Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Дубинин, Лемма Шварца и оценки коэффициентов для регулярных функций со свободной областью определения, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 11, 53–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1391>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 12:38:15

УДК 517.54

В. Н. Дубинин

Лемма Шварца и оценки коэффициентов для регулярных функций со свободной областью определения

Используя достаточное условие однолиственности и классические свойства конформных отображений, получены новые версии неравенств Шварца, а также их уточнения и дополнения для регулярных функций со свободной областью определения. Приводятся оценки коэффициентов в разложениях таких функций с приложениями к неравенствам для алгебраических полиномов.

Библиография: 24 названия.

Введение

Пусть функция

$$w = f(z) = c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \dots$$

регулярна в круге $U := \{z : |z| < 1\}$, и пусть $|f(z)| < 1$ при $z \in U$. Согласно классической *внутренней лемме Шварца* для любой точки z из круга U справедливо неравенство

$$|f(z)| \leq |z|^n. \quad (1)$$

Следовательно, имеем неравенство

$$|c_n| \leq 1. \quad (2)$$

Равенство в (1) в одной точке $z \neq 0$ влечет за собой равенство во всем круге U , при этом $f(z) \equiv c_n z^n$, $|c_n| = 1$. Равенство в (2) также достигается только в случае $f(z) \equiv c_n z^n$, $|c_n| = 1$. Пусть дополнительно функция $w = f(z)$ имеет в некоторой точке z_0 , $|z_0| = 1$, угловой предел $f(z_0)$, $|f(z_0)| = 1$. Тогда по лемме Жюлиа–Вольфа существует угловая производная $f'(z_0)$, $|f'(z_0)| \leq \infty$ [1; с. 79–83]. Из неравенства (1) вытекает *граничная лемма Шварца*:

$$|f'(z_0)| \geq n. \quad (3)$$

Хорошо известны многочисленные применения неравенств (1)–(3) в геометрической теории функций [2], а их уточнения и обобщения до сих пор встречаются в литературе (см., например, [3]–[5]). Естественно поставить вопрос: при каких нарушениях регулярности функции $w = f(z)$ в круге U по-прежнему будут иметь место

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00099) и ДВО РАН (грант № 05-III-A-01-039).

неравенства (1)–(3)? Так, из принципа максимума модуля следует, что если функция $w = f(z)$ регулярна на открытом подмножестве G круга U , $0 \in G$, в некоторой окрестности точки $z = 0$ справедливо разложение $f(z) = c_n z^n + \dots$, $c_n \neq 0$, $n \geq 1$, и если для любой граничной точки $\zeta \in \partial G$ выполняется оценка

$$\overline{\lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ z \in G}}} |f(z)| \leq |\zeta|^n, \quad (4)$$

то вновь справедливы неравенства (1), (2). Множество G при этом неизвестное (“свободное”). В настоящей работе рассматриваются новые версии неравенств Шварца для указанных выше функций, но с заменой правой части условия (4) на $|\zeta|^{n+1}$ (при той же нормировке вначале). Необходимость изучения таких функций вытекает, в частности, из недавних работ [6], [7], в которых предлагается новый подход к получению неравенств для полиномов и рациональных функций, развитый в последующем в различных направлениях [8]–[11]. Следуя этому подходу, мы приводим здесь достаточное условие однолистности, имеющее самостоятельный интерес (§1). Во втором параграфе с помощью условия однолистности и классических свойств конформных отображений получены оценки модуля $|f(z)|$ сверху и снизу, а также другие результаты, которые можно трактовать как уточнения и дополнения неравенств (1)–(3). В §3 дается обзор неравенств для коэффициентов регулярных функций со свободной областью определения, вытекающих из достаточного условия однолистности. При этом рассматриваются как разложения функции в начале координат, так и разложения в граничных точках. В качестве следствий приводятся некоторые утверждения для известных классов алгебраических полиномов.

§1. Достаточное условие однолистности

Следующее ниже простое условие однолистности регулярной функции появилось, по существу, в работе [6; §2]. Однако предлагаемая там форма изложения предназначена для алгебраических полиномов и неудобна для произвольных классов регулярных функций.

ТЕОРЕМА А. Пусть функция $w = f(z)$ регулярна на открытом множестве $B \subset \mathbb{C}_z$, и пусть при приближении точки z к границе множества B все предельные значения модуля $|f(z)|$ больше либо равны единице. Предположим, что функция $w = f(z)$ отображает некоторую точку z_0 множества B и только ее в начало координат, причем $f'(z_0) \neq 0$. Тогда функция $w = f(z)$ конформно и однолистно отображает связную компоненту множества $\tilde{B} := \{z \in B : |f(z)| \neq 1\}$, содержащую точку z_0 , на круг $|w| < 1$, а для любой другой связной компоненты D множества $\tilde{B}$ справедливо включение $f(D) \subset \{w : |w| > 1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathcal{D}$ совокупность связных компонент множества $\tilde{B}$. Ввиду непрерывности функции $w = f(z)$ множество $\tilde{B}$ открыто. Следовательно, множества D из совокупности $\mathcal{D}$ являются областями. Рассмотрим область D из $\mathcal{D}$, содержащую точку z_0 , и пусть w^* – произвольная фиксированная точка круга $|w| < 1$. Из принципа аргумента заключаем, что в условиях теоремы число нулей функции $f(z) = w^*$ в области D есть величина, не зависящая от

выбора точки w^* в круге $|w| < 1$. Поскольку для точки $w^* = 0$ в данном случае это число равно единице, то функция $w = f(z)$ однолистно покрывает круг $|w| < 1$ областью D . Покажем, что $f(D) = \{w : |w| < 1\}$. Действительно, если в некоторой точке z' области D выполняется $|f(z')| \geq 1$, то, взяв непрерывную кривую λ , лежащую в D и соединяющую z_0 с z' , получим непрерывную кривую $f(\lambda)$, лежащую в $f(D)$ и соединяющую точки $w = 0$ и $f(z')$. Последнее невозможно, так как в области D имеем $|f(z)| \neq 1$. Пусть теперь область D не содержит точку z_0 . Если при этом $f(D) \cap \{w : |w| < 1\} \neq \emptyset$, то, как и выше, из принципа аргумента заключаем, что $f(D) \supset \{w : |w| < 1\}$. Это включение противоречит тому, что точка z_0 и только она переходит при отображении $w = f(z)$ в точку $w = 0$. Теорема доказана.

В дальнейшем функцию $w = f(z)$, удовлетворяющую условиям теоремы А, будем называть *допустимой*. Успех в приложениях теоремы А зависит от удачного выбора допустимой функции. Желая показать широту применения данного условия однолистности, рассмотрим здесь несколько приемов построения допустимой функции по заданной функции из другого класса (см. также [6]–[11]).

1. *Регулярные в круге функции, не обращающиеся в нуль*. Пусть функция $w = g(z)$, $z \in B = U$, удовлетворяет всем условиям теоремы А, кроме одного – она не обращается в нуль ни в одной точке круга U . Тогда функция

$$f(z) = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} g(z)$$

является допустимой при любой фиксированной точке z_0 из круга U .

2. *Лишние нули*. Пусть функция $w = g(z)$, $z \in B = U$, удовлетворяет всем условиям теоремы А, кроме одного – помимо простого нуля z_0 она имеет еще нули в точках $z_k \in U$ кратности p_k , $k = 1, \dots, n$. Тогда функция

$$f(z) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{1 - \bar{z}_k z}{z - z_k} \right)^{p_k} g(z)$$

допустима.

3. *Ограниченные в круге функции*. Пусть функция $w = g(z)$ регулярна в круге U и $|g(z)| < 1$ при $z \in U$. Предположим, что точка $z_0 \in U$ является нулем функции $w = g(z)$ кратности n . Тогда функция

$$f(z) = \left(\frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right)^{n+1} \frac{1}{g(z)},$$

$z \in B = \{z \in U : g(z) \neq 0\} \cup \{z_0\}$, допустима. Согласно теореме А она конформно и однолистно отображает связную компоненту множества $B \setminus \{z \in U : |f(z)| = 1\}$, содержащую точку z_0 , на круг $|w| < 1$, а любую другую связную компоненту этого множества она отображает в множество $|w| > 1$.

4. *Случай произвольной односвязной области гиперболического типа*. Если изначально функция $w = g(z)$ задана в односвязной области G и если функция $z = z(\zeta)$ конформно и однолистно отображает круг $|\zeta| < 1$ на область G , то задача сводится к построению функции в круге $|\zeta| < 1$ по заданной функции $\tilde{g}(\zeta) = g(z(\zeta))$, $|\zeta| < 1$.

