Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Лапин, D_∞ -дифференциальные E_∞ -алгебры и мультипликативные спектральные последовательности, *Матем. сб.*, 2005, том 196, номер 11, 75–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm1393>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 17:38:52

УДК 513.83

С. В. Лапин

**D_∞ -дифференциальные E_∞ -алгебры и
мультипликативные спектральные последовательности**

В работе введено понятие D_∞ -дифференциальной E_∞ -алгебры, являющееся гомотопически инвариантным деформационным аналогом понятия E_∞ -алгебры. Изучены основные гомотопические свойства D_∞ -дифференциальных E_∞ -алгебр и установлены связи между D_∞ -дифференциальными E_∞ -алгебрами и мультипликативными спектральными последовательностями над полями.

Библиография: 12 названий.

В работе В. А. Смирнова [1] при решении проблемы итерации B -конструкции для дифференциальных алгебр было введено понятие E_∞ -алгебры в категории дифференциальных градуированных модулей. Одним из основных свойств структуры E_∞ -алгебры, как показано в работе [2], является ее гомотопическая инвариантность, т.е. структура E_∞ -алгебры обладает тем свойством, что на любом дифференциальном градуированном модуле, который гомотопически эквивалентен некоторой E_∞ -алгебре, можно также ввести структуру E_∞ -алгебры.

С другой стороны, в работе [3] было введено понятие D_∞ -дифференциального модуля, которое является квантовым аналогом понятия возмущения дифференциального модуля в теории Гугенхейма–Ламбе–Стасеффа возмущений в дифференциальной гомологической алгебре [4]–[8]. Кроме того, в [3] было показано, что структура D_∞ -дифференциального модуля является гомотопически инвариантной структурой, и была установлена связь теории спектральных последовательностей с конструкцией D_∞ -дифференциального модуля. В частности, в [3] было показано, что любая заданная над полем спектральная последовательность является спектральной последовательностью D_∞ -дифференциального модуля.

В настоящей работе вводится понятие D_∞ -дифференциальной E_∞ -алгебры, которое является D_∞ -дифференциальным аналогом понятия E_∞ -алгебры, и устанавливается гомотопическая инвариантность структуры D_∞ -дифференциальной E_∞ -алгебры. Исследованы основные гомотопические свойства D_∞ -дифференциальных E_∞ -алгебр и построена спектральная последовательность D_∞ -дифференциальной E_∞ -алгебры. Основным результатом работы является утверждение о том, что любая заданная над полем мультипликативная спектральная последовательность, умножение в членах которой коммутативно, является спектральной последовательностью D_∞ -дифференциальной E_∞ -алгебры. В качестве следствия этого утверждения получено утверждение о том, что на каждом члене любой заданной над полем мультипликативной спектральной последовательности с коммутативным умножением имеются такой дифференциал и такая структура E_∞ -алгебры относительно этого дифференциала, что соответствующая E_∞ -алгебра гомологий изоморфна в категории E_∞ -алгебр предельному члену этой спектральной последовательности.

§1. D_∞ -дифференциальные модули

В этом параграфе напоминаются необходимые определения и утверждения из работы [3], связанные с понятием D_∞ -дифференциального модуля.

Пусть K – коммутативное кольцо с единицей. Все рассматриваемые в этом параграфе модули и отображения модулей являются соответственно K -модулями и K -линейными отображениями модулей.

Пусть заданы дифференциальные модули (X, d) и (Y, d) . Кроме того, пусть заданы отображения дифференциальных модулей $\xi: Y \rightarrow X$, $\eta: X \rightarrow Y$ и дифференциальная гомотопия $h: X \rightarrow X$, для которых выполнены условия $\eta\xi = 1_Y$, $dh + hd = \xi\eta - 1_X$. Рассмотренную ситуацию обычно записывают в виде $(\eta: X \rightrightarrows Y: \xi, h)$ и называют *сильной деформационной ретракцией дифференциальных модулей*. При выполнении условий $\eta h = 0$, $h\xi = 0$, $hh = 0$ сильную деформационную ретракцию $(\eta: X \rightrightarrows Y: \xi, h)$ называют *дифференциальной SDR-ситуацией* или *SDR-ситуацией дифференциальных модулей*.

Важный пример дифференциальной SDR-ситуации возникает при рассмотрении гомологий дифференциального модуля, который задан над некоторым полем. Пусть $H(X) = \text{Ker } d / \text{Im } d$ – гомологический модуль произвольного дифференциального модуля (X, d) над полем K . Если модуль $H(X)$ рассмотреть как дифференциальный модуль с нулевым дифференциалом, то при помощи фиксированного разложения в прямую сумму $\text{Ker } d = H(X) \oplus \text{Im } d$ получим SDR-ситуацию дифференциальных модулей $(\eta: X \rightrightarrows H(X): \xi, h)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. D_∞ -дифференциалом модуля X называется семейство гомоморфизмов $\{d^i: X \rightarrow X \mid i \geq 0\}$, которые для каждого целого числа $k \geq 0$ удовлетворяют следующему соотношению:

$$\sum_{i+j=k} d^i d^j = 0.$$

D_∞ -дифференциальным модулем или, более кратко, D_∞ -модулем (X, d^i) называется произвольный модуль X , рассматриваемый вместе с некоторым фиксированным D_∞ -дифференциалом $\{d^i: X \rightarrow X \mid i \geq 0\}$ этого модуля.

При $k = 0$ имеем $d^0 d^0 = 0$. Следовательно, (X, d^0) является дифференциальным модулем. При $k = 1$ имеем $d^1 d^0 + d^0 d^1 = 0$. Другими словами, отображения d^0 и d^1 являются антикоммутирующими. Из этого следует, что композиция $d^1 d^1: X \rightarrow X$ является эндоморфизмом дифференциального модуля (X, d^0) . При $k = 2$ получаем $d^0 d^2 + d^2 d^0 = 0 - d^1 d^1$. Это означает, что отображение $d^2: X \rightarrow X$ является гомотопией между нулевым отображением и отображением дифференциальных модулей $d^1 d^1: (X, d^0) \rightarrow (X, d^0)$. Таким образом, отображение $d^1: X \rightarrow X$ является дифференциалом с точностью до гомотопии.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Морфизмом D_∞ -модулей $f: (X, d^i) \rightarrow (Y, d^i)$ называется семейство гомоморфизмов $f = \{f^i: X \rightarrow Y \mid i \geq 0\}$, удовлетворяющих для каждого целого числа $k \geq 0$ следующему соотношению:

$$\sum_{i+j=k} f^i d^j = \sum_{i+j=k} d^i f^j.$$

При $k = 0$ получаем $f^0 d^0 = d^0 f^0$. Следовательно, определено отображение дифференциальных модулей $f^0: (X, d^0) \rightarrow (Y, d^0)$. При $k = 1$ получаем соотношение $f^0 d^1 - d^1 f^0 = d^0 f^1 - f^1 d^0$. Следовательно, $f^1: X \rightarrow Y$ служит гомотопией между нулевым отображением и отображением $f^0 d^1 - d^1 f^0: (X, d^0) \rightarrow (Y, d^0)$. Другими словами, отображение f^0 относительно d^1 является с точностью до гомотопии отображением дифференциальных модулей.

Для любых морфизмов D_∞ -модулей $f = \{f^i\}: X \rightarrow Y$ и $g = \{g^i\}: Y \rightarrow Z$ определим их композицию $gf = \{(gf)^i\}: X \rightarrow Z$, полагая

$$(gf)^i = \sum_{s+t=i} g^s f^t, \quad i \geq 0.$$

Легко видеть, что тождественным морфизмом $1_X = \{1_X^i\}$ для D_∞ -модуля (X, d^i) служит семейство отображений модулей $1_X = \{1_X^i: X \rightarrow X\}$, где $1_X^i = 0$, $i > 0$, а 1_X^0 — тождественное отображение модуля X . Таким образом, определена категория D_∞ -модулей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. D_∞ -дифференциальный модуль (X, d^i) будем называть $D_\infty^{(s)}$ -дифференциальным модулем или $D_\infty^{(s)}$ -модулем, если найдется такое целое число $s \geq 0$, для которого выполнены условия $d^i = 0$, $i < s$. В этом случае D_∞ -дифференциал $\{d^i\}$ будем называть $D_\infty^{(s)}$ -дифференциалом. Морфизмами $D_\infty^{(s)}$ -модулей считаются морфизмы D_∞ -модулей. Для $D_\infty^{(s)}$ -модуля (X, d^i) будем употреблять запись (X, d^{i+s}) , где $i \geq 0$.

Очевидно, что при $s = 0$ категория $D_\infty^{(s)}$ -модулей совпадает с указанной выше категорией D_∞ -модулей, а для каждого фиксированного числа $s \geq 0$ категория $D_\infty^{(s+1)}$ -модулей является полной подкатегорией категории $D_\infty^{(s)}$ -модулей.

Отметим, что для произвольного $D_\infty^{(s)}$ -модуля (X, d^{i+s}) имеет место равенство $d^s d^s = 0$, т.е. определен дифференциальный модуль (X, d^s) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Семейство гомоморфизмов $h = \{h^{i-s}: X \rightarrow Y \mid i \geq 0\}$ называется *гомотопией между морфизмами* $D_\infty^{(s)}$ -модулей $f, g: (X, d^{i+s}) \rightarrow (Y, d^{i+s})$, если для каждого целого числа $k \geq 0$ выполнено следующее соотношение:

$$\sum_{i+j=k} d^{i+s} h^{j-s} + h^{j-s} d^{i+s} = f^k - g^k.$$

При $k = 0$ имеем $d^s h^{-s} + h^{-s} d^s = f^0 - g^0$. Следовательно, отображение модулей $h^{-s}: X \rightarrow Y$ является дифференциальной гомотопией между отображениями $f^0, g^0: (X, d^s) \rightarrow (Y, d^s)$ дифференциальных модулей.

Без труда проверяется, что отношение между морфизмами $D_\infty^{(s)}$ -модулей, определяемое наличием гомотопии между ними, является отношением эквивалентности. При помощи этого отношения эквивалентности стандартно определяется понятие гомотопической эквивалентности между $D_\infty^{(s)}$ -модулями.

Напомним теперь основные гомотопические свойства $D_\infty^{(s)}$ -модулей. Пусть заданы любые $D_\infty^{(s)}$ -модули (X, d^{i+s}) и (Y, d^{i+s}) . Кроме того, пусть заданы произвольные морфизмы $D_\infty^{(s)}$ -модулей $\eta = \{\eta^i\}: (X, d^{i+s}) \rightleftharpoons (Y, d^{i+s}): \{\xi^i\} = \xi$ и задана некоторая гомотопия $h = \{h^{i-s}\}: X \rightarrow X$ между морфизмами $D_\infty^{(s)}$ -модулей,

для которых выполнены следующие условия:

$$\sum_{i+j=k} \eta^i \xi^j = (1_Y)^k, \quad \sum_{i+j=k} d^{i+s} h^{j-s} + h^{i-s} d^{j+s} = \sum_{i+j=k} \xi^i \eta^j - (1_X)^k, \quad k \geq 0.$$

Рассмотренную ситуацию будем записывать в виде $(\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi, h)$ и называть *сильной деформационной ретракцией $D_\infty^{(s)}$ -модулей*. При выполнении дополнительных условий

$$\sum_{i+j=k} \eta^i h^{j-s} = 0, \quad \sum_{i+j=k} h^{i-s} \xi^j = 0, \quad \sum_{i+j=k} h^{i-s} h^{j-s} = 0, \quad k \geq 0,$$

указанную сильную деформационную ретракцию $D_\infty^{(s)}$ -модулей будем называть *SDR-ситуацией $D_\infty^{(s)}$ -модулей*.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть заданы произвольные $D_\infty^{(s)}$ -модуль (X, d^{i+s}) и дифференциальный модуль (Y, d) . Кроме того, пусть задана любая сильная деформационная ретракция $(\eta: (X, d^s) \rightleftharpoons (Y, d): \xi, h)$ дифференциальных модулей. Тогда набор гомоморфизмов $\{d^{i+s}: Y \rightarrow Y\}$, определяемых формулами

$$d^s = d, \quad d^{i+s} = \eta \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1+s} \underbrace{(hd^{i_2+s}) \dots (hd^{i_k+s})}_{k-1} \right) \xi, \quad i \geq 1, \quad (1)$$

является $D_\infty^{(s)}$ -дифференциалом модуля Y . Более того, имеется сильная деформационная ретракция $D_\infty^{(s)}$ -модулей $(\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi, h)$, определяемая следующими формулами:

$$\xi^0 = \xi, \quad \xi^i = h \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1+s} \underbrace{(hd^{i_2+s}) \dots (hd^{i_k+s})}_{k-1} \right) \xi, \quad i \geq 1, \quad (2)$$

$$\eta^0 = \eta, \quad \eta^i = \eta \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1+s} \underbrace{(hd^{i_2+s}) \dots (hd^{i_k+s})}_{k-1} \right) h, \quad i \geq 1, \quad (3)$$

$$h^{-s} = h, \quad h^{i-s} = h \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1+s} \underbrace{(hd^{i_2+s}) \dots (hd^{i_k+s})}_{k-1} \right) h, \quad i \geq 1. \quad (4)$$

Если сильная деформационная ретракция $(\eta: (X, d^s) \rightleftharpoons (Y, d): \xi, h)$ является SDR-ситуацией дифференциальных модулей, то сильная деформационная ретракция $(\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi, h)$, которая получается по формулам (1)–(4), является SDR-ситуацией $D_\infty^{(s)}$ -модулей.

Пусть над произвольным полем задан любой $D_\infty^{(s)}$ -модуль (X, d^{i+s}) . Тогда, как было отмечено в начале параграфа, определена дифференциальная SDR-ситуация $(\eta: X \rightleftharpoons H(X): \xi, h)$, где $H(X) = \text{Ker } d^s / \text{Im } d^s$. Применяя к этой дифференциальной SDR-ситуации теорему 1.1, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть над любым полем задан $D_\infty^{(s)}$ -модуль (X, d^{i+s}) , и пусть $H(X)$ – гомологический модуль дифференциального модуля (X, d^s) . Тогда формулы (1)–(4) задают на $H(X)$ структуру $D_\infty^{(s)}$ -модуля $\{d^{i+s}: H(X) \rightarrow H(X)\}$, где $d^s = 0$, и определяют SDR-ситуацию $D_\infty^{(s)}$ -модулей

$$(\{\eta^i\}: (X, d^{i+s}) \rightleftharpoons (H(X), d^{i+s}): \{\xi^i\}, \{h^{i-s}\}).$$

Так как для $D_\infty^{(s)}$ -модуля $(H(X), d^{i+s})$ выполнено условие $d^s = 0$, то модуль гомологий $H(X)$ является $D_\infty^{(s+1)}$ -модулем $(H(X), d^{i+(s+1)})$. В частности, определен дифференциальный модуль $(H(X), d^{s+1})$, к которому можно снова применять теорему 1.2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. $D_\infty^{(s)}$ -модуль (X, d^{i+s}) называется *стабильным*, если для каждого элемента $x \in X$ найдется номер $k \geq 0$, зависящий от элемента x , для которого выполнены условия $d^{i+s}(x) = 0, i > k$. Модулем гомологий $H(X)$ *стабильного* $D_\infty^{(s)}$ -модуля X называется модуль гомологий $\text{Ker } D_s / \text{Im } D_s$ модуля X относительно суммарного дифференциала

$$D_s = (d^s + d^{1+s} + \dots + d^{i+s} + \dots): X \rightarrow X.$$

Подчеркнем, что суммарный дифференциал корректно определен только в случае стабильных $D_\infty^{(s)}$ -модулей.

Легко видеть, что если в условиях теоремы 1.1 заданный $D_\infty^{(s)}$ -модуль (X, d^{i+s}) является стабильным, то получаемый в этой теореме $D_\infty^{(s)}$ -модуль (Y, d^{i+s}) также является стабильным.

В заключение параграфа отметим, что все рассмотренные выше понятия, конструкции и утверждения имеют также очевидные аналоги и в случае градуированных $D_\infty^{(s)}$ -модулей, $D_\infty^{(s)}$ -дифференциалы которых имеют произвольную степень.

§ 2. Операды и алгебры над операдами

В этом параграфе напоминаются необходимые определения и конструкции из работ [1], [2], [9], [10], связанные с понятиями операды и алгебры над операдой в категории дифференциальных градуированных модулей.

Пусть K – произвольное коммутативное кольцо с единицей. Все рассматриваемые в этом параграфе модули и отображения модулей являются соответственно K -модулями и K -линейными отображениями модулей. Пусть Σ_j – симметрическая группа перестановок j элементов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Симметрическим семейством $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}(j)\}_{j \geq 1}$ называется семейство дифференциальных градуированных модулей $\mathcal{E}(j)$, где на каждом дифференциальном градуированном модуле $\mathcal{E}(j)$ справа действует симметрическая группа Σ_j . Симметрическое семейство $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}(j)\}_{j \geq 1}$ называется Σ -свободным, если для любого номера $j \geq 1$ дифференциальный градуированный модуль $\mathcal{E}(j)$ является Σ_j -свободным. Морфизмом симметрических семейств $f: \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}''$ называется семейство Σ_j -эквивариантных отображений дифференциальных градуированных модулей $f = \{f(j): \mathcal{E}'(j) \rightarrow \mathcal{E}''(j)\}_{j \geq 1}$. Гомотопией $h: \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}''$ между отображениями симметрических семейств $f, g: \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}''$

называется семейство Σ_j -эквивариантных гомотопий $\{h(j): \mathcal{E}'(j) \rightarrow \mathcal{E}''(j)\}_{j \geq 1}$ между Σ_j -эквивариантными отображениями дифференциальных градуированных модулей $f(j)$ и $g(j)$.

