Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Богатый, В. М. Вылов, Вложения Робертса и обращение трансверсальной теоремы Тверберга, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 11, 33–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1390>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 15:57:26

УДК 515.127.15

С. А. Богатый, В. М. Вылов

Вложения Робертса и обращение трансверсальной теоремы Тверберга

Главными результатами статьи являются два утверждения о существовании “экономичных вложений” в евклидово пространство. В первом результате (следствие 1.4) доказывается, что существует вложение, при котором образ пересекается с плоскостями большой размерности по множествам “контролируемой” размерности. Во втором результате (следствие 1.6) доказывается существование отображений, при которых на каждую плоскость небольшой размерности попадает “контролируемое” число точек.

В качестве следствий наших результатов выводятся известные теоремы Нёбелинга–Понтрягина, Робертса, Гуревича, Болтянского и Гудселла. Получен также бесконечномерный вариант о вложении в гильбертово пространство (теорема 1.8).

Библиография: 31 название.

§ 1. Введение

Все рассматриваемые в настоящей работе отображения предполагаются непрерывными, а все пространства предполагаются, по крайней мере, вполне регулярными. Всюду ниже $\Pi^d \subset \mathbb{R}^m$ обозначает d -мерную, не обязательно координатную плоскость (просто d -плоскость) в $\mathbb{R}^m$. Если специально не оговорено противное, то функциональное пространство в работе всегда наделяется основной предельной топологией [1].

Нашей целью является доказательство нижеследующей теоремы 1.1 и получение некоторых следствий этой теоремы.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $A_{i,j}$, $i = 1, 2, \dots, q$, $j = 1, 2, \dots, n_i + 1$, — такие точки в $\mathbb{R}^m$, что множество их координат алгебраически независимо. Пусть $0 \leq t \leq d \leq T \leq m$ и Π^d — d -мерная плоскость в $\mathbb{R}^m$, параллельная некоторым координатным плоскостям $\Pi^t \subset \Pi^T \subset \mathbb{R}^m$. Если $d - t + 1 \leq q$ и $n_1 + n_2 + \dots + n_q + 1 \leq (m - d)(q - 1) - (T - d)(d - t)$ или $q \leq d - t + 1$ и $n_1 + n_2 + \dots + n_q + 1 \leq (m - T)(q - 1)$, то существует такой индекс $i \in \{1, 2, \dots, q\}$, что плоскость Π^d не пересекает линейную оболочку $\Pi(M_i)$ множества $M_i = \{A_{i,1}, \dots, A_{i,n_i+1}\}$.

Первая часть теоремы 1.1, когда $t = 0$, $T = m$ и $d - t + 1 \leq q$, была высказана в качестве гипотезы в работах [2; гипотеза 2] и [3; гипотеза 4.2].

Напомним, что действительное число v называется алгебраически зависимым от действительных чисел $u_1, \dots, u_k$, если v удовлетворяет уравнению $p_0(u) + p_1(u)v + \dots + p_n(u)v^n = 0$, где $p_0(u), \dots, p_n(u)$ — полиномы от $u_1, \dots, u_k$ с рациональными коэффициентами, не все из которых являются нулевыми. Конечное

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-01-00706) и NSERC (грант № 261914-03).

множество действительных чисел называется *алгебраически независимым*, если ни одно из них не является алгебраически зависимым от остальных.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Пусть K – конечный симплицальный комплекс, $\theta: K \rightarrow \mathbb{R}^m$ – кусочно линейное отображение и $\varepsilon > 0$. Тогда существует такое кусочно линейное отображение $g: K \rightarrow \mathbb{R}^m$, что $d(g(v), \theta(v)) < \varepsilon$ для всякой вершины v комплекса K и для всяких целых чисел n, d, t, T с $0 \leq t \leq d \leq T \leq m$ и $d \leq m - n - 1$ и всякой d -мерной плоскости $\Pi^d \subset \mathbb{R}^m$, параллельной некоторым координатным плоскостям $\Pi^t \subset \Pi^T \subset \mathbb{R}^m$, число q попарно дизъюнктивных симплексов K размерности $\leq n$, образы которых при g пересекают Π^d , удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned} q &\leq d + 1 - t + \frac{n + (n + T - m)(d - t)}{m - n - d} && \text{при } n \geq (m - n - T)(d - t), \\ q &\leq 1 + \frac{n}{m - n - T} && \text{при } n \leq (m - n - T)(d - t). \end{aligned}$$

Идея использования алгебраически независимых множеств для доказательства теорем общего положения, подобных следствию 1.2, восходит к Робертсу [4]. Эта идея применялась также Берковицем и Роем в работе [5], где они дали вариант следствия 1.2 при $t = 0$ и $T = m$. Доказательство теоремы Берковица–Роя предложил Гудселл [6; теорема А.1] (в [7] даны другие приложения теоремы Берковица–Роя).

Приведем теперь некоторые приложения следствия 1.2.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – такое совершенное отображение паракомпактных пространств, что $\dim f \leq n$ и $\dim Y = 0$. Тогда для всякого $m \geq n + 1$ пространство $C^*(X, \mathbb{R}^m)$ всех ограниченных непрерывных отображений X в $\mathbb{R}^m$ содержит плотное G_δ -подмножество $\mathcal{H}$ таких отображений g , что $\dim g(f^{-1}(y)) \cap \Pi^d \leq n + d - m$ для всякой точки $y \in Y$ и всякой d -мерной плоскости $\Pi^d \subset \mathbb{R}^m$ с $m - n \leq d \leq m$.

СЛЕДСТВИЕ 1.4. Пусть X – нормальное пространство с $\dim X \leq n$ и $m \geq n + 1$. Тогда пространство $C^*(X, \mathbb{R}^m)$ в топологии равномерной сходимости содержит плотное G_δ -подмножество $\mathcal{H}$, состоящее из таких отображений g , что пересечение $\overline{g(X)} \cap \Pi^d$ является не более чем $(n + d - m)$ -мерным для всякой d -мерной плоскости $\Pi^d \subset \mathbb{R}^m$ с $m - n \leq d \leq m$.

Покажем, как следствие 1.4 вытекает из теоремы 1.3. Рассматривая стоун-чеховскую компактификацию βX пространства X и функциональное пространство $C(\beta X, \mathbb{R}^m)$ вместо X и $C^*(X, \mathbb{R}^m)$ соответственно, мы можем предполагать, что X компактно. К постоянному отображению f на X применим теорему 1.3.

Робертс доказал [4; теорема 1.2], что если X – компактное метризуемое пространство размерности $\leq n$ и $n + 1 \leq d \leq 2n + 1$, то $C(X, \mathbb{R}^{2n+1})$ в топологии равномерной сходимости содержит плотное G_δ -подмножество, состоящее из таких отображений g , что $\dim g(X) \cap \Pi^d \leq d - n - 1$ для всякой d -мерной плоскости $\Pi^d \subset \mathbb{R}^{2n+1}$. С помощью этого результата и теоремы Гуревича о сохраняющей размерность метризуемой компактификации Робертс вывел существование таких вложений для сепарабельных метризуемых пространств размерности $\leq n$. Очевидно, что результаты Робертса вытекают из следствия 1.4 и теоремы вложения Нёбелинга–Понтрягина.

При $d \leq m - n - 1$ теорема 1.3 не работает. Но следующая теорема показывает, что в этом случае мы можем доказать несколько больше: мы найдем в $C^*(X, \mathbb{R}^m)$ массивное множество, состоящее из таких отображений g , что пересечение $g(f^{-1}(y)) \cap \Pi^d$ конечно для всякой точки $y \in Y$ и всякой d -мерной плоскости в $\mathbb{R}^m$.

ТЕОРЕМА 1.5. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — совершенное отображение метризуемых пространств с $\dim f \leq n$ и $\dim Y \leq 0$. Тогда пространство $C^*(X, \mathbb{R}^m)$ содержит плотное G_δ -подмножество $\mathcal{K}$ таких отображений g , что для всяких целых чисел d, t, T с $0 \leq t \leq d \leq T \leq m$ и $d \leq m - n - 1$ и всякой d -мерной плоскости $\Pi^d \subset \mathbb{R}^m$, параллельной некоторым координатным плоскостям $\Pi^t \subset \Pi^T \subset \mathbb{R}^m$, всякое множество $f^{-1}(y) \cap g^{-1}(\Pi^d)$, $y \in Y$, состоит из не более чем q точек, где

$$q = d + 1 - t + \frac{n + (n + T - m)(d - t)}{m - n - d} \quad \text{при } n \geq (m - n - T)(d - t),$$

$$q = 1 + \frac{n}{m - n - T} \quad \text{в противном случае.}$$

СЛЕДСТВИЕ 1.6. Пусть X является метризуемым компактом с $\dim X \leq n$ и $m \geq n + 1$. Тогда пространство $C(X, \mathbb{R}^m)$ содержит плотное G_δ -подмножество, состоящее из таких отображений g , что для всяких целых чисел d, t, T с $0 \leq t \leq d \leq T \leq m$ и $d \leq m - n - 1$ и всякой d -мерной плоскости $\Pi^d \subset \mathbb{R}^m$, параллельной некоторым координатным плоскостям $\Pi^t \subset \Pi^T$ в $\mathbb{R}^m$, обратный прообраз $g^{-1}(\Pi^d)$ состоит не более чем из q точек, где

$$q = d + 1 - t + \frac{n + (n + T - m)(d - t)}{m - n - d} \quad \text{при } n \geq (m - n - T)(d - t),$$

$$q = 1 + \frac{n}{m - n - T} \quad \text{в противном случае.}$$

Если в теореме 1.5 рассмотреть отображение в одноточечное пространство Y при $m = n + 2$, $d = 1$, $t = 0$, $T = r$, то получается

СЛЕДСТВИЕ 1.7. Пусть X является метризуемым компактом с $\dim X \leq n$. Тогда пространство $C(X, \mathbb{R}^{n+2})$ содержит плотное G_δ -подмножество, состоящее из таких отображений g , что для всякого натурального числа r с $r \leq n + 2$ и всякой прямой $\Pi^1 \subset \mathbb{R}^m$, параллельной некоторой координатной r -мерной плоскости Π^r в $\mathbb{R}^m$, обратный прообраз $g^{-1}(\Pi^1)$ состоит не более чем из $n + r$ точек.

Получаемые в настоящей работе отображения никогда не являются кусочно линейными, так как на всякой прямой лежит конечное число точек образа. Однако при $m \geq 2n + 1$ получаются вложения, причем ручные [8; теорема 5.1].

Нижеследующая теорема 1.8 является бесконечномерной версией теоремы 1.5. В случае компактного пространства X и одноточечного пространства Y теорема 1.8 была установлена Болтянским [9] при дополнительном ограничении $r = 0$.

ТЕОРЕМА 1.8. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – совершенное отображение метризуемых пространств и Y является C -пространством. Для целых чисел d, r пусть $\mathcal{P}(d, r)$ обозначает семейство всех d -мерных плоскостей $\Pi^d \subset l_2$, параллельных некоторым координатным плоскостям $\Pi^r \subset l_2$. Тогда пространство $C^*(X, l_2)$ содержит плотное G_δ -подмножество таких отображений g , что для всякой точки $y \in Y$ и всякой плоскости $\Pi^d \in \mathcal{P}(d, r)$ множество $f^{-1}(y) \cap g^{-1}(\Pi^d)$ имеет не более $d + 1 - r$ точек при $r \leq d$ и не более одной точки при $r \geq d$.

