.

1) *Априорные оценки старших производных через младшие производные и f .*

Как и в случае ограниченной области [1], применив метод распрямления границы, придем к неравенству:

$$\begin{aligned} & |\sigma - \sigma_0| \|u\|_{L_p(\mathfrak{D})} + \|D_x^2 u\|_{L_p(\mathfrak{D})} + \|\nabla P\|_{L_p(\mathfrak{D})} \\ & \leq C \{ \|f\|_{L_p(\mathfrak{D})} + \|P\|_{L_p(\mathfrak{D})} + \|u\|_{L_p(\mathfrak{D})} + \|D_x u\|_{L_p(\mathfrak{D})} + |\sigma - \sigma_0| \|B\|_{L_p(\mathfrak{D})} \}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где B – решение задачи (3.34), (3.35). Теперь наша цель состоит в том, чтобы изгнать из правой части (4.2) лишние слагаемые.

Сначала приведем вспомогательные утверждения, которые понадобятся нам в следующем пункте. Первое – неравенство Юнга: для любых a, b, ε больше нуля

$$ab \leq \frac{1}{r} \varepsilon^r a^r + \frac{1}{s} \varepsilon^{-s} b^s, \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1, \quad r, s > 1. \quad (4.3)$$

Мультипликативные неравенства, справедливые для любой функции из $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$: неравенство Гальярдо–Ниренберга

$$\|D_x u\|_{L_p} \leq C \|u\|_{L_p}^{1/2} \|D_x^2 u\|_{L_p}^{1/2}, \quad 1 < p < \infty, \quad (4.4)$$

и его аналоги [11, теорема 15.8]:

$$\begin{aligned} \|v\|_{L_p} &\leq C \|v\|_{L_{2,p}}^{1-\alpha} \|D_{y_1} v\|_{L_p}^{\alpha/2} \|D_{y_2} v\|_{L_p}^{\alpha/2}, \\ \alpha &= \frac{1/2 - 1/p}{1 - 1/p}, \quad p > 2, \end{aligned} \quad (4.5)$$

и

$$\begin{aligned} \|D_{y_1} v\|_{L_p} &\leq C \|D_{y_1}^2 v\|_{L_p}^{\theta_1} \|D_{y_2}^2 v\|_{L_p}^{\theta_2} \|v\|_{L_{2,p}}^{\theta_3}, \\ \theta_1 &= \frac{7 - 6/p}{4(3 - 2/p)}, \quad \theta_2 = \frac{1 - 2/p}{4(3 - 2/p)}, \quad \theta_3 = \frac{1}{3 - 2/p}, \quad p > 2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Аналогично оценивается $\|D_{y_2} v\|_{L_p}$. Так как граница области Ω класса C^2 , то применимы теоремы о продолжении, и неравенства (4.4)–(4.6) справедливы, если L_p и $L_{2,p}$ – нормы во всем пространстве заменить на нормы в $L_p(\mathfrak{D})$ и $L_{2,p}(\mathfrak{D})$, соответственно.

Применив неравенство Юнга (4.3) к неравенству (4.4) один раз, а к неравенствам (4.5) и (4.6) дважды, приходим к оценкам с произвольным $\varepsilon > 0$

$$\|D_x u\|_{L_p(\mathfrak{D})} \leq \frac{C}{2} \{ \varepsilon^2 \|D_x^2 u\|_{L_p(\mathfrak{D})} + \varepsilon^{-2} \|u\|_{L_p(\mathfrak{D})} \}, \quad 1 < p < \infty, \quad (4.7)$$

$$\|v\|_{L_p(\mathfrak{D})} \leq \frac{C}{2} \left\{ \alpha \varepsilon^{1/\alpha} \sum_{k=1}^2 \|D_{y_k} v\|_{L_p(\mathfrak{D})} + 2(1 - \alpha) \varepsilon^{-1/(1-\alpha)} \|v\|_{L_{2,p}(\mathfrak{D})} \right\}, \quad (4.8)$$