5. *Функции с вещественными граничными значениями.* Пусть функция $\omega = g(z)$ мероморфна в области Δ и имеет в этой области единственный простой полюс в точке z_0 . Предположим, что при приближении точки ζ к границе области Δ все предельные значения функции $g(\zeta)$ лежат на отрезке $[-1, 1]$. Обозначим через

$$\zeta = \Phi(\omega) = \omega + \sqrt{\omega^2 - 1}$$

ту ветвь аналитической функции, обратной функции Жуковского, которая конформно и однолистно отображает внешность отрезка $[-1, 1]$ на круг $|\zeta| < 1$. Суперпозиция

$$f(z) = \Phi(g(z)),$$

заданная на множестве $B = \{z \in \Delta : g(z) \notin [-1, 1]\}$, допустима с данной точкой z_0 .

В отличие от предыдущих пунктов этот случай требует некоторого пояснения. Во-первых, если порядок полюса $z = z_0$ больше единицы либо имеются другие полюсы функции $\omega = g(z)$, то $\Phi(g(z))$ конечно не допустима. Однако в случае $\Delta = U$ “снятие” лишних нулей функции $\Phi(g(z))$ осуществляется с помощью приема п. 2 умножением на произведение Бляшке. В случае, когда область Δ гиперболического типа, привлекаем конформное отображение (п. 4). Функции, указанные в названии п. 5, возникают в задачах о полиномах и рациональных функциях. Например, если $R(z)$ – рациональная функция, то функция $g(z) = R(1/z) + \overline{R(\bar{z})}$ принимает вещественные значения на любой дуге окружности $|z| = 1$ и, кроме того, возможны дальнейшие преобразования этой функции в допустимую, если имеется некоторая информация о нулях либо полюсах функции $R(z)$. Иногда вещественность функции задается априори. Многочисленные примеры использования этого приема даны в работах [6]–[11]. В заключение отметим, что указанные приемы построения допустимой функции необходимо рассматривать не отдельно, а в сочетании одного с другим.

§ 2. Уточнения и дополнения неравенств Шварца

Начнем с уточнения неравенства (1) в случае, когда функция $w = f(z)$ регулярна только на некотором “свободном” подмножестве круга U , но на части границы этого подмножества, лежащей в круге U , потребуем дополнительное ограничение на рост $w = f(z)$. Пусть $k(\zeta) = \zeta(1 - \zeta)^{-2}$, $|\zeta| < 1$, – функция Кёбе. При фиксированном комплексном c , $0 < |c| \leq 1$, рассмотрим функцию

$$w = d(z, c) := \begin{cases} c, & z = 0, \\ \frac{z}{k^{-1}((1/|c|)k((|c|/c)z))}, & z \neq 0, \end{cases}$$

заданную на множестве

$$U(c) := U \setminus \left[-\frac{c}{|c|} (2|c|^{-1} - 1 - 2\sqrt{|c|^{-1}(|c|^{-1} - 1)}), -\frac{c}{|c|} \right].$$

Заметим, что при $z \neq 0$ имеем $d(|z|, |c|) = |z|/t_0$, где t_0 – корень уравнения

$$\frac{t}{(1-t)^2} = \frac{|z|}{|c|(1-|z|)^2},$$

лежащий на промежутке $(0, 1)$. Поскольку левая часть уравнения строго возрастает на $(0, 1)$, то для любого $z \neq 0$ выполняется неравенство $|z| \leq t_0$ с равенством только для $|c| = 1$. Таким образом,

$$|z| < d(|z|, |c|) \leq 1,$$

причем равенство достигается лишь в случае $|c| = 1$. Следующее утверждение дополняет и уточняет классическое неравенство (1).

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $w = f(z)$ регулярна на открытом множестве G , $0 \in G \subset U$, и в некоторой окрестности точки $z = 0$ справедливо разложение $f(z) = c_n z^n + \dots$, $c_n \neq 0$, $n \geq 1$. Пусть, дополнительно, для любой точки ζ границы множества G выполняется оценка

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ z \in G}} |f(z)| \leq |\zeta|^{n+1}. \quad (5)$$

Тогда $|c_n| \leq 1$ и на множестве G справедливо неравенство

$$|f(z)| \leq |z|^n d(|z|, |c_n|). \quad (6)$$

Равенство $|c_n| = 1$ достигается только для функций $f(z) \equiv c_n z^n$ ($G = U$), а равенство в (6) для точки $z \in G$, $z \neq 0$, имеет место в том и только том случае, когда $f(z) \equiv z^n d(e^{i\theta} z, c_n) = c_n z^n + \dots$ ($G = U(e^{-i\theta} c_n)$) и при $|c_n| \neq 1$ $\arg z = \arg c_n - \theta$, где θ — произвольное вещественное число, а c_n — комплексное число, $0 < |c_n| \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуя §1, п. 3, рассмотрим допустимую функцию $w = z^{n+1}/f(z)$, заданную на множестве $B = \{z \in G : f(z)/z^n \neq 0\}$. Согласно теореме А для любой фиксированной точки z множества G либо имеем

$$1 \leq \left| \frac{z^{n+1}}{f(z)} \right|, \quad (7)$$

либо точка z является образом некоторой точки w из круга $|w| < 1$ при отображении функцией $z = h(w)$, обратной $w = z^{n+1}/f(z)$. Функция $z = h(w) = c_n w + \dots$ регулярна и однолистка в круге $|w| < 1$ и $|h(w)| < 1$, когда $|w| < 1$. По лемме Шварца $|c_n| \leq 1$ с равенством только для функций $h(w) \equiv c_n w$, $|c_n| = 1$. Более того, справедливо неравенство

$$|h(w)| \leq |c_n w| \left(\frac{1 - |h(w)|}{1 - |w|} \right)^2, \quad |w| < 1 \quad (8)$$

(см. [12], [6; §1]), причем знак равенства в точке $w \neq 0$ достигается в случае $|c_n| = 1$ только для функций $h(w) \equiv c_n w$, а в случае $|c_n| < 1$ — только для функций Пика, отображающих круг $|w| < 1$ на круг с радиальным разрезом, и в точках w , отображаемых этими функциями в противоположный разрезу луч, т.е. когда

$$h(w) \equiv e^{-i\theta} \frac{c_n}{|c_n|} k^{-1}(|c_n| k(e^{i\theta} w)) = c_n w + \dots, \quad (9)$$

$|w| < 1$, $\arg w = -\theta$, где θ – вещественное число. Перепишем неравенство (8) в виде

$$\frac{t_0}{(1-t_0)^2} = \frac{|h(w)|}{|c_n|(1-|h(w)|)^2} \leq \frac{|w|}{(1-|w|)^2}.$$

Отсюда

$$t_0 \leq |w| = \left| \frac{z^{n+1}}{f(z)} \right|.$$

Сравнивая это неравенство с (7), заключаем, что оно выполняется для любых точек z множества G и равносильно неравенству (6). Если теперь точка $z \in G$, $z \neq 0$, и в (6) имеет место знак равенства, то соотношение (7) невозможно и, следовательно, выполняется равенство в (8), которое ведет к тождеству $f(z) \equiv z^n d(e^{i\theta} z, c_n)$, причем в случае $|c_n| \neq 1$ необходимо, чтобы $\arg z = \arg c_n - \theta$, где θ – вещественное число. Указанное тождество справедливо на некоторой связной компоненте множества G , содержащей начала координат. Ввиду (5) эта компонента совпадает с множеством $U(e^{-i\theta} c_n)$. Теорема доказана.

Схема доказательства теоремы 1 применима также для получения оценки $|f(z)|$ снизу. Именно справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Если функция $w = f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, то круг

$$|z| < 2|c_n|^{-1} - 1 - 2\sqrt{|c_n|^{-1}(|c_n|^{-1} - 1)} \quad (10)$$

целиком принадлежит множеству $G_0 = \{z \in G : |z^{n+1}/f(z)| < 1\}$. Кроме того, в этом круге при $z \neq 0$ справедливо неравенство

$$|f(z)| \geq |z|^n d(-|z|, |c_n|) = \frac{|z|^{n+1}}{t_1}, \quad (11)$$

где t_1 – корень уравнения

$$\frac{t}{(1+t)^2} = \frac{|z|}{|c_n|(1+|z|)^2}, \quad (12)$$

лежащий на промежутке $(0, 1)$.

Равенство в (11) для точки $z \neq 0$ из круга (10) достигается лишь в случае, когда $f(z) \equiv z^n d(e^{i\theta} z, c_n)$ ($G = U(e^{-i\theta} c_n)$) и при $|c_n| \neq 1$ $\arg z = \arg c_n - \theta + \pi$, где θ – произвольное вещественное число, а c_n – комплексное число, $0 < |c_n| \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для функции $z = h(w) = c_n w + \dots$ из доказательства теоремы 1 известна следующая оценка

$$|h(w)| \geq |c_n w| \left(\frac{1 + |h(w)|}{1 + |w|} \right)^2, \quad |w| < 1, \quad (13)$$

причем знак равенства в точке $w \neq 0$ достигается, как и выше, в случае $|c_n| = 1$ только для функций $h(w) \equiv c_n w$, а в случае $|c_n| < 1$ – только для функций (9)

и $|w| < 1$, но если $\arg w = -\theta + \pi$, где θ – вещественное число [6], [12]. Отсюда следует, в частности, что круг (10) принадлежит связной компоненте множества G' , содержащей начало координат (см. также [13; с. 81]). Пусть теперь точка $z = h(w) \neq 0$ принадлежит указанному кругу. Тогда уравнение (12) имеет на промежутке $(0, 1)$ единственное решение t_1 . Из неравенства (13) следует неравенство (11) с соответствующим утверждением о знаке равенства. Теорема доказана.