При помощи понятия гомотопии между отображениями симметрических семейств стандартно определяется понятие гомотопической эквивалентности симметрических семейств.

Для заданных симметрических семейств $\mathcal{E}'$ и $\mathcal{E}''$ рассмотрим симметрическое семейство $\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'' = \{(\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'')(j)\}_{j \geq 1}$, где $(\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'')(j)$ – фактормодуль Σ_j -свободного дифференциального градуированного модуля, порожденного дифференциальным градуированным модулем

$$\sum_{j_1 + \dots + j_k = j} \mathcal{E}'(k) \otimes \mathcal{E}''(j_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{E}''(j_k)$$

по отношению эквивалентности $\sim$, которое определяется соотношениями

$$\begin{aligned} x' \sigma \otimes x'_1 \otimes \dots \otimes x'_k &\sim x' \otimes x''_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes x''_{\sigma^{-1}(k)} \sigma(j_1, \dots, j_k), \\ x' \otimes x'_1 \sigma_1 \otimes \dots \otimes x'_k \sigma_k &\sim x' \otimes x'_1 \otimes \dots \otimes x'_k (\sigma_1 \times \dots \times \sigma_k). \end{aligned}$$

Здесь $\sigma(j_1, \dots, j_k)$ – перестановка j элементов, получающаяся при разбиении множества из j элементов на k блоков по $j_1, \dots, j_k$ элементов и воздействием на эти блоки перестановкой σ ; $\sigma_1 \times \dots \times \sigma_k$ – образ элемента $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ при вложении $\Sigma_{j_1} \oplus \dots \oplus \Sigma_{j_k} \rightarrow \Sigma_j$. Ясно, что рассмотренное $\times$ -произведение ассоциативно, т.е. для произвольных симметрических семейств $\mathcal{E}, \mathcal{E}', \mathcal{E}''$ имеется изоморфизм $\mathcal{E} \times (\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'') \approx (\mathcal{E} \times \mathcal{E}') \times \mathcal{E}''$ в категории симметрических семейств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. *Операдой* $(\mathcal{E}, \pi)$ называется симметрическое семейство $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}(j)\}_{j \geq 1}$, рассматриваемое вместе с заданным морфизмом симметрических семейств $\pi: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, для которого выполнено условие $\pi(\pi \times 1) = \pi(1 \times \pi)$. Морфизм симметрических семейств $\pi: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ называется *умножением операд* $(\mathcal{E}, \pi)$. Операта называется *Σ -свободной*, если эта операта, рассматриваемая как симметрическое семейство, является Σ -свободным симметрическим семейством. *Морфизмом операд* $f: (\mathcal{E}', \pi') \rightarrow (\mathcal{E}'', \pi'')$ называется морфизм симметрических семейств $f: \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}''$, для которого выполнено условие $f\pi' = \pi''(f \times f)$. *Единицей операд* $(\mathcal{E}, \pi)$ называется элемент $1 \in \mathcal{E}(1)_0$, для которого выполнены следующие условия:

$$\pi(1 \otimes e_j) = e_j, \quad \pi(e_j \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1) = e_j, \quad e_j \in \mathcal{E}(j), \quad j \geq 1.$$

Рассмотрим симметрическое семейство $\mathcal{K} = \{\mathcal{K}(j)\}_{j \geq 1}$, где $\mathcal{K}(j) = 0$, $j > 1$, и $\mathcal{K}(1) = K$. Ясно, что для любого симметрического семейства $\mathcal{E}$ имеется изоморфизм симметрических семейств $\mathcal{E} \times \mathcal{K} \approx \mathcal{K} \times \mathcal{E}$. Легко видеть, что задание единицы в операте $(\mathcal{E}, \pi)$ равносильно заданию морфизма симметрических семейств $i: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{E}$, для которого выполнено условие $\pi(1 \times i) = \pi(i \times 1)$.

ПРИМЕР 1. Простейшим примером операды служит операда (C, π) , где $C(j)$ является свободным модулем с одной образующей $c(j) \in C(j)_0$ и тривиальным действием группы Σ_j . Умножение $\pi: C \times C \rightarrow C$ этой операды определяется формулой

$$\pi(c(j) \otimes c(j_1) \otimes \cdots \otimes c(j_k)) = c(j), \quad j = \sum_{i=1}^k j_i.$$

ПРИМЕР 2. Каноническим примером операды служит операда $(\mathcal{E}_X, \pi)$, определяемая для любого дифференциального градуированного модуля X . Напомним конструкцию этой операды. Пусть $X^{\otimes j}$ — это j -я тензорная степень над K дифференциального градуированного модуля X . Определим дифференциальный градуированный модуль $\mathcal{E}_X(j)$, полагая $\mathcal{E}_X(j) = \text{Hom}_K(X^{\otimes j}; X)$, где $\text{Hom}_K(X^{\otimes j}; X)$ является дифференциальным градуированным модулем всех гомоморфизмов вида $X^{\otimes j} \rightarrow X$. Действие симметрической группы Σ_j на $\mathcal{E}_X(j)$ определяется действием Σ_j на $X^{\otimes j}$ перестановкой сомножителей. Структура операды на симметрическом семействе $\mathcal{E}_X$, т.е. умножение $\pi: \mathcal{E}_X \times \mathcal{E}_X \rightarrow \mathcal{E}_X$, задается формулой

$$\pi(g \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_k) = g \circ (g_1 \otimes \cdots \otimes g_k), \quad g_i \in \mathcal{E}_X(j_i), \quad 1 \leq i \leq k, \quad g \in \mathcal{E}_X(k).$$

Единицей $1 \in \mathcal{E}_X(1)_0$ операды $(\mathcal{E}_X, \pi)$ служит тождественное отображение дифференциального градуированного модуля X . Аналогично определяется операда $(\mathcal{E}^X, \pi)$, структура которой задается следующими равенствами:

$$\mathcal{E}^X(j) = \text{Hom}_K(X; X^{\otimes j}), \quad \pi(g \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_k) = (g_1 \otimes \cdots \otimes g_k) \circ g.$$

Рассмотрим теперь понятие операды более детально. Пусть задана произвольная операда $(\mathcal{E}, \pi)$. Для любых целых чисел $k_1 \geq 1, k_2 \geq 1$ определим семейство отображений дифференциальных градуированных модулей

$$\circ_i: \mathcal{E}(k_1) \otimes \mathcal{E}(k_2) \rightarrow \mathcal{E}(k_1 + k_2 - 1), \quad 1 \leq i \leq k_1,$$

полагая $a \circ_i b = \pi(a \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes b \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1)$, $a \in \mathcal{E}(k_1), 1 \in \mathcal{E}(1), b \in \mathcal{E}(k_2)$, где элемент b стоит в тензорном произведении $1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes b \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$ на месте с номером i , если считать слева. Основные свойства операций $\circ_i$, определяемых заданной операдой, перечислены в следующем утверждении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Для произвольной операды $(\mathcal{E}, \pi)$ и любых элементов $a \in \mathcal{E}(k_1), b \in \mathcal{E}(k_2), c \in \mathcal{E}(k_3), \sigma \in \Sigma_{k_1}, \tau \in \Sigma_{k_2}$ операции $\circ_i$ удовлетворяют следующим условиям:

1) ассоциативность

$$\begin{aligned} a \circ_i (b \circ_j c) &= (a \circ_i b) \circ_{i+j-1} c, \\ (a \circ_i b) \circ_j c &= a \circ_i (b \circ_{j-i+1} c), \end{aligned} \quad i \leq j \leq k_2 + i - 1;$$

2) коммутативность

$$(a \circ_i b) \circ_j c = \begin{cases} (-1)^\varepsilon (a \circ_j c) \circ_{k_3+i-1} b, & j < i, \\ (-1)^\varepsilon (a \circ_{j-k_2+1} c) \circ_i b, & k_2 + i - 1 < j; \end{cases}$$

3) эквивариантность

$$\begin{aligned} (a \sigma \circ_i b) &= (a \circ_{\sigma(i)} b) \sigma(1, \dots, 1, k_2, 1, \dots, 1), \\ (a \circ_i b \tau) &= (a \circ_i b) (1 \times \cdots \times 1 \times \tau \times 1 \times \cdots \times 1), \end{aligned}$$

где $\varepsilon = \dim(b) \dim(c)$. Задание на произвольном симметрическом семействе $\mathcal{E}$ операций $\circ_i$, удовлетворяющих указанным выше условиям ассоциативности, коммутативности и эквивариантности, равносильно введению на этом симметрическом семействе структуры операд $(\mathcal{E}, \pi)$, где умножение $\pi: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ на элементах $x_k \in \mathcal{E}(k)$, $x_{j_i} \in \mathcal{E}(j_i)$, $1 \leq i \leq k$, задается следующей формулой:

$$\pi(x_k \otimes x_{j_1} \otimes \cdots \otimes x_{j_k}) = ((\dots ((x_k \circ_k x_{j_k}) \circ_{k-1} x_{j_{k-1}}) \circ_{k-2} \dots) \circ_2 x_{j_2}) \circ_1 x_{j_1}.$$

Рассмотрим теперь введенное в работе [10] понятие S -операд. Пусть заданы произвольные симметрические семейства $\mathcal{E}'$ и $\mathcal{E}''$. Обозначим через $\mathcal{E}' \odot \mathcal{E}''$ симметрическое подсемейство симметрического семейства $\mathcal{E}' \times \mathcal{E}''$, для которого дифференциальный градуированный Σ_j -модуль $(\mathcal{E}' \odot \mathcal{E}'')(j)$ порождается тензорными произведениями

$$\mathcal{E}'(k_1) \otimes \mathcal{E}''(1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}''(1) \otimes \mathcal{E}''(k_2) \otimes \mathcal{E}''(1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}''(1), \quad j = k_1 + k_2 - 1.$$

Таким образом, симметрическое семейство $\mathcal{E}' \odot \mathcal{E}''$ порождается элементами вида $a \odot_i b = a \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes b \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$, где $a \in \mathcal{E}'(k_1)$, $1 \in \mathcal{E}''(1)$, $b \in \mathcal{E}''(k_2)$, $1 \leq i \leq k_1$ и элемент b стоит в тензорном произведении $1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes b \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$ на месте с номером i .

Легко видеть, что для любых симметрических семейств $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}''$, $\mathcal{E}'''$ симметрическое семейство $\mathcal{E}' \odot (\mathcal{E}'' \odot \mathcal{E}''')$ изоморфно прямому слагаемому симметрического семейства $(\mathcal{E}' \odot \mathcal{E}'') \odot \mathcal{E}'''$. Таким образом, в отличие от $\times$ -произведения симметрических семейств для $\odot$ -произведения симметрических семейств нет естественного изоморфизма $\mathcal{E}' \odot (\mathcal{E}'' \odot \mathcal{E}''') \approx (\mathcal{E}' \odot \mathcal{E}'') \odot \mathcal{E}'''$, а имеется только вложение симметрических семейств $\text{in}: \mathcal{E}' \odot (\mathcal{E}'' \odot \mathcal{E}''') \rightarrow (\mathcal{E}' \odot \mathcal{E}'') \odot \mathcal{E}'''$, задаваемое формулой

$$\text{in}(a \odot_i (b \odot_j c)) = (a \odot_i b) \odot_{i+j-1} c,$$

и проекция симметрических семейств $\text{pr}: (\mathcal{E}' \odot \mathcal{E}'') \odot \mathcal{E}''' \rightarrow \mathcal{E}' \odot (\mathcal{E}'' \odot \mathcal{E}''')$, которая на элементах $(a \odot_i b) \odot_j c$, где $b \in \mathcal{E}''(k_2)$, задается формулой

$$\text{pr}((a \odot_i b) \odot_j c) = \begin{cases} a \odot_i (b \odot_{j-i+1} c), & i \leq j \leq k_2 + i - 1, \\ 0, & i > j \text{ или } j > k_2 + i - 1. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. S -операдой $(\mathcal{E}, \pi)$ называется симметрическое семейство $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}(j)\}_{j \geq 1}$, рассматриваемое вместе с морфизмом симметрических семейств $\pi: \mathcal{E} \odot \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, для которого выполнено следующее условие:

$$\pi(1 \odot \pi) = \pi(\pi \odot 1): \mathcal{E} \odot (\mathcal{E} \odot \mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}.$$

Указанный морфизм симметрических семейств $\pi: \mathcal{E} \odot \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ называется умножением S -операд $(\mathcal{E}, \pi)$. Морфизмом S -операд $f: (\mathcal{E}', \pi') \rightarrow (\mathcal{E}'', \pi'')$ называется морфизм симметрических семейств $f: \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}''$, удовлетворяющий равенству $f\pi' = \pi''(f \odot f)$.

ПРИМЕР 3. Опишем конструкцию свободной S -оперადы, порожденной заданным симметрическим семейством. Пусть задано любое симметрическое семейство $\mathcal{E}$. Для этого семейства определим S -операту ($\mathcal{E}^\odot, \pi$), полагая

$$\mathcal{E}^\odot = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{E}^{\odot n}, \quad \mathcal{E}^{\odot n} = (\dots ((\underbrace{(\mathcal{E} \odot \mathcal{E}) \odot \mathcal{E}}_n) \odot \dots) \odot \mathcal{E}, \quad n > 0, \quad \mathcal{E}^{\odot 0} = \mathcal{K}.$$

Умножение $\pi: \mathcal{E}^\odot \odot \mathcal{E}^\odot \rightarrow \mathcal{E}^\odot$ этой S -оперადы определяется при помощи морфизмов симметрических семейств $\mathcal{E}^{\odot n} \odot \mathcal{E}^{\odot m} \rightarrow \mathcal{E}^{\odot(n+m)}$, индуцированных вложениями $\text{in}: \mathcal{E}' \odot (\mathcal{E}'' \odot \mathcal{E}''') \rightarrow (\mathcal{E}' \odot \mathcal{E}'') \odot \mathcal{E}'''$. Таким образом, для произвольных элементов $e_1 \odot_{i_1} \dots \odot_{i_{n-1}} e_n \in \mathcal{E}^{\odot n}$ и $e_{n+1} \odot_{i_{n+1}} \dots \odot_{i_{n+m-1}} e_{n+m} \in \mathcal{E}^{\odot m}$ умножение S -оперადы ($\mathcal{E}^\odot, \pi$) задается следующей формулой:

$$\begin{aligned} & \pi((e_1 \odot_{i_1} \dots \odot_{i_{n-1}} e_n) \odot_{i_n} (e_{n+1} \odot_{i_{n+1}} \dots \odot_{i_{n+m-1}} e_{n+m})) \\ &= e_1 \odot_{i_1} \dots \odot_{i_{n-1}} e_n \odot_{i_n} e_{n+1} \odot_{i_{n+1}+i_n-1} \dots \odot_{i_{n+m-1}+i_n-1} e_{n+m}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что очевидное вложение симметрических семейств $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^\odot$ является универсальным объектом в категории морфизмов симметрических семейств вида $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$, где $\mathcal{E}'$ — произвольная S -операта. Другими словами, S -операта $\mathcal{E}^\odot$ является свободной S -оператой, порожденной симметрическим семейством $\mathcal{E}$.

Опишем теперь связь между понятиями операд и S -операд. Легко видеть, что любая операта является S -оператой. Для установления обратной связи рассмотрим для любой S -операд ($\mathcal{E}, \pi$) и любых целых чисел $k_1 \geq 1, k_2 \geq 1$ семейство отображений дифференциальных градуированных модулей

$$\circ_i: \mathcal{E}(k_1) \otimes \mathcal{E}(k_2) \rightarrow \mathcal{E}(k_1 + k_2 - 1), \quad 1 \leq i \leq k_1,$$

где $a \circ_i b = \pi(a \odot_i b)$, $a \in \mathcal{E}(k_1), b \in \mathcal{E}(k_2)$. Свойства операций $\circ_i$, определяемых умножением произвольной S -операд, перечислены в следующем утверждении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Для любой S -операд ($\mathcal{E}, \pi$) и любых элементов $a \in \mathcal{E}(k_1), b \in \mathcal{E}(k_2), c \in \mathcal{E}(k_3), \sigma \in \Sigma_{k_1}, \tau \in \Sigma_{k_2}$ операции $\circ_i$ удовлетворяют следующим условиям:

1) ассоциативность

$$\begin{aligned} a \circ_i (b \circ_j c) &= (a \circ_i b) \circ_{i+j-1} c, & i \leq j \leq k_2 + i - 1; \\ (a \circ_i b) \circ_j c &= a \circ_i (b \circ_{j-i+1} c), \end{aligned}$$

2) эквивариантность

$$\begin{aligned} (a \sigma \circ_i b) &= (a \circ_{\sigma(i)} b) \sigma(1, \dots, 1, k_2, 1, \dots, 1), \\ (a \circ_i b \tau) &= (a \circ_i b) (1 \times \dots \times 1 \times \tau \times 1 \times \dots \times 1). \end{aligned}$$

Задание на произвольном симметрическом семействе $\mathcal{E}$ операций $\circ_i$, удовлетворяющих указанным выше условиям ассоциативности и эквивариантности, равносильно введению на этом симметрическом семействе структуры S -операд ($\mathcal{E}, \pi$), умножение которой на элементах $a \odot_i b$ задается формулой $\pi(a \odot_i b) = a \circ_i b$.