$p > 2$, α определена в (4.5) и

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 \|D_{y_k} v\|_{L_p(\mathfrak{D})} &\leq C \left\{ (1 - \theta_3) \varepsilon^{1/(1-\theta_3)} \sum_{k=1}^2 \|D_{y_k}^2 v\|_{L_p(\mathfrak{D})} \right. \\ &\quad \left. + 2\theta_3 \varepsilon^{-1/\theta_3} \|v\|_{L_{2,p}(\mathfrak{D})} \right\}, \quad p > 2, \end{aligned} \quad (4.9)$$

θ_3 определена в (4.6).

В правой части априорной оценки (4.2) можно избавиться от норм первых производных функции u , если оценить их как в (4.7) и выбрать ε достаточно малым. Тогда (4.2) принимает вид:

$$\begin{aligned} |\sigma - \sigma_0| \|u\|_{L_p(\mathfrak{D})} &+ \|D_x^2 u\|_{L_p(\mathfrak{D})} + \|\nabla P\|_{L_p(\mathfrak{D})} \\ &\leq C \{ \|f\|_{L_p(\mathfrak{D})} + \|P\|_{L_p(\mathfrak{D})} + \|u\|_{L_p(\mathfrak{D})} + |\sigma - \sigma_0| \|B\|_{L_p(\mathfrak{D})} \}, \quad 1 < p < \infty. \end{aligned} \quad (4.10)$$

2) *Случай правой части специального вида.*

Предположим, что f удовлетворяет условиям леммы 3.1, так что $P \in L_{2,p}(\mathfrak{D})$ и выполняется оценка (3.24).

Пусть сначала $p > 2$. Применив неравенство (4.8) к векторному потенциалу B и воспользовавшись леммой 3.3 для оценки его первых производных, приходим к неравенству:

$$\|B\|_{L_p(\mathfrak{D})} \leq C \{ \varepsilon^{1/\alpha} \|u\|_{L_p(\mathfrak{D})} + \varepsilon^{-1/(1-\alpha)} \|B\|_{L_{2,p}(\mathfrak{D})} \}, \quad (4.11)$$

где $p > 2$, $\alpha \in (0, 1)$, C не зависит от ε .

Положив $v = P$ в (4.8), получим оценку давления:

$$\|P\|_{L_p(\mathfrak{D})} \leq C \{ \varepsilon^{1/\alpha} \|\nabla P\|_{L_p(\mathfrak{D})} + \varepsilon^{-1/(1-\alpha)} \|P\|_{L_{2,p}(\mathfrak{D})} \}, \quad (4.12)$$

где $p > 2$, $\alpha \in (0, 1)$, C не зависит от ε .

Наконец, положив $v = u$ сначала в (4.8), а затем в (4.9), приходим к оценке:

$$\|u\|_{L_p(\mathfrak{D})} \leq C \{ \varepsilon^{1/\alpha} \|D_x^2 u\|_{L_p(\mathfrak{D})} + \varepsilon^{-1/(1-\alpha)} \|u\|_{L_{2,p}(\mathfrak{D})} \}, \quad (4.13)$$

где $p > 2$, $\alpha \in (0, 1)$, C не зависит от ε .

Оценив правую часть (4.10) с помощью неравенств (4.11)–(4.13) и выбрав ε достаточно малым, выводим следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & |\sigma - \sigma_0| \|u\|_{L_p(\mathfrak{D})} + \|D_x^2 u\|_{L_p(\mathfrak{D})} + \|\nabla P\|_{L_p(\mathfrak{D})} \\ & \leq C \{ \|f\|_{L_p(\mathfrak{D})} + \|P\|_{L_{2,p}(\mathfrak{D})} + \|u\|_{L_{2,p}(\mathfrak{D})} + |\sigma - \sigma_0| \|B\|_{L_{2,p}(\mathfrak{D})} \}, \quad p > 2. \end{aligned}$$

Теперь для оценки давления в $L_{2,p}$ осталось применить лемму 3.1 для оценки векторного потенциала B – лемму 3.2, а скорость u в $L_{2,p}$ оценить через $\|f\|_{L_{2,p}(\mathfrak{D})}$ по теореме 3.1. Учитывая, что L_p вложено в $L_{2,p}$ при $p > 2$, завершаем доказательство априорной оценки (4.1) в случае $p > 2$.