Заметим, что в случае $G = U$, $n = 1$ круг (10) существенно меньше круга, где функция $w = f(z)$ является однолистной, и, следовательно, оценки снизу $|f(z)|$ в таком круге можно получить также обычными методами [13; ч. 12]. Приведем еще два замечания для случая, когда множество G совпадает с кругом U . В этом случае оценка (5) превращается в условие ограниченности $|f(z)| < 1$. Во-первых, если известны некоторые нули функции $f(z)$, пусть это $z_k \neq 0$ кратности соответственно p_k , $k = 1, \dots, m$, то, применяя неравенство (6) к функции $\prod_{k=1}^m [(1 - \bar{z}_k z)/(z - z_k)]^{p_k} f(z)$, приходим к следующему уточнению неравенства Шварца:

$$|f(z)| \leq \left[|z|^n \prod_{k=1}^m \left| \frac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k z} \right|^{p_k} \right] d \left(|z|, \left| c_n \prod_{k=1}^m z_k^{-p_k} \right| \right).$$

Далее, если функция $w = f(z) = c_n z^n + c_{n+l} z^{n+l} + \dots$, $c_n \neq 0$, $c_{n+l} \neq 0$, $n \geq 1$, $l \geq 1$, регулярна в круге U и $|f(z)| < 1$ при $z \in U$, то для любой точки $z \in U$ справедливо неравенство

$$|f(z)| \leq |z|^n \frac{|z|^l d(|z|, |c_{n+l}|/(1 - |c_n|^2)) + |c_n|}{1 + |c_n| |z|^l d(|z|, |c_{n+l}|/(1 - |c_n|^2))}. \quad (14)$$

Знак равенства в (14) имеет место, когда

$$f(z) = z^n \frac{c_n + z^l}{1 + \bar{c}_n z^l}, \quad 0 < |c_n| < 1, \quad \arg z^l = \arg c_n.$$

Действительно, ввиду условия равенства в (2) и $c_{n+l} \neq 0$ справедливо неравенство $|c_n| < 1$. Применяя теорему 1 к функции

$$\tilde{f}(z) = \frac{f(z)/z^n - c_n}{1 - \bar{c}_n f(z)/z^n} = \frac{c_{n+l}}{1 - |c_n|^2} z^l + \dots,$$

получаем неравенство

$$\left| \frac{f(z)/z^n - c_n}{1 - \bar{c}_n f(z)/z^n} \right| \leq |z|^l d \left(|z|, \frac{|c_{n+l}|}{1 - |c_n|^2} \right),$$

которое после простых преобразований ведет к (14) (см., например, [2; гл. 4, § 5]). Неравенство (14) сильнее, чем (6), и оно уточняет неравенство (15) работы [5], но мы не останавливаемся на нем подробно, так как этим стандартным путем можно получить и более сильное соотношение.

Из теоремы 1 вытекает следующее уточнение “граничной леммы Шварца”.

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция $w = f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, и пусть точка $z = 1$ является предельной точкой множества $E := G \cap (0, 1)$. Тогда

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in E}} \left| \frac{f(z) - 1}{z - 1} \right| \geq n + 1 - \sqrt{|c_n|}. \quad (15)$$

Знак равенства достигается для функций $f(z) \equiv z^n d(z, c_n)$, где $0 < c_n \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом неравенства (6) имеем

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in E}} \left| \frac{f(z) - 1}{z - 1} \right| \geq \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in E}} \frac{1 - |f(z)|}{1 - |z|} \geq \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1 - r^n d(r, |c_n|)}{1 - r} = n + 1 - \sqrt{|c_n|}.$$

Случай равенства проверяется непосредственно. Теорема доказана.

Если функция $w = f(z)$ регулярна во всем круге U ($G = U$), то для предела слева в (15) справедлива более сильная, чем (15), оценка, вытекающая из неравенства (14). В случае, когда в точке $z = 1$ существует угловой предел $f(1) = 1$, неравенство (15) дает оценку снизу для модуля угловой производной $f'(1)$.

Условие $|f(z)| < 1$ в классической лемме Шварца можно трактовать как требование: “все предельные граничные значения функции $w = f(z)$ лежат в круге $|w| \leq 1$ ”. Пусть теперь все такие значения принадлежат множеству $|w| \geq 1$, функция $f(z) = c_n z^n + \dots$, $c_n \neq 0$, $n \geq 1$, регулярна в круге U , и пусть дополнительно $f(z) \neq 0$ на множестве $U \setminus \{0\}$. Применяя теорему 1 к функции $w = z^{n+1}/f(z)$ ($G = U$), получаем оценки

$$|c_n| \geq 1, \quad |f(z)| \geq \frac{|z|^n}{d(|z|, |1/c_n|)} \geq |z|^n, \quad |z| < 1. \quad (16)$$

Как показывает пример функции Бляшке $w = z^n(z - a)/(1 - \bar{a}z)$, $0 < |a| < 1$, требование $f(z) \neq 0$ на $U \setminus \{0\}$ в данных оценках существенно.

Для функции $w = f(z)$, заданной в круге U , введем обозначение

$$\Omega(f, r) = \{w = f(z) : r < |z| < 1\} \cup (\overline{\mathbb{C}_w} \setminus f(U)), \quad 0 \leq r < 1.$$

Следующая теорема распространяет оценки (16) на случай дополнения произвольной односвязной области взамен множества $|w| \geq 1$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть функция $w = F(z)$ мероморфна и однолистка в круге U , $F(0) = 0$, а функция $w = f(z)$ мероморфна в U , в некоторой окрестности $z = 0$ справедливо разложение $f(z) = c_n z^n + \dots$, $c_n \neq 0$, $n \geq 1$, и $f(z) \neq 0$ при $z \neq 0$. Предположим, что при приближении точки z к границе круга U все предельные значения функции $w = f(z)$ принадлежат множеству $\overline{\mathbb{C}_w} \setminus F(U)$. Тогда $|c_n| \geq |F'(0)|$, и если $|c_n| = |F'(0)|$, то имеет место тождество $f(z) \equiv F(\alpha z^n)$, где $|\alpha| = 1$. Более того, при $|c_n| > |F'(0)|$ для любого r , $0 < r < 1$, справедливо соотношение

$$\overline{\Omega(f, r)} \subset \Omega\left(F, \frac{r^n}{d(r, |F'(0)/c_n|)}\right), \quad (17)$$

за исключением случая $n = 1$ и $f(z) \equiv F(z/d(e^{i\theta}z, F'(0)/c_n))$, $z \in U$, когда любая точка множества $\overline{\Omega(f, r)}$, $0 < r < 1$, принадлежит правой части (17), кроме точки z с $|z| = r$ и $\arg z = \arg(F'(0)/c_n) - \theta$, где θ — вещественная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На открытом множестве $G := f^{-1}(F(U)) \subset U$ определим функцию

$$w = \tilde{f}(z) := \frac{z^{n+1}}{F^{-1}(f(z))} = \frac{F'(0)}{c_n} z + \dots$$

Эта функция регулярна на множестве G . Далее, если точка $\zeta \in \partial G$ и $|\zeta| = 1$, то, когда $z \rightarrow \zeta$, $z \in G$ ($f(z) \in F(U)$), предельные значения $f(z)$ принадлежат множеству $\overline{\mathbb{C}_w} \setminus F(U)$, а значит, границе $\partial F(U)$. Поэтому предельные значения $|\tilde{f}(z)|$ равны единице. Если же $\zeta \in \partial G$ и $|\zeta| < 1$, то при $z \rightarrow \zeta$, $z \in G$, имеем $f(z) \rightarrow f(\zeta)$, $f(z) \in F(U)$, и, необходимо, $f(\zeta) \in \partial F(U)$. Отсюда предельные значения $|\tilde{f}(z)|$ равны $|\zeta|^{n+1} \leq |\zeta|^2$. Итак, в любом случае выполняется оценка (5) (для $n = 1$). Из теоремы 1 заключаем, что $|c_n| \geq |F'(0)|$, причем в случае равенства имеем $f(z) \equiv F(\alpha z^n)$, $|\alpha| = 1$, на всем круге U . Пусть теперь $|c_n| > |F'(0)|$, и пусть z — произвольная точка кольца $r \leq |z| < 1$. Если при этом $z \notin G$, то $f(z) \in \overline{\mathbb{C}_w} \setminus F(U) \subset \Omega(F, r^n/d(r, |F'(0)/c_n|))$. В противном случае к функции $\tilde{f}(z)$ вновь применяем теорему 1, согласно которой

$$|F^{-1}(f(z))| \geq \frac{|z|^n}{d(|z|, |F'(0)/c_n|)} \geq \frac{r^n}{d(r, |F'(0)/c_n|)}, \quad (18)$$