Настоящая статья построена следующим образом. Доказательства теоремы 1.1 и следствия 1.2 даются в §2. Параграф 3 посвящен доказательству теоремы 1.3. Теоремы 1.5 и 1.8 рассматриваются в §4. Последний §5 содержит дополнительные приложения теоремы 1.1 и следствия 1.2. В последний параграф включены также некоторые гипотезы.

Несколько слов по поводу основной предельной топологии [1]. Для любых пространств M и K через $C(K, M)$ мы обозначаем множество всех непрерывных отображений K в M . Если (M, d) – метрическое пространство и K – произвольное пространство, то основная предельная топология на $C(K, M)$ определяется следующим образом: подмножество $U \subset C(K, M)$ открыто в $C(K, M)$ по отношению к основной предельной топологии, если для всякого отображения $g \in U$ существует такая непрерывная функция $\alpha: K \rightarrow (0, \infty)$, что $\overline{B}(g, \alpha) \subset U$. Здесь $\overline{B}(g, \alpha)$ обозначает множество $\{h \in C(K, M) : d(g(x), h(x)) \leq \alpha(x) \text{ для всякой точки } x \in K\}$. Известно (см., например, [10]), что если (M, d) является полным метрическим пространством, то $C(K, M)$ в данной топологии обладает свойством Бэра. Это влечет, что пространство $C^*(K, H)$ в основной предельной топологии также обладает свойством Бэра для всякого банахова пространства H .

Результаты настоящей работы были получены во время визита первого автора в мае 2004 года в Нипписинг университет. Автор благодарит NSERC за поддержку его визита и СОМА Department Нипписинг университета за гостеприимство.

В заключение авторы благодарят Т. Гудселла, предоставившего им свое доказательство [6; приложение] теоремы Берковица–Роя.

§2. Доказательство теоремы 1.1 и следствия 1.2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Предположим, что плоскость Π^d пересекает линейную оболочку $\Pi(M_i)$ всякого множества M_i , и пусть $Y_i \in \Pi^d \cap \Pi(M_i)$, $i = 1, \dots, q$. Достаточно показать, что в указанных предположениях или $n_1 + n_2 + \dots + n_q + 1 > (m - d)(q - 1) - (T - d)(d - t)$ при $q \geq d - t + 1$, или $n_1 + n_2 + \dots + n_q + 1 > (m - T)(q - 1)$ при $1 \leq q \leq d - t + 1$. Для дальнейшего нам необходимо нижеприводимое неравенство (см. [5] и [6]), которое вытекает из свойств алгебраически независимых множеств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть дано алгебраически независимое множество $A \subset \mathbb{R}$, и пусть множество $B \subset \mathbb{R}$ таково, что всякий элемент A алгебраически зависит от множества B . Тогда мощность A не превосходит мощности B .

Нам необходимы также следующие построения Робертса [4]. Пусть $\{r_i\}$ – бесконечное алгебраически независимое множество, т.е. всякое конечное подмножество алгебраически независимо. Пусть $R_i = \{q + r_i : q \in \mathbb{Q}\}$, где $\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел. Тогда всякое множество R_i плотно в $\mathbb{R}$ и различные множества R_i

дизъюнкты. Более того, всякое конечное множество M , содержащее не более одного числа из всякого $R_i, i = 1, 2, \dots$, алгебраически независимо.

Мы можем предполагать, что Π^t и Π^T заданы первыми t и T координатами соответственно. Пусть π – проекция $\mathbb{R}^m$ на пространство $\mathbb{R}^{m-t}$, заданное последними $m - t$ координатами. Тогда $\Pi^{d-t} = \pi(\Pi^d)$ является $(d - t)$ -мерной плоскостью в $\mathbb{R}^{m-t}$, параллельной координатной плоскости $\Pi^{T-t} = \pi(\Pi^T)$. Кроме того, множество всех координат всех точек $B_{i,j} = \pi(A_{i,j})$ алгебраически независимо (как подмножество координат точек $A_{i,j}$). Следовательно, рассматривая пространство $\mathbb{R}^{m-t}$, заданное последними $m - t$ координатами, и проекции $B_{i,j}$, $\pi(\Pi^d)$ и $\pi(\Pi^T)$ в это пространство, мы можем предполагать, что $t = 0$.

Так как $Y_i \in \Pi(M_i)$, то существуют такие числа $\{\lambda_{i,j}\}_{j=1}^{n_i+1}$, что $\lambda_{i,1} + \dots + \lambda_{i,n_i+1} = 1$ и

$$\begin{aligned} Y_i &= \lambda_{i,1} A_{i,1} + \dots + \lambda_{i,n_i} A_{i,n_i} + \lambda_{i,n_i+1} A_{i,n_i+1} \\ &= \lambda_{i,1} A_{i,1} + \dots + \lambda_{i,n_i} A_{i,n_i} + (1 - \lambda_{i,1} - \dots - \lambda_{i,n_i}) A_{i,n_i+1} \end{aligned} \quad (1)$$

для всех $i = 1, \dots, q$.

По крайней мере одно из чисел $\{\lambda_{i,j}\}_{j=1}^{n_i+1}$ отлично от нуля. Без ограничения общности мы можем предполагать, что $\lambda_{i,1} \neq 0$. (Если некоторые из чисел $\{\lambda_{i,j}\}_{j=1}^{n_i+1}$ являются нулевыми, то можно не рассматривать соответствующие точки и получить подмножество точек $\{A_{i,j}\}$, для которого предположения теоремы верны.) Из равенства (1) мы выразим точку $A_{i,1}$ через точки $A_{i,2}, \dots, A_{i,n_i+1}, Y_i$. Тут возникает дополнительно n_i чисел: $\lambda_{i,1}, \dots, \lambda_{i,n_i}$.

Мы выразили все координаты точек $\{A_{i,j}\}, i = 1, \dots, q, j = 1, \dots, n_i + 1$, через координаты точек $\{A_{i,j}\}, i = 1, \dots, q, j = 2, \dots, n_i + 1; Y_1, \dots, Y_q$ и числа $\{\lambda_{i,j}\}, i = 1, \dots, q, j = 1, \dots, n_i$.

I. Пусть $q \leq d + 1$. Так как плоскость Π^d параллельна плоскости Π^T , то плоскость $Y_1 + \Pi^T$ содержит все точки $Y_2, \dots, Y_q$. Таким образом,

$$Y_i - Y_1 = \sum_{j=1}^T \alpha_{i,j} \mathbf{e}_j, \quad i = 2, \dots, q, \quad (2)$$

где $\mathbf{e}_j$ обозначает j -й единичный координатный вектор.

Мы выразили все координаты точек $\{A_{i,j}\}, i = 1, \dots, q, j = 2, \dots, n_i + 1; Y_1, \dots, Y_q$ и числа $\{\lambda_{i,j}\}, i = 1, \dots, q, j = 1, \dots, n_i$, через координаты точек $\{A_{i,j}\}, i = 1, \dots, q, j = 2, \dots, n_i + 1; Y_1$ и числа $\{\lambda_{i,j}\}, i = 1, \dots, q, j = 1, \dots, n_i; \alpha_{i,j}, i = 2, \dots, q, j = 1, \dots, T$.

Следовательно, согласно предложению 2.1 $qm \leq m + n_1 + \dots + n_q + T(q - 1)$, т.е.

$$n_1 + \dots + n_q \geq (m - T)(q - 1). \quad (3_I)$$

Заметим, что (3_I) не меняется при замене m, d и T на $m - t, d - t$ и $T - t$ соответственно. Следовательно, (3_I) остается справедливым для всякого t с $0 \leq t \leq d$.

II. Пусть $q \geq d + 1$. Тогда существуют такие $d + 1$ точка Y_i , скажем $Y_1, \dots, Y_{d+1}$, что всякая точка $Y_j, j = d + 2, \dots, q$, является линейной комбинацией точек $Y_i, i = 1, \dots, d + 1$. Отметим, что такие $d + 1$ точка существуют, даже если линейная оболочка всех точек $Y_1, \dots, Y_q$ имеет размерность $< d$. Следовательно,

$$Y_j = \sum_{i=1}^d \beta_{j,i} Y_i + \left(1 - \sum_{i=1}^d \beta_{j,i}\right) Y_{d+1}, \quad j = d + 2, \dots, q,$$

для некоторых чисел $\{\beta_{j,i}\}$, $i = 1, \dots, d$, $j = d+2, \dots, q$.

В этом случае уравнения (2) верны для $i = 2, \dots, d+1$. Таким образом, мы выразили все координаты точек $\{A_{i,j}\}$, $i = 1, \dots, q$, $j = 2, \dots, n_i + 1$; $Y_1, \dots, Y_q$ и числа $\{\lambda_{i,j}\}$, $i = 1, \dots, q$, $j = 1, \dots, n_i$, через координаты точек $\{A_{i,j}\}$, $i = 1, \dots, q$, $j = 2, \dots, n_i + 1$; Y_1 и числа $\{\lambda_{i,j}\}$, $i = 1, \dots, q$, $j = 1, \dots, n_i$; $\{\beta_{j,i}\}$, $j = d+2, \dots, q$, $i = 1, \dots, d$; $\alpha_{i,j}$, $i = 2, \dots, d+1$, $j = 1, \dots, T$.

Следовательно, согласно предложению 2.1 $qm \leq m + n_1 + \dots + n_q + (q-d-1)d + Td$, т.е. $n_1 + \dots + n_q \geq (m-d)(q-1) - (T-d)d$. Заменяя в последнем неравенстве m , d и T на $m-t$, $d-t$ и $T-t$ соответственно, мы получаем неравенство

$$n_1 + \dots + n_q \geq (m-d)(q-1) - (T-d)(d-t). \quad (3_{II})$$

Неравенства (3_I) и (3_{II}) завершают доказательство теоремы 1.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1.2. Пусть $\{v_i\}$ обозначают вершины комплекса K и R_j — множества из обсуждавшегося выше построения Робертса, проведенного для некоторого счетного алгебраически независимого множества. Для всякого i выберем такую точку $A_i = (A_i(1), \dots, A_i(m)) \in \mathbb{R}^m$, что $\text{dist}(\theta(v_i), A_i) < \varepsilon$ и $A_i(s) \in R_{(i-1)m+s}$. Тогда множество всех координат $\{A_i(k)\}$ алгебраически независимо. Определим отображение $g: K \rightarrow \mathbb{R}^m$ по формуле $g(v_i) = A_i$ и продолжим далее g линейно на все симплексы K . Очевидно, что $g(v_{i_1}) \neq g(v_{i_2})$ при $i_1 \neq i_2$. Кроме того, ограничение отображения g на всякий n -мерный симплекс K является взаимно однозначным. Пусть Π^d является d -мерной плоскостью в $\mathbb{R}^m$, параллельной некоторым координатным плоскостям $\Pi^t \subset \Pi^T$, и q — число попарно дизъюнктивных не более чем n -мерных симплексов K , образы которых при g пересекают Π^d . Итак, пусть в K существуют q не более чем n -мерных попарно дизъюнктивных симплексов $\sigma_i = \langle v_{i,j} : j = 1, \dots, n_i + 1 \rangle$, образы которых $g(\sigma_i) = \langle A_{i,j} : j = 1, \dots, n_i + 1 \rangle$ пересекают Π^d .

Покажем, что

$$q \leq N_1 = d + 1 - t + \frac{n + (n + T - m)(d - t)}{m - n - d}, \quad \text{если } n \geq (m - n - T)(d - t).$$

Предположим, что $q \geq d + 1 - t$. Так как Π^d пересекает образы $g(\sigma_i) \subset \Pi(\{A_{i,j} : j = 1, \dots, n_i + 1\})$ всех непересекающихся симплексов σ_i , $i = 1, \dots, q$, то согласно теореме 1.1 $n_1 + \dots + n_q \geq (m-d)(q-1) - (T-d)(d-t)$. Следовательно,

$$nq \geq (m-d)(q-1) - (T-d)(d-t), \quad (4)$$

так как $n_i \leq n$ для всех i . Полученное неравенство (4) завершает доказательство нужного неравенства $q \leq N_1$.