Осталось оценить последние три слагаемые в правой части (4.10) через $\|f\|_{L_p(\mathfrak{D})}$, когда $1 < p < 2$. Прежде всего на основании леммы 3.3

$$\|B\|_{L_p(\mathfrak{D})} \leq C \|u\|_{L_p(\mathfrak{D})}. \quad (4.14)$$

Далее, неравенство

$$|\sigma - \sigma_0| \|u\|_{L_p(\mathfrak{D})} \leq C \|f\|_{L_p(\mathfrak{D})}, \quad 1 < p < 2, \quad (4.15)$$

выводится из (4.1) переходом к сопряженному оператору. Согласно теореме 2.3, следствию 2.1 и лемме 3.1 выполнены условия леммы 3.6.1 из работы [10]. По этой лемме справедливо неравенство:

$$\|P\|_{L_p(\mathfrak{D})} \leq C \|f\|_{L_p(\mathfrak{D})}, \quad 1 < p < 2. \quad (4.16)$$

Итак, из (4.14)–(4.16) следует априорная оценка (4.1) в случае, когда f удовлетворяет условиям леммы 3.1.

3) *Случай произвольной правой части.*

Определим функцию $\Phi_d(z)$, полагая для любого $d \geq 1$

$$\Phi_d(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & z \geq d, \\ -\frac{1}{2} \operatorname{th} \left(\frac{1}{z+d} + \frac{1}{z-d} \right), & -d < z < d, \\ -\frac{1}{2}, & z \leq -d. \end{cases} \quad (4.17)$$

Для дальнейшего существенны лишь следующие ее свойства:

$$\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad \text{supp } \Phi' = [-d, d], \quad (4.18)$$

$$\forall z \in \mathbb{R} \quad \Phi(-z) = -\Phi(z), \quad (4.19)$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}, \quad z \geq d, \quad (4.20)$$

$$|\Phi'(z)| \leq \frac{1}{(2d)^2}, \quad |\Phi''(z)| \leq \frac{1}{(2d)^3}. \quad (4.21)$$

Пусть векторное поле $f \in C_0^\infty(\mathfrak{D})$, f_3 – его осевая компонента. Положим

$$F_3(x) = f_3(x) + \varkappa(z), \quad (4.22)$$

а функцию $\varkappa$ подберем таким образом, чтобы F_3 удовлетворяла условиям леммы 3.1:

$$(\widehat{F}_3(\cdot, 0), g)_{L_2(\Omega)} = 0, \quad (4.23)$$

$$(\widehat{F}_3'(\cdot, 0), g)_{L_2(\Omega)} = 0, \quad (4.24)$$

где g есть решение краевой задачи (2.18). Для этого достаточно положить

$$\varkappa(z) = \gamma \Phi'(z) + \delta \Phi''(z), \quad (4.25)$$

где Φ – любая функция, удовлетворяющая свойствам (4.18)–(4.21) (например, Φ_d (4.17)), γ – та же, что в (2.17):

$$\gamma = -\frac{(\widehat{f}_3(\cdot, 0), g)_{L_2(\Omega)}}{(1, g)_{L_2(\Omega)}}, \quad (4.26)$$

$$\delta = i \frac{(\widehat{f}_3'(\cdot, 0), g)_{L_2(\Omega)}}{(1, g)_{L_2(\Omega)}}. \quad (4.27)$$

Тогда выполнение условий (4.23) и (4.24) нетрудно проверить, применив к (4.22), (4.25) преобразование Фурье по переменной z .