причем в случае равенства в итоговом соотношении необходимо имеем

$$G = U \left(e^{-i\theta} \frac{F'(0)}{c_n} \right), \quad f(z) \equiv F \left[e^{-i\theta} z^{n-1} k^{-1} \left(\left| \frac{c_n}{F'(0)} \right| k \left(\left| \frac{F'(0)}{c_n} \right| \frac{c_n}{F'(0)} e^{i\theta} z \right) \right) \right]$$

и $|z| = r$, $\arg z = \arg(F'(0)/c_n) - \theta$, где θ — вещественное число. Мероморфность функции $f(z)$ в круге возможна лишь при $n = 1$. Тогда в случае равенства значение функции в указанной точке

$$f(z) = F \left[e^{-i\theta} k^{-1} \left(\left| \frac{c_n}{F'(0)} \right| k(r) \right) \right] \notin \Omega \left(F, \frac{r}{d(r, |F'(0)/c_n|)} \right).$$

В остальных случаях справедливо строгое неравенство в (18), следовательно, $f(z)$ принадлежит правой части включения (17). Осталось добавить, что в условиях теоремы 4 выполняется $\overline{\mathbb{C}_w} \setminus f(U) \subset \overline{\mathbb{C}_w} \setminus F(U)$. Теорема доказана.

В заключение приведем аналог леммы Шварца для функций с вещественными граничными значениями.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть функция $w = f(z)$ мероморфна в области $|z| > 1$ с единственным полюсом в точке $z = \infty$, в окрестности которого $f(z) = c_n z^n + \dots$, $c_n \neq 0$, $n \geq 1$. Предположим, что при приближении точки z к окружности $|z| = 1$ все предельные значения функции $w = f(z)$ расположены на отрезке $[-1, 1]$. Тогда $|c_n| \leq 1/2$, и если $|c_n| = 1/2$, то имеет место тождество $f(z) \equiv (\alpha z^n + 1/(\alpha z^n))/2$. Кроме того, для любой точки z , $|z| > 1$, справедливо неравенство

$$|f(z) + 1| + |f(z) - 1| \leq |z|^n d \left(\left| \frac{1}{z} \right|, 2|c_n| \right) + \frac{1}{|z|^n d(|1/z|, 2|c_n|)}. \quad (19)$$

При $n > 1$ равенство в одной точке z влечет за собой равенство на всем множестве $|z| > 1$, и в этом случае вновь $f(z) \equiv (\alpha z^n + 1/(\alpha z^n))/2$. Если $n = 1$ и $|c_1| \neq 1/2$, то равенство в (19) достигается в том и только том случае, когда $f(z) \equiv c_1 z + |c_1|^2/(c_1 z) \mp (2|c_1| - 1)$ и $z = \pm |z c_1|/c_1$, $0 < |c_1| < 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя теорему 4 к функциям $w = F(z) \equiv 2z/(1+z^2)$ и $w = 1/f(1/z) = (1/c_n)z^n + \dots$, получаем неравенство $|c_n| \leq 1/2$ с соответствующим утверждением о знаке равенства. Непосредственно убеждаемся, что если $f(z) = (\alpha z^n + 1/(\alpha z^n))/2$, то в (19) имеет место знак равенства для любых z , $|z| > 1$. Для других функций имеем $|c_n| < 1/2$ и теорема 4 дает неравенство (19) для любых z и n , даже строгое неравенство в (19), за исключением ситуации, когда $n = 1$, $\arg z = \arg(1/c_1) - \theta$ и $f(z) = (\zeta + 1/\zeta)/2$, где

$$\zeta = e^{-i\theta} k^{-1} \left(\left| \frac{1}{2c_1} \right| k \left(\frac{|c_1|}{c_1} e^{i\theta} \frac{1}{z} \right) \right)$$

и θ — вещественная постоянная. Из мероморфности функции $w = f(z)$ в $|z| > 1$ вытекает, что $e^{i\theta} = 1$ либо $e^{i\theta} = -1$. Отсюда $f(z)$ имеет указанный в формулировке следствия вид и $z = \pm |z c_1|/c_1$. Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2 (ср. [6; следствие 3.1]). Если полином $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$, $a_n \neq 0$, с вещественными коэффициентами a_k , $k = 0, 1, \dots, n$, нормирован условиями $\max\{P(z) : z \in [-1, 1]\} = -\min\{P(z) : z \in [-1, 1]\} = 1$, то для любого $r > 1$ образ эллипса $|z-1| + |z+1| = r + 1/r$ при отображении $w = P(z)$ либо лежит строго внутри эллипса

$$|w-1| + |w+1| = r^n d\left(\frac{1}{r}, |a_n| 2^{1-n}\right) + \frac{1}{r^n d(1/r, |a_n| 2^{1-n})} \leq r^n + r^{-n},$$

либо совпадает с ним и тогда $P(z) \equiv T_n(z) = 2^{n-1} z^n + \dots$ — полином Чебышёва первого рода.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из предыдущего утверждения, где достаточно положить $f(z) = P((z+1/z)/2) = (a_n 2^{-n}) z^n + \dots$ и убедиться в справедливости случая равенства.

Можно показать, что данный результат содержит как следствия некоторые классические неравенства Чебышёва, Маркова и Бернштейна об алгебраических полиномах (см. [6]).

§3. Неравенства для коэффициентов

Рассматривая обобщения классической леммы Шварца, мы естественным образом приходим к оценке первого коэффициента в разложении аналитической функции в степенной ряд. В настоящем параграфе приводятся также оценки некоторых последующих коэффициентов либо их комбинаций в новых классах аналитических функций.

Обозначим через $\mathcal{H}$ класс функций $w = f(z)$, для каждой из которых существует открытое множество $G = G(f)$, $0 \in G \subset \mathbb{C}_z$, на котором она регулярна, причем в достаточно малой окрестности точки $z = 0$ справедливо разложение

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k, \quad c_1 \neq 0,$$

а для любой точки ζ границы множества G выполняется неравенство

$$\overline{\lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ z \in G}}} |f(z)| \leq |\zeta|^2.$$

Класс $\mathcal{R}$ содержит, например, функции вида $z^2/F(z)$, где $F(z)$ – функция, обратная функции из хорошо известного класса S . Пусть $\mathcal{R}_1$ – подкласс функций из $\mathcal{R}$, для которых множество $G(f)$ принадлежит кругу $|z| < 1$. В частности, регулярные в круге $|z| < 1$ функции $w = f(z)$, удовлетворяющие условиям $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$ и $|f(z)| < 1$ при $|z| < 1$, принадлежат классу $\mathcal{R}_1$. Заметим, что в ряде случаев вместо классов $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}_1$ естественнее рассматривать аналитические функции, нормированные в бесконечно удаленной точке. Именно обозначим через $\mathcal{M}_1$ класс функций $w = f(z)$, для каждой из которых существует открытое множество $G = G(f)$, $\infty \in G \subset \overline{\mathbb{C}_z} \setminus U$, на котором она мероморфна с единственным полюсом в точке $z = \infty$, в окрестности которого справедливо разложение

$$f(z) = c_1 z + c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \dots, \quad c_1 \neq 0,$$

а для любой точки ζ границы множества G выполняется неравенство

$$\overline{\lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ z \in G}}} |f(z)| \leq 1.$$

Класс $\mathcal{M}_1$ содержит, в частности, функции вида $w = z^{1-n} \Psi(P((z + 1/z)/2))$, где $P(z)$ – полином степени $n \geq 1$, отображающий отрезок $[-1, 1]$ в себя, а

$$\Psi(\omega) := \omega + \sqrt{\omega^2 - 1}, \quad \omega \in \overline{\mathbb{C}_\omega} \setminus [-1, 1],$$

– одна из ветвей функции, обратной функции Жуковского, $\Psi(\infty) = \infty$. Легко видеть, что если функция $f(z)$ принадлежит классу $\mathcal{M}_1$, то функция $z^2 f(1/z)$ принадлежит классу $\mathcal{R}_1$. И наоборот, из принадлежности $f(z) \in \mathcal{R}_1$ следует, что $z^2 f(1/z) \in \mathcal{M}_1$. Аналогично можно ввести класс функций $\mathcal{M}$, “двойственный” классу $\mathcal{R}$ и состоящий из мероморфных функций с областью определения, не содержащей начало координат.