Таким образом, различие между структурами операд и S -операд заключается в том, что операции $\circ_i$, определяемые умножением операд, удовлетворяют условию коммутативности, а операции $\circ_i$, определяемые умножением S -операд, условию коммутативности, вообще говоря, не удовлетворяют. Более того, легко видеть, что справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Для того чтобы структура S -операты на симметрическом семействе определяла структуру операты на этом симметрическом семействе, необходимо и достаточно, чтобы операции $\odot_i$, индуцированные умножением S -операты, удовлетворяли условию коммутативности.*

Рассмотрим теперь понятие коммутативной S -операты, при помощи которого предложение 2.1 можно переформулировать непосредственно на языке умножения S -операты. Пусть заданы любые симметрические семейства $\mathcal{E}'$ и $\mathcal{E}$. Определим перестановочный морфизм симметрических семейств $T: (\mathcal{E}' \odot \mathcal{E}) \odot \mathcal{E} \rightarrow (\mathcal{E}' \odot \mathcal{E}) \odot \mathcal{E}$, который на элементах $(a \odot_i b) \odot_j c$, где $a \in \mathcal{E}'(k_1)$, $b \in \mathcal{E}(k_2)$, $c \in \mathcal{E}(k_3)$, задается следующей формулой:

$$T((a \odot_i b) \odot_j c) = \begin{cases} (a \odot_i b) \odot_j c, & i \leq j \leq k_2 + i - 1, \\ (-1)^{\dim(b) \dim(c)} (a \odot_j c) \odot_{k_3+i-1} b, & j < i, \\ (-1)^{\dim(b) \dim(c)} (a \odot_{j-k_2+1} c) \odot_i b, & j > k_2 + i - 1. \end{cases}$$

Отметим, что мотивировкой определения перестановочного морфизма T является вид условия коммутативности из предложения 2.1. Легко видеть, что для перестановочного морфизма T справедливо равенство $T^2 = \text{id}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. S -операта $(\mathcal{E}, \pi)$ называется *коммутативной*, если для умножения этой S -операты выполнено условие $\pi(\pi \odot 1)T = \pi(\pi \odot 1)$.

Переформулировкой предложения 2.3 на языке коммутативных S -операт является следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Введение на симметрическом семействе структуры коммутативной S -операты равносильно заданию на этом симметрическом семействе структуры операты.*

ПРИМЕР 4. Рассмотрим конструкцию свободной коммутативной S -операты или, что равносильно, конструкцию свободной операты, порожденной симметрическим семейством $\mathcal{E}$. Пусть Σ_{n-1} — симметрическая группа перестановок чисел $2, 3, \dots, n$. Определим действие произвольной транспозиции $\tau = (k+1, k) \in \Sigma_{n-1}$ на симметрическом семействе $\mathcal{E}^{\odot n}$, полагая

$$\tau(e_1 \odot \dots \odot e_n) = T(((e_1 \odot \dots \odot e_{k-1}) \odot e_k) \odot e_{k+1}) \odot \dots \odot e_n \in \mathcal{E}^{\odot n},$$

где $T: (\mathcal{E}^{\odot(k-1)} \odot \mathcal{E}) \odot \mathcal{E} \rightarrow (\mathcal{E}^{\odot(k-1)} \odot \mathcal{E}) \odot \mathcal{E}$ — рассмотренный выше перестановочный морфизм симметрических семейств. Стандартная процедура разложения произвольной перестановки из Σ_{n-1} в произведение транспозиций соседних чисел определяет действие группы Σ_{n-1} на симметрическом семействе $\mathcal{E}^{\odot n}$. Определим теперь для любого симметрического семейства $\mathcal{E}$ коммутативную S -операту $(\mathcal{E}^\wedge, \pi)$, полагая

$$\mathcal{E}^\wedge = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{E}^{\wedge n}, \quad \mathcal{E}^{\wedge 0} = \mathcal{K}, \quad \mathcal{E}^{\wedge 1} = \mathcal{E}, \quad \mathcal{E}^{\wedge 2} = \mathcal{E} \odot \mathcal{E}, \quad \mathcal{E}^{\wedge n} = \underbrace{\mathcal{E} \wedge \dots \wedge \mathcal{E}}_n, \quad n > 2,$$

где $\mathcal{E}^{\wedge n}$ — это симметрическое факторсемейство симметрического семейства $\mathcal{E}^{\odot n}$ по действию группы Σ_{n-1} . Умножение $\pi: \mathcal{E}^\wedge \odot \mathcal{E}^\wedge \rightarrow \mathcal{E}^\wedge$ коммутативной S -операты $(\mathcal{E}^\wedge, \pi)$ индуцировано умножением свободной S -операты $(\mathcal{E}^{\odot}, \pi)$ и задается следующей формулой:

$$\pi((e_1 \wedge \dots \wedge e_n) \odot (e_{n+1} \wedge \dots \wedge e_{n+m})) = e_1 \wedge \dots \wedge e_n \wedge e_{n+1} \wedge \dots \wedge e_{n+m}.$$

Легко видеть, что вложение $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^\wedge$ является универсальным объектом в категории морфизмов симметрических семейств вида $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$, где $\mathcal{E}'$ – произвольная коммутативная S -операда. Другими словами, коммутативная S -операда $(\mathcal{E}^\wedge, \pi)$ является свободной коммутативной S -операдой, порожденной симметрическим семейством $\mathcal{E}$. Из предложения 2.4 следует, что определенная выше структура коммутативной S -операды на симметрическом семействе $\mathcal{E}^\wedge$ определяет на этом симметрическом семействе структуру операды, умножение $\pi: \mathcal{E}^\wedge \times \mathcal{E}^\wedge \rightarrow \mathcal{E}^\wedge$ которой задается формулой из предложения 2.1. Так как коммутативная S -операда $(\mathcal{E}^\wedge, \pi)$ является свободной, то определяемая этой коммутативной S -операдой операда $(\mathcal{E}^\wedge, \pi)$ также является свободной. Таким образом, для произвольного симметрического семейства $\mathcal{E}$ построена свободная операда $(\mathcal{E}^\wedge, \pi)$, порожденная симметрическим семейством $\mathcal{E}$.

ПРИМЕР 5. Рассмотрим построенную в работе [1] операду (E_∞, π) . По построению операда E_∞ является свободной и Σ -свободной операдой, для которой имеется морфизм операд $E_\infty \rightarrow C$, где C – операда из примера 1, представляющий собой гомотопическую эквивалентность симметрических семейств. В частности, для каждого $j \geq 1$ дифференциальный градуированный модуль $E_\infty(j)$ является свободной резольвентой тривиального $K[\Sigma]$ -модуля K , где $K[\Sigma_j]$ – групповая K -алгебра симметрической группы Σ_j . Например дифференциальный градуированный модуль $E_\infty(2)$ является $K[\mathbb{Z}_2]$ -свободным ациклическим цепным комплексом с образующими $\cup_i \in E_\infty(2)$ размерности $i \geq 0$ и граничным оператором

$$d(\cup_i) = \cup_{i-1} + (-1)^i \cup_{i-1} T, \quad T \in \Sigma_2 = \mathbb{Z}_2.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. *Кооперадой* $(\mathcal{L}, \nabla)$ называется симметрическое семейство $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}(j)\}_{j \geq 1}$, рассматриваемое вместе с заданным морфизмом симметрических семейств $\nabla: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \times \mathcal{L}$, для которого выполнено условие $(\nabla \times 1)\nabla = (1 \times \nabla)\nabla$. Морфизм симметрических семейств $\nabla: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ называется *коумножением кооператы* $(\mathcal{L}, \nabla)$. Морфизмом кооперат $f: (\mathcal{L}', \nabla') \rightarrow (\mathcal{L}'', \nabla'')$ называется морфизм симметрических семейств $f: \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}''$, для которого выполнено условие $(f \times f)\nabla' = \nabla''f$.

ПРИМЕР 6. Простые примеры кооперат можно получить при помощи операции сопряжения модулей. В самом деле, пусть задана некоторая операда $(\mathcal{E}, \pi)$, у которой для всех $j \geq 1$ градуированный модуль $\mathcal{E}(j)$ в каждой размерности является конечно порожденным проективным модулем. Тогда симметрическое семейство $\mathcal{E}^* = \{\mathcal{E}(j)^*\}_{j \geq 1}$, где $\mathcal{E}(j)^* = \text{Hom}_K(\mathcal{E}(j); K)$, является кооператой относительно коумножения $\nabla = \pi^*: \mathcal{E}^* \rightarrow (\mathcal{E} \times \mathcal{E})^* = \mathcal{E}^* \times \mathcal{E}^*$. Кооперада $(\mathcal{E}^*, \nabla)$ называется кооператой, сопряженной к операде $(\mathcal{E}, \pi)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. *S-кооперадой* $(\mathcal{L}, \nabla)$ называется симметрическое семейство $\mathcal{L}$, рассматриваемое вместе с фиксированным морфизмом симметрических семейств $\nabla: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \odot \mathcal{L}$, для которого выполнено следующее условие:

$$(1 \odot \nabla)\nabla = (\nabla \odot 1)\nabla: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \odot (\mathcal{L} \odot \mathcal{L}).$$

Указанный морфизм симметрических семейств $\nabla: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \odot \mathcal{L}$ называется *коумножением S-кооператы* $(\mathcal{L}, \nabla)$. Морфизмом *S-кооперат*

$$f: (\mathcal{L}', \nabla') \rightarrow (\mathcal{L}'', \nabla'')$$

называется морфизм симметрических семейств $f: \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}''$, удовлетворяющий равенству $(f \odot f)\nabla' = \nabla''f$.

ПРИМЕР 7. Рассмотрим конструкцию свободной S -кооперады, порожденной симметрическим семейством. Пусть задано любое симметрическое семейство $\mathcal{L}$. Для этого семейства определим S -коопераду $(\mathcal{L}^\odot, \nabla)$, где $\mathcal{L}^\odot$ – симметрическое семейство, рассмотренное в примере 4, а коумножение $\nabla: \mathcal{L}^\odot \rightarrow \mathcal{L}^\odot \odot \mathcal{L}^\odot$ задается при помощи морфизмов симметрических семейств $\mathcal{L}^{\odot(n+m)} \rightarrow \mathcal{L}^{\odot n} \odot \mathcal{L}^{\odot m}$, индуцированных проекциями $\text{pr}: (\mathcal{L}' \odot \mathcal{L}'') \odot \mathcal{L}''' \rightarrow \mathcal{L}' \odot (\mathcal{L}'' \odot \mathcal{L}''')$. Таким образом, коумножение S -кооперады $(\mathcal{L}^\odot, \nabla)$ задается формулой

$$\begin{aligned} \nabla(l_1 \odot_{i_1} \cdots \odot_{i_{n-1}} l_n) &= 1 \odot_1 (l_1 \odot_{i_1} \cdots \odot_{i_{n-1}} l_n) + (l_1 \odot_{i_1} \cdots \odot_{i_{n-1}} l_n) \odot_1 1 \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} (l_1 \odot_{i_1} \cdots \odot_{i_{k-1}} l_k) \odot_{i_k} (l_{k+1} \odot_{i_{k+1}-i_k+1} \cdots \odot_{i_{n-1}-i_k+1} l_n), \end{aligned}$$

где $1 \in \mathcal{L}^{\odot 0}$. Легко видеть, что очевидная проекция симметрических семейств $\mathcal{E}^\odot \rightarrow \mathcal{E}$ является универсальным объектом в категории морфизмов симметрических семейств вида $\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}'$ – произвольная S -кооперада. Другими словами, S -кооперада $(\mathcal{E}^\odot, \nabla)$ является свободной S -кооперадой, порожденной симметрическим семейством $\mathcal{E}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. S -кооперада $(\mathcal{L}, \nabla)$ называется *коммутативной*, если коумножение этой S -кооперады удовлетворяет равенству $T(\nabla \odot 1)\nabla = (\nabla \odot 1)\nabla$, где $T: (\mathcal{L} \odot \mathcal{L}) \odot \mathcal{L} \rightarrow (\mathcal{L} \odot \mathcal{L}) \odot \mathcal{L}$ – это рассмотренный выше перестановочный морфизм симметрических семейств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Введение на симметрическом семействе структуры коммутативной S -кооперады равносильно заданию на этом симметрическом семействе структуры кооперады.

ПРИМЕР 8. Рассмотрим конструкцию свободной коммутативной S -кооперады или, что равносильно, конструкцию свободной кооперады, порожденной симметрическим семейством. Пусть задано произвольное симметрическое семейство $\mathcal{L}$. Определим для этого симметрического семейства коммутативную S -коопераду $(\mathcal{L}^\vee, \nabla)$, полагая

$$\mathcal{L}^\vee = \bigoplus_{n \geq 1} \mathcal{L}^{\vee n}, \quad \mathcal{L}^{\vee n} = \underbrace{\mathcal{L} \vee \cdots \vee \mathcal{L}}_n,$$

где $\mathcal{L}^{\vee n}$ – это симметрическое подсемейство симметрического семейства $\mathcal{L}^{\odot n}$, инвариантное относительно рассмотренного выше действия группы Σ_{n-1} . Коумножение $\nabla: \mathcal{L}^\vee \rightarrow \mathcal{L}^\vee \odot \mathcal{L}^\vee$ коммутативной S -кооперады $(\mathcal{L}^\vee, \nabla)$ индуцировано коумножением свободной S -кооперады $(\mathcal{L}^\odot, \nabla)$ и задается следующей формулой:

$$\begin{aligned} \nabla(l_1 \vee \cdots \vee l_n) &= 1 \odot_1 (l_1 \vee \cdots \vee l_n) + (l_1 \vee \cdots \vee l_n) \odot_1 1 \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} (l_1 \vee \cdots \vee l_k) \odot (l_{k+1} \vee \cdots \vee l_n). \end{aligned}$$

Легко видеть, что проекция $\mathcal{L}^\vee \rightarrow \mathcal{L}$ является универсальным объектом в категории морфизмов симметрических семейств вида $\mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}$, где $\mathcal{L}'$ – произвольная коммутативная S -кооперада. Другими словами, коммутативная S -кооперада $(\mathcal{L}^\vee, \nabla)$ является свободной коммутативной S -кооперадой, порожденной симметрическим семейством $\mathcal{L}$. Из предложения 1.5 следует, что определенная выше структура коммутативной S -кооперады на симметрическом семействе $\mathcal{L}^\vee$ определяет на этом симметрическом семействе структуру кооператы, коумножение $\nabla: \mathcal{L}^\vee \rightarrow \mathcal{L}^\vee \times \mathcal{L}^\vee$ которой задается формулой, двойственной к формуле из предложения 2.1. Так как коммутативная S -кооперада $(\mathcal{L}^\vee, \nabla)$ является свободной, то определяемая этой коммутативной S -кооперадой кооперата $(\mathcal{L}^\vee, \nabla)$ также является свободной. Таким образом, построена свободная операда $(\mathcal{L}^\vee, \nabla)$, порожденная симметрическим семейством $\mathcal{L}$.

Рассмотрим понятие B -конструкции для операды. Пусть задана произвольная операда $(\mathcal{E}, \pi)$. Умножение $\pi: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ этой операды определяет на симметрическом семействе $\mathcal{E}$ структуру коммутативной S -операды $(\mathcal{E}, \pi)$ с умножением $\pi: \mathcal{E} \odot \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$. Обозначим элементы $e_1 \vee \dots \vee e_n$ из симметрического семейства $\mathcal{E}^\vee$ через $[e_1, \dots, e_n]$ и введем на свободной коммутативной S -коопераде $(\mathcal{E}^\vee, \nabla)$, порожденной симметрическим семейством $\mathcal{E}$, новую градуировку и новый дифференциал, полагая

$$\begin{aligned} \dim[e_1, \dots, e_n] &= \dim(e_1) + \dots + \dim(e_n) + n, \\ d[e_1, \dots, e_n] &= \sum_{k=1}^n (-1)^{\varepsilon_{k-1}+1} [e_1, \dots, d(e_k), \dots, e_n] \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{\varepsilon_k} [e_1, \dots, \pi(e_k \odot e_{k+1}), \dots, e_n]. \end{aligned}$$

Прямыми вычислениями проверяется, что свободная коммутативная S -кооперада $(\mathcal{E}^\vee, \nabla)$, рассматриваемая вместе с указанными выше новой градуировкой и новым дифференциалом, является коммутативной S -кооперадой. Кооперада, определяемая этой коммутативной S -кооперадой, называется B -конструкцией операды $(\mathcal{E}, \pi)$ и обозначается $B_\vee(\mathcal{E})$. Таким образом, для произвольной операды $(\mathcal{E}, \pi)$ определена кооперата $(B_\vee(\mathcal{E}), \nabla)$.