ЛЕММА 4.1. Пусть $f \in C_0^\infty(\mathfrak{D})$, $\text{supp } f \subset \Omega \times [-M, M]$, $d \geq M > 1$. Тогда для функции $\varkappa$ (4.25) с γ и δ , определенными в (4.26), (4.27), при любом $\varepsilon > 0$ выполняется равномерная по $\sigma \in \overline{\Sigma}(\sigma_0 - \varepsilon, \theta)$ оценка:

$$\|\varkappa\|_{L_p(\mathfrak{D})} \leq C \|f\|_{L_p(\mathfrak{D})}, \quad (4.28)$$

где $C = C(\Omega, p, \theta, \varepsilon)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применив неравенство Гёльдера к (4.26) и учитывая финитность функции f , выводим неравенство:

$$|\gamma| \leq \frac{\|f_3\|_{L_p(\mathfrak{D})}(2M)^{1/q}\|g\|_{L_q(\Omega)}}{|(1, g)_{L_2(\Omega)}|}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (4.29)$$

При доказательстве теоремы 2.2 получена оценка:

$$|(1, g)_{L_2(\Omega)}| \geq \frac{C}{|\sigma - \sigma_0|}, \quad (4.30)$$

$\sigma \in \overline{\Sigma}(\sigma_0 - \varepsilon, \theta)$; $C = C(\Omega, p, \theta, \varepsilon)$. Кроме того, для решения задачи (2.18) справедливо неравенство:

$$\|g\|_{L_p(\Omega)} \leq \frac{C}{|\sigma - \sigma_0|}, \quad (4.31)$$

равномерно по $\sigma \in \overline{\Sigma}(\sigma_0 - \varepsilon, \theta)$. Воспользовавшись (4.30) и (4.31), из (4.29) выводим оценку:

$$|\gamma| \leq (2M)^{1/q} C \|f_3\|_{L_p(\mathfrak{D})}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad (4.32)$$

где $C = C(\Omega, p, \theta, \varepsilon)$. Аналогично доказывается неравенство:

$$|\delta| \leq (2M)^{1/q+1} C \|f_3\|_{L_p(\mathfrak{D})}. \quad (4.33)$$

Теперь оценим производные функции Φ . В силу свойства (4.21) имеем:

$$\|\Phi'(z)\|_{L_p(\mathfrak{D})} = |\Omega|^{1/p} \left\{ \int_{-d}^d |\Phi'(z)|^p dz \right\}^{1/p} \leq |\Omega|^{1/p} \frac{1}{(2d)^{1/q+1}}. \quad (4.34)$$

Аналогично,

$$\|\Phi''(z)\|_{L_p(\mathfrak{D})} = |\Omega|^{1/p} \left\{ \int_{-d}^d |\Phi''(z)|^p dz \right\}^{1/p} \leq |\Omega|^{1/p} \frac{1}{(2d)^{1/q+2}}. \quad (4.35)$$

Так как $d \geq M$, то из (4.32)–(4.35) следует утверждение леммы.

Для завершения доказательства теоремы 4.1 перепишем исходную краевую задачу (1.2)–(1.4) в виде:

$$\sigma u + \nu \Delta u = \nabla \overline{P} + F, \quad (4.36)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad (4.37)$$

$$u|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}} = 0, \quad u|_{\infty} = 0, \quad (4.38)$$

где

$$\overline{P} = P - \gamma \Phi(z) - \delta \Phi'(z), \quad (4.39)$$

$F_j(x) = f_j(x)$, $j = 1, 2$, а $F_3(x)$ определена равенствами (4.22), (4.25).