Если функция $w = f(z)$ принадлежит классу $\mathcal{R}$, то функция $w = g(z) := z^2/f(z)$ допустима на множестве $B = \{z \in G : f(z)/z \neq 0\}$. По теореме А существует обратная функция $z = h(w) = c_1 w + \dots$, которая конформно и однолистно отображает круг $|w| < 1$ на некоторую область в $\mathbb{C}_z$, $g(h(w)) \equiv w$, $|w| < 1$. Применяя к функции $z = h(w)$ известные утверждения из теории однолистных функций [2], [13], приходим к соответствующим результатам для функций класса $\mathcal{R}$. Ограничимся здесь лишь специальными оценками коэффициентов и в качестве примеров некоторыми приложениями для алгебраических полиномов. Приложения к другим классам полиномов, рациональных и целых функций осуществляются аналогично работам [6], [11].

ТЕОРЕМА 5. Пусть функция $w = f(z)$ принадлежит классу $\mathcal{R}$, и пусть в некоторой окрестности точки $z = 0$ выполняются разложения

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k, \\ \frac{(c_1 z)^2}{f(c_1 z)} &= z + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k z^k, \\ \frac{c_1 z f'(c_1 z)}{f(c_1 z)} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k z^k. \end{aligned}$$

Тогда справедливы следующие оценки:

$$|c_{k+2} c_1^k| \leq \frac{(2k)!}{k! (k+1)!}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (20)$$

$$|\alpha_k| \leq \frac{(2k)!}{k! (k+1)!}, \quad k = 2, 3, \dots, \quad (21)$$

$$|\beta_k| \leq \frac{(2k)!}{(k!)^2}, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (22)$$

Равенство в (20)–(22) достигается для функций

$$f(z) \equiv \frac{z^2}{k^{-1}(z/c_1)}, \quad 0 < c_1 < \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В предыдущих обозначениях функция

$$w = \frac{1}{g(c_1/z)} = \frac{z^2}{c_1^2} f\left(\frac{c_1}{z}\right) = z + c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k+2} c_1^k z^{-k}$$

является обратной функцией к некоторой функции, принадлежащей известному классу Σ и не принимающей значения $z = 0$. Оценки (20) вытекают теперь из результата Нетаньяху [14]. Неравенства (21) восходят к Лёвнеру [15], так как функция $g(c_1 z)$ – обратная к функции класса S . Что касается оценок (22), то прежде всего заметим, что

$$\frac{c_1 z f'(c_1 z)}{f(c_1 z)} = 2 - \frac{z}{g(c_1 z)} \frac{d}{dz} (g(c_1 z)),$$

а неравенства для логарифмических коэффициентов функций, обратных функциям класса S , вытекают из теоремы Бернштейна об интегральных средних [16] (см. также [17; с. 40, 41]). Случай равенства проверяется непосредственно. Теорема доказана.

Можно показать, что оценки (21) вытекают из оценок (22). Далее, в оценках (20)–(22) легко описать все случаи равенства. Помимо указанных оценок можно привести также другие неравенства, связанные с функциями класса $\mathcal{R}$ и вытекающие из оценок коэффициентов однолистных функций. Например, из теоремы работы [18] следуют точные оценки коэффициентов в разложениях функции

$\log(dg(c_1 z)/dz)$ и шварциана $\{g(c_1 z), z\}$. Отметим некоторые неравенства для начальных коэффициентов функции $w = f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$ класса $\mathcal{R}$:

$$|c_2| \leq 2, \quad (23)$$

$$|c_1 c_3| \leq 1, \quad (24)$$

$$|c_2^2 + c_1 c_3| \leq 3. \quad (25)$$

Равенство во всех оценках достигается для функций $f(z) \equiv z^2/k^{-1}(z/c_1)$ при любом фиксированном c_1 , $0 < c_1 < \infty$.

Неравенство (23) содержится в (21) при $k = 2$ и в (22) при $k = 1$. Неравенство (24) вытекает из (20) при $k = 1$ и совпадает с оценкой шварциана в точке $z = 0$ в классе S [19]. Наконец, неравенство (25) вытекает из оценки третьего коэффициента в разложении функции $h(w)/c_1$ класса S . В качестве примера приведем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если полином $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ с вещественными коэффициентами a_k , $k = 0, 1, \dots, n$, $a_n \neq 0$, $n \geq 2$, удовлетворяет условию $|P(z)| \leq 1$ при $z \in [-1, 1]$, то справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |a_n + a_{n-1}| &\leq 2^{n-1}, \\ |(n-1)a_n^2 + 4a_n a_{n-2}| &\leq 4^{n-1}, \\ |(n+3)a_n^2 + 8a_n a_{n-1} + 4a_n a_{n-2} + 4a_{n-1}^2| &\leq 3 \cdot 4^{n-1}. \end{aligned}$$

Равенство во всех случаях достигается для полинома Чебышёва первого рода $T_n(z) = 2^{n-1} z^n + \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выписанные неравенства вытекают соответственно из неравенств (23)–(25) для функции

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^2 \Psi(P(1+2/z))}{(\Psi(1+2/z))^{n-1}}, \\ G(f) &= \left\{ z \in \mathbb{C}_z : P\left(1 + \frac{2}{z}\right) \notin [-1, 1] \text{ и } 1 + \frac{2}{z} \notin [-1, 1] \right\}. \end{aligned}$$

Знак равенства проверяется непосредственно.

Приведенные выше оценки (20)–(22) справедливы, конечно, и в классе $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}$. Однако они не являются точными в данном классе.

ТЕОРЕМА 6. Для функций $w = f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$, принадлежащих классу $\mathcal{R}_1$, имеют место точные оценки

$$\begin{aligned} |c_1| &\leq 1, \\ |c_2| &\leq 2(1 - |c_1|), \\ |c_3 c_1| &\leq 1 - |c_1|^2, \\ |c_{k+2} c_1^k| &\leq \sum_{\nu=0}^{k-1} \gamma_{k\nu} |c_1|^\nu, \quad k = 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

где

$$\gamma_{k\nu} = (-1)^\nu \frac{2}{\nu!} \frac{k-\nu}{k-\nu+1} \frac{(2k-\nu-1)!}{[(k-\nu)!]^2}, \quad \nu = 0, \dots, k-1.$$

Равенство в первой оценке достигается в случае $f(z) \equiv z$, а во всех последующих оценках для функций $f(z) \equiv z d(z, c_1)$ при любом фиксированном c_1 , $0 < c_1 \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая оценка вытекает из теоремы 1, а доказательство остальных неравенств при $|c_1| < 1$ повторяет доказательство оценок (20) с той лишь разницей, что вместо результата Нетаньяху необходимо использовать неравенства Сайджека и Тамми [20]. Теорема доказана.

Второе и третье неравенства теоремы 6 следуют также из классических неравенств для первых коэффициентов ограниченной однолистной функции $z = h(w) = c_1 w + t_2 w^2 + t_3 w^3 + \dots$ (см., например, [21; гл. 1, § 5]). Если в условиях теоремы 6 функция $w = f(z)$ регулярна в круге U ($G(f) = U$), то для второго коэффициента справедлива более сильная оценка Шура

$$|c_2| \leq 1 - |c_1|^2$$

[13; с. 41]. Пусть $P(z)$ — полином из следствия 3. Тогда функция

$$f(z) = z^{n+1} \Psi \left(P \left(\frac{z+1/z}{2} \right) \right), \quad G(f) = \left\{ z \in U : P \left(\frac{z+1/z}{2} \right) \notin [-1, 1] \right\},$$

принадлежит классу $\mathcal{R}_1$. Выписывая для этой функции первые пять неравенств теоремы 6, приходим к следующему результату.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если полином $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ с вещественными коэффициентами a_k , $k = 0, 1, \dots, n$, $a_n \neq 0$, $n \geq 4$, удовлетворяет условию $|P(z)| \leq 1$ при $z \in [-1, 1]$ и если $\lambda = \lambda(P) := |a_n|/2^{n-1}$, то справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \lambda &\leq 1, \\ |a_{n-1}| &\leq 2^{n-1}(1-\lambda), \\ |na_n + 4a_{n-2}| &\leq 2^{n-1}(\lambda^{-1} - \lambda), \\ |(n-1)a_{n-1} + 4a_{n-3}| &\leq 2^{n-1}(\lambda^{-2} - \lambda^{-1}), \\ |n(n-1)a_n + 8(n-2)a_{n-2} + 32a_{n-4}| &\leq 2^n(5\lambda^{-3} - 8\lambda^{-2} + 3\lambda^{-1}). \end{aligned}$$

Равенство во всех случаях достигается для полинома Чебышёва $T_n(z) = 2^{n-1}z^n + \dots$.