Рассмотрим теперь понятие ко- B -конструкции для кооператы. Пусть задана любая кооперата $(\mathcal{L}, \nabla)$. Коумножение $\nabla: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ этой кооператы определяет на симметрическом семействе $\mathcal{L}$ структуру коммутативной S -кооператы $(\mathcal{L}, \nabla)$ с коумножением $\nabla: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \odot \mathcal{L}$. Обозначим элементы $l_1 \wedge \dots \wedge l_n$ из симметрического семейства $\mathcal{L}^\wedge$ через $[l_1, \dots, l_n]$ и введем на свободной коммутативной S -операде $(\mathcal{L}^\wedge, \pi)$, порожденной симметрическим семейством $\mathcal{L}$, новую градуировку и новый дифференциал, полагая

$$\begin{aligned} \dim[l_1, \dots, l_n] &= \dim(l_1) + \dots + \dim(l_n) - n, \\ d[l_1, \dots, l_n] &= \sum_{k=1}^n (-1)^{\varepsilon_{k-1}+1} [l_1, \dots, d(l_k), \dots, l_n] \\ &\quad + \sum_{k=1}^n (-1)^{\varepsilon_k} [l_1, \dots, l'_k, l''_k, \dots, l_n], \end{aligned}$$

где $\nabla(l_k) = \sum l'_k \odot l''_k$. Прямыми вычислениями проверяется, что свободная коммутативная S -операда $(\mathcal{L}^\wedge, \pi)$, рассматриваемая вместе с указанными выше новой градуировкой и новым дифференциалом, является коммутативной S -операдой. Операда, определяемая этой коммутативной S -операдой, называется ко- B -конструкцией кооперады $(\mathcal{L}, \nabla)$ и обозначается $F_\wedge(\mathcal{L})$. Таким образом, для произвольной кооперады $(\mathcal{L}, \nabla)$ определена операда $(F_\wedge(\mathcal{L}), \pi)$.

Напомним теперь понятие алгебры над операдой. Пусть задан любой дифференциальный градуированный модуль X и некоторое симметрическое семейство $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}(j)\}_{j \geq 1}$. Рассмотрим дифференциальный градуированный модуль

$$\mathcal{E} \times X = \bigoplus_{j \geq 1} \mathcal{E}(j) \otimes_{K[\Sigma_j]} X^{\otimes j},$$

где $K[\Sigma_j]$ – групповая K -алгебра симметрической группы Σ_j . Легко видеть, что для любых симметрических семейств $\mathcal{E}', \mathcal{E}''$ и любого дифференциального градуированного модуля X имеет место изоморфизм $\mathcal{E}' \times (\mathcal{E}'' \times X) \approx (\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'') \times X$ в категории дифференциальных градуированных модулей. Также легко видеть, что для любых симметрических семейств $\mathcal{E}', \mathcal{E}''$ и любого дифференциального градуированного модуля X имеются вложение $(\mathcal{E}' \odot \mathcal{E}'') \times X \rightarrow \mathcal{E}' \times (\mathcal{E}'' \times X)$ и проекция $\mathcal{E}' \times (\mathcal{E}'' \times X) \rightarrow (\mathcal{E}' \odot \mathcal{E}'') \times X$ дифференциальных градуированных модулей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.8. *Алгеброй над операдой $(\mathcal{E}, \pi)$ или просто $\mathcal{E}$ -алгеброй называется дифференциальный градуированный модуль X , рассматриваемый вместе с отображением дифференциальных градуированных модулей $\mu: \mathcal{E} \times X \rightarrow X$, для которого выполнено условие $\mu(\pi \times 1) = \mu(1 \times \mu)$. Морфизмом $\mathcal{E}$ -алгебр $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \mu)$ называется отображение дифференциальных градуированных модулей $f: X \rightarrow Y$, удовлетворяющее условию $\mu(1 \times f) = f\mu$. Гомотопией между морфизмами $\mathcal{E}$ -алгебр $f, g: (X, \mu) \rightarrow (Y, \mu)$ называется гомотопия $h: X \rightarrow Y$ между морфизмами дифференциальных градуированных модулей $f, g: X \rightarrow Y$, для которой выполнено условие $\mu(1 \times h) = h\mu$.*

Пусть задана SDR-ситуация $(\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi, h)$ дифференциальных градуированных модулей, где X, Y являются $\mathcal{E}$ -алгебрами, отображения $\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi$ являются морфизмами $\mathcal{E}$ -алгебр, а гомотопия $h: X \rightarrow X$ является гомотопией между морфизмами $\mathcal{E}$ -алгебр. Такую SDR-ситуацию дифференциальных модулей будем называть *SDR-ситуацией $\mathcal{E}$ -алгебр*.

Отметим, что введение структуры $\mathcal{E}$ -алгебры на дифференциальном градуированном модуле X равносильно заданию морфизма операд $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_X$, где $\mathcal{E}_X$ – это операда из примера 3.

ПРИМЕР 9. Задание на дифференциальном градуированном модуле X структуры алгебры над рассмотренной в примере 1 операдой C равносильно введению на X структуры ассоциативной и коммутативной дифференциальной алгебры.

ПРИМЕР 10. В работе [1] при помощи метода ациклических моделей было показано, что на коцепном комплексе любого топологического пространства имеется естественная структура E_∞ -алгебры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.9. Алгеброй над S -операдой $(\mathcal{E}, \pi)$ называется дифференциальный градуированный модуль X , рассматриваемый вместе с отображением дифференциальных градуированных модулей $\mu: \mathcal{E} \times X \rightarrow X$, для которого выполнено условие $\mu(\pi \times 1) = \mu(1 \times \mu): (\mathcal{E} \odot \mathcal{E}) \times X \rightarrow X$. Морфизмом $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \mu)$ алгебр над S -операдой $\mathcal{E}$ называется отображение дифференциальных градуированных модулей $f: X \rightarrow Y$, удовлетворяющее условию $\mu(1 \times f) = f\mu$. Гомотопией между морфизмами $f, g: (X, \mu) \rightarrow (Y, \mu)$ алгебр над S -операдой $\mathcal{E}$ называется гомотопия $h: X \rightarrow Y$ между морфизмами дифференциальных градуированных модулей $f, g: X \rightarrow Y$, для которой выполнено условие $\mu(1 \times h) = h\mu$.

Легко видеть, что введение на дифференциальном градуированном модуле X структуры алгебры над коммутативной S -операдой равносильно заданию на X структуры алгебры над соответствующей операдой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.10. Дифференциальный градуированный модуль X , рассматриваемый вместе с фиксированным отображением дифференциальных градуированных модулей $\tau: X \rightarrow \mathcal{L} \times X$, называется коалгеброй над кооперадой $(\mathcal{L}, \nabla)$ или просто $\mathcal{L}$ -коалгеброй, если выполнено условие $(\nabla \times 1)\tau = (1 \times \tau)\tau$. Морфизмом $\mathcal{L}$ -коалгебр $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau)$ называется отображение дифференциальных градуированных модулей $f: X \rightarrow Y$, для которого выполнено условие $(1 \times f)\tau = \tau f$. Гомотопией между морфизмами $\mathcal{L}$ -коалгебр $f, g: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau)$ называется гомотопия $h: X \rightarrow Y$ между морфизмами дифференциальных градуированных модулей $f, g: X \rightarrow Y$, для которой выполнено условие $(1 \times h)\tau = \tau h$.

Пусть задана SDR-ситуация $(\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi, h)$ дифференциальных модулей, где X, Y являются $\mathcal{L}$ -коалгебрами, отображения $\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi$ являются морфизмами $\mathcal{L}$ -коалгебр, а гомотопия $h: X \rightarrow X$ является гомотопией между морфизмами $\mathcal{L}$ -коалгебр. Такую SDR-ситуацию дифференциальных модулей будем называть SDR-ситуацией $\mathcal{E}$ -коалгебр.

Легко видеть, что введение на дифференциальном градуированном модуле X структуры дифференциальной $\mathcal{E}^*$ -коалгебры, где $\mathcal{E}^*$ — это кооперада, сопряженная к опереде $\mathcal{E}$, равносильно заданию некоторого морфизма операд $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^X$, где $\mathcal{E}^X$ — это рассмотренная выше опереда, определяемая дифференциальным градуированным модулем X . Коалгебры над кооперадой $\mathcal{E}^*$, сопряженной к опереде $\mathcal{E}$, называют также коалгебрами над операдой $\mathcal{E}$ или просто $\mathcal{E}$ -коалгебрами.

ПРИМЕР 11. Задание на дифференциальном градуированном модуле X структуры коалгебры над кооперадой C^* , сопряженной к опереде C , равносильно введению на X структуры ассоциативной и коммутативной дифференциальной коалгебры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.11. Дифференциальный градуированный модуль X , рассматриваемый вместе с фиксированным отображением дифференциальных градуированных модулей $\tau: X \rightarrow \mathcal{L} \times X$, называется коалгеброй над S -кооперадой $(\mathcal{L}, \nabla)$, если выполнено условие $(\nabla \times 1)\tau = (1 \times \tau)\tau: X \rightarrow (\mathcal{L} \odot \mathcal{L}) \times X$. Морфизмом $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau)$ коалгебр над S -кооперадой $\mathcal{L}$ называется отображение дифференциальных градуированных модулей $f: X \rightarrow Y$, удовлетворяющее условию $(1 \times f)\tau = \tau f$. Гомотопией между морфизмами $f, g: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau)$ коалгебр над S -кооперадой называется гомотопия $h: X \rightarrow Y$ между морфизмами дифференциальных градуированных модулей $f, g: X \rightarrow Y$, для которой выполнено условие $(1 \times h)\tau = \tau h$.

Легко видеть, что введение на дифференциальном градуированном модуле X структуры коалгебры надкоммутативной S -кооперативной равносильно заданию на X структуры коалгебры над соответствующей кооперативной.

Напомним теперь введенные в работе [2] понятия A_∞ -алгебры над кооперативной и A_∞ -коалгебры над кооперативной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.12. Дифференциальный градуированный модуль X , рассматриваемый вместе с семейством отображений

$$\{\mu_n: \mathcal{E}^{\vee(n+1)} \times X \rightarrow X \mid \mu_n((\mathcal{E}^{\vee(n+1)} \times X)_\bullet) \subseteq X_{\bullet+n}, n \geq 0\},$$

называется A_∞ -алгеброй над кооперативной $(\mathcal{E}, \pi)$ или, более кратко, $A_\infty \mathcal{E}$ -алгеброй, если $\mu_0: \mathcal{E} \times X \rightarrow X$ является отображением дифференциальных модулей и для каждого целого числа $n \geq 0$ выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} d\mu_{n+1} + (-1)^n \mu_{n+1}d &= \sum_{t=1}^{n+1} (-1)^{t+n} \mu_n(1 \vee \dots \vee 1 \vee \pi \vee 1 \vee \dots \vee 1 \times 1) \\ &+ \sum_{m=0}^n (-1)^{nm} \mu_{n-m}(1 \vee \dots \vee 1 \times \mu_m), \end{aligned}$$

где t — это номер места, на котором стоит π . Морфизмом $A_\infty \mathcal{E}$ -алгебр $f: X \rightarrow Y$ называется семейство отображений

$$f = \{f_n: \mathcal{E}^{\vee n} \times X \rightarrow Y \mid f_n((\mathcal{E}^{\vee n} \times X)_\bullet) \subseteq Y_{\bullet+n}, n \geq 0\},$$

где $f_0: \mathcal{E}^{\vee 0} \times X = \mathcal{X} \times X = X \rightarrow Y$ является отображением дифференциальных модулей, и которые для каждого целого числа $n \geq 0$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} df_{n+1} + (-1)^n f_{n+1}d &= \sum_{t=1}^n (-1)^{t+n} f_n(1 \vee \dots \vee 1 \vee \pi \vee 1 \vee \dots \vee 1 \times 1) \\ &+ \sum_{m=0}^n (-1)^{(n+1)m+1} f_{n-m}(1 \vee \dots \vee 1 \times \mu_m) \\ &+ \sum_{m=0}^n (-1)^\nu \mu_m(1 \vee \dots \vee 1 \times f_{n-m}), \end{aligned}$$

где $\nu = n$, если m четное, и $\nu = 0$, если m нечетное; t — номер места, на котором стоит π .

Двойственным образом определяются понятие A_∞ -коалгебры над кооперативной $(\mathcal{L}, \nabla)$ или, более кратко, $A_\infty \mathcal{L}$ -коалгебры и понятие морфизма $A_\infty \mathcal{L}$ -коалгебр.

§ 3. $D_\infty^{(s)}$ -ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ НАД ОПЕРАДАМИ

В этом параграфе вводится понятие D_∞ -дифференциальной алгебры над операдой, являющееся D_∞ -дифференциальным аналогом понятия алгебры над операдой, и устанавливаются основные гомотопические свойства D_∞ -дифференциальных алгебр над операдами.

Пусть K – коммутативное кольцо с единицей. Все рассматриваемые в этом параграфе модули и отображения модулей являются соответственно K -модулями и K -линейными отображениями модулей. Кроме того, все рассматриваемые в этом параграфе D_∞ -модули являются градуированными D_∞ -модулями, компоненты D_∞ -дифференциалов которых имеют степени, равные (-1) .

Пусть заданы произвольные $D_\infty^{(s)}$ -модули (X, d^{i+s}) и (Y, d^{i+s}) . Тогда на тензорном произведении $X \otimes Y$ градуированных модулей X и Y имеется $D_\infty^{(s)}$ -дифференциал $\{d^{i+s}: (X \otimes Y)_\bullet \rightarrow (X \otimes Y)_{\bullet-1}\}$, компоненты которого задаются формулой

$$d^{i+s}(x \otimes y) = d^{i+s}(x) \otimes y + (-1)^{\dim(x)} x \otimes d^{i+s}(y).$$

В частности, для каждого $D_\infty^{(s)}$ -модуля (X, d^{i+s}) и любого целого числа $n \geq 1$ определен $D_\infty^{(s)}$ -модуль $(X^{\otimes n}, d^{i+s})$.

Для любых $D_\infty^{(s)}$ -модулей (X, d^{i+s}) и (Y, d^{i+s}) рассмотрим дифференциальный модуль $\text{hom}^{(s)}(X; Y) = \{\text{hom}^{(s)}(X; Y)_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Элементами модуля $\text{hom}^{(s)}(X; Y)_n$ являются семейства отображений модулей $f = \{f^{-ns+i}: X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n}\}$, $i \geq 0$, а дифференциал $d: \text{hom}^{(s)}(X; Y)_n \rightarrow \text{hom}^{(s)}(X; Y)_{n-1}$ задается формулой

$$(d(f))^{-(n-1)s+i} = \sum_{k+m=i} d^{k+s} f^{-ns+m} + (-1)^{n+1} f^{-ns+k} d^{m+s}, \quad i \geq 0,$$

где $f = \{f^{-ns+i}\} \in \text{hom}^{(s)}(X; Y)_n$.

Заметим теперь, что если заданные $D_\infty^{(s)}$ -модули (X, d^{i+s}) и (Y, d^{i+s}) рассматривать как $D_\infty^{(s-1)}$ -модули $(X, d^{i+(s-1)})$ и $(Y, d^{i+(s-1)})$, где $d^{s-1} = 0$, то для указанных $D_\infty^{(s)}$ -модулей наряду с дифференциальным модулем $\text{hom}^{(s)}(X; Y)$ определен еще дифференциальный модуль $\text{hom}^{(s-1)}(X; Y)$. Легко видеть, что имеет место вложение дифференциальных модулей $\text{hom}^{(s-1)}(X; Y) \subset \text{hom}^{(s)}(X; Y)$, которое сопоставляет каждому семейству отображений

$$\{f^{-n(s-1)+i}\} \in \text{hom}^{(s-1)}(X; Y)_n$$

семейство отображений

$$\{g^{-ns+i}\} \in \text{hom}^{(s)}(X; Y)_n,$$

где

$$g^{-ns+i} = 0, \quad 0 \leq i < n, \quad g^{-ns+i} = f^{-n(s-1)+(i-n)}, \quad i \geq n.$$

Таким образом, для заданных $D_\infty^{(s)}$ -модулей X и Y имеется возрастающая фильтрация $\{\text{hom}^{(k)}(X; Y)\}$, $0 \leq k \leq s$, дифференциального модуля $\text{hom}^{(s)}(X; Y)$. Из этого, в частности, следует, что если $D_\infty^{(s)}$ -модули гомотопически эквивалентны как $D_\infty^{(s-1)}$ -модули, то они гомотопически эквивалентны и как $D_\infty^{(s)}$ -модули.