Если же $q \leq d + 1 - t$, то неравенство $q \leq N_1$ справедливо, так как согласно нашему предположению $n \geq (m - n - T)(d - t)$, т.е. $d + 1 - t \leq N_1$.

Теперь покажем, что

$$q \leq N_2 = 1 + \frac{n}{m - n - T}, \quad \text{если } n \leq (m - n - T)(d - t).$$

Предположим, что $q \leq d + 1 - t$. Тогда, как и выше, теорема 1.1 влечет неравенство $n_1 + \dots + n_q \geq (m-T)(q-1)$. Следовательно,

$$nq \geq (m-T)(q-1), \quad (5)$$

так как $n_i \leq n$ для всех i . Полученное неравенство (5) завершает доказательство нужного неравенства $q \leq N_2$.

Если же $q \geq d - t + 1$, то, как уже было доказано выше, имеет место неравенство $q \leq N_1$. Согласно же нашему предположению $n \leq (m - n - T)(d - t)$, т.е. $d + 1 - t \leq N_1$. Полученные неравенства означают, что при сделанных предположениях $q = d - t + 1 = N_1$ и $n = (m - n - T)(d - t)$, поэтому $q = d - t + 1 = N_1 = N_2$.

§3. Доказательство теоремы 1.3

Сначала докажем теорему 1.3 в специальном случае $d = m - n$. Итак, мы фиксируем пространства X, Y и отображение f , удовлетворяющие предположениям теоремы 1.3. Если не указано обратное, то в этом параграфе мы пользуемся следующими обозначениями: ρ обозначает евклидову метрику в $\mathbb{R}^m$, ε -дизъюнктное множество $\mathbb{R}^m$ — это подмножество, которое покрывается семейством открытых дизъюнктивных подмножеств $\mathbb{R}^m$, каждое из которых имеет диаметр $< \varepsilon$. Мы говорим, что подмножество $A \subset \mathbb{R}^m$ имеет тип (d, ε) , если множество $\Pi^d \cap A$ является ε -дизъюнктивным для всякой d -плоскости Π^d в $\mathbb{R}^m$.

Пусть $\mathcal{H}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, обозначает множество таких отображений $g \in C^*(X, \mathbb{R}^m)$, что $g(f^{-1}(y))$ имеет тип $(m - n, \varepsilon)$ для всякой точки $y \in Y$. Так как пространство $C^*(X, \mathbb{R}^m)$ в основной предельной топологии обладает свойством Бэра, то достаточно показать, что всякое множество $\mathcal{H}_\varepsilon$ открыто и плотно в $C^*(X, \mathbb{R}^m)$. Действительно, тогда множество $\mathcal{H} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_{1/k}$ будет плотным и иметь тип G_δ в $C^*(X, \mathbb{R}^m)$. При этом если $g \in \mathcal{H}$ и $y \in Y$, то $g(f^{-1}(y)) \cap \Pi$ не более чем 0-мерно для всякой $(n - m)$ -плоскости $\Pi \subset \mathbb{R}^m$.

ЛЕММА 3.1. Пусть $A \subset X$ компактно и $\varepsilon > 0$. Пусть также для некоторой $g_0 \in C^*(X, \mathbb{R}^m)$ и d множество $g_0(A)$ имеет тип (d, ε) . Тогда существуют такие окрестность U множества A в X и $\delta > 0$, что множество $\overline{g(U)}$ имеет тип (d, ε) для всякого такого отображения $g \in C^*(X, \mathbb{R}^m)$, что $g|U$ и $g_0|U$ δ -близки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что заключение леммы неверно. Для получения противоречия мы будем следовать доказательству п. 2.4 в [4; с. 569]. Для всякого $i \geq 1$ возьмем такую окрестность U_i множества A , что $U_i \subset g_0^{-1}(W_i)$, где W_i является $1/i$ -окрестностью $g_0(A)$. Существуют такие отображения $g_i \in C^*(X, \mathbb{R}^m)$ и d -плоскость Π_i^d , что $g_i|U_i$ и $g_0|U_i$ $1/i$ -близки, но множество $g_i(U_i) \cap \Pi_i^d$ не является ε -дизъюнктивным. Выберем точки $z_i \in \overline{g_i(U_i)} \cap \Pi_i^d$ и $x_i \in U_i$ такие, что $\rho(g_i(x_i), z_i) \leq 1/i$, $i \geq 1$. Очевидно, что $K = \{z_i\}_{i=1}^{\infty} \cup g_0(A)$ является компактом, пересекающим всякую плоскость Π_i^d . Следовательно, существует подпоследовательность $\{\Pi_i^d\}_{i=1}^{\infty}$, сходящаяся к d -плоскости Π_0^d . Мы будем предполагать, что плоскости $\{\Pi_i^d\}_{i=1}^{\infty}$ сами сходятся к Π_0^d .

Пусть V — открытое подмножество $\mathbb{R}^m$, содержащее $g_0(A) \cap \Pi_0^d$ и являющееся объединением конечного семейства открытых дизъюнктивных подмножеств $\mathbb{R}^m$ диаметра $< \varepsilon$. Так как всякое $\overline{g_i(U_i)} \cap \Pi_i^d$ не является ε -дизъюнктивным, то существуют такие точки $a_i \in U_i$ и $b_i \in \overline{g_i(U_i)} \cap \Pi_i^d$, что V не содержит множество $\{g_i(a_i), b_i\}_{i=1}^{\infty}$. Мы можем также считать, что $\rho(b_i, g_i(a_i)) \leq 1/i$ для всех i . Это влечет существование точки $b \in g_0(A)$ и подпоследовательности $\{b_i\}$, сходящейся к b . Мы опять будем писать $\lim b_i = b$. Тогда $b \in \Pi_0^d$, так как $\{\Pi_i^d\}$ сходятся к Π_0^d . Следовательно, $b \in g_0(A) \cap \Pi_0^d \subset V$. Поэтому $b_i \in V$ для некоторого i , что противоречит выбору b_i .

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть $g_0(f^{-1}(y_0))$ имеет тип $(m - n, \varepsilon)$ для некоторой точки $y_0 \in Y$ и $g_0 \in C^*(X, \mathbb{R}^m)$. Тогда существуют окрестность V точки y_0 в Y и $\delta > 0$ такие, что множество $\overline{g(f^{-1}(V))}$ имеет тип $(m - n, \varepsilon)$ для всякого такого отображения $g \in C^*(X, \mathbb{R}^m)$, что $g|_{f^{-1}(V)}$ и $g_0|_{f^{-1}(V)}$ δ -близки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя лемму 3.1 к $f^{-1}(y_0)$, мы получаем $\delta > 0$ и такую окрестность U множества $f^{-1}(y_0)$, что множество $\overline{g(U)}$ имеет тип $(m - n, \varepsilon)$, как только $g \in C^*(X, \mathbb{R}^m)$ и $g|_U$ δ -близко к $g_0|_U$. Так как отображение f замкнуто, то можно найти замкнутую окрестность V точки y_0 в Y такую, что $f^{-1}(V) \subset U$. Теперь для некоторого отображения $g \in C^*(X, \mathbb{R}^m)$ пусть $g|_{f^{-1}(V)}$ и $g_0|_{f^{-1}(V)}$ δ -близки. Продолжим $g|_{f^{-1}(V)}$ до такого отображения $h \in C^*(X, \mathbb{R}^m)$, что $h|_U$ остается δ -близким к $g_0|_U$. Тогда согласно выбору U и δ множество $\overline{h(U)}$ имеет тип $(m - n, \varepsilon)$. Теперь, так как $\overline{h(f^{-1}(V))} \subset \overline{h(U)}$ и $h|_{f^{-1}(V)} = g|_{f^{-1}(V)}$, доказательство завершено.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Множество $\mathcal{H}_\varepsilon$ открыто в $C^*(X, \mathbb{R}^m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $g_0 \in \mathcal{H}_\varepsilon$. Согласно следствию 3.2 для всякой точки $y \in Y$ существуют такая окрестность V_y в Y и $\delta_y > 0$, что если $g \in C^*(X, \mathbb{R}^m)$ и $\varrho(g(x), g_0(x)) \leq \delta_y$ для всех точек $x \in f^{-1}(V_y)$, то $\overline{g(f^{-1}(V_y))}$ имеет тип $(m - n, \varepsilon)$. Возьмем локально конечное открытое покрытие ω пространства Y , вписанное в $\{V_y : y \in Y\}$, и для всякого $W \in \omega$ фиксируем такую точку $y(W) \in Y$, что $W \subset V_{y(W)}$. Определим многозначное отображение $\phi: Y \rightarrow (0, \infty)$ формулой $\phi(y) = \bigcup \{(0, \delta_{y(W)}) : y \in W\}$. Очевидно, что ϕ выпуклозначно и полунепрерывно снизу. Согласно [11; теорема 6.2] отображение ϕ допускает непрерывную селекцию $\beta: Y \rightarrow (0, \infty)$, и пусть $\alpha = \beta \circ f$. Достаточно показать, что из $g \in C^*(X, \mathbb{R}^m)$ и $\varrho(g_0(x), g(x)) < \alpha(x)$ для всякой точки $x \in X$ следует, что $g \in \mathcal{H}_\varepsilon$. Теперь пусть $y \in Y$ и выберем такой элемент $W \in \omega$, содержащий y , что $\alpha(x) \leq \delta_{y(W)}$ для всякой точки $x \in f^{-1}(y)$. Возьмем функцию $h_y \in C^*(X, \mathbb{R}^m)$, совпадающую с g на множестве $f^{-1}(y)$ и удовлетворяющую неравенству $\varrho(h_y(x), g_0(x)) \leq \delta_{y(W)}$ для всех $x \in X$. Тогда в соответствии с выбором $V_{y(W)}$ множество $\overline{h_y(f^{-1}(V_{y(W)}))}$, а значит, и множество $\overline{g(f^{-1}(y))}$ имеет тип $(m - n, \varepsilon)$. Поэтому всякое отображение $g \in C^*(X, \mathbb{R}^m)$, которое α -близко к g_0 , принадлежит $\mathcal{H}_\varepsilon$. Следовательно, $\mathcal{H}_\varepsilon$ открыто в $C^*(X, \mathbb{R}^m)$.

Для пространства M и $\varepsilon > 0$ пусть $C_{(n, \varepsilon)}(M, \mathbb{R}^m)$ обозначает множество всех таких отображений $g \in C^*(M, \mathbb{R}^m)$, что $g(M)$ имеет тип $(m - n, \varepsilon)$ при $m \geq n + 1$.