Первое неравенство в данном следствии классическое. Второе и третье получены А. В. Олесовым по существу тем же путем [9], и они сильнее соответственно первых двух неравенств следствия 3.

СЛЕДСТВИЕ 5. Для полинома $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$, $a_n \neq 0$, удовлетворяющего условию $|\operatorname{Re} P(z)| \leq 1$ при $|z| = 1$, имеют место оценки

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq 1, & n &\geq 1, \\ |a_{n-1}| &\leq 2(1 - |a_n|), & n &\geq 2, \\ |a_{n-2} a_n| &\leq 1 - |a_n|^2, & n &\geq 3, \\ |a_{n-k-1} a_n^k| &\leq \sum_{\nu=0}^{k-1} \gamma_{k\nu} |a_n|^\nu, & k &= 2, 3, \dots, n-2, \quad n \geq 4, \\ |\operatorname{Re} a_0| &\leq 1 - |a_n|, & n &= 1, \\ |2 \operatorname{Re} a_0| |a_n| &\leq 1 - |a_n|^2, & n &= 2, \\ |2 \operatorname{Re} a_0| |a_n|^{n-1} &\leq \sum_{\nu=0}^{n-2} \gamma_{k\nu} |a_n|^\nu, & n &\geq 3, \end{aligned}$$

где $\gamma_{k\nu}$ из теоремы 6. Равенство во всех оценках достигается в случае $P(z) \equiv a_n z^n$, $|a_n| = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из теоремы 6, примененной к функции

$$\begin{aligned} f(z) &= z^{n+1} \Psi \left(\frac{P(1/z) + \overline{P(\bar{z})}}{2} \right), \\ G(f) &= \left\{ z \in U : \frac{P(1/z) + \overline{P(\bar{z})}}{2} \notin [-1, 1] \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Указанный подход можно распространить на другие классы полиномов и на рациональные функции [6]–[9].

Перейдем теперь к неравенствам для коэффициентов в разложениях функции в окрестности граничной точки. Данная тематика мало изучена даже для однолистных функций. Вместе с тем уже оценки первого коэффициента, т.е. граничные теоремы искажения, представляют значительный интерес во многих вопросах теории функций (см., например, [1]). Приведем некоторые соотношения для начальных коэффициентов при условии, что указанные разложения существуют. Пусть функция $w = f(z) = c_1 z + \dots$ принадлежит классу $\mathcal{R}_1$, и пусть точка $z = 1$ является предельной точкой множества $G(f) \cap (0, 1)$, причем

$$f(z) = 1 + b_1(z-1) + o(z-1), \quad z \rightarrow 1, \quad z \in G(f) \cap (0, 1).$$

По теореме 3

$$|b_1| \geq 2 - \sqrt{|c_1|} \geq 1 \quad (27)$$

со знаком равенства в левой части (27) для функций $f(z) \equiv zd(z, c_1)$ при любом c_1 , $0 < c_1 \leq 1$. Введем обозначение

$$G_0(f) = \left\{ z \in G(f) : \left| \frac{z^2}{f(z)} \right| < 1 \right\}, \quad f \in \mathcal{R}_1.$$

По теореме А множество $G_0(f)$ является односвязной областью. Если теперь точка $z = 1$ предельная для множества $(G(f) \setminus G_0(f)) \cap (0, 1)$ и если

$$f(z) = 1 + b_1(z - 1) + o(z - 1), \quad z \rightarrow 1, \quad z \in (G(f) \setminus G_0(f)) \cap (0, 1),$$

то аналогично доказательству теоремы 3 получаем, что

$$|b_1| \geq 2. \quad (28)$$

В дополнение к неравенствам (27), (28) рассмотрим “двухточечную граничную теорему искажения” для функции $f(z) \in \mathcal{R}_1$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть функция $w = f(z)$ принадлежит классу $\mathcal{R}_1$, и пусть различные точки z_k , $|z_k| = 1$, $k = 1, 2$, являются носителями граничных элементов области $G_0(f)$, в окрестностях которых справедливы разложения

$$f(z) = w_k + b_{1k}(z - z_k) + o(z - z_k), \quad z \rightarrow z_k, \quad z \in G_0(f),$$

$|w_k| = 1$, $k = 1, 2$. Тогда справедливы неравенства

$$\left| \frac{2w_1}{z_1} - b_{11} \right| \left| \frac{2w_2}{z_2} - b_{12} \right| \leq \left| \frac{w_1 z_2^2 - w_2 z_1^2}{z_2 - z_1} \right|^2, \quad (29)$$

$$\left| \frac{2w_1}{z_1} - b_{11} \right|^{t_1^2} \left| \frac{2w_2}{z_2} - b_{12} \right|^{t_2^2} \leq \sqrt{|c_1|} \left| \frac{z_2 - z_1}{w_1 z_2^2 - w_2 z_1^2} \right|^{2t_1 t_2} \quad (30)$$

для любых вещественных t_1 и t_2 , $t_1 + t_2 = 1$. Равенство в (29) и (30) достигается для функций $f(z) \equiv c_1 z$, $|c_1| = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В области $G_0(f)$ рассмотрим вновь функцию $w = g(z) = z^2/f(z)$. Легко видеть, что

$$g(z) = \frac{z_k^2}{w_k} + \frac{z_k}{w_k} \left(2 - \frac{z_k b_{1k}}{w_k} \right) (z - z_k) + o(z - z_k), \quad z \rightarrow z_k, \quad z \in G_0(f), \quad (31)$$

$k = 1, 2$. Функция $z = h(w) = c_1 w + \dots$ конформно и однолистно отображает круг $|w| < 1$ на $G_0(f)$, и ввиду соответствия границ $\lim_{w \rightarrow \tilde{w}_k} h(w) = z_k$, $\tilde{w}_k := z_k^2/w_k$, $k = 1, 2$. Отсюда следует, в частности, что функция $z = h(w)$ имеет в точках $\tilde{w}_k$, $k = 1, 2$, угловую производную [1; с. 79]. Из разложений (31) следует, что

$$h'(\tilde{w}_k) = \lim_{\substack{w \rightarrow \tilde{w}_k \\ w \in \gamma_k}} \frac{h(w) - h(\tilde{w}_k)}{w - \tilde{w}_k} = \lim_{\substack{z \rightarrow z_k \\ z \in h(\gamma_k)}} \frac{z - z_k}{g(z) - \tilde{w}_k} = \frac{w_k}{z_k} \frac{1}{2 - z_k b_{1k}/w_k},$$

где $\gamma_k = (0, \tilde{w}_k)$, $k = 1, 2$. Можно считать, что $h'(\tilde{w}_k) \neq \infty$, $k = 1, 2$. Согласно результату Нехари [22; с. 258] для любых точек ζ_k , $k = 1, \dots, n$, круга $|w| < 1$ и для любых вещественных чисел δ_k , $k = 1, \dots, n$, $\sum_{k=1}^n \delta_k = 0$, выполняется неравенство

$$\prod_{k,l=1}^n \left| \frac{\zeta_k - \zeta_l}{h(\zeta_k) - h(\zeta_l)} \right|^{\delta_k \delta_l} \leq \prod_{k,l=1}^n \left| \frac{1 - h(\zeta_k) \overline{h(\zeta_l)}}{1 - \zeta_k \overline{\zeta_l}} \right|^{\delta_k \delta_l}. \quad (32)$$

В случае двух точек ζ_1 и ζ_2 , $\zeta_k \in \gamma_k$, $k = 1, 2$, и $\delta_1 = -\delta_2 = 1$ неравенство (32) дает

$$\begin{aligned} \frac{|h(\zeta_1) - h(\zeta_2)|^2}{|h'(\zeta_1)h'(\zeta_2)||\zeta_1 - \zeta_2|^2} &\leq \frac{(1 - |h(\zeta_1)|^2)(1 - |h(\zeta_2)|^2)|1 - \zeta_1\bar{\zeta}_2|^2}{(1 - |\zeta_1|^2)(1 - |\zeta_2|^2)|1 - h(\zeta_1)\bar{h}(\zeta_2)|^2} \\ &\leq \frac{|h(\tilde{w}_1) - h(\zeta_1)||h(\tilde{w}_2) - h(\zeta_2)|(1 + |h(\zeta_1)|)(1 + |h(\zeta_2)|)|1 - \zeta_1\bar{\zeta}_2|^2}{|\tilde{w}_1 - \zeta_1||\tilde{w}_2 - \zeta_2|(1 + |\zeta_1|)(1 + |\zeta_2|)|1 - h(\zeta_1)\bar{h}(\zeta_2)|^2}. \end{aligned}$$

Переходя здесь к пределу при $\zeta_k \rightarrow \tilde{w}_k$, $k = 1, 2$, и учитывая тот факт, что $h'(\zeta_k) \rightarrow h'(\tilde{w}_k)$, $k = 1, 2$ [1; с. 79], получаем неравенство (29). Неравенство (30) также вытекает из (32), если положить $\zeta_1 \in \gamma_1$, $\zeta_2 \in \gamma_2$, $\zeta_3 = 0$ и $\delta_1 = t_1$, $\delta_2 = t_2$, $\delta_3 = -1$, а затем устремить $\zeta_k \rightarrow \tilde{w}_k$, $k = 1, 2$. Случай равенства очевиден. Теорема доказана.