Для любого дифференциального модуля (X, d) и любых $D_\infty^{(s)}$ -модулей (Y, d^{i+s}) , (Z, d^{i+s}) рассмотрим дифференциальный модуль $\text{hom}^{(s)}(X \otimes Y; Z)$, где дифференциальный модуль (X, d) рассматривается как $D_\infty^{(s)}$ -модуль (X, d^{i+s}) , $d^s = d$, $d^{i+s} = 0$, $i > 0$, и рассмотрим дифференциальный модуль $\text{hom}(X; \text{hom}^{(s)}(Y; Z))$, стандартно определяемый для дифференциальных модулей X и $\text{hom}^{(s)}(Y; Z)$. Легко видеть, что имеется изоморфизм дифференциальных модулей

$$\text{hom}^{(s)}(X \otimes Y; Z) \rightarrow \text{hom}(X; \text{hom}^{(s)}(Y; Z)),$$

сопоставляющий семейству отображений $g = \{g^{-ns+i}: (X \otimes Y)_\bullet \rightarrow Z_{\bullet+n}\}$ отображение $f: X_\bullet \rightarrow \text{hom}^{(s)}(Y; Z)_{\bullet+n}$, которое задается следующей формулой:

$$f(x)^{-(n+k)s+i}(y) = g^{-ns+i}(x \otimes y), \quad k = \dim(x).$$

Определим для любого $D_\infty^{(s)}$ -модуля (X, d^{i+s}) операду $\mathcal{E}_X^{(s)} = (\{\mathcal{E}_X^{(s)}(j)\}_{j \geq 1}, \pi)$, полагая

$$\mathcal{E}_X^{(s)}(j) = \text{hom}^{(s)}(X^{\otimes j}; X).$$

Действие симметрической группы Σ_j на $\mathcal{E}_X^{(s)}(j)$ определяется действием Σ_j на $X^{\otimes j}$ перестановкой сомножителей. Структура операды на $\mathcal{E}_X^{(s)}$, т.е. умножение

$$\pi: \mathcal{E}_X^{(s)} \times \mathcal{E}_X^{(s)} \rightarrow \mathcal{E}_X^{(s)},$$

задается следующими формулами:

$$\begin{aligned} \pi(g_0 \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_k) &= \{(\pi(g_0 \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_k))^{-ns+i}\}, \quad i \geq 0, \\ (\pi(g_0 \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_k))^{-ns+i} &= \sum_{i_0 + \cdots + i_k = i} g_0^{-n_0 s + i_0} \circ (g_1^{-n_1 s + i_1} \otimes \cdots \otimes g_k^{-n_k s + i_k}), \end{aligned}$$

где $g_t = \{g_t^{n_t s + i}\} \in \mathcal{E}_X^{(s)}(j_t)_{n_t}$, $1 \leq t \leq k$, $j_0 = k$, $n_0 + \cdots + n_k = n$. Таким образом, для каждого $D_\infty^{(s)}$ -модуля (X, d^{i+s}) определена операда $(\mathcal{E}_X^{(s)}, \pi)$. Аналогично определяется операда $(\mathcal{E}_{(s)}^X, \pi)$, структура которой задается следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{(s)}^X(j) &= \text{hom}^{(s)}(X; X^{\otimes j}), \\ \pi(g \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_k) &= \{(\pi(g \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_k))^{-ns+i}\}, \\ (\pi(g \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_k))^{-ns+i} &= \sum_{i_0 + \cdots + i_k = i} (g_1^{-n_1 s + i_1} \otimes \cdots \otimes g_k^{-n_k s + i_k}) \circ g_0^{-n_0 s + i_0}. \end{aligned}$$

Пусть теперь задана произвольная операда $(\mathcal{E}, \pi)$. Рассмотрим каждый дифференциальный градуированный модуль $(\mathcal{E}(j), d)$ как $D_\infty^{(s)}$ -модуль $(\mathcal{E}(j), d^{i+s})$, где $d^s = d$, $d^{i+s} = 0$, $i > 0$. Тогда для каждого $D_\infty^{(s)}$ -модуля (X, d^{i+s}) на градуированном модуле $\mathcal{E} \times X$, определенном в §2, имеется структура $D_\infty^{(s)}$ -модуля $(\mathcal{E} \times X, d^{i+s})$, компоненты $D_\infty^{(s)}$ -дифференциала которого определяются компонентами $D_\infty^{(s)}$ -дифференциалов сомножителей в тензорном произведении.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. $D_\infty^{(s)}$ -дифференциальный модуль (X, d^{i+s}) , $s \geq 1$, будем называть $D_\infty^{(s)}$ -дифференциальной алгеброй над операдой $(\mathcal{E}, \pi)$ или $D_\infty^{(s)}$ -дифференциальной $\mathcal{E}$ -алгеброй, или, более кратко, $D_\infty^{(s)}$ -алгеброй, если задан некоторый морфизм $D_\infty^{(s)}$ -модулей $\{\mu^i\}: \mathcal{E} \times X \rightarrow X$, который для каждого целого числа $k \geq 0$ удовлетворяет следующему соотношению:

$$\mu^k(\pi \times 1) = \sum_{i+j=k} \mu^i(1 \times \mu^j).$$

Легко видеть, что тройка (X, d^s, μ^0) является алгеброй над операдой $(\mathcal{E}, \pi)$. Также легко видеть, что введение на $D_\infty^{(s)}$ -модуле X структуры $D_\infty^{(s)}$ -алгебры равносильно заданию некоторого морфизма операд $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_X^{(s)}$, где $\mathcal{E}_X^{(s)}$ — это рассмотренная выше операда, определяемая $D_\infty^{(s)}$ -модулем X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Морфизмом $D_\infty^{(s)}$ -алгебр $f: (X, d^{i+s}, \mu^i) \rightarrow (Y, d^{i+s}, \mu^i)$ называется морфизм $D_\infty^{(s)}$ -модулей $f = \{f^i\}: X \rightarrow Y$, удовлетворяющий для каждого целого числа $k \geq 0$ следующему соотношению:

$$\sum_{i+j=k} \mu^i(1 \times f^j) = \sum_{i+j=k} f^i \mu^j.$$

Ясно, что отображение $f^0: (X, d^s, \mu^0) \rightarrow (Y, d^s, \mu^0)$ является морфизмом дифференциальных $\mathcal{E}$ -алгебр.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Гомотопией между морфизмами $D_\infty^{(s)}$ -алгебр $f, g: X \rightarrow Y$ называется гомотопия $h = \{h^{i-s}\}: X \rightarrow Y$ между морфизмами $D_\infty^{(s)}$ -модулей f и g , которая для каждого целого числа $k \geq 0$ удовлетворяет следующему условию:

$$\sum_{i+j=k} \mu^i(1 \times h^{j-s}) = \sum_{i+j=k} h^{i-s} \mu^j.$$

Легко видеть, что отображение $h^{-s}: X \rightarrow Y$ является гомотопией между морфизмами $f^0, g^0: (X, d^s, \mu^0) \rightarrow (Y, d^s, \mu^0)$ дифференциальных $\mathcal{E}$ -алгебр.

Ясно, что введение на $D_\infty^{(s)}$ -модуле (X, d^{i+s}) структуры $D_\infty^{(s)}$ -алгебры равносильно заданию семейства отображений $\{\mu^i: (\mathcal{E} \times X)_\bullet \rightarrow X_\bullet \mid i \geq 0\}$, которые для каждого $k \geq 0$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\mu^k(\pi \times 1) = \sum_{i+j=k} \mu^i(1 \times \mu^j), \quad \sum_{i+j=k} d^{i+s} \mu^j = \mu^k(d^s \times 1) + \sum_{i+j=k} \mu^i(1 \times d^{j+s}).$$

Из этого, в частности, следует, что для произвольной $D_\infty^{(s)}$ -алгебры (X, d^{i+s}, μ^i) и любых элементов $a \in \mathcal{E}(m)_n$, $b \in \mathcal{E}(m)_{n+1}$, которые связаны соотношением $a = d(b)$, определены семейства отображений

$$\begin{aligned} \{\alpha(m)^{-ns+i}: (X^{\otimes m})_\bullet \rightarrow X_{\bullet+n} \mid i \geq 0\} &\in \text{hom}^{(s)}(X^{\otimes m}; X)_n, \\ \{\beta(m)^{-(n+1)s+i}: (X^{\otimes m})_\bullet \rightarrow X_{\bullet+n+1} \mid i \geq 0\} &\in \text{hom}^{(s)}(X^{\otimes m}; X)_{n+1}, \\ \alpha(m)^{-ns+i}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) &= \mu^i(a \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_m), \\ \beta(m)^{-(n+1)s+i}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) &= \mu^i(b \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_m), \end{aligned}$$

удовлетворяющие для каждого фиксированного целого числа $k \geq 0$ следующему соотношению:

$$\sum_{i+j=k} d^{i+s} \beta(m)^{-(n+1)s+j} + (-1)^n \beta(m)^{-(n+1)s+i} d^{j+s} = \alpha(m)^{-ns+k}.$$

ПРИМЕР 12. Введение на $D_\infty^{(s)}$ -модуле (X, d^{i+s}) , $s \geq 1$, структуры $D_\infty^{(s)}$ -алгебры (X, d^{i+s}, μ^i) над операдой (C, π) равносильно заданию семейства отображений $\{\pi^i: (X \otimes X)_\bullet \rightarrow X_\bullet \mid i \geq 0\}$, где $\pi^i(x' \otimes x'') = \mu^i(c(2) \otimes (x' \otimes x''))$, $c(2) \in C(2)_0$, удовлетворяющих для каждого целого числа $k \geq 0$ следующим соотношениям:

$$\sum_{i+j=k} \pi^i(\pi^j \otimes 1) = \sum_{i+j=k} \pi^i(1 \otimes \pi^j), \quad \sum_{i+j=k} d^{i+s} \pi^j = \sum_{i+j=k} \pi^i d^{j+s}, \quad \pi^k = \pi^k T,$$

где $T: X \otimes X \rightarrow X \otimes X$ — отображение перестановки сомножителей в тензорном произведении с обычным соглашением о знаках.

ПРИМЕР 13. Пусть задана произвольная $D_\infty^{(s)}$ -алгебра (X, d^{i+s}, μ^i) над операдой (E_∞, π) . Тогда для $D_\infty^{(s)}$ -модуля (X, d^{i+s}) определено семейство отображений $\{\cup_n^{-ns+i}: (X \otimes X)_\bullet \rightarrow X_{\bullet+n} \mid n \geq 0, i \geq 0\}$, где $\cup_n^{-ns+i}(x_1 \otimes x_2) = \mu^i(\cup_n \otimes x_1 \otimes x_2)$, $\cup_n \in E_\infty(2)_n$, которые для любых фиксированных целых чисел $n \geq 0$, $k \geq 0$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \sum_{i+j=k} d^{i+s} \cup_0^j &= \sum_{i+j=k} \cup_0^i d^{j+s}, \\ \sum_{i+j=k} d^{i+s} \cup_{n+1}^{-(n+1)s+j} + (-1)^n \cup_{n+1}^{-(n+1)s+i} d^{j+s} &= \cup_n^{-ns+k} + (-1)^{n+1} \cup_n^{-ns+k} T, \end{aligned}$$

где T — это указанное выше отображение перестановки сомножителей в тензорном произведении $X \otimes X$.

Для изучения гомотопических свойств $D_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебр, которое будет проведено в следующем параграфе, введем понятие специальной $D_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебры, которое является частным случаем понятия $D_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. $D_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебру (X, d^{i+s}, μ^i) будем называть *специальной $D_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгеброй*, если $\mu^i = 0$, $i > 0$. Морфизмами специальных $D_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебр считаются морфизмы $D_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебр. Гомотопиями между морфизмами специальных $D_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебр служат гомотопии между морфизмами $D_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебр. Для специальных $D_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебр (X, d^{i+s}, μ^i) будем употреблять запись (X, d^{i+s}, μ) , где $\mu = \mu^0$.

Легко видеть, что для каждой специальной $D_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебры (X, d^{i+s}, μ) тройка (X, d^s, μ) является $\mathcal{E}$ -алгеброй. Для произвольного морфизма специальных $D_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебр $f = \{f^i\}: (X, d^{i+s}, \mu) \rightarrow (Y, d^{i+s}, \mu)$ его начальная компонента $f^0: (X, d^s, \mu) \rightarrow (Y, d^s, \mu)$ является морфизмом $\mathcal{E}$ -алгебр. Наконец, для любой гомотопии $h = \{h^{i-s}\}: X \rightarrow Y$ между морфизмами специальных $D_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебр

$\{f^i\}, \{g^i\}: (X, d^{i+s}, \mu) \rightarrow (Y, d^{i+s}, \mu)$ начальная компонента $h^{-s}: X \rightarrow Y$ является гомотопией между морфизмами $\mathcal{E}$ -алгебр $f^0, g^0: (X, d^s, \mu) \rightarrow (Y, d^s, \mu)$.

Рассмотрим гомотопические свойства специальных $D_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{E}$ -алгебр. Пусть заданы произвольные $D_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{E}$ -алгебры (X, d^{i+s}, μ) , (Y, d^{i+s}, μ) и задана произвольная SDR-ситуация $D_\infty^{(s)}$ -модулей $(\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi, h)$, где морфизмы $\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi$ являются морфизмами $D_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{E}$ -алгебр и гомотопия $h: X \rightarrow X$ является гомотопией между морфизмами $D_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{E}$ -алгебр. Указанную SDR-ситуацию $D_\infty^{(s)}$ -модулей будем называть *SDR-ситуацией $D_\infty^{(s)}$ -алгебр*. Если $D_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{E}$ -алгебры X и Y являются специальными $D_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{E}$ -алгебрами, то SDR-ситуацию $D_\infty^{(s)}$ -алгебр $(\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi, h)$ будем называть *SDR-ситуацией специальных $D_\infty^{(s)}$ -алгебр*.

Прямыми вычислениями проверяется, что для специальных $D_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{E}$ -алгебр имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть задана специальная $D_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{E}$ -алгебра (X, d^{i+s}, μ) и задана любая $\mathcal{E}$ -алгебра (Y, d, μ) . Кроме того, пусть задана произвольная SDR-ситуация $\mathcal{E}$ -алгебр $(\eta: (X, d^s) \rightleftharpoons (Y, d): \xi, h)$. Тогда формулы (1)–(4) задают на $\mathcal{E}$ -алгебре (Y, d, μ) структуру специальной $D_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{E}$ -алгебры (Y, d^{i+s}, μ) , где $d^s = d$, и определяют SDR-ситуацию специальных $D_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{E}$ -алгебр

$$(\{\eta^i\}: (X, d^{i+s}, \mu) \rightleftharpoons (Y, d^{i+s}, \mu): \{\xi^i\}, \{h^{i-s}\})$$

с начальными условиями $\eta^0 = \eta$, $\xi^0 = \xi$, $h^{-s} = h$.

Двойственным образом определяются понятия $D_\infty^{(s)}$ -коалгебры над кооперацией $(\mathcal{L}, \tau)$ или, более кратко, $D_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{L}$ -коалгебры, морфизма $D_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{L}$ -коалгебр, гомотопии между морфизмами $D_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{L}$ -коалгебр, SDR-ситуации $D_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{L}$ -коалгебр, специальной $D_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{L}$ -коалгебры. Для специальных $D_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{L}$ -коалгебр аналогом теоремы 3.1 является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть задана специальная $D_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{L}$ -коалгебра (X, d^{i+s}, τ) и задана любая $\mathcal{L}$ -коалгебра (Y, d, τ) . Кроме того, пусть задана произвольная SDR-ситуация $\mathcal{L}$ -коалгебр $(\eta: (X, d^s) \rightleftharpoons (Y, d): \xi, h)$. Тогда формулы (1)–(4) задают на $\mathcal{L}$ -коалгебре (Y, d, τ) структуру специальной $D_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{L}$ -коалгебры (Y, d^{i+s}, τ) , где $d^s = d$, и определяют SDR-ситуацию $D_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{L}$ -коалгебр

$$(\{\eta^i\}: (X, d^{i+s}, \mu) \rightleftharpoons (Y, d^{i+s}, \mu): \{\xi^i\}, \{h^{i-s}\})$$

с начальными условиями $\eta^0 = \eta$, $\xi^0 = \xi$, $h^{-s} = h$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5. Специальную $D_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{E}$ -алгебру (X, d^{i+s}, μ) будем называть *стабильной*, если $D_\infty^{(s)}$ -модуль (X, d^{i+s}) является стабильным. Аналогично, специальную $D_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{L}$ -коалгебру (X, d^{i+s}, τ) будем называть *стабильной*, если $D_\infty^{(s)}$ -модуль (X, d^{i+s}) является стабильным.

Ясно, что если в условиях теоремы 3.1 специальная $D_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{E}$ -алгебра (X, d^{i+s}, μ) является стабильной, то получаемая в этой теореме $D_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{E}$ -алгебра (Y, d^{i+s}, μ)

также является стабильной. Аналогично, если в условиях теоремы 3.2 специальная $D_\infty^{(s)}\mathcal{L}$ -коалгебра (X, d^{i+s}, τ) является стабильной, то полученная в этой теореме $D_\infty^{(s)}\mathcal{L}$ -коалгебра (Y, d^{i+s}, τ) также является стабильной.

Отметим, что любая стабильная специальная $D_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебра (X, d^{i+s}, μ) определяет $\mathcal{E}$ -алгебру (X, D_s, μ) , где D_s – это суммарный дифференциал $D_\infty^{(s)}$ -модуля (X, d^{i+s}) . Аналогично, каждая стабильная специальная $D_\infty^{(s)}\mathcal{L}$ -коалгебра определяет соответствующую ей $\mathcal{L}$ -коалгебру.

§ 4. $D_\infty^{(s)}$ -дифференциальные A_∞ -алгебры над операдами

В этом параграфе вводится понятие $D_\infty^{(s)}$ -дифференциальной A_∞ -(ко)алгебры над (ко)операдой, которое является $D_\infty^{(s)}$ -дифференциальным аналогом понятия A_∞ -(ко)алгебры над (ко)операдой. Устанавливаются основные гомотопические свойства $D_\infty^{(s)}$ -дифференциальных A_∞ -(ко)алгебр над (ко)операдами.