ЛЕММА 3.4. Пусть M — n -мерный компакт и $m \geq n + 1$. Тогда $C_{(n, \varepsilon)}(M, \mathbb{R}^m)$ плотно в $C(M, \mathbb{R}^m)$ для всякого $\varepsilon > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g_0 \in C(M, \mathbb{R}^m)$ и $\delta > 0$. Представляя g_0 как композицию двух отображений $q_1: M \rightarrow Z$ и $q_2: Z \rightarrow \mathbb{R}^m$, где Z — метризуемый компакт размерности $\leq n$, и рассматривая Z и q_2 вместо M и g_0 , мы редуцируем наше доказательство к случаю метризуемого компакта M . Выберем положительное число η , удовлетворяющее следующим условиям:

$$5\eta < \frac{\delta}{2} \quad \text{и} \quad 9\eta(r + 1) < \varepsilon, \quad \text{где} \quad r = n(m + 1 - n). \quad (6)$$

Так как $\dim M \leq n$, то стандартной процедурой мы можем найти конечный n -мерный комплекс K и такие отображения $h: M \rightarrow K$, $\theta: K \rightarrow \mathbb{R}^m$, что $\theta \circ h$ $\delta/2$ -близко к g_0 . Более того, мы можем предполагать, что

$$\text{diam}(\theta(\sigma)) < \eta \quad \text{для всякого симплекса } \sigma \in K. \quad (7)$$

Достаточно найти отображение $g: K \rightarrow \mathbb{R}^m$, которое $\delta/2$ -близко к отображению θ и $g \circ h \in C_{(n,\varepsilon)}(M, \mathbb{R}^m)$. Для этого мы воспользуемся следствием 1.2 (с $d = m - n$, $t = 0$, $T = m$, $\varepsilon = \eta$ и n , замененным на $n - 1$) для получения такого кусочно линейного отображения $g: K \rightarrow \mathbb{R}^m$, что $\varrho(g(v), \theta(v)) \leq \eta$ для всех вершин v комплекса K и для всякой $(m - n)$ -плоскости $\Pi \subset \mathbb{R}^m$ число q дизъюнктивных не более чем $(n - 1)$ -мерных симплексов K , образы которых при g пересекают Π , не превосходит $r = n(m + 1 - n)$. Мы можем выбрать g так, чтобы дополнительно $g(v_i) \neq g(v_j)$ для всяких различных вершин v_i и v_j комплекса K .

Пусть v_i и v_j — две вершины одного симплекса $\Delta \in K$. Тогда согласно (7) и выбору g мы имеем

$$\varrho(g(v_i), g(v_j)) \leq \varrho(g(v_i), \theta(v_i)) + \varrho(\theta(v_i), \theta(v_j)) + \varrho(\theta(v_j), g(v_j)) < 3\eta.$$

Следовательно,

$$g(\Delta) \text{ имеет диаметр } < 3\eta \text{ для всякого симплекса } \Delta \in K. \quad (8)$$

Условие (8) влечет, что $\varrho(g(y), \theta(y)) < 5\eta$ для всех $y \in K$. Поэтому согласно (6) отображения g и θ $\delta/2$ -близки.

Осталось показать только, что $g \circ h \in C_{(n,\varepsilon)}(M, \mathbb{R}^m)$ или, эквивалентно, что $g(K)$ имеет тип $(m - n, \varepsilon)$. Для этого мы воспользуемся идеей из работы [4; доказательство п. 2.3, с. 568]. Фиксируем $(m - n)$ -плоскость $\Pi \subset \mathbb{R}^m$. Достаточно доказать, что всякая компонента множества $g(K) \cap \Pi$ имеет диаметр $\leq 9(r + 1)\eta$, так как $9(r + 1)\eta < \varepsilon$ согласно (6). Предположим, что $\varrho(a, b) > 9(r + 1)\eta$ для некоторой компоненты P множества $g(K) \cap \Pi$ и некоторых точек $a \in P$, $b \in P$. Возьмем в P кривую ab . Согласно (8) всякая поддуга ab диаметра $\geq 3\eta$ должна содержать по крайней мере одну точку на границе симплекса $g(K)$, следовательно, на симплексе $g(K)$ размерности $\leq n - 1$. Далее, выберем такие точки $a_i \in ab$, $i = 1, \dots, r + 1$, что $3(3i - 2)\eta < \varrho(a, a_i) \leq 3(3i - 1)\eta$, $i = 1, \dots, r + 1$, и всякая точка a_i принадлежит симплексу $g(\sigma_i) \in g(K)$ размерности $\leq n - 1$. Тогда $\varrho(a_i, a_j) > 6\eta$ для $i \neq j$, что согласно (8) влечет $g(\sigma_i) \cap g(\sigma_j) = \emptyset$. Следовательно, мы получили $r + 1$ дизъюнктивных симплексов $\sigma_i \in K$, $i = 1, \dots, r + 1$, каждый размерности $\leq n - 1$, образы которых при g пересекают Π . Получено противоречие, так как согласно выбору g число попарно непересекающихся не более чем $(n - 1)$ -мерных симплексов K , образы которых при g пересекают Π , не превосходит $n(m - n + 1) = r$.

Далее рассматриваем многозначное отображение $\psi_\varepsilon: Y \rightarrow C^*(X, \mathbb{R}^m)$, определенное формулой $\psi_\varepsilon(y) = C^*(X, \mathbb{R}^m) \setminus \mathcal{H}_\varepsilon(y)$, где $\mathcal{H}_\varepsilon(y)$ обозначает множество всех таких отображений $g \in C^*(X, \mathbb{R}^m)$, что $g(f^{-1}(y))$ имеет тип $(m - n, \varepsilon)$.

Следующее предложение вместе с предложением 3.3 завершает доказательство теоремы 1.3 для $k = m - n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Множество $\mathcal{H}_\varepsilon$ плотно в $C^*(X, \mathbb{R}^m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что график G отображения ψ_ε замкнут в $Y \times C^*(X, \mathbb{R}^m)$, если $C^*(X, \mathbb{R}^m)$ наделено топологией равномерной сходимости, порожденной метрикой ϱ . Пусть $(y_0, g_0) \in (Y \times C^*(X, \mathbb{R}^m)) \setminus G$. Тогда $g_0 \notin \psi_\varepsilon(y_0)$, поэтому $g_0 \in \mathcal{H}_\varepsilon(y_0)$. Согласно следствию 3.2 существуют такие $\delta > 0$ и окрестность V точки y_0 в Y , что $\overline{g(f^{-1}(V))}$ имеет тип $(m - n, \varepsilon)$ для всякого такого отображения $g \in C^*(X, \mathbb{R}^m)$, что $g|_{f^{-1}(V)}$ δ -близко к $g_0|_{f^{-1}(V)}$. Пусть $W \subset C^*(X, \mathbb{R}^m)$ – множество всех отображений g , которые δ -близки к g_0 . Очевидно, что W является окрестностью g_0 в $C^*(X, \mathbb{R}^m)$ в топологии равномерной сходимости. Таким образом, $V \times W$ является окрестностью (y_0, g_0) в $Y \times C^*(X, \mathbb{R}^m)$, которая не пересекает G . Следовательно, G замкнуто в $Y \times C^*(X, \mathbb{R}^m)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ. $\overline{B}(g_0, \alpha) \setminus \psi_\varepsilon(y) \neq \emptyset$ для всякой точки $y \in Y$, $\alpha: X \rightarrow (0, \infty)$ и $g_0 \in C^*(X, \mathbb{R}^m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам необходимо показать, что $\overline{B}(g_0, \alpha) \cap \mathcal{H}_\varepsilon(y) \neq \emptyset$ для фиксированных $y \in Y$, $\alpha \in C(X, (0, \infty))$ и $g_0 \in C^*(X, \mathbb{R}^m)$. Пусть $\delta > 0$ – минимальное значение α на $f^{-1}(y)$. Так как $\dim f^{-1}(y) \leq n$, то по лемме 3.4 существует отображение $h \in C(f^{-1}(y), \mathbb{R}^m)$, которое δ -близко к $g_0|_{f^{-1}(y)}$ и такое, что $h(f^{-1}(y))$ имеет тип $(m - n, \varepsilon)$. Очевидно, что $\varrho(h(x), g_0(x)) \leq \alpha(x)$ для всех $x \in f^{-1}(y)$. Таким образом, всякое продолжение $g \in C^*(X, \mathbb{R}^m)$ отображения h лежит в $\mathcal{H}_\varepsilon(y)$. Следовательно, доказательство редуцировано к нахождению такого продолжения отображения h , которое лежит также в $\overline{B}(g_0, \alpha)$. Для этого мы определяем многозначное отображение $\Phi: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ формулой $\Phi(x) = h(x)$ при $x \in f^{-1}(y)$ и $\Phi(x) = B(g_0(x), \alpha(x))$ при $x \notin f^{-1}(y)$. Здесь $B(g_0(x), \alpha(x))$ обозначает замкнутый шар в $\mathbb{R}^m$ с центром $g_0(x)$ и радиусом $\alpha(x)$. Это отображение полунепрерывно снизу с замкнутыми и выпуклыми образами в $\mathbb{R}^m$. Поэтому согласно выпуклозначной селекционной теореме Майкла отображение Φ допускает непрерывную селекцию g , которая продолжает h . Кроме того, мы можем считать, что α является ограниченной функцией, что влечет ограниченность g . Таким образом, $g \in \overline{B}(g_0, \alpha)$, что завершает доказательство утверждения.

Теперь мы в состоянии завершить доказательство нашего предложения. Фиксируем $g_0 \in C^*(X, \mathbb{R}^m)$ и $\alpha \in C^*(X, (0, 1))$ и рассмотрим постоянное многозначное отображение $\varphi: Y \rightarrow C^*(X, \mathbb{R}^m)$, $\varphi(y) = \overline{B}(g_0, \alpha)$, где $C^*(X, \mathbb{R}^m)$ наделается топологией равномерной сходимости. Нам понадобится следующая теорема Майкла [12; теорема 5.3]:

Пусть Y – паракомпактное пространство и $\dim Y = 0$, M – полное метризуемое пространство, а $\phi: Y \rightarrow M$ – полунепрерывное снизу замкнутозначное отображение. Если $\psi: Y \rightarrow M$ – такое многозначное отображение с замкнутым графиком, что $\phi(y) \setminus \psi(y) \neq \emptyset$ для всех точек $y \in Y$, то ϕ имеет селекцию, избегающую ψ .

В нашем случае φ и ψ_ε удовлетворяют предположениям теоремы Майкла, поэтому существует такое отображение $\theta: Y \rightarrow C^*(X, \mathbb{R}^m)$, что $\theta(y) \in \overline{B}(g_0, \alpha) \setminus \psi_\varepsilon(y)$ для всех точек $y \in Y$. Отображение $g \in C^*(X, \mathbb{R}^m)$ определим формулой $g(x) = \theta(f(x))$, $x \in X$. Тогда $g \in \overline{B}(g_0, \alpha) \cap \mathcal{H}_\varepsilon(y)$ для всякой точки $y \in Y$. Следовательно, $g \in \overline{B}(g_0, \alpha) \cap \mathcal{H}_\varepsilon$ и доказательство завершено.

Как мы уже указывали, из предложения 3.3 и предложения 3.5 следует, что множество $\mathcal{H}$ плотно и имеет тип G_δ в $C^*(X, \mathbb{R}^m)$. Это дает доказательство теоремы 1.3 в специальном случае $d = m - n$. Докажем теперь общий случай теоремы 1.3. Мы покажем, что всякое отображение $g \in \mathcal{H}$ удовлетворяет теореме, т.е.

удовлетворяет следующему условию: компакт $A = g(f^{-1}(y)) \cap \Pi^d$ не более чем $(n + d - m)$ -мерен для всякой точки $y \in Y$ и всякой d -плоскости $\Pi^d \subset \mathbb{R}^m$ при $m - n + 1 \leq d \leq m$. Фиксируем некоторую $(m - n)$ -плоскость $\Pi^{m-n} \subset \Pi^d$ и рассмотрим ортогональную проекцию p плоскости Π^d на $(n + d - m)$ -плоскость $\Pi^{n+d-m} \subset \Pi^d$ – ортогональное дополнение плоскости Π^{m-n} в Π^d . Тогда компакт $B = p(g(f^{-1}(y)) \cap \Pi^d) \subset \Pi^{n+d-m}$ имеет размерность $\leq n + d - m$. Так как слоями отображения $p|_A: A \rightarrow B$ являются пересечения компакта $g(f^{-1}(y))$ с $(m - n)$ -плоскостями, то согласно выбору отображения g эти слои нульмерны. Следовательно, согласно теореме Гуревича о нульмерных совершенных отображениях имеет место искомое неравенство $\dim A \leq \dim B \leq n + d - m$.