Заметим, что неравенство (30) является своеобразным аналогом результата А. Васильева и Х. Поммеренке для однолистных ограниченных в круге функций [23; с. 426, 434]. К настоящему времени известно немало теорем искажения для таких функций (см., например, [13], [21]). Применение их к функции $z = h(w)$ приводит к соответствующим результатам для регулярных функций $f(z)$ класса $\mathcal{R}_1$.

СЛЕДСТВИЕ 6. *Предположим, что полином $P(z)$ степени n удовлетворяет условию $|\operatorname{Re} P(z)| \leq 1$, когда $|z| = 1$, и пусть z_1 и z_2 — различные точки на окружности $|z| = 1$, $|\operatorname{Re} P(z_k)| \neq 1$, $k = 1, 2$. Тогда либо хотя бы в одной из точек z_k , $k = 1, 2$, имеем*

$$\frac{|\operatorname{Im} z_k P'(z_k)|}{\sqrt{1 - (\operatorname{Re} P(z_k))^2}} \leq n - 1, \quad (33)$$

либо справедливо неравенство

$$\begin{aligned} &\left(\frac{|\operatorname{Im} z_1 P'(z_1)|}{\sqrt{1 - (\operatorname{Re} P(z_1))^2}} - n + 1 \right) \left(\frac{|\operatorname{Im} z_2 P'(z_2)|}{\sqrt{1 - (\operatorname{Re} P(z_2))^2}} - n + 1 \right) \\ &\leq \left| \frac{z_2^{n-1} \Psi(\operatorname{Re} P(z_1)) - z_1^{n-1} \Psi(\operatorname{Re} P(z_2))}{z_2 - z_1} \right|^2. \end{aligned}$$

Равенство достигается для полинома $P(z) = z^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $f(z)$, заданную соотношением (26), и положим $g(z) = z^2/f(z)$. Если в некоторой точке $\zeta_k = 1/z_k$, $k = 1, 2$, существует производная функции $g(z)$ и если эта точка не принадлежит границе множества $G_0(f)$, то по теореме А

$$0 \geq \frac{d|g|}{d|z|}(\zeta_k) = 2 - |f'(\zeta_k)|.$$

После простых вычислений приходим отсюда к неравенству (33) (см., например, [6; §4]). Если в обеих точках производная функции $g(z)$ существует и если выполняется противоположное (33) неравенство, то необходимо, чтобы $\zeta_k \in \partial G_0(f)$, $k = 1, 2$, и неравенство (29) влечет за собой второе неравенство следствия 6. Точки, где нарушается дифференцируемость, образуют конечное множество, и требуемое неравенство в этих точках получаем предельным переходом. Случай равенства проверяется прямым вычислением. Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 7. Если все нули полинома $P(z)$ степени n лежат в круге $|z| \leq 1$, то для любых различных точек z_k , $k = 1, 2$, на окружности $|z| = 1$, $P(z_1)P(z_2) \neq 0$, выполняется: либо хотя бы в одной из них

$$\operatorname{Re} \frac{z_k P'(z_k)}{P(z_k)} \geq \frac{n+1}{2},$$

либо для любых вещественных t_1, t_2 , $t_1 + t_2 = 1$, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \left(n+1 - 2 \operatorname{Re} \frac{z_1 P'(z_1)}{P(z_1)} \right)^{t_1^2} \left(n+1 - 2 \operatorname{Re} \frac{z_2 P'(z_2)}{P(z_2)} \right)^{t_2^2} \\ & \leq \sqrt{\left| \frac{a_0}{a_n} \right|} \left| \frac{(z_2 - z_1) P(z_1) P(z_2)}{z_1^{n+1} \overline{P(z_1)} P(z_2) - z_2^{n+1} \overline{P(z_2)} P(z_1)} \right|^{2t_1 t_2}. \end{aligned}$$

Равенство достигается для полиномов $P(z)$ с нулями на единичной окружности $|z| = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО повторяет доказательство предыдущего следствия с заменой функции (26) на функцию

$$f(z) = \frac{\overline{P(\bar{z})}}{z^{n-1} P(1/z)}, \quad G(f) = U,$$

и неравенства (29) на неравенство (30).

Переходя к старшим коэффициентам в граничном разложении функции $f(z) \in \mathcal{R}_1$, рассмотрим сначала вспомогательное утверждение для регулярных и ограниченных функций, имеющее самостоятельный интерес (ср. [24; теорема 4]).

ЛЕММА. Пусть функция $w = f(z)$ определена на множестве

$$U(\delta) := \{z \in \bar{U} : |z - 1| \leq \delta\}$$

при некотором δ , $0 < \delta < 2$, отображает дугу $\Gamma(\delta) := \{z : |z| = 1, |z - 1| < \delta\}$ на дугу окружности $|w| = 1$, $f(1) = 1$, $|f(z)| \leq 1$ при $z \in U(\delta)$; и пусть $w = f(z)$ дважды дифференцируема в точке $z = 1$. Тогда выполняются соотношения

$$f'(1) \geq 0, \tag{34}$$

$$\operatorname{Re} f''(1) = f'(1)(f'(1) - 1). \tag{35}$$

Если дополнительно функция $w = f(z)$ регулярна в круге U и $|f(z)| < 1$ при $z \in U$, то для ее производной Шварца имеет место оценка

$$\operatorname{Re} S_f(1) \leq 0, \tag{36}$$

равенство в которой достигается для тождественного отображения $f(z) \equiv z$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функция $w = f(z)$ дважды дифференцируема в точке $z = 1$, то справедлива асимптотическая формула

$$f(z) = 1 + f'(1)(z-1) + \frac{f''(1)}{2}(z-1)^2 + o((z-1)^2), \quad z \rightarrow 1, \quad z \in U(\delta).$$

Если $f'(1) = 0$, то из условия $|f(z)| < 1$ при $z \in U(\delta)$ заключаем, что $f''(1) = 0$ и, следовательно, имеют место соотношения (34), (35). Пусть теперь $f'(1) \neq 0$. Из указанного выше условия и геометрического смысла аргумента производной вытекает равенство $\arg f'(1) = 0$, что дает соотношение (34). Вновь из свойства аргумента производной следует, что функция

$$h(z) := \frac{zf'(z)}{f(z)} = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy,$$

отображает часть дуги $\Gamma(\delta)$ в окрестности точки $z = 1$ в вещественную ось. Отсюда

$$h'(1) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, 0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(1, 0) = \frac{\partial v}{\partial y}(1, 0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(1, 0) = i \frac{\partial v}{\partial x}(1, 0).$$

С другой стороны,

$$h'(1) = f'(1) + f''(1) - (f'(1))^2$$

и мы получаем соотношение (35).

В условиях, когда функция $w = f(z)$ регулярна в круге U , существует аналитическое продолжение этой функции в окрестность точки $z = 1$ и, в частности, имеет место разложение

$$f(z) = 1 + b_1(z-1) + b_2(z-1)^2 + b_3(z-1)^3 + o((z-1)^3), \quad z \rightarrow 1, \quad z \in U(\delta),$$

где $b_1 = f'(1) \neq 0$, $b_2 = f''(1)/2$ и $b_3 = f'''(1)/6$. Одна из версий леммы Шварца дает, что

$$|f'(z)|(1 - |z|^2) \leq 1 - |f(z)|^2 \quad (37)$$

для любых z из круга U [2; гл. 8, §1]. Положим здесь $z = \rho$, $0 < \rho < 1$, и найдем асимптотику квадратов обеих частей в (37) при $\rho \rightarrow 1$. Квадрат правой части равен

$$\begin{aligned} & \{1 - [1 + b_1(\rho-1) + \operatorname{Re} b_2(\rho-1)^2 + \operatorname{Re} b_3(\rho-1)^3 + o((\rho-1)^3)]^2 + o((\rho-1)^3)\}^2 \\ &= (\rho-1)^2 \{4b_1^2 + 4b_1(2\operatorname{Re} b_2 + b_1^2)(\rho-1) + [(2\operatorname{Re} b_2 + b_1^2)^2 \\ & \quad + 8b_1(\operatorname{Re} b_3 + b_1\operatorname{Re} b_2)](\rho-1)^2 + o((\rho-1)^2)\}. \end{aligned}$$