Поскольку F удовлетворяет условиям леммы 3.1 (4.23), (4.24), то по доказанному в пункте 2) для решения задачи (4.36)–(4.38) выполняется оценка:

$$|\sigma - \sigma_0| \|u\|_{L_p(\mathfrak{D})} + \|D_x^2 u\|_{L_p(\mathfrak{D})} + \|\nabla \overline{P}\|_{L_p(\mathfrak{D})} \leq C \|F\|_{L_p(\mathfrak{D})}, \quad (4.40)$$

где $\sigma \in \overline{\Sigma}(\sigma_0 - \varepsilon, \theta)$; $C = C(\Omega, p, \theta, \varepsilon)$. По лемме 4.1

$$\|F\|_{L_p(\mathfrak{D})} \leq C \|f\|_{L_p(\mathfrak{D})}. \quad (4.41)$$

Далее, из (4.39)–(4.41) и (4.28) вытекает неравенство:

$$\|\nabla P\|_{L_p(\mathfrak{D})} \leq (\|\nabla \overline{P}\|_{L_p(\mathfrak{D})} + \|\varkappa\|_{L_p(\mathfrak{D})}) \leq C \|f\|_{L_p(\mathfrak{D})}. \quad (4.42)$$

Априорная оценка (4.1), а вместе с ней и существование решения задачи (1.2)–(1.4) для любой $f \in L_p(\mathfrak{D})$ доказаны. Единственность следует из леммы 2.1. Теорема доказана.

Заметим, что в условиях леммы 4.1 из (4.33) и (4.34) следует оценка:

$$\|\delta \Phi'(z)\|_{L_p(\mathfrak{D})} \leq C \|f_3\|_{L_p(\mathfrak{D})}. \quad (4.43)$$

Из (4.39) и (4.43) получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть $f \in C_0^\infty(\mathfrak{D})$, $\text{supp } f \subset \Omega \times [-M, M]$, $d \geq M > 1$. Тогда найдется константа C такая, что для решения задачи (1.2)–(1.4) справедливо представление:

$$P = P_0 + \gamma \Phi_d(z) + C,$$

где $P_0 \in L_p(\mathfrak{D})$, перепад давления γ определен в (2.17), (2.18), $\Phi_d(z)$ – в (4.17), и выполняется оценка:

$$\|P_0\|_{L_p(\mathfrak{D})} \leq C \|f\|_{L_p(\mathfrak{D})}.$$

Авторы выражают благодарность Л. И. Сазонову за внимание к работе и ценные замечания.

Список литературы

1. Юдович В. И. Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1984.
2. Шарц Дж. Замечание о неравенствах типа Кальдерона–Зигмунда для функций со значениями в векторном пространстве // Математика. 1963. Т. 7. № 4. С. 57–79.
3. Iooss G., Mielke A., Demay Y. Theory of steady Ginzburg–Landau equation, in hydrodynamic stability problem // European J. Mech. B Fluids. 1989. V. 8. № 3. P. 229–268.
4. Vanderbauwhede A., Iooss G. Center manifold theory in infinite dimensions // Dynam. Report. (N.S.). 1992. V. 1. P. 125–163.
5. Burak T. On semigroups generated by restrictions of elliptic operators to invariant subspaces // Israel J. Math. 1972. V. 12. № 3. P. 79–93.
6. Лакс П. Д. Теорема Фрагмена–Линделефа в гармоническом анализе и ее применение к некоторым вопросам теории эллиптических уравнений // Математика. 1959. № 3–4. С. 107–132.
7. Ладыженская О. А., Солонников В. А. О нахождении решений краевых задач для стационарных уравнений Стокса и Навье–Стокса, имеющих неограниченный интеграл Дирихле // Записки научн. сем. ЛОМИ. 1980. Т. 96. С. 117–160.
8. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.–Л.: Гостехиздат, 1948.
9. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
10. Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. М.: Наука, 1991.
11. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные преобразования функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
12. Никонова (Ревина) С. В., Юдович В. И. L_p -оценки резольвенты оператора Стокса в бесконечном цилиндре // Деп. в ВИНТИ 1993, № 3050-B93.

Ростовский государственный университет

Поступила в редакцию
10.02.1995