§ 4. Доказательство теоремы 1.5 и теоремы 1.8

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.5. Достаточно доказать, что для всяких целых чисел d, t, T таких, что $0 \leq t \leq d \leq T \leq m$ и $d \leq m - n - 1$, и всяких координатных плоскостей $\Pi^t \subset \Pi^T$ в $\mathbb{R}^m$ пространство $C^*(X, \mathbb{R}^m)$ содержит плотное G_δ -подмножество таких отображений g , что множество $f^{-1}(y) \cap g^{-1}(\Pi^d)$ состоит из не более чем q точек для всякой точки $y \in Y$ и всякой d -плоскости $\Pi^d \subset \mathbb{R}^m$, параллельной $\Pi^t \subset \Pi^T$, где q – это целая часть $N_1 = d + 1 - t + \frac{n + (n + T - m)(d - t)}{m - n - d}$ при $n \geq (m - n - T)(d - t)$ и целая часть $N_2 = 1 + \frac{m - n - T}{n}$ в противном случае. Таким образом, мы фиксируем целые числа d, t, T , удовлетворяющие вышеприведенным неравенствам, и координатные плоскости $\Pi^t \subset \Pi^T \subset \mathbb{R}^m$. Подчеркнем, что всегда $q \geq 1$, и пусть $\mathcal{P}$ – это множество всех d -плоскостей в $\mathbb{R}^m$, параллельных $\Pi^t \subset \Pi^T$. Теперь мы определим следующее понятие, которым пользуемся в этом параграфе: подмножество A произвольного метрического пространства M называется имеющим *котип* (q, ε, g) , где $\varepsilon > 0$ и $g \in C^*(M, \mathbb{R}^m)$, если для всякой плоскости $\Pi^d \in \mathcal{P}$ множество $A \cap g^{-1}(\Pi^d)$ можно покрыть не более чем q дизъюнктными открытыми подмножествами M диаметра $\leq \varepsilon$. Пусть $\mathcal{K}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, обозначает множество всех таких отображений $g \in C^*(X, \mathbb{R}^m)$, что $f^{-1}(y)$ имеет котип (q, ε, g) для всякой точки $y \in Y$. Доказательство редуцировано к проверке, что всякое множество $\mathcal{K}_\varepsilon$ открыто и плотно в $C^*(X, \mathbb{R}^m)$.

ЛЕММА 4.1. Пусть компактное подмножество $A \subset X$ имеет котип (q, ε, g_0) для некоторых $g_0 \in C^*(X, \mathbb{R}^m)$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существуют окрестность U компакта A в X и $\delta > 0$ такие, что U имеет котип (q, ε, g) для всякого отображения $g \in C^*(X, \mathbb{R}^m)$ такого, что $g|_U$ δ -ближе к $g_0|_U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что лемма неверна. Для всякого $i \geq 1$ выберем такую $1/i$ -окрестность U_i компакта A , что $g_0(U_i)$ лежит внутри $1/i$ -окрестности множества $g_0(A)$ в $\mathbb{R}^m$. Тогда существуют $g_i \in C^*(X, \mathbb{R}^m)$ и d -плоскость $\Pi_i^d \in \mathcal{P}$ такие, что $g_i|_{U_i}$ $1/i$ -ближе к $g_0|_{U_i}$, но $g_i^{-1}(\Pi_i^d) \cap U_i$ не покрывается никаким семейством $\leq q$ открытых дизъюнктных множеств в X диаметра $\leq \varepsilon$. Как в доказательстве леммы 3.1, переходя к подпоследовательностям, мы можем предполагать, что $\{\Pi_i^d\}_{i=1}^\infty$ сходится к некоторой d -плоскости Π_0^d . Так как все Π_i^d лежат в $\mathcal{P}$ (т.е. параллельны $\Pi^t \subset \Pi^T$), то $\Pi_0^d \in \mathcal{P}$. Следовательно, множество $A \cap g_0^{-1}(\Pi_0^d)$ покрывается семейством $\{V_j\}$ мощности $\leq q$ открытых попарно дизъюнктных подмножеств X диаметра $\leq \varepsilon$. Выберем такие точки $x_i \in g_i^{-1}(\Pi_i^d) \cap (U_i \setminus V)$ и $y_i \in A$, что $\text{dist}(x_i, y_i) \leq 1/i$, $i = 1, 2, \dots$, где $V = \bigcup V_j$. Мы можем

предполагать, что последовательность x_i сходится к некоторой точке $x_0 \in A$ (напомним, что A компактно). Тогда $\{g_i(x_i)\}$ сходится к $g_0(x_0)$ и $g_0(x_0) \in g_0(A) \cap \Pi_0^d$. Следовательно, $x_0 \in A \cap g_0^{-1}(\Pi_0^d) \subset V$. Таким образом, $x_i \in V$ для почти всех i . Получили противоречие.

Доказательство следующего следствия похоже на доказательство следствия 3.2.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть для точки $y_0 \in Y$ и отображения $g_0 \in C^*(X, \mathbb{R}^m)$ множество $f^{-1}(y_0)$ имеет котип (q, ε, g_0) . Тогда существуют окрестность V точки y_0 в Y и $\delta > 0$ такие, что множество $f^{-1}(V)$ имеет котип (q, ε, g) для всякого такого отображения $g \in C^*(X, \mathbb{R}^m)$, что $g|_{f^{-1}(V)}$ и $g_0|_{f^{-1}(V)}$ δ -близки.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Всякое множество $\mathcal{K}_\varepsilon$ открыто в $C^*(X, \mathbb{R}^m)$.

Доказательство следует рассуждениям доказательства предложения 3.3, но теперь вместо следствия 3.2 мы применяем следствие 4.2.

ЛЕММА 4.4. Пусть M — метризуемый не более чем n -мерный компакт. Тогда множество $\mathcal{K}_0(M, \mathbb{R}^m)$ всех таких отображений $g \in C(M, \mathbb{R}^m)$, что множество $g^{-1}(\Pi^d)$ состоит из не более чем q точек для всякой плоскости $\Pi^d \in \mathcal{P}$, плотно в $C(M, \mathbb{R}^m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Ω — семейство всех таких наборов $\{\bar{V}_1, \bar{V}_2, \dots, \bar{V}_{q+1}\}$ из $q+1$ попарно дизъюнктивных элементов, что V_j принадлежит фиксированной счетной базе M . Пусть также для $\Gamma \in \Omega$ $C_\Gamma = \{g \in C(M, \mathbb{R}^m) : g^{-1}(\Pi^d) \text{ пересекает не более } q \text{ элементов } \Gamma \text{ для всякой плоскости } \Pi^d \in \mathcal{P}\}$.

Очевидно, что Ω счетно и $\mathcal{K}_0(M, \mathbb{R}^m)$ является пересечением всех множеств C_Γ , $\Gamma \in \Omega$. Следовательно, наше доказательство редуцировано к проверке, что всякое C_Γ плотно и открыто в $C(M, \mathbb{R}^m)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Всякое множество C_Γ открыто в $C(M, \mathbb{R}^m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $\Gamma \in \Omega$ и $g_0 \in C_\Gamma$. Предположим, что для всякого i существует $g_i \notin C_\Gamma$ такое, что g_i $1/i$ -близко к g_0 . Таким образом, мы можем найти такую плоскость $\Pi_i^d \in \mathcal{P}$, что множество $g_i^{-1}(\Pi_i^d)$ пересекает всякий элемент Γ . Как в лемме 3.1, мы можем предполагать, что последовательность $\{\Pi_i^d\}$ сходится к некоторой плоскости $\Pi_0^d \in \mathcal{P}$. Тогда $g_0^{-1}(\Pi_0^d)$ пересекает не более q элементов Γ , например первые q . Теперь для всякого i выберем точку $x_i \in g_i^{-1}(\Pi_i^d) \cap \bar{V}_{q+1}$ и, так как M компактно, мы можем предполагать, что последовательность $\{x_i\}$ сходится к некоторой точке $x_0 \in \bar{V}_{q+1}$. Тогда $\{g_i(x_i)\}$ сходится к $g_0(x_0) \in \Pi_0^d$. Таким образом, $x_0 \in g_0^{-1}(\Pi_0^d) \cap \bar{V}_{q+1}$. Получили противоречие.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Всякое множество C_Γ плотно в $C(M, \mathbb{R}^m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Gamma = \{\bar{V}_1, \bar{V}_2, \dots, \bar{V}_{q+1}\}$, $g_0 \in C_\Gamma$ и $\delta > 0$. Тогда существуют открытое покрытие ω компакта M такое, что $\text{mesh}(\omega) \leq r/3$, где $r = \min\{\text{dist}(\bar{V}_i, \bar{V}_j) : i \neq j\}$, и кусочно линейное отображение $h: L \rightarrow \mathbb{R}^m$ такое, что $g = h \circ \pi$ и g_0 δ -близки. Здесь L — полиэдр нерва ω и $\pi: M \rightarrow L$ — каноническое отображение. Согласно следствию 1.2 мы можем предполагать, что для всякой плоскости $\Pi^d \in \mathcal{P}$ число попарно дизъюнктивных не более чем n -мерных симплексов $\sigma \in L$, образы которых $h(\sigma)$ пересекают Π^d , не превосходит q . Мы также можем предполагать, что покрытие ω имеет порядок $\leq n+1$, т.е. L не более чем n -мерно.

Если существует такая плоскость $\Pi^* \in \mathcal{P}$, что множество $g^{-1}(\Pi^*)$ пересекает всякое $\bar{V}_i$, то выберем $x_i \in g^{-1}(\Pi^*) \cap \bar{V}_i$. Пусть ω_i – семейство тех элементов ω , которые содержат точку x_i . Тогда всякое семейство $\omega_i, i = 1, \dots, q+1$, порождает такой симплекс $\sigma_i \in L$ размерности $\leq n$, что $h(x_i) \in h(\sigma_i) \cap \Pi^*$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Это противоречит выбору отображения h .

Так как $\mathcal{H}_0(M, \mathbb{R}^m) \subset \mathcal{H}_\varepsilon(M, \mathbb{R}^m)$ для всякого $\varepsilon > 0$, где $\mathcal{H}_\varepsilon(M, \mathbb{R}^m)$ является множеством всех таких отображений $g \in C^*(M, \mathbb{R}^m)$, что M имеет котип (q, ε, g) , то лемма 4.4 влечет следующее

СЛЕДСТВИЕ 4.5. Пусть M – метризуемый компакт размерности $\leq n$. Тогда всякое множество $\mathcal{H}_\varepsilon(M, \mathbb{R}^m)$ плотно в $C(M, \mathbb{R}^m)$.