Квадрат левой части неравенства (37) имеет вид

$$\begin{aligned} & \{[b_1 + 2\operatorname{Re} b_2(\rho-1) + 3\operatorname{Re} b_3(\rho-1)^2 + o((\rho-1)^2)]^2 \\ & \quad + [2\operatorname{Im} b_2(\rho-1) + o((\rho-1))]^2\}(\rho-1)^2(4 + 4(\rho-1) + (\rho-1)^2) \\ &= (\rho-1)^2 \{4b_1^2 + 4b_1(4\operatorname{Re} b_2 + b_1)(\rho-1) \\ & \quad + [16|b_2|^2 + 24b_1\operatorname{Re} b_3 + 16b_1\operatorname{Re} b_2 + b_1^2](\rho-1)^2 + o((\rho-1)^2)\}. \end{aligned}$$

Ввиду (35) при сравнении выписанных квадратов необходимо учитывать только коэффициенты при $(\rho - 1)^4$. Неравенство (37) и вновь неоднократное применение (35) приводят к соотношению

$$|b_2|^2 + b_1 \operatorname{Re} b_3 \leq 2(\operatorname{Re} b_2)^2.$$

Отсюда

$$\operatorname{Re} \left(\frac{b_3}{b_1} - \frac{b_2^2}{b_1^2} \right) \leq 0,$$

что эквивалентно (36). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 8. Пусть функция $w = f(z) = c_1 z + \dots$ принадлежит классу $\mathcal{R}_1$, и пусть множество $G(f)$ содержит внутренность множества $U(\delta)$ при некотором $\delta > 0$. Предположим, что функция $w = f(z)$ определена и непрерывна на всем множестве $U(\delta)$, отображает дугу $\Gamma(\delta)$ на дугу окружности $|w| = 1$, $f(1) = 1$, $|f(z)| \leq 1$ при $z \in U(\delta)$; и пусть выполняется разложение

$$f(z) = 1 + b_1(z-1) + b_2(z-1)^2 + b_3(z-1)^3 + o((z-1)^3), \quad z \rightarrow 1, \quad z \in U(\delta).$$

Тогда справедлива точная оценка

$$2 \operatorname{Re} b_2 \geq 2 - 3\sqrt{|c_1|} + |c_1|. \quad (38)$$

Если дополнительно $b_1 < 2$, то имеет место неравенство

$$\operatorname{Re} \{ (2 - b_1)b_3 + [b_2 - (b_1 - 1)^2]^2 \} \leq 0. \quad (39)$$

Равенство в (38) достигается для функций $f(z) \equiv zd(z, c_1)$, $0 < c_1 \leq 1$, а в (39) — для тождественного отображения $f(z) \equiv z$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условиях теоремы функция $w = f(z)$ аналитически продолжается в некоторую окрестность точки $z = 1$. Неравенство (38) и утверждение о знаке равенства в (38) вытекают из соотношения (35), оценки (27) и соответствующего утверждения о равенстве в (27). Для доказательства (39) введем, как и выше, функцию $z = h(w) = c_1 w + \dots$, обратную к функции $g(z) = z^2/f(z)$, $|w| < 1$. По теореме А функция $z = h(w)$ конформно и однолистно отображает круг $|w| < 1$ на связную компоненту $G_0(f)$ множества $\{z \in G(f) : f(z)/z \neq 0, |z^2/f(z)| \neq 1\}$, содержащую начало координат. Любая другая связная компонента указанного множества отображается функцией $w = g(z)$ за пределы круга $|w| < 1$. Ввиду условия $b_1 < 2$ точка $z = 1$ лежит на границе области $G_0(f)$. Более того, функция

$$z = h(w) = 1 + \sigma_1(w-1) + \sigma_2(w-1)^2 + \sigma_3(w-1)^3 + o((w-1)^3), \quad w \rightarrow 1, \quad |w| \leq 1,$$

удовлетворяет всем условиям леммы. Из неравенства (36) следует, что

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_1} - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \right) \leq 0.$$

Выражая коэффициенты σ_k , $k = 1, 2, 3$, через коэффициенты b_k , $k = 1, 2, 3$, элементарно приходим к оценке (39). Случай равенства очевиден. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 8. Если точки β_k , $k = 1, \dots, n$, принадлежат кругу $|z| \leq 1$, $\beta = \prod_{k=1}^n \beta_k$, то для произведения Бляшке

$$B(z) = z \prod_{k=1}^n \frac{z - \beta_k}{1 - \overline{\beta_k} z}$$

в каждой точке z окружности $|z| = 1$, отличной от β_k , $k = 1, \dots, n$, справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{zB''(z)}{B'(z)} &= \frac{zB'(z)}{B(z)} - 1, \\ \operatorname{Re} z^2 S_B(z) &\leq 0, \\ |B'(z)| &\geq 2 - \sqrt{|\beta|}, \\ \operatorname{Re} \frac{z^2 B''(z)}{B(z)} &\geq 2 - 3\sqrt{|\beta|} + |\beta|. \end{aligned}$$

Равенство в каждом из трех неравенств достигается в случае, когда $|\beta| = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первые два соотношения в произвольной точке $z = z_0$ вытекают из леммы, примененной к функции $f(z) = B(z_0 z)/B(z_0)$. Третье неравенство следует из теоремы 3, а четвертое – из теоремы 8, примененной к указанной выше функции. Случай равенства проверяется непосредственно.

Список литературы

1. Pommerenke Ch. Boundary behaviour of conformal maps. Berlin: Springer, 1992.
2. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М., 1966.
3. Mercer P. R. Sharpened versions of the Schwarz lemma // J. Math. Anal. Appl. 1997. V. 205. P. 508–511.
4. Osserman R. A new variant of the Schwarz–Pick–Ahlfors lemma // Manuscripta Math. 1999. V. 100. P. 123–129.
5. Osserman R. A sharp Schwarz inequality on the boundary // Proc. Amer. Math. Soc. 2000. V. 128. №12. P. 3513–3517.
6. Дубинин В. Н. Конформные отображения и неравенства для алгебраических полиномов // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. №5. С. 16–43.
7. Дубинин В. Н. О применении конформных отображений в неравенствах для рациональных функций // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66. №2. С. 67–80.
8. Дубинин В. Н. Конформные отображения и неравенства для алгебраических полиномов. II // Записки научн. сем. ПОМИ. 2003. Т. 302. С. 18–37.
9. Олесов А. В. О применении конформных отображений к неравенствам для тригонометрических полиномов // Матем. заметки. 2004. Т. 76. №3. С. 396–408.
10. Олесов А. В. Неравенства для мажорантных аналитических функций // Записки научн. сем. ПОМИ. 2004. Т. 314. С. 155–173.
11. Олесов А. В. Неравенства для целых функций конечной степени и полиномов // Записки научн. сем. ПОМИ. 2004. Т. 314. С. 174–195.
12. Лебедев Н. А. Некоторые оценки для функций, регулярных и однолистных в круге // Вестн. ЛГУ. Сер. матем., физ., хим. 1955. Т. 4. №11. С. 3–21.
13. Goodman A. W. Univalent functions. I, II. Tampa, FL: Mariner Publ., 1983.
14. Netanyahu E. Extremal problems for schlicht functions in the exterior of the unit circle // Canad. J. Math. 1965. V. 17. P. 335–341.

15. *Lowner K.* Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises // Math. Ann. 1923. V. 89. P. 103–121.
16. *Baernstein A.* Integral means, univalent functions and circular symmetrization // Acta Math. 1974. V. 133. №3–4. P. 139–169.
17. *Schnitzer F. J.* Schlichte funktionen. 14th Styrian mathematical symposium (Stift Rein, 1983). Graz: Forschungszentrum Graz, 1983.
18. *Klouth R., Wirths K.-J.* Two new extremal properties of the Koebe-function // Proc. Amer. Math. Soc. 1980. V. 80. №4. P. 594–596.
19. *Kraus W.* Über den Zusammenhang einiger Charakteristiken eines einfach zusammenhängenden Bereiches mit der Kreisabbildung // Mitt. Math. Sem. Giessen. 1932. V. 21. P. 1–28.
20. *Siejkka H., Tammi O.* On estimating the inverse coefficients for meromorphic univalent functions omitting a disc // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 1987. V. 12. P. 85–93.
21. *Лебедев Н. А.* Принцип площадей в теории однолистных функций. М.: Наука, 1975.
22. *Nehari Z.* Some inequalities in the theory of functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1953. V. 75. №2. P. 256–286.
23. *Pommerenke Ch., Vasil'ev A.* Angular derivatives of bounded univalent functions and extremal partitions of the unit disk // Pacific J. Math. 2002. V. 206. №2. P. 425–450.
24. *Дубинин В. Н., Эйриш Н. В.* Некоторые применения обобщенных конденсаторов в теории аналитических функций // Записки научн. сем. ПОМИ. 2004. Т. 314. С. 52–75.

Институт прикладной математики ДВО РАН,
г. Владивосток
E-mail: dubinin@iam.dvo.ru

Поступила в редакцию
14.12.2004