Пусть K – коммутативное кольцо с единицей. Все рассматриваемые в этом параграфе модули и отображения модулей являются соответственно K -модулями и K -линейными отображениями модулей. Кроме того, все рассматриваемые здесь D_∞ -модули являются градуированными D_∞ -модулями, компоненты D_∞ -дифференциалов которых имеют степени, равные (-1) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. $D_\infty^{(s)}$ -модуль (X, d^{i+s}) , $s \geq 1$, рассматриваемый вместе с семейством отображений

$$\{\mu_n^{-ns+i}: \mathcal{E}^{\vee(n+1)} \times X \rightarrow X \mid \mu_n^{-ns+i}((\mathcal{E}^{\vee(n+1)} \times X)_\bullet) \subseteq X_{\bullet+n}, n \geq 0, i \geq 0\},$$

называется $D_\infty^{(s)}$ -дифференциальной A_∞ -алгеброй над операдой $(\mathcal{E}, \pi)$ или, более кратко, называется $(DA)_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгеброй, если для любых целых чисел $n \geq 0$ и $k \geq 0$ выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sum_{i+j=k} d^{i+s} \mu_0^j &= \sum_{i+j=k} \mu_0^i d^{j+s}, \\ \sum_{i+j=k} d^{i+s} \mu_{n+1}^{-(n+1)s+j} + (-1)^n \mu_{n+1}^{-(n+1)s+i} d^{j+s} \\ &= \sum_{t=1}^{n+1} (-1)^{t+n} \mu_n^{-ns+k} (1 \vee \dots \vee 1 \vee \pi \vee 1 \vee \dots \vee 1 \times 1) \\ &\quad + \sum_{i+j=k} \sum_{m=0}^n (-1)^{nm} \mu_{n-m}^{-(n-m)s+i} (1 \vee \dots \times 1 \vee \mu_m^{-ms+j}), \end{aligned}$$

где t – это номер места, на котором стоит π .

Легко видеть, что для заданной $(DA)_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебры $(X, d^{i+s}, \mu_n^{-ns+i})$ семейство отображений $\{\mu_0^i: (\mathcal{E} \times X)_\bullet \rightarrow X_\bullet \mid i \geq 0\}$ является морфизмом $D_\infty^{(s)}$ -модулей, а дифференциальный модуль (X, d^s) , рассматриваемый вместе с набором отображений $\{\mu_n^{-ns}: \mathcal{E}^{\vee(n+1)} \times X \rightarrow X \mid n \geq 0\}$, является $A_\infty\mathcal{E}$ -алгеброй.

Примерами $(DA)_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебр $(X, d^{i+s}, \mu_n^{-ns+i})$ являются рассмотренные в §3 $D_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебры (X, d^{i+s}, μ^i) , где $\mu_n^{-ns+i} = 0$, $n > 0$, и $\mu_0^i = \mu^i$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Морфизмом $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгебр $f: X \rightarrow Y$ называется набор отображений

$$f = \{f_n^{-ns+i}: \mathcal{E}^{\vee n} \times X \rightarrow Y \mid f_n^{-ns+i}((\mathcal{E}^{\vee n} \times X)_\bullet) \subseteq Y_{\bullet+n}, n \geq 0, i \geq 0\},$$

которые для любых целых чисел $n \geq 0$ и $k \geq 0$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \sum_{i+j=k} d^{i+s} f_0^j &= \sum_{i+j=k} f_0^i d^{j+s}, \\ \sum_{i+j=k} d^{i+s} f_{n+1}^{-(n+1)s+j} + (-1)^n f_{n+1}^{-(n+1)s+i} d^{j+s} \\ &= \sum_{t=1}^n (-1)^{t+n} f_n^{-ns+k} (1 \vee \dots \vee 1 \vee \pi \vee 1 \vee \dots \vee 1 \times 1) \\ &\quad + \sum_{i+j=k} \sum_{m=0}^n (-1)^{(n+1)m+1} f_{n-m}^{-(n-m)s+i} (1 \vee \dots \vee 1 \times \mu_m^{-ms+j}) \\ &\quad + \sum_{i+j=k} \sum_{m=0}^n (-1)^\nu \mu_m^{-ms+i} (1 \vee \dots \vee 1 \times f_{n-m}^{-(n-m)s+j}), \end{aligned}$$

где $\nu = n$, если m четное, и $\nu = 0$, если m нечетное; t — номер места, на котором стоит π .

Ясно, что для любого морфизма $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгебр $f = \{f_n^{-ns+i}\}: X \rightarrow Y$ семейство отображений $\{f_0^i: X_\bullet \rightarrow Y_\bullet \mid i \geq 0\}$ является морфизмом $D_\infty^{(s)}$ -модулей, а семейство отображений $\{f_n^{-ns}: \mathcal{E}^{\vee n} \times X \rightarrow Y \mid n \geq 0\}$ является морфизмом A_∞ -алгебр $(X, d^s, \mu_n^{-ns}) \rightarrow (Y, d^s, \mu_n^{-ns})$.

Любой морфизм $D_\infty^{(s)}$ -алгебр $\{f^i\}: (X, d^{i+s}, \mu^i) \rightarrow (Y, d^{i+s}, \mu^i)$ можно считать морфизмом $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгебр

$$\{f_n^{-ns+i}\}: (X, d^{i+s}, \mu_n^{-ns+i}) \rightarrow (Y, d^{i+s}, \mu_n^{-ns+i}),$$

где $\mu_0^i = \mu^i$, $f_0^i = f^i$ и $\mu_n^{-ns+i} = 0$, $f_n^{-ns+i} = 0$, $n > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Гомотопией $h: X \rightarrow Y$ между заданными морфизмами $(DA)_\infty^{(s)}$ -алгебр

$$f = \{f_n^{-ns+i}\}, g = \{g_n^{-ns+i}\}: (X, d^{i+s}, \mu_n^{-ns+i}) \rightarrow (Y, d^{i+s}, \mu_n^{-ns+i})$$

называется набор отображений

$$\begin{aligned} h &= \{h_n^{-(n+1)s+i}: \mathcal{E}^{\vee n} \times X \rightarrow Y \mid \\ &\quad h_n^{-(n+1)s+i}((\mathcal{E}^{\vee n} \times X)_\bullet) \subseteq Y_{\bullet+n+1}, n \geq 0, i \geq 0\}, \end{aligned}$$

которые для любых целых чисел $n \geq 0$ и $k \geq 0$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i+j=k} d^{i+s} h_0^{j-s} + h_0^{i-s} d^{j+s} = f_0^k - g_0^k, \\
& \sum_{i+j=k} d^{i+s} h_{n+1}^{-(n+2)s+j} + (-1)^{n+1} h_{n+1}^{-(n+2)s+i} d^{j+s} = f_{n+1}^{-(n+1)s+k} - g_{n+1}^{-(n+1)s+k} \\
& + \sum_{t=1}^n (-1)^{t+n+1} h_n^{-(n+1)s+k} (1 \vee \dots \vee 1 \vee \pi \vee 1 \vee \dots \vee 1 \times 1) \\
& + \sum_{i+j=k} \sum_{m=0}^n (-1)^{m(n+1)} h_{n-m}^{-(n-m+1)s+i} (1 \vee \dots \vee 1 \times \mu_m^{-ms+j}) \\
& + \sum_{i+j=k} \sum_{m=0}^n (-1)^\nu \mu_m^{-ms+i} (1 \vee \dots \vee 1 \times h_{n-m}^{-(n-m+1)s+j}),
\end{aligned}$$

где $\nu = n$, если m четное, и $\nu = 0$, если m нечетное; t – номер места, на котором стоит π .

Легко видеть, что для каждой гомотопии $h = \{h_n^{-(n+1)s+i}\}: X \rightarrow Y$ между морфизмами $(DA)_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебр $f = \{f_n^{-ns+i}\}$, $g = \{g_n^{-ns+i}\}$ семейство отображений $\{h_0^{i-s}\}$ является гомотопией между морфизмами $D_\infty^{(s)}$ -модулей $\{f_0^i\}$, $\{g_0^i\}$, а набор отображений $\{h_n^{-(n+1)s}\}$ является гомотопией между морфизмами $A_\infty\mathcal{E}$ -алгебр $\{f_n^{-ns}\}$, $\{g_n^{-ns}\}: (X, d^s, \mu_n^{-ns}) \rightarrow (Y, d^s, \mu_n^{-ns})$.

Введем теперь понятие B -конструкции $(DA)_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебры. Пусть задана произвольная $(DA)_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебра $(X, d^{i+s}, \mu_n^{-ns+i})$. Рассмотрим градуированный модуль

$$B_\vee(\mathcal{E}, X) = \bigoplus_{n \geq 0} \underbrace{\mathcal{E} \vee \dots \vee \mathcal{E}}_n \times X.$$

Элементы модуля $B_\vee(\mathcal{E}, X)$ будем записывать в виде $[e_1, \dots, e_n]x_{n+1}$ и считать, что размерность элемента $[e_1, \dots, e_n]x_{n+1}$ равна сумме размерностей элементов $e_1, \dots, e_n, x_{n+1}$ плюс число n . Рассмотрим B -конструкцию $(B_\vee(\mathcal{E}), d, \nabla)$ операнды $(\mathcal{E}, d, \pi)$ как коммутативную S -кооперату. Введем на градуированном модуле $B_\vee(\mathcal{E}, X)$ структуру градуированной коалгебры $(B_\vee(\mathcal{E}, X), \tau)$ над градуированной коммутативной S -кооператой $(B_\vee(\mathcal{E}), \nabla)$, полагая на образующих

$$\begin{aligned}
& \tau([e_1, \dots, e_n]x) \\
& = \sum_{k=0}^n [e_1, \dots, e_k] \otimes ([\] x_1 \otimes \dots \otimes [\] x_{i_{k-1}} \otimes [e_{k+1}, \dots, e_n](x_{i_k} \otimes \dots \otimes x_j)),
\end{aligned}$$

где $[e_1, \dots, e_n] = e_1 \vee_{i_1} \dots \vee_{i_{n-1}} e_n \in \mathcal{E}^{\vee n}(j)$, $j = j_1 + \dots + j_n - (n-1)$, $e_k \in \mathcal{E}(j_k)$, $x = x_1 \otimes \dots \otimes x_j \in X^{\otimes j}$, $[\] = 1 \in \mathcal{E}^{\vee 0}$. Градуированная коалгебра $B_\vee(\mathcal{E}, X)$ над градуированной коммутативной S -кооператой $B_\vee(\mathcal{E})$ однозначно определяет градуированную коалгебру $(B_\vee(\mathcal{E}, X), \tau)$ над градуированной оператой $B_\vee(\mathcal{E})$.

Рассмотрим отображения $\beta: B_\vee(\mathcal{E})_\bullet \rightarrow \mathcal{E}_{\bullet-1}$ и $\widehat{\beta}: B_\vee(\mathcal{E}, X)_\bullet \rightarrow X_\bullet$, задаваемые на образующих соответственно следующими правилами:

$$\begin{aligned}\beta[e_1, \dots, e_n] &= \begin{cases} e_1, & n = 1, \\ 0, & n > 0, \end{cases} \\ \widehat{\beta}[e_1, \dots, e_n]x_{n+1} &= \begin{cases} x_{n+1}, & n = 0, \\ 0, & n > 0. \end{cases}\end{aligned}$$

На $B_\vee(\mathcal{E}, X)$ введем $D_\infty^{(s)}$ -дифференциал $\{d^{i+s}: B_\vee(\mathcal{E}, X)_\bullet \rightarrow B_\vee(\mathcal{E}, X)_{\bullet-1}\}$, который однозначно определяется условием того, что компоненты d^{i+s} удовлетворяют соотношениям $\tau d^s = (d \times 1 + 1 \times d^s)\tau$, $\tau d^{i+s} = (1 \times d^{i+s})\tau$, $i > 0$, и условием справедливости следующих равенств:

$$\widehat{\beta}d^{i+s} = d^{i+s}\widehat{\beta} - \sum_{n \geq 0} \mu_n^{-ns+i} (\beta \vee \dots \vee \beta \times \widehat{\beta})\tau^{(n)}, \quad i \geq 0,$$

где $\tau^{(0)} = \tau$, $\tau^{(n)} = (1 \times \tau^{(n-1)})\tau$, $n \geq 1$. Итак, для $(DA)_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебры $(X, d^{i+s}, \mu_n^{-ns+i})$ определена специальная $D_\infty^{(s)}B_\vee(\mathcal{E})$ -коалгебра $(B_\vee(\mathcal{E}, X), d^{i+s}, \tau)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4. Специальная $D_\infty^{(s)}B_\vee(\mathcal{E})$ -коалгебра $(B_\vee(\mathcal{E}, X), d^{i+s}, \tau)$ называется *B -конструкцией* $(DA)_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебры $(X, d^{i+s}, \mu_n^{-ns+i})$.

Легко видеть, что введение структуры $(DA)_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебры $(X, d^{i+s}, \mu_n^{-ns+i})$ на градуированном модуле X эквивалентно заданию на градуированной коалгебре $(B_\vee(\mathcal{E}, X), \tau)$ над градуированной кооператой $(B_\vee(\mathcal{E}), \nabla)$ структуры специальной $D_\infty^{(s)}$ -коалгебры $(B_\vee(\mathcal{E}, X), d^{i+s}, \tau)$ над кооператой $(B_\vee(\mathcal{E}), d, \nabla)$, где компонента $\mu_n^{-ns+i}: (\mathcal{E}^{\vee(n+1)} \times X)_\bullet \rightarrow X_{\bullet+n}$ в $(DA)_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебре $(X, d^{i+s}, \mu_n^{-ns+i})$ отождествляется с компонентой $d^{i+s}: (\mathcal{E}^{\vee(n+1)} \times X)_{\bullet+n+1} \rightarrow X_{\bullet+n}$ в градуированном $D_\infty^{(s)}$ -модуле $B_\vee(\mathcal{E}, X)$.

Пусть задан любой морфизм $(DA)_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебр $\{f_n^{-ns+i}: X \rightarrow Y\}$. Тогда семейство отображений $\{f_n^{-ns+i}: (\mathcal{E}^{\vee n} \times X)_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n}\}$ определяет морфизм специальных $D_\infty^{(s)}B_\vee(\mathcal{E})$ -коалгебр $B_\vee(f) = \{B_\vee(f)^i\}: B_\vee(\mathcal{E}, X) \rightarrow B_\vee(\mathcal{E}, Y)$, который однозначно задается условием справедливости следующего соотношения:

$$\widehat{\beta}B_\vee(f)^i = \sum_{n \geq 0} f^{-ns+i} (\beta \vee \dots \vee \beta \times \widehat{\beta})\tau^{(n-1)}, \quad i \geq 0.$$

Без труда проверяется, что задание морфизма специальных $D_\infty^{(s)}B_\vee(\mathcal{E})$ -коалгебр $g = \{g^i\}: B_\vee(\mathcal{E}, X) \rightarrow B_\vee(\mathcal{E}, Y)$ эквивалентно заданию морфизма $(DA)_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебр $f = \{f_n^{-ns+i}: X \rightarrow Y\}$, где компонента $f_n^{-ns+i}: (\mathcal{E}^{\vee n} \times X)_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+n}$ отождествляется с компонентой $g^i: (\mathcal{E}^{\vee n} \times X)_{\bullet+n} \rightarrow Y_{\bullet+n}$.

Любая гомотопия $\{h_n^{-(n+1)s+i}\}: X \rightarrow Y$ между морфизмами $(DA)_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебр $f, g: X \rightarrow Y$ определяет гомотопию $B_\vee(h) = \{B_\vee(h)^{i-s}\}: B_\vee(\mathcal{E}, X) \rightarrow B_\vee(\mathcal{E}, Y)$

между морфизмами $D_{\infty}^{(s)} B_{\vee}(\mathcal{E})$ -коалгебр $B_{\vee}(f), B_{\vee}(g): B_{\vee}(\mathcal{E}, X) \rightarrow B_{\vee}(\mathcal{E}, Y)$, которая однозначно задается условием справедливости следующего соотношения:

$$\widehat{\beta} B_{\vee}(h)^{i-s} = \sum_{n \geq 0} h_n^{-(n+1)s+i} (\beta \vee \dots \vee \beta \times \widehat{\beta}) \tau^{(n-1)}, \quad i \geq 0.$$

Ясно, что точно так же, как и выше, задание гомотопии между морфизмами $(DA)_{\infty}^{(s)} \mathcal{E}$ -алгебр эквивалентно заданию соответствующей гомотопии между морфизмами специальных $D_{\infty}^{(s)} B_{\vee}(\mathcal{E})$ -коалгебр.

Рассмотрим теперь гомотопические свойства $(DA)_{\infty}^{(s)} \mathcal{E}$ -алгебр. Пусть заданы произвольные морфизмы $(DA)_{\infty}^{(s)} \mathcal{E}$ -алгебр $\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi$, для которых выполнено условие $\eta\xi = 1_Y$, и задана некоторая гомотопия $h: X \rightarrow X$ между морфизмами $(DA)_{\infty}^{(s)} \mathcal{E}$ -алгебр 1_X и $\xi\eta$, удовлетворяющая условиям $h\xi = 0$, $\eta h = 0$, $hh = 0$. Рассмотренную ситуацию будем называть *SDR-ситуацией* $(DA)_{\infty}^{(s)} \mathcal{E}$ -алгебр и записывать в виде $(\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi, h)$.