Следующее предложение вместе с предложением 4.3 завершают доказательство теоремы 1.5.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. Всякое множество $\mathcal{H}_\varepsilon$ плотно в $C^*(X, \mathbb{R}^m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi_\varepsilon: Y \rightarrow C^*(X, \mathbb{R}^m)$ – многозначное отображение $\psi_\varepsilon(y) = C^*(X, \mathbb{R}^m) \setminus \mathcal{H}_\varepsilon(y)$, где $\mathcal{H}_\varepsilon(y)$ обозначает множество всех таких $g \in C^*(X, \mathbb{R}^m)$, что $f^{-1}(y)$ имеет котип (q, ε, g) . Далее доказательство следует рассуждениям из доказательства предложения 3.5. Для того чтобы показать, что график ψ_ε замкнут, мы воспользуемся следствием 4.2 вместо следствия 3.2. И далее вместо леммы 3.4 необходимо воспользоваться следствием 4.5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.8. Мы хотим показать, что $C^*(X, l_2)$ содержит плотное G_δ -множество таких отображений g , что для всякой точки $y \in Y$ и всякой плоскости $\Pi^d \in \mathcal{P}(d, r)$ множество $f^{-1}(y) \cap g^{-1}(\Pi^d)$ имеет не более $d+1-r$ точек при $r \leq d$ и не более одной точки в противном случае. Для заданных чисел d, r пусть $\mathcal{Q}$ является множеством всех d -плоскостей, параллельных r -плоскости первых r координат в l_2 . Как в теореме 1.5, мы вводим понятие подмножества метрического пространства M котида (q, ε, g) , рассматривая теперь плоскости $\Pi^d \in \mathcal{Q}$ и полагая $q = d+1-r$ в случае $d \geq r$ и $q = 1$ в противном случае. Пусть $\mathcal{F}_\varepsilon, \varepsilon > 0$, обозначает множество всех таких отображений $g \in C^*(X, l_2)$, что $f^{-1}(y)$ имеет котип (q, ε, g) для всякой точки $y \in Y$. Так как в l_2 имеется счетное множество координатных r -плоскостей, то достаточно показать, что всякое множество $\mathcal{F}_\varepsilon$ открыто и плотно в $C^*(X, l_2)$. Следуя доказательству теоремы 1.5, можно показать, что все множества $\mathcal{F}_\varepsilon$ открыты в $C^*(X, l_2)$. Для доказательства плотности $\mathcal{F}_\varepsilon$ мы воспользуемся следующей леммой.

ЛЕММА 4.7. Пусть M – метризуемый компакт и $\varepsilon > 0$. Тогда множество $\mathcal{F}_\varepsilon(M, l_2)$ всех таких отображений $g \in C(M, l_2)$, что M имеет котип (q, ε, g) , плотно в $C(M, l_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $g_0 \in C(M, l_2)$ и $\lambda > 0$. Тогда существуют конечный комплекс K и такие отображения $\varphi: M \rightarrow K$ и $h: K \rightarrow l_2$, что $h \circ \varphi$ $\lambda/2$ -близко к g_0 . Более того, мы можем предполагать, что все слои отображения φ имеют диаметр $< \varepsilon$. Для всякого $A \subset \mathbb{N}$ мы отождествляем $\mathbb{R}^A$ с подпространством $\{y \in l_2 : y_i = 0 \text{ для всех } i \notin A\}$ гильбертова пространства l_2 и обозначаем через π_A каноническую проекцию $\pi_A: l_2 \rightarrow \mathbb{R}^A$. Пусть $\dim K = n$ и A – некоторое конечное подмножество $A \subset \mathbb{N}$, удовлетворяющее следующим условиям:

- (i) $\{1, \dots, r\} \subset A$;
- (ii) $|A| \geq r + d + 2n + n \cdot |d - r| + 1$, где $|A|$ обозначает мощность A .

Так как всякая проекция π_A является открытым отображением, то можно показать, что отображение $\Lambda_A: C(K, l_2) \rightarrow C(K, \mathbb{R}^A)$, $\Lambda_A(g) = \pi_A \circ g$, также является открытым.

Предположим сначала, что $r \leq d$. Заметим, что если $T = m$, то $(m - n - T) \times (d - r) = -n(d - r) \leq 0$, поэтому $n \geq (m - n - T)(d - r)$. Следовательно, применяя теорему 1.5 с $m = T = |A|$ и $t = r$, найдем плотное G_δ -подмножество $\mathcal{F}_A$ в $C(K, \mathbb{R}^A)$, состоящее из таких отображений g , что множество $g^{-1}(\Pi_A^d)$ содержит не более $1 + d - r + \frac{n + n(d - r)}{|A| - n - d}$ точек для всякой d -плоскости $\Pi_A^d \subset \mathbb{R}^A$, параллельной r -плоскости первых r координат в $\mathbb{R}^A$. Так как $|A| \geq r + d + 2n + n \cdot |d - r| + 1$, то прообраз всякой такой плоскости содержит не более $1 + d - r$ точек. Множество $\Lambda_A^{-1}(\mathcal{F}_A)$ также плотно и имеет тип G_δ в $C(K, l_2)$. Следовательно, существует отображение $g \in \Lambda_A^{-1}(\mathcal{F}_A)$, которое $\lambda/2$ -близко к h . Тогда $\bar{g} = g \circ \varphi$ λ -близко к g_0 . Осталось только показать, что $\bar{g} \in \mathcal{F}_\varepsilon(M, l_2)$. Для этого возьмем $\Pi^d \in \mathcal{Q}$. Так как $\Pi_A^d = \pi_A(\Pi^d)$ является d -плоскостью в $\mathbb{R}^A$, параллельной r -плоскости первых r координат в $\mathbb{R}^A$, то множество $g^{-1}(\pi_A^{-1}(\Pi_A^d))$ содержит $\leq 1 + d - r$ точек. Формально плоскость Π_A^d может иметь размерность $< d$, но в этом случае оценка на число точек в прообразе только улучшается. Из включения $\Pi^d \subset \pi_A^{-1}(\Pi_A^d)$ следует, что и множество $g^{-1}(\Pi^d)$ содержит $\leq 1 + d - r$ точек. Поэтому множество $(\bar{g})^{-1}(\Pi^d) = \varphi^{-1}(g^{-1}(\Pi^d))$ состоит из $\leq 1 + d - r$ слоев отображения φ . Так как всякий слой отображения φ имеет диаметр $< \varepsilon$, то $\bar{g} \in \mathcal{F}_\varepsilon(M, l_2)$.

Предположим, что $d \leq r$. Опять применяем теорему 1.5 к A , но теперь при $m = |A|$, $t = 0$ и $T = r$. Очевидно, что в этом случае $(m - n - T)(d - t) > n$. Следовательно, существует плотное G_δ -подмножество $\mathcal{F}_A$ в $C(K, \mathbb{R}^A)$, состоящее из таких отображений g , что $g^{-1}(\Pi_A^d)$ содержит не более одной точки для всякой d -плоскости в $\mathbb{R}^A$, параллельной плоскости первых r координат в $\mathbb{R}^A$. Как ранее, берем отображение $g \in \Lambda_A^{-1}(\mathcal{F}_A)$, которое $\lambda/2$ -близко к h , и показываем, что $\bar{g} = g \circ \varphi \in \mathcal{F}_\varepsilon(M, l_2)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.8. *Всякое множество $\mathcal{F}_\varepsilon$ плотно в $C^*(X, l_2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем следовать доказательству предложения 3.5, но опишем все необходимые изменения. В нашей ситуации $\psi_\varepsilon: Y \rightarrow C^*(X, l_2)$ определяется формулой $\psi_\varepsilon(y) = C^*(X, l_2) \setminus \mathcal{F}_\varepsilon(y)$, где $\mathcal{F}_\varepsilon(y)$ обозначает множество всех таких отображений $g \in C^*(X, l_2)$, что $f^{-1}(y)$ имеет котип (q, ε, g) с $q = 1 + d - r$ при $r \leq d$ и с $q = 1$ в противном случае. Чтобы показать, что ψ_ε имеет замкнутый график, мы вместо следствия 3.2 применим аналог следствия 4.2 к пространству $C^*(X, l_2)$. Нам понадобится также следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Пусть $g_0 \in C^*(X, l_2)$, $\alpha: X \rightarrow (0, \infty)$ и $y \in Y$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ $\psi_\varepsilon(y) \cap \overline{B}(g_0, \alpha)$ является Z -множеством в $\overline{B}(g_0, \alpha)$, если $\overline{B}(g_0, \alpha)$ рассматривается как подмножество $C^*(X, l_2)$ в топологии равномерной сходимости.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения частично следует рассуждениям из доказательства [13; лемма 8]. Нам необходимо показать, что всякое отображение $h: Q \rightarrow \overline{B}(g_0, \alpha)$, где Q — гильбертов куб, можно аппроксимировать отображением $h_1: Q \rightarrow \overline{B}(g_0, \alpha)$, избегающим множество $\psi_\varepsilon(y) \cap \overline{B}(g_0, \alpha)$. Итак, фиксируем такое отображение h и $\eta > 0$. Тогда h порождает такое отображение $u: Q \times X \rightarrow l_2$, $u(z, x) = h(z)(x)$, что $\text{dist}(u(z, x), g_0(x)) \leq \alpha(x)$ для всякой точки $(z, x) \in Q \times X$. Выберем такое $\lambda \in (0, 1)$, что $\lambda \sup\{\alpha(x) : x \in f^{-1}(y)\} < \eta/2$, и определим

$u_1 \in C(Q \times f^{-1}(y), l_2)$ формулой $u_1(z, x) = (1 - \lambda)u(z, x) + \lambda g_0(x)$. Для всякой точки $(z, x) \in Q \times f^{-1}(y)$ мы имеем

$$\text{dist}(u_1(z, x), g_0(x)) < \alpha(x) \quad \text{и} \quad \text{dist}(u_1(z, x), u(z, x)) < \frac{\eta}{2}.$$

Пусть $\delta < \inf\{\eta/2, \alpha(x) - \text{dist}(u_1(z, x), g_0(x)) : (z, x) \in Q \times f^{-1}(y)\}$. Согласно лемме 4.7 существует такое отображение $u_2: Q \times f^{-1}(y) \rightarrow l_2$, что $Q \times f^{-1}(y)$ имеет котип (q, ε, u_2) и $\text{dist}(u_1(z, x), u_2(z, x)) < \delta$ для всех $(z, x) \in Q \times f^{-1}(y)$. Тогда

$$\text{dist}(u_2(z, x), g_0(x)) < \alpha(x) \quad \text{и} \quad \text{dist}(u_2(z, x), u(z, x)) < \eta$$

при условии, что $(z, x) \in Q \times f^{-1}(y)$. Равенство $h_2(z)(x) = u_2(z, x)$ определяет такое отображение $h_2: Q \rightarrow C(f^{-1}(y), l_2)$, что $f^{-1}(y)$ имеет котип $(q, \varepsilon, h_2(z))$ для всех $z \in Q$. Можно показать, что проектирование $\text{pr}: \overline{B}(g_0, \alpha) \rightarrow C(f^{-1}(y), l_2)$, $\text{pr}(g) = g|f^{-1}(y)$, открыто по отношению к топологии равномерной сходимости и $\text{pr}(\overline{B}(g_0, \alpha))$ содержит $h_2(Q)$. Отсюда следует, что h_2 может быть поднято до такого отображения $w: Q \rightarrow \overline{B}(g_0, \alpha)$, что w η -близко к h . Заметим, что w избегает множество $\psi_\varepsilon(y) \cap \overline{B}(g_0, \alpha)$, так как $f^{-1}(y)$ имеет котип $(q, \varepsilon, h_2(z))$ для всех $z \in Q$. Это завершает доказательство утверждения.