При помощи B -конструкции $(DA)_{\infty}^{(s)} \mathcal{E}$ -алгебр и теоремы 3.2, аналогично тому, как это было сделано в работах [11] и [12], доказывается следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть задана любая $(DA)_{\infty}^{(s)} \mathcal{E}$ -алгебра $(X, d^{i+s}, \mu_n^{-ns+i})$, задан произвольный дифференциальный модуль (Y, d) и, кроме того, задана любая SDR-ситуация $(\overline{\eta}: (X, d^s) \rightleftharpoons (Y, d): \overline{\xi}, \overline{h})$ дифференциальных модулей. Тогда на Y имеется структура $(DA)_{\infty}^{(s)} \mathcal{E}$ -алгебры $(Y, d^{i+s}, \mu_n^{-ns+i})$ и определена SDR-ситуация $(DA)_{\infty}^{(s)} \mathcal{E}$ -алгебр $(\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi, h)$, для которой выполнены начальные условия $d^s = d$, $\eta_0^0 = \overline{\eta}$, $\xi_0^0 = \overline{\xi}$, $h_0^{-s} = \overline{h}$.*

Пусть задана произвольная $(DA)_{\infty}^{(s)} \mathcal{E}$ -алгебра $(X, d^{i+s}, \mu_n^{-ns+i})$ над некоторым полем. Тогда определена SDR-ситуация $(\overline{\eta}: X \rightleftharpoons H(X): \overline{\xi}, \overline{h})$ дифференциальных модулей, где $H(X)$ – это гомологический модуль дифференциального модуля (X, d^s) . Если применить к этой SDR-ситуации теорему 4.1, то получим, что на $H(X)$ имеется структура $(DA)_{\infty}^{(s)} \mathcal{E}$ -алгебры $(H(X), d_*^{i+s}, (\mu_*)_n^{-ns+i})$, где $d_*^s = 0$, и определена SDR-ситуация $(DA)_{\infty}^{(s)} \mathcal{E}$ -алгебр $(\eta: X \rightleftharpoons H(X): \xi, h)$, продолжающая SDR-ситуацию $(\overline{\eta}: X \rightleftharpoons H(X): \overline{\xi}, \overline{h})$. Так как $d_*^s = 0$, то гомологический модуль $H(X)$ является $D_{\infty}^{(s+1)}$ -модулем $(H(X), d^{(s+1)+i})$, где $d^{i+(s+1)} = d_*^{(i+1)+s}$. Рассмотрим морфизм операд $\mathcal{E}_{H(X)}^{(s)} \rightarrow \mathcal{E}_{H(X)}^{(s+1)}$, который определяется указанными в начале третьего параграфа вложениями дифференциальных модулей

$$\mathrm{hom}^{(s)}(H(X)^{\otimes j}; H(X)) \rightarrow \mathrm{hom}^{(s+1)}(H(X)^{\otimes j}; H(X)), \quad j \geq 1.$$

Учитывая, что введение структуры $(DA)_{\infty}^{(s)} \mathcal{E}$ -алгебры $(Y, d^{i+s}, \mu_n^{-ns+i})$ на произвольном $D_{\infty}^{(s)}$ -модуле (Y, d^{i+s}) равносильно заданию некоторого морфизма операд $F_{\wedge} B_{\vee}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}_Y^{(s)}$, и рассматривая композицию $F_{\wedge} B_{\vee}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}_{H(X)}^{(s)} \rightarrow \mathcal{E}_{H(X)}^{(s+1)}$, где морфизм операд $F_{\wedge} B_{\vee}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}_{H(X)}^{(s)}$ определяется структурой $(DA)_{\infty}^{(s)} \mathcal{E}$ -алгебры $(H(X), d_*^{i+s}, (\mu_*)_n^{-ns+i})$, получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Пусть над произвольным полем задана любая $(DA)_{\infty}^{(s)} \mathcal{E}$ -алгебра $(X, d^{i+s}, \mu_n^{-ns+i})$. Тогда на гомологическом модуле*

$$H(X) = \mathrm{Ker} d^s / \mathrm{Im} d^s$$

имеется структура $(DA)_\infty^{(s+1)}$ - $\mathcal{E}$ -алгебры $(H(X), d^{i+(s+1)}, \mu_n^{-(s+1)n+i})$, определяемая следующими формулами:

$$\begin{aligned} d^{i+(s+1)} &= d_*^{(i+1)+s}, \quad \mu_n^{-n(s+1)+i}(e_1 \vee \dots \vee e_{n+1} \times x) = 0, \\ 0 &\leq i < k + n, \\ \mu_n^{-n(s+1)+i}(e_1 \vee \dots \vee e_{n+1} \times x) &= (\mu_*)_n^{-ns+i-(n+k)}(e_1 \vee \dots \vee e_{n+1} \times x), \\ i &\geq k + n, \end{aligned}$$

где $k = \dim(e_1) + \dots + \dim(e_{n+1}) + n$, а $e_1 \vee \dots \vee e_{n+1} \times x$ — произвольный элемент из $\mathcal{E}^{\vee(n+1)} \times H(X)$.

Утверждение теоремы 4.1 можно уточнить, если в условиях этой теоремы $(DA)_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{E}$ -алгебра $(X, d^{i+s}, \mu_n^{-ns+i})$ является специальной $D_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{E}$ -алгеброй, а дифференциальный модуль (Y, d) является $\mathcal{E}$ -алгеброй. В самом деле, прямыми вычислениями легко проверяется, что имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть задана любая специальная $D_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{E}$ -алгебра (X, d^{i+s}, μ) , задана любая $\mathcal{E}$ -алгебра (Y, d, μ) и, кроме того, задана произвольная SDR-ситуация $(\bar{\eta}: (X, d^s) \rightleftharpoons (Y, d): \bar{\xi}, \bar{h})$ дифференциальных модулей, в которой отображение дифференциальных модулей $\bar{\eta}$ является морфизмом $\mathcal{E}$ -алгебр. Тогда на Y имеется структура специальной $D_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{E}$ -алгебры (Y, d^{i+s}, μ) и определена SDR-ситуация $(DA)_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{E}$ -алгебр $(\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi, h)$, для которой выполнены начальные условия $d^s = d$, $\eta_0^0 = \bar{\eta}$, $\xi_0^0 = \bar{\xi}$, $h_0^{-s} = \bar{h}$.

Если в условиях теоремы 4.1 операда $\mathcal{E}$, рассматриваемая как градуированная операда, является свободной, а $(DA)_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{E}$ -алгебра $(X, d^{i+s}, \mu_n^{-ns+i})$ является $D_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{E}$ -алгеброй (X, d^{i+s}, μ^i) , то имеется еще одно важное уточнение этой теоремы. Действительно, если операда $\mathcal{E}$, рассматриваемая как градуированная операда, является свободной, то очевидную SDR-ситуацию симметрических семейств $F_\wedge B_\vee(\mathcal{E}) \rightleftharpoons \mathcal{E}$ можно выбрать SDR-ситуацией операд. Вспоминая теперь, что введение структуры $(DA)_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{E}$ -алгебры на $D_\infty^{(s)}$ -модуле (Y, d^{i+s}) равносильно заданию некоторого морфизма операд $F_\wedge B_\vee(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}_Y^{(s)}$, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть задана свободная операда $(\mathcal{E}, \pi)$ и задана $D_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{E}$ -алгебра (X, d^{i+s}, μ^i) . Кроме того, пусть задан произвольный дифференциальный модуль (Y, d) и задана любая SDR-ситуация $(\bar{\eta}: (X, d^s) \rightleftharpoons (Y, d): \bar{\xi}, \bar{h})$ дифференциальных модулей. Тогда на Y имеется структура $D_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{E}$ -алгебры (Y, d^{i+s}, μ^i) и определена SDR-ситуация $D_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{E}$ -алгебр $(\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi, h)$, для которой выполнены начальные условия $d^s = d$, $\eta_0^0 = \bar{\eta}$, $\xi_0^0 = \bar{\xi}$, $h^{-s} = \bar{h}$.

Двойственным образом для заданной кооперады $(\mathcal{L}, \nabla)$ определяются понятия $(DA)_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{L}$ -коалгебры, морфизма $(DA)_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{L}$ -коалгебр, гомотопии между морфизмами $(DA)_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{L}$ -коалгебр, SDR-ситуации $(DA)_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{L}$ -коалгебр, а также ко- B -конструкции $F_\wedge(\mathcal{L}, X)$ для $(DA)_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{L}$ -коалгебры $(X, d^{i+s}, \tau_n^{-ns+i})$. Аналогами теорем 4.1–4.3 и следствия 4.1 для $(DA)_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{L}$ -коалгебр и $D_\infty^{(s)}$ - $\mathcal{L}$ -коалгебр соответственно являются следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть задана любая $(DA)_\infty^{(s)}\mathcal{L}$ -коалгебра $(X, d^{i+s}, \tau_n^{-ns+i})$, задан произвольный дифференциальный модуль (Y, d) и, кроме того, задана любая SDR-ситуация $(\bar{\eta}: (X, d^s) \rightrightarrows (Y, d): \bar{\xi}, \bar{h})$ дифференциальных модулей. Тогда на Y имеется структура $(DA)_\infty^{(s)}\mathcal{L}$ -коалгебры $(Y, d^{i+s}, \tau_n^{-ns+i})$ и определена SDR-ситуация $(DA)_\infty^{(s)}\mathcal{L}$ -коалгебр $(\eta: X \rightrightarrows Y: \xi, h)$, для которой выполнены начальные условия $d^s = d$, $\eta_0^0 = \bar{\eta}$, $\xi_0^0 = \bar{\xi}$, $h_0^{-s} = \bar{h}$.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть задана любая $(DA)_\infty^{(s)}\mathcal{L}$ -коалгебра $(X, d^{i+s}, \tau_n^{-ns+i})$ над произвольным полем. Тогда на $H(X, d^s)$ имеется структура $(DA)_\infty^{(s)}\mathcal{L}$ -коалгебры и определена SDR-ситуация $(DA)_\infty^{(s)}\mathcal{L}$ -коалгебр

$$(\eta: X \rightrightarrows H(X, d^s): \xi, h),$$

которая продолжает SDR-ситуацию $(\bar{\eta}: X \rightrightarrows H(X, d^s): \bar{\xi}, \bar{h})$ дифференциальных модулей.

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть задана любая специальная $D_\infty^{(s)}\mathcal{L}$ -коалгебра (X, d^{i+s}, τ) , задана произвольная $\mathcal{L}$ -коалгебра (Y, d, τ) и, кроме того, задана любая SDR-ситуация $(\bar{\eta}: (X, d^s) \rightrightarrows (Y, d): \bar{\xi}, \bar{h})$ дифференциальных модулей, в которой отображение $\bar{\eta}$ является морфизмом $\mathcal{L}$ -коалгебр. Тогда на Y имеется структура специальной $D_\infty^{(s)}\mathcal{L}$ -коалгебры (Y, d^{i+s}, τ) и определена SDR-ситуация $(DA)_\infty^{(s)}\mathcal{L}$ -коалгебр $(\eta: X \rightrightarrows Y: \xi, h)$, для которой выполнены начальные условия $d^s = d$, $\eta_0^0 = \bar{\eta}$, $\xi_0^0 = \bar{\xi}$, $h_0^{-s} = \bar{h}$.

ТЕОРЕМА 4.6. Пусть задана свободная кооперата $(\mathcal{L}, \nabla)$ и задана $D_\infty^{(s)}\mathcal{L}$ -коалгебра (X, d^{i+s}, τ^i) . Кроме того, пусть задан произвольный дифференциальный модуль (Y, d) и задана любая SDR-ситуация $(\bar{\eta}: (X, d^s) \rightrightarrows (Y, d): \bar{\xi}, \bar{h})$ дифференциальных модулей. Тогда на Y имеется структура $D_\infty^{(s)}\mathcal{L}$ -коалгебры (Y, d^{i+s}, τ^i) и определена SDR-ситуация $D_\infty^{(s)}\mathcal{L}$ -коалгебр $(\eta: X \rightrightarrows Y: \xi, h)$, для которой выполнены начальные условия $d^s = d$, $\eta^0 = \bar{\eta}$, $\xi^0 = \bar{\xi}$, $h^{-s} = \bar{h}$.

§ 5. $D_\infty^{(1)}$ -дифференциальные E_∞ -алгебры и мультипликативные спектральные последовательности

В этом параграфе устанавливается связь между мультипликативными спектральными последовательностями и $D_\infty^{(s)}$ -дифференциальными E_∞ -алгебрами над полями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. $(DA)_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебру $(X, d^{i+s}, \mu_n^{-ns+i})$ будем называть *стабильной*, если специальная $D_\infty^{(s)}B_\vee(\mathcal{E})$ -коалгебра $(B_\vee(\mathcal{E}, X), d^{i+s}, \tau)$ является стабильной. Аналогично, $(DA)_\infty^{(s)}\mathcal{L}$ -коалгебру $(X, d^{i+s}, \tau_n^{-ns+i})$ назовем *стабильной*, если специальная $D_\infty^{(s)}F_\wedge(\mathcal{L})$ -алгебра $(F_\wedge(\mathcal{L}, X), d^{i+s}, \mu)$ является стабильной.

Легко проверить, что если $(DA)_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебра $(X, d^{i+s}, \mu_n^{-ns+i})$ является стабильной, то $(DA)_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебра $(Y, d^{i+s}, \mu_n^{-ns+i})$, получаемая в теореме 4.1, также является стабильной. Аналогично, если $(DA)_\infty^{(s)}\mathcal{L}$ -коалгебра $(X, d^{i+s}, \tau_n^{-ns+i})$

является стабильной, то $(DA)_\infty^{(s)}\mathcal{L}$ -коалгебра $(Y, d^{i+s}, \tau_n^{-ns+i})$, получаемая в теореме 4.2, также является стабильной.

Отметим, что любая стабильная $(DA)_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебра $(X, d^{i+s}, \mu_n^{-ns+i})$ определяет суммарную $A_\infty\mathcal{E}$ -алгебру (X, D_s, μ_n) , где отображение

$$\mu_n: (\mathcal{E}^{\times(n+1)} \times X)_\bullet \rightarrow X_{\bullet+n}, \quad n \geq 0,$$

задается формулой

$$\mu_n = \mu_n^{-ns} + \mu_n^{-ns+1} + \dots + \mu_n^{-ns+i} + \dots,$$

а D_s — это суммарный дифференциал $D_\infty^{(s)}$ -модуля X . Аналогично, каждая стабильная $(DA)_\infty^{(s)}\mathcal{L}$ -коалгебра $(X, d^{i+s}, \tau_n^{-ns+i})$ определяет суммарную $A_\infty\mathcal{L}$ -коалгебру (X, D_s, τ_n) .

Напомним (см. [2]), что для любой $A_\infty\mathcal{E}$ -алгебры X , заданной над полем, определена $A_\infty\mathcal{E}$ -алгебра гомологий $H(X)$. Аналогично, для любой $A_\infty\mathcal{L}$ -коалгебры X , заданной над полем, определена $A_\infty\mathcal{L}$ -коалгебра гомологий $H(X)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. $A_\infty\mathcal{E}$ -алгеброй гомологий $H(X, d^{i+s}, \mu_n^{-ns+i})$ для заданной над полем стабильной $(DA)_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебры $(X, d^{i+s}, \mu_n^{-ns+i})$ назовем $A_\infty\mathcal{E}$ -алгебру гомологий ее суммарной $A_\infty\mathcal{E}$ -алгебры (X, D_s, μ_n) . Аналогично определяется понятие $A_\infty\mathcal{L}$ -коалгебры гомологий для стабильной $(DA)_\infty^{(s)}\mathcal{L}$ -коалгебры над полем.