Вернемся к доказательству предложения 4.8. Для фиксированного отображения $g \in C^*(X, l_2)$ и функции $\alpha: X \rightarrow (0, 1)$ рассмотрим многозначное отображение $\phi: Y \rightarrow C^*(X, l_2)$, $\phi(y) = \overline{B}(g, \alpha)$, где $C^*(X, l_2)$ берется в топологии равномерной сходимости. В соответствии с утверждением выше $\phi(y) \cap \psi_\varepsilon(y)$ является Z -множеством в $\phi(y)$ для всех $y \in Y$. Кроме того, Y является C -пространством, поэтому мы можем применить [14; теорема 1.1] и найти такое отображение $\theta: Y \rightarrow C^*(X, l_2)$, что $\theta(y) \in \overline{B}(g, \alpha) \setminus \psi_\varepsilon(y)$ для всех $y \in Y$. Наконец, определим отображение $\overline{g} \in C^*(X, l_2)$ по формуле $\overline{g}(x) = \theta(f(x))$, $x \in X$. Тогда $\overline{g} \in \overline{B}(g, \alpha) \cap \mathcal{F}_\varepsilon(y)$ для всех $y \in Y$. Следовательно, $\overline{g} \in \overline{B}(g, \alpha) \cap \mathcal{F}_\varepsilon$, что и завершает доказательство предложения 4.8.

Следовательно, доказательство теоремы 1.8 завершено.

§5. Приложение

Дадим некоторые новые приложения наших результатов.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — совершенное отображение паракомпактных пространств и $\dim Y = 0$. Пусть $\{F_i\}$ — последовательность замкнутых подмножеств X и $\{n_i\}$ — такая последовательность целых чисел, что $\dim f|_{F_i} \leq n_i$ для всех i . Если $n \geq n_i$, $i = 1, 2, \dots$, то для всякого $m \geq n + 1$ пространство $C^*(X, \mathbb{R}^m)$ содержит плотное G_δ -подмножество таких отображений g , что для всякого i и всякой d -мерной плоскости $\Pi^d \subset \mathbb{R}^m$, где $m - n_i \leq d \leq m$, для всякой точки $y \in Y$ справедливо неравенство

$$\dim g(f^{-1}(y) \cap F_i) \cap \Pi^d \leq n_i + d - m.$$

Доказательство теоремы 5.1 основано на нижеследующей лемме 5.2. Действительно, для всякого i мы применяем теорему 1.3 к пространствам F_i , $f(F_i)$ и отображению $f|_{F_i}$, чтобы заключить, что $C^*(F_i, \mathbb{R}^m)$ содержит плотное G_δ -множество $\mathcal{H}_i$ таких отображений g , что $\dim g(f^{-1}(y) \cap F_i) \cap \Pi^d \leq n_i + d - m$

для всякой точки $y \in f(F_i)$ и всякой d -плоскости $\Pi^d \subset \mathbb{R}^m$ с $m - n_i \leq d \leq m$. Следовательно, так как согласно лемме 5.2 всякое отображение ограничения

$$\pi_i: C^*(X, \mathbb{R}^m) \rightarrow C^*(F_i, \mathbb{R}^m)$$

открыто, то множество $\mathcal{H}_i = \pi_i^{-1}(\mathcal{H}_i)$ плотно и имеет тип G_δ в $C^*(X, \mathbb{R}^m)$. Тогда пересечение всех $\mathcal{H}_i$ удовлетворяет требованиям теоремы 5.1.

ЛЕММА 5.2. Пусть F – замкнутое подмножество нормального пространства X и $m \geq 1$. Тогда отображение ограничения $\pi: C^*(X, \mathbb{R}^m) \rightarrow C^*(F, \mathbb{R}^m)$, определенное формулой $\pi(g) = g|_F$, открыто, если как $C^*(X, \mathbb{R}^m)$, так и $C^*(F, \mathbb{R}^m)$ рассматриваются одновременно в основной предельной топологии или топологии равномерной сходимости.

Нижеприведенное следствие теоремы 5.1 может быть установлено тем же путем, каким следствие 1.4 было получено из теоремы 1.3.

СЛЕДСТВИЕ 5.3. Пусть $\{F_i\}$ – последовательность замкнутых подмножеств нормального пространства X с $\dim F_i \leq n_i$. Если $m \geq n_i + 1$ для всех i , то $C^*(X, \mathbb{R}^m)$ в топологии равномерной сходимости содержит плотное G_δ -подмножество таких отображений g , что множество $\overline{g(F_i)} \cap \Pi^d$ не более чем $(n_i + d - m)$ -мерно для всякой d -плоскости $\Pi^d \subset \mathbb{R}^m$ с $m - n_i \leq d \leq m$, $i = 1, 2, \dots$.

Наше последнее приложение является аналогом теоремы Фокса [15] об экономном продолжении отображений. Если A – замкнутое подмножество пространства X и $h \in C^*(A, \mathbb{R}^m)$, то $C_h^*(X, \mathbb{R}^m)$ обозначает множество всех таких отображений $g \in C^*(X, \mathbb{R}^m)$, что $g|_A = h$. Всюду ниже $C_h^*(X, \mathbb{R}^m)$ рассматривается как подпространство $C^*(X, \mathbb{R}^m)$ в топологии равномерной сходимости.

СЛЕДСТВИЕ 5.4. Пусть X – нормальное пространство и A – замкнутое G_δ -подмножество X с $\dim(X \setminus A) \leq n$. Тогда для всякого $m \geq n + 1$ и $h \in C^*(A, \mathbb{R}^m)$ существует плотное G_δ -подмножество $C_h^*(X, \mathbb{R}^m)$ таких отображений g , что множество $g(X \setminus A) \cap \Pi^d$ не более чем $(n + d - m)$ -мерно для всякой d -мерной плоскости $\Pi^d \subset \mathbb{R}^m$ с $m - n \leq d \leq m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{F_i\}$ – такая последовательность замкнутых подмножеств X , что $X \setminus A = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ и $h \in C^*(A, \mathbb{R}^m)$. Согласно следствию 1.4 всякое $C^*(F_i, \mathbb{R}^m)$ содержит плотное G_δ -подмножество $\mathcal{H}_i$ таких отображений g , что

$$\dim \overline{g(F_i)} \cap \Pi^d \leq n + d - m \quad (9)$$

для всякой d -плоскости $\Pi^d \subset \mathbb{R}^m$ при $m - n \leq d \leq m$.

Пользуясь тем, что F_i и A – это замкнутые дизъюнктивные подмножества X , можно показать, что всякая проекция $p_i: C_h^*(X, \mathbb{R}^m) \rightarrow C^*(F_i, \mathbb{R}^m)$, $p_i(g) = g|_{F_i}$, является открытым сюръективным отображением, когда оба пространства $C_h^*(X, \mathbb{R}^m)$ и $C^*(F_i, \mathbb{R}^m)$ наделены топологией равномерной сходимости. Следовательно, множество $\mathcal{H}_i = p_i^{-1}(\mathcal{H}_i)$ плотно и имеет тип G_δ в $C_h^*(X, \mathbb{R}^m)$. Так как $C_h^*(X, \mathbb{R}^m)$ обладает свойством Бэра, то $\mathcal{H} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_i$ является плотным G_δ -подмножеством в $C_h^*(X, \mathbb{R}^m)$. Теперь заметим, что условие (9) влечет неравенство $\dim g(X \setminus A) \cap \Pi^d \leq n + d - m$ для всякого отображения $g \in \mathcal{H}$ и всякой d -плоскости $\Pi^d \subset \mathbb{R}^m$ при $m - n \leq d \leq m$.

В заключение мы дадим некоторые гипотезы и замечания.

ГИПОТЕЗА 1. Для отображения конечномерных метризуемых компактов $f: X \rightarrow Y$ пространство $C(X, \mathbb{R}^m)$ содержит плотное G_δ -подмножество таких отображений φ , что для всяких целых чисел d, t, T с $0 \leq t \leq d \leq T \leq m$ и $\dim f + d + 1 \leq m$ и для всякой d -мерной плоскости $\Pi^d \subset \mathbb{R}^m$, параллельной некоторым координатным плоскостям $\Pi^t \subset \Pi^T$ в $\mathbb{R}^m$, всякое множество $f^{-1}(y) \cap \varphi^{-1}(\Pi^d)$, $y \in Y$, имеет не более чем

$$1 + \frac{\dim Y + \dim f + (T - d)(d - t)}{m - \dim f - d}$$

точек.

Отметим, что теорема 1.5 влечет справедливость гипотезы 1 в случае 0-мерного пространства Y .

ГИПОТЕЗА 2. Для отображения конечномерных компактов $f: X \rightarrow Y$ пространство $C(X, \mathbb{R}^m)$ содержит плотное G_δ -подмножество таких отображений φ , что

$$\dim(\varphi(f^{-1}(y)) \cap \Pi^d) \leq \dim f + d - m$$

для всякой d -плоскости $\Pi^d \subset \mathbb{R}^m$ с $m - \dim f \leq d \leq m$ и всякой точки $y \in Y$.

Теорема 1.3 влечет справедливость гипотезы 2 в случае 0-мерного пространства Y . Как и в случае теоремы 1.3, достаточно установить гипотезу 2 в специальном случае $d = m - \dim f$. Гипотеза 2 справедлива при $\dim f = 0$ — это теорема Успенского [16] о легких отображениях. Случай совершенного отображения f паракомпактных пространств с $\dim f > 0$ рассматривается в теореме Тункали–Вылова в работе [17].

Пусть $f: X \rightarrow Y$, $\varphi \in C(X, \mathbb{R}^m)$ и t, d, T — такие целые числа, что $0 \leq t \leq d \leq T \leq m$ и $d - t + 1 \leq q$. Ниже мы рассматриваем множество $B_{q,d,t,T}^f(\varphi)$, состоящее из всех точек $(y, y_1, \dots, y_q) \in Y \times (\mathbb{R}^m)^q$, удовлетворяющих следующему условию: существуют такие точки $x_1, \dots, x_q \in f^{-1}(y)$ с $x_i \neq x_j$ для $i \neq j$, что $y_i = \varphi(x_i)$ и все точки y_i , $i = 1, \dots, q$, принадлежат некоторой d -плоскости в $\mathbb{R}^m$, параллельной некоторым координатным плоскостям $\Pi^t \subset \Pi^T \subset \mathbb{R}^m$.

ГИПОТЕЗА 3. Для отображения конечномерных метризуемых компактов $f: X \rightarrow Y$ пространство $C(X, \mathbb{R}^m)$ содержит плотное G_δ -подмножество $\mathcal{H}$ таких отображений φ , что

$$\dim B_{q,d,t,T}^f(\varphi) \leq \dim Y + \dim f + (T - d)(d - t) - (q - 1)(m - \dim f - d)$$

для всех целых чисел d, t, T, q , удовлетворяющих условиям $0 \leq t \leq d \leq T \leq m$, $\dim f + d + 1 \leq m$ и $d - t + 1 \leq q$.

Уточним, что если в гипотезе 3 правая часть неравенства ≤ -1 , то это означает, что множество $B_{q,d,t,T}^f(\varphi)$ пусто. Именно условия, при которых множество $B_{q,d,t,T}^f(\varphi)$ пусто, обсуждаются в гипотезе 1. Если $d = 0$, то множество $B_{q,0,0,T}^f(\varphi)$ не зависит от T . В этом случае оно гомеоморфно множеству $B_q^f(\varphi) = \{(y, z) \in Y \times \mathbb{R}^m : |f^{-1}(y) \cap \varphi^{-1}(z)| \geq q\}$. В случае $d = 0$ и одноточечного пространства Y гипотеза 3 была получена Гуревичем в 1933 году [18] (напомним, что отображения $\varphi \in \mathcal{H}$ из теоремы Гуревича называются *регулярно ветвящимися отображениями* [19]). Параметрическая версия теоремы Гуревича была получена в [20; теорема 1.1]. Согласно терминологии работы [20] неравенство из гипотезы 3 удовлетворяется при $d = 0$ для всех $q \geq 1$ тогда и только тогда, когда отображение φ

является f -регулярно ветвящимся. Так как согласно [20; теорема 1.1] пространство $C(X, \mathbb{R}^m)$ содержит плотное G_δ -подмножество f -регулярно ветвящихся отображений, то гипотеза 3 справедлива при $d = 0$. Подчеркнем, что при $d \geq 1$ даже в случае одноточечного пространства Y , т.е. непараметрическая версия, гипотеза открыта.

Для отображений $f_i: X_i \rightarrow \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, q$, и целых чисел $0 \leq t \leq d \leq T \leq m$ пусть $B_{d,t,T}(f_1, \dots, f_q)$ — это множество всех таких точек $(y_1, \dots, y_q) \in (\mathbb{R}^m)^q$, что точки $y_i = f(x_i)$, $i = 1, \dots, q$, принадлежат некоторой d -плоскости в $\mathbb{R}^m$, параллельной некоторым координатным плоскостям $\Pi^t \subset \Pi^T$. Пусть также

$$C_{d,t,T}(f_1, \dots, f_q) = \{(x_1, \dots, x_q) \in X_1 \times \dots \times X_q : (f(x_1), \dots, f(x_q)) \in B_{d,t,T}(f_1, \dots, f_q)\}.$$

ГИПОТЕЗА 4. Пусть целые числа $n_1, \dots, n_q$, m , d , t , T удовлетворяют неравенствам $0 \leq t \leq d \leq T \leq m$, $0 \leq n_1, \dots, 0 \leq n_q$, $n_1 + 1 + d \leq m, \dots, n_q + 1 + d \leq m$, $d - t + 1 \leq q$ и

$$n_1 + \dots + n_q \geq (m - d)(q - 1) - (T - d)(d - t).$$

Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и такие отображения $f_i: \Delta^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, q$, что множество $B_{d,t,T}(g_1, \dots, g_q)$ непусто для любых таких отображений $g_i: \Delta^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^m$, что g_i и f_i ε -близки при всех $i = 1, \dots, q$.

В простейшем случае ($q = 1$, $n_1 = 0$, $n_2 = m$, $d = 0$) утверждение гипотезы 4 — это в точности теорема Александрова о том, что тождественное отображение шара на себя является существенным. При $d = 0$ гипотеза 4 верна в общем случае (см., например, [21; следствие 3], [22; лемма 6.3, с. 65]). В случае $d = q - 1$, $t = 0$ и $T = m$ утверждение гипотезы 4 доказал Болтянский [9; лемма 9] (основным элементом его доказательства является то, что если для некоторого n -мерного полиэдра X множество всех k -регулярных отображений X в $\mathbb{R}^m$ плотно в $C(X, \mathbb{R}^m)$, то справедливо неравенство $m \geq nk + n + k$).

ГИПОТЕЗА 5. Пусть целые числа $n_1, \dots, n_q$, m , d , t , T удовлетворяют неравенствам $0 \leq t \leq d \leq T \leq m$, $0 \leq n_1, \dots, 0 \leq n_q$, $n_1 + 1 + d \leq m, \dots, n_q + 1 + d \leq m$, $d - t + 1 \leq q$. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и такие отображения $f_i: \Delta^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, q$, что

$$\dim C_{d,t,T}(g_1, \dots, g_q) \geq n_1 + \dots + n_q - (m - d)(q - 1) + (T - d)(d - t)$$

для любых таких отображений $g_i: \Delta^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^m$, что g_i и f_i ε -близки при всех $i = 1, \dots, q$.

Для $d = 0$ утверждение гипотезы 5 было установлено в [21; следствие 3].

Завершим все следующей проблемой, где Δ_n^N обозначает n -мерный остов N -мерного симплекса Δ^N .

ПРОБЛЕМА. Найти все такие целые числа n , m , q , d , t , T , что $0 \leq n$, $0 \leq t \leq d \leq T \leq m$, $n + 1 + d \leq m$, $d - t + 1 \leq q$,

$$n \geq (m - n - d)(q - 1) - (T - d)(d - t) \quad (n, m, q, d, t, T)$$

и выполнено следующее условие: существует такое натуральное N , что для всякого отображения $f: \Delta_n^N \rightarrow \mathbb{R}^m$ имеются попарно дизъюнктные симплексы $\sigma_1, \dots, \sigma_q \subset \Delta_n^N$, образы которых при f пересекают некоторую d -мерную

плоскость $\Pi^d \subset \mathbb{R}^m$, параллельную некоторым координатным плоскостям $\Pi^t \subset \Pi^T$.

Заметим, что если эта проблема имеет положительное решение для некоторых чисел n, m, q, d, t, T , удовлетворяющих предположениям проблемы, то следствие 1.6 нельзя улучшить не только на уровне плотного множества отображений, а даже на уровне *существования* одного малократного отображения, причем уже в классе полиэдров. Большинство результатов о существовании такого числа N получили для $d = 0$ ван Кампен и Флорес [23], [24] ($q = 2$ и $N = 2n + 2$), Саркария [25] (q простое и $N = qn + 2q - 2$), Воловиков [26] (q – степень простого числа и $N = qn + 2q - 2$), Богатый [21; следствие 11] ($q = n + 1$ и $N \leq 2n^2 + 5n$). Другой результат Богатого [3], [27] дает такое N при $d = q - 1, t = 0, T = m$ с нечетным q . Живайевич получил [28] некоторую теорему о вложениях двудольного графа $K_{6,6}$ в $\mathbb{R}^3$, которая влечет положительное решение проблемы для $n = 1, m = 3, t = 0, T = 3, q = 4$ и $N = 11$.

В случае $d = q - 1, q = 2, t = 0$ и $T = m$ не существует числа N , удовлетворяющего условиям проблемы (см. [9]).

Сформулированной проблеме можно дать более общую постановку: для данного семейства целых чисел n, q, d, t, T найти наибольшее число m , для которого такое число N существует. Тогда возникает задача нахождения наименьшего такого числа N . Более сложной является задача описания в этом случае минимальных таких подполиэдров в Δ_n^N . При $n = 1, d = 0, q = 2, m = 2$ такими минимальными полиэдрами являются графы Куратовского – полный граф K_5 и полный двудольный граф $K_{3,3}$.

Отметим, что имеется тесная связь проблемы с гипотезами о различных формах теоремы Тверберга [3], [28], [29]. Хорошо известно также, что k -регулярные отображения тесно связаны с интерполяционной и аппроксимационной проблемами [30], [31]. В связи с этим было бы важно найти приложения отображений, описываемых теоремами 1.5 и 1.8, в интерполяционной и аппроксимационной проблемах.

Список литературы

1. Федорчук В. В., Чигогидзе А. Ч. Абсолютные ретракты и бесконечномерные многообразия. М.: Наука, 1992.
2. Богатый С. А. Цветная теорема Тверберг // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1999. Т. 3. С. 14–19.
3. Богатый С. А. Гипотеза Борсука, препятствие Рышкова, интерполяция, аппроксимация Чебышева, трансверсальная теорема Тверберга, задачи // Труды МИАН. 2002. Т. 239. С. 63–82.
4. Roberts J. A theorem on dimension // Duke Math. J. 1941. V. 8. P. 565–574.
5. Berkowitz H., Roy P. General position and algebraic independence // Geometric Topology. Proceedings of the Geometry Topology Conference, Park City, UT / ed. L. C. Glaser, T. B. Rushing. New York: Springer, 1975. P. 9–15.
6. Goodsell T. Projections of compacta in $\mathbb{R}^n$ // Ph.D. thesis. Provo, UT: Brigham Young Univ., 1997.
7. Goodsell T. Strong general position and Menger curves // Topology Appl. 2002. V. 120. P. 47–55.
8. Wright D. G. Geometric taming of compacta in E^n // Proc. Amer. Math. Soc. 1982. V. 86. № 4. P. 641–645.
9. Болтянский В. Г. Отображения компактов в евклидовы пространства // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1959. Т. 23. С. 871–892.
10. Munkers J. Topology. Englewood Cliffs, NY: Prentice Hall, 1975.

11. *Repovš D., Semenov P.* Continuous selections of multivalued mappings. Dordrecht: Kluwer, 1998. (Math. Appl. V. 455.)
12. *Michael E.* Continuous selections avoiding a set // *Topology Appl.* 1988. V. 28. P. 195–213.
13. *Tuncali M., Valov V.* On dimensionally restricted maps // *Fund. Math.* 2002. V. 175. P. 35–52.
14. *Gutsev V., Valov V.* Dense families of selections and finite-dimensional spaces // *Set-Valued Anal.* 2003. V. 11. P. 373–391.
15. *Fox R.* Extension of homeomorphisms into Euclidean and Hilbert parallelotopes // *Duke Math. J.* 1941. V. 8. P. 452–456.
16. *Uspenskij V. V.* A remark on a question of R. Pol concerning light maps // *Topology Appl.* 2000. V. 103. № 3. P. 291–293.
17. *Tuncali M., Valov V.* On finite-dimensional maps. II // *Topology Appl.* 2003. V. 132. P. 81–87.
18. *Hurewicz W.* Über Abbildungen von endlichdimensionalen Räumen auf Teilmengen Cartesischer Räume // *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl.* 1933. V. 4. P. 754–768.
19. *Dranišnikov A. N., Repovš D., Ščepin E. V.* On intersections of compacta of complementary dimensions in Euclidean space // *Topol. Appl.* 1991. V. 38. P. 237–253.
20. *Tuncali M., Valov V.* On regularly branched maps // *Topology Appl.* 2004. V. 145. P. 119–145.
21. *Богатый С. А.* Геометрия отображений в евклидовом пространстве // *УМН.* 1998. Т. 53. № 5. С. 27–56.
22. *Boltjanski V., Martini H., Soltan V.* Geometric methods and optimization problems. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999.
23. *van Kampen E. R.* Komplexe in euklidischen Räumen // *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg.* 1932. V. 9. P. 72–78.
24. *Flores A.* Über n -dimensionale Komplexe, die im $\mathbb{R}_{2n+1}$ absolut selbstverschlungen sind // *Ergeb. Math. Kolloq.* 1935. V. 6. P. 4–7.
25. *Sarkaria K. S.* A generalized van Kampen–Flores theorem // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1991. V. 111. № 2. P. 559–565.
26. *Воловиков А. Ю.* К теореме ван Кампена–Флореса // *Матем. заметки.* 1996. Т. 59. № 5. С. 663–670.
27. *Богатый С. А.* k -регулярные отображения в евклидовом пространстве и задача Борсука–Болтянского // *Матем. сб.* 2002. Т. 193. № 1. С. 73–82.
28. *Živaljević R. T.* The Tverberg–Vrećica problem and the combinatorial geometry on vector bundles // *Israel J. Math.* 1999. V. 111. P. 53–76.
29. *Tverberg H., Vrećica S.* On generalizations of Radon's theorem and the ham sandwich theorem // *European J. Combin.* 1993. V. 14. P. 259–264.
30. *Болтянский В. Г., Рышков С. С., Шашкин Ю. А.* О k -регулярных вложениях и их применении к теории приближения функций // *УМН.* 1960. Т. 15. № 6. С. 125–132.
31. *Шашкин Ю. А.* Интерполяционные семейства функций и вложения множеств в евклидовы и проективные пространства // *Докл. АН СССР.* 1967. V. 174. № 5. P. 1030–1032.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова;
Nipissing University, Canada
E-mail: bogaty@mech.math.msu.su
veskov@nipissingu.ca

Поступила в редакцию
24.02.2005