Покажем теперь, что каждая заданная над полем $(DA)_\infty^{(1)}\mathcal{E}$ -алгебра определяет спектральную последовательность. В самом деле, пусть над полем задана $(DA)_\infty^{(1)}\mathcal{E}$ -алгебра $(X_1, d_1^{i+1}, (\mu^{(1)})_n^{-n+i})$. Если применить к этой $(DA)_\infty^{(1)}\mathcal{E}$ -алгебре следствие 4.1 для $s = 1$, то получим $(DA)_\infty^{(2)}\mathcal{E}$ -алгебру $(X_2, d_2^{i+2}, (\mu^{(2)})_n^{-n2+i})$, где $X_2 = H(X_1) = \text{Ker } d^1 / \text{Im } d^1$. Если теперь к полученной $(DA)_\infty^{(2)}\mathcal{E}$ -алгебре применить следствие 4.1 для $s = 2$, то получим $(DA)_\infty^{(3)}\mathcal{E}$ -алгебру $(X_3, d_3^{i+3}, (\mu^{(3)})_n^{-n3+i})$, где $X_3 = H(X_2) = \text{Ker } d^2 / \text{Im } d^2$, к которой можно снова применить следствие 4.1 для $s = 3$. Итерируя рассмотренный процесс последовательного применения следствия 4.1, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.1. Любая $(DA)_\infty^{(1)}\mathcal{E}$ -алгебра $(X, d^{i+1}, \mu_n^{-n+i})$, заданная над произвольным полем, определяет спектральную последовательность $\{(X_s, d_s)\}_{s \geq 1}$, где $(X_1, d_1) = (X, d^1)$. Каждый член (X_s, d_s) этой спектральной последовательности имеет структуру $(DA)_\infty^{(s)}\mathcal{E}$ -алгебры $(X_s, d_s^{i+s}, (\mu^{(s)})_n^{-ns+i})$, где $(\mu^{(1)})_n^{-n+i} = \mu_n^{-s+i}$, $d_s^s = d_s$, которая для каждого элемента $e_1 \vee \dots \vee e_{n+1} \times x \in \mathcal{E}^{\vee(n+1)} \times X_s$ при $s > 1$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} (\mu^{(s)})_n^{-ns+i}(e_1 \vee \dots \vee e_{n+1} \times x) &= 0, \\ 0 \leq i < (s-1)(\dim(e_1) + \dots + \dim(e_{n+1}) + n). \end{aligned}$$

Если $(DA)_\infty^{(s+1)} \mathcal{E}$ -алгебру $(X_{s+1}, d_{s+1}^{i+(s+1)}, (\mu^{(s+1)})_n^{-(s+1)n+i})$ для каждого $s \geq 1$ рассмотреть как $(DA)_\infty^{(s)} \mathcal{E}$ -алгебру $(X_{s+1}, d^{i+s}, \mu_n^{-ns+i})$, положив

$$\begin{aligned} d^s &= 0, \quad d^{i+s} = d_{s+1}^{(i-1)+(s+1)}, \quad i \geq 1, \\ \mu_n^{-ns+i}(e_1 \vee \dots \vee e_{n+1} \times x) &= (\mu^{(s+1)})_n^{-n(s+1)+i+k+n}(e_1 \vee \dots \vee e_{n+1} \times x), \\ k &= \dim(e_1) + \dots + \dim(e_{n+1}) + n, \end{aligned}$$

где $e_1 \vee \dots \vee e_{n+1} \times x$ — произвольный элемент из $\mathcal{E}^{\vee(n+1)} \times X_s$, то $(DA)_\infty^{(s)} \mathcal{E}$ -алгебры $(X_s, d^{i+s}, (\mu^{(s)})_n^{-ns+i})$ и $(X_{s+1}, d^{i+s}, \mu_n^{-ns+i})$ гомотопически эквивалентны. Если заданная $(DA)_\infty^{(1)} \mathcal{E}$ -алгебра $(X, d^{i+1}, \mu_n^{-n+i})$ является стабильной, то $A_\infty \mathcal{E}$ -алгебра гомологий $H(X_s, d_s^{i+s}, (\mu^{(s)})_n^{-ns+i})$ для каждого номера $s \geq 1$ изоморфна $A_\infty \mathcal{E}$ -алгебре $(X_\infty, D = 0, \mu_n)$, которая является суммарной $A_\infty \mathcal{E}$ -алгеброй для предельной $(DA)_\infty^{(\infty)} \mathcal{E}$ -алгебры $(X_\infty, d^{i+\infty} = 0, \mu_n^{-\infty n+i})$.

Теорему 5.1 можно уточнить, если в условиях этой теоремы операда $\mathcal{E}$, рассматриваемая как градуированная операда, является свободной, а $(DA)_\infty^{(1)} \mathcal{E}$ -алгебра $(X, d^{i+1}, \mu_n^{-n+i})$ является $D_\infty^{(1)} \mathcal{E}$ -алгеброй (X, d^{i+1}, μ^i) . В самом деле, аналогично тому, как это было сделано выше, при помощи теоремы 4.3 получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть задана произвольная операда $\mathcal{E}$, которая, если рассматривать ее как градуированную операду, является свободной. Тогда любая заданная над полем $D_\infty^{(1)} \mathcal{E}$ -алгебра (X, d^{i+1}, μ^i) определяет спектральную последовательность $\{(X_s, d_s)\}_{s \geq 1}$, где $(X_1, d_1) = (X, d^1)$. Каждый член (X_s, d_s) этой спектральной последовательности имеет структуру $D_\infty^{(s)} \mathcal{E}$ -алгебры $(X_s, d_s^{i+s}, (\mu^{(s)})^i)$, где $(\mu^{(1)})^i = \mu^i$, $d_s^s = d_s$, которая для каждого элемента $e \times x \in \mathcal{E} \times X_s$ при $s > 1$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$(\mu^{(s)})^i(e \times x) = 0, \quad 0 \leq i < (s-1) \dim(e).$$

Если $D_\infty^{(s+1)} \mathcal{E}$ -алгебру $(X_{s+1}, d_{s+1}^{(s+1)+i}, (\mu^{(s+1)})^i)$ для каждого $s \geq 1$ рассматривать как $D_\infty^{(s)} \mathcal{E}$ -алгебру $(X_{s+1}, d^{i+s}, \mu^i)$, положив

$$\begin{aligned} d^s &= 0, \quad d^{i+s} = d_{s+1}^{(i-1)+(s+1)}, \quad i \geq 1, \\ \mu^i(e \times x) &= (\mu^{(s+1)})^{i+\dim(e)}(e \times x), \quad e \times x \in \mathcal{E} \times X_s, \end{aligned}$$

то $D_\infty^{(s)} \mathcal{E}$ -алгебры (X_s, d^{i+s}, μ^i) и $(X_{s+1}, d^{i+s}, \mu^i)$ гомотопически эквивалентны. Если $(DA)_\infty^{(1)} \mathcal{E}$ -алгебра (X, d^{i+1}, μ^i) является стабильной, то $\mathcal{E}$ -алгебра гомологий $H(X_s, d^{i+s}, \mu^i)$ для каждого $s \geq 1$ изоморфна $\mathcal{E}$ -алгебре $(X_\infty, D = 0, \mu)$, являющейся суммарной $\mathcal{E}$ -алгеброй для предельной $D_\infty^{(\infty)} \mathcal{E}$ -алгебры $(X_\infty, d^{i+\infty} = 0, \mu^i)$.

Покажем теперь, что любая заданная над полем мультипликативная спектральная последовательность, начальный член которой имеет структуру E_∞ -алгебры

относительно дифференциала в этом начальном члене, определяет некоторую специальную $D_\infty^{(1)}E_\infty$ -алгебру и является спектральной последовательностью этой $D_\infty^{(1)}E_\infty$ -алгебры.

Коммутативной спектральной алгеброй будем называть любую спектральную последовательность $\{(X_s, d_s)\}$, $s \geq 1$, у которой начальный член (X_1, d_1) является E_∞ -алгеброй $(X_1, d_1, \mu^{(1)})$, а все остальные члены (X_s, d_s) , $s > 1$, являются дифференциальными ассоциативными и коммутативными алгебрами $(X_s, d_s, \pi^{(s)})$, где ассоциативное и коммутативное умножение $\pi^{(2)}$ в члене X_2 индуцировано цепным отображением $\pi^{(1)} = \mu^{(1)}(\cup_0): X_1 \otimes X_1 \rightarrow X_1$, а умножение $\pi^{(s+1)}$ в члене X_{s+1} , $s > 1$, индуцировано цепным умножением $\pi^{(s)}$ в члене X_s . Для коммутативной спектральной алгебры $\{(X_s, d_s)\}_{s \geq 1}$ будем употреблять запись $\{(X_s, d_s, \pi^{(s)})\}_{s \geq 1}$.

Отметим, что если коммутативная спектральная алгебра $\{(X_s, d_s, \pi^{(s)})\}_{s \geq 1}$ задана над полем, то всегда определен предельный член $(X_\infty, d_\infty = 0, \pi^{(\infty)})$ этой коммутативной спектральной алгебры, который является градуированной ассоциативной и коммутативной алгеброй.

Примерами коммутативных спектральных алгебр служат спектральные последовательности расслоений, спектральные последовательности для вычисления когомологий B -конструкций кокоммутативных алгебр Хопфа, а также все мультипликативные спектральные последовательности, умножение в каждом члене которых является ассоциативным и коммутативным.

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть над произвольным полем задана любая коммутативная спектральная алгебра $\{(X_s, d_s, \pi^{(s)})\}_{s \geq 1}$ с начальным членом $(X_1, d_1, \mu^{(1)})$. Тогда на члене X_1 этой коммутативной спектральной алгебры имеется такая структура стабильной специальной $D_\infty^{(1)}E_\infty$ -алгебры $(X_1, d^{i+1}, \mu^{(1)})$, что для каждого члена $(X_s, d^{i+s}, (\mu^{(s)})^i)$, $1 \leq s \leq \infty$, спектральной последовательности $D_\infty^{(1)}E_\infty$ -алгебры $(X_1, d^{i+1}, \mu^{(1)})$ выполнены соотношения $d^s = d_s$, $(\mu^{(s)})^0(\cup_0) = \pi^{(s)}$ и, кроме того, при $s > 1$ выполнены соотношения $(\mu^{(s)})^i(e \times x) = 0$, где $0 \leq i < (s-1)\dim(e)$ и $e \times x \in E_\infty \times X_s$. Если $D_\infty^{(s+1)}E_\infty$ -алгебру $(X_{s+1}, d_{s+1}^{(s+1)+i}, (\mu^{(s+1)})^i)$ рассмотреть для каждого $s \geq 1$ как $D_\infty^{(s)}E_\infty$ -алгебру $(X_{s+1}, d^{i+s}, \mu^i)$, положив

$$d^s = 0, \quad d^{i+s} = d_{s+1}^{(i-1)+(s+1)}, \quad i \geq 1, \\ \mu^i(e \times x) = (\mu^{(s+1)})^{i+\dim(e)}(e \times x), \quad e \times x \in E_\infty \times X_s, \quad i \geq 0,$$

то $D_\infty^{(s)}E_\infty$ -алгебры $(X_s, d_s^{i+s}, (\mu^{(s)})^i)$ и $(X_{s+1}, d^{i+s}, \mu^i)$ являются гомотопически эквивалентными. E_∞ -алгебра когомологий $H(X_s, d_s^{i+s}, (\mu^{(s)})^i)$ для каждого номера $s \geq 1$ изоморфна E_∞ -алгебре $(X_\infty, D_\infty = 0, \mu^{(\infty)})$, являющейся суммарной E_∞ -алгеброй для предельной $D_\infty^{(\infty)}E_\infty$ -алгебры

$$(X_\infty, d_\infty^{i+\infty} = 0, (\mu^{(\infty)})^i).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как в произвольной коммутативной спектральной алгебре $\{(X_s, d_s, \pi^{(s)})\}$ каждое умножение $\pi^{(s)}$, $s > 1$, является ассоциативным и коммутативным, то каждый член X_s , $s > 1$, этой коммутативной спектральной

алгебры имеет структуру C -алгебры $(X_s, d_s, \bar{\mu}^{(s)})$, где C — это операда, рассмотренная в §2. При помощи морфизма операд $\varepsilon: E_\infty \rightarrow C$, являющегося гомотопической эквивалентностью симметрических семейств, введем на каждом члене X_s , $s > 1$, структуру E_∞ -алгебры $(X_s, d_s, \mu^{(s)})$, полагая $\mu^{(s)} = \bar{\mu}^{(s)}(\varepsilon \times 1)$. Таким образом, любую коммутативную спектральную алгебру $\{(X_s, d_s, \pi^{(s)})\}$ можно рассматривать как спектральную последовательность $\{(X_s, d_s)\}$, у которой каждый член X_s , $s \geq 1$, является E_∞ -алгеброй $(X_s, d_s, \mu^{(s)})$. Заметим теперь, что так как спектральная последовательность $\{(X_s, d_s, \mu^{(s)})\}$ задана над полем, то определена последовательность SDR-ситуаций дифференциальных модулей

$$(\eta^{(s)}: (X_s, d_s) \rightleftharpoons (X_{s+1}, d = 0): \xi^{(s)}, h^{(s)}), \quad s \geq 1,$$

где $\eta^{(s)}: (X_s, d_s, \mu^{(s)}) \rightarrow (X_{s+1}, d = 0, \mu^{(s+1)})$ является морфизмом E_∞ -алгебр. Если рассмотреть E_∞ -алгебры $(X_s, d_s, \mu^{(s)})$ и $(X_{s+1}, d = 0, \mu^{(s+1)})$ как $A_\infty E_\infty$ -алгебры, то указанная выше последовательность SDR-ситуаций дифференциальных модулей определяет последовательность SDR-ситуаций $A_\infty E_\infty$ -алгебр

$$(\{\eta_n^{(s)}\}: (X_s, d_s, \mu^{(s)}) \rightleftharpoons (X_{s+1}, d = 0, \mu^{(s+1)}): \{\xi_n^{(s)}\}, \{h_n^{(s)}\}), \quad s \geq 1,$$

где морфизм $A_\infty E_\infty$ -алгебр $\{\eta_n^{(s)}\}$ определяется равенствами $\eta_0^{(s)} = \eta^{(s)}$ и $\eta_n^{(s)} = 0$, $n > 0$, а морфизм $A_\infty E_\infty$ -алгебр $\{\xi_n^{(s)}\}$ и гомотопия $\{h_n^{(s)}\}$ между морфизмами $A_\infty E_\infty$ -алгебр $\{\xi_n^{(s)}\} \circ \{\eta_n^{(s)}\}$ и 1_{X_s} задаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \xi_0^{(s)} &= \xi^{(s)}, & \xi_{n+1} &= (-1)^n h^{(s)} \mu^{(s)}(1 \times \xi_n^{(s)}), & n \geq 0, \\ h_0^{(s)} &= h^{(s)}, & h_{n+1}^{(s)} &= (-1)^{n+1} h^{(s)} \mu^{(s)}(1 \times h_n^{(s)}), & n \geq 0. \end{aligned}$$

Указанная последовательность SDR-ситуаций $A_\infty E_\infty$ -алгебр определяет последовательность SDR-ситуаций $F_\wedge B_\vee(E_\infty)$ -алгебр

$$(\tilde{\eta}^{(s)}: (Y_s, \tilde{d}_s, \tilde{\mu}^{(s)}) \rightleftharpoons (Y_{s+1}, \partial_{s+1}, \tilde{\mu}^{(s+1)}): \tilde{\xi}^{(s)}, \tilde{h}^{(s)}), \quad s \geq 1.$$

Здесь для краткости записи были введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} (Y_s, \tilde{d}_s, \tilde{\mu}^{(s)}) &= F_\wedge(B_\vee(E_\infty), B_\vee(E_\infty, (X_s, d_s, \mu^{(s)}))), \\ (Y_s, \partial_s, \tilde{\mu}^{(s)}) &= F_\wedge(B_\vee(E_\infty), B_\vee(E_\infty, (X_s, d = 0, \mu^{(s)}))), \\ \tilde{\eta}^{(s)} &= F_\wedge B_\vee(\{\eta_n^{(s)}\}), \quad \tilde{\xi}^{(s)} = F_\wedge B_\vee(\{\xi_n^{(s)}\}), \quad \tilde{h}^{(s)} = F_\wedge B_\vee(\{h_n^{(s)}\}). \end{aligned}$$

Напомним теперь, что если операду E_∞ рассматривать как градуированную операду, то по построению она является свободной операдой. Поэтому имеется морфизм операд $\psi: E_\infty \rightarrow F_\wedge B_\vee(E_\infty)$, который является обратной гомотопической эквивалентностью симметрических семейств к каноническому морфизму операд $F_\wedge(\beta): F_\wedge B_\vee(E_\infty) \rightarrow E_\infty$, определяемому стандартной скрепляющей копией $\beta: B_\vee(E_\infty)_\bullet \rightarrow (E_\infty)_\bullet$, $\beta[e] = e$, $\beta[e_1, \dots, e_n] = 0$, $n > 1$. При помощи морфизма операд $\psi: E_\infty \rightarrow F_\wedge B_\vee(E_\infty)$ рассмотренная выше последовательность

SDR-ситуаций $F_\wedge B_\vee(E_\infty)$ -алгебр определяет последовательность SDR-ситуаций E_∞ -алгебр

$$(\tilde{\eta}^{(s)}: (Y_s, \tilde{d}_s, \tilde{\mu}^{(s)}) \rightleftharpoons (Y_{s+1}, \partial_{s+1}, \tilde{\mu}^{(s+1)}): \tilde{\xi}^{(s)}, \tilde{h}^{(s)}), \quad s \geq 1,$$

где $\tilde{\mu}^{(s)} = \hat{\mu}^{(s)}(\psi \times 1)$. Введем на градуированном модуле Y_1 структуру $D_\infty^{(1)}$ -модуля $(Y_1, \tilde{d}_1^{i+1})$, где $\tilde{d}_1^1 = \tilde{d}_1$, $\tilde{d}_1^{i+1} = \tilde{\xi}^{(1)} \dots \tilde{\xi}^{(i)} \tilde{d}_{i+1} \tilde{\eta}^{(i)} \dots \tilde{\eta}^{(1)}$, $i > 0$, и рассмотрим для каждого $i > 0$ морфизм E_∞ -алгебр

$$\zeta^{(i)} = \tilde{\xi}^{(1)} \dots \tilde{\xi}^{(i)} \tilde{\eta}^{(i)} \dots \tilde{\eta}^{(1)}: (Y_1, \tilde{d}_1, \tilde{\mu}^{(1)}) \rightarrow (Y_1, \tilde{d}_1, \tilde{\mu}^{(1)}).$$

Прямыми вычислениями проверяется, что для E_∞ -алгебры $(Y_1, \tilde{d}_1, \tilde{\mu}^{(1)})$ структурный морфизм $\tilde{\mu}^{(1)}$ связан с $D_\infty^{(1)}$ -дифференциалом $\{\tilde{d}_1^{i+1}: Y_1 \rightarrow Y_1\}$ следующими соотношениями:

$$\tilde{d}_1^{i+1} \tilde{\mu}^{(1)} = \zeta^{(i)} \tilde{\mu}^{(1)} (d^{i+1} \times 1 + 1 \times \tilde{d}_1^{i+1}), \quad i \geq 0,$$

где d^1 — это дифференциал операды E_∞ и $d^{i+1} = 0$ при $i > 0$. Эти соотношения говорят о том, что $D_\infty^{(1)}$ -модуль $(Y_1, \tilde{d}_1^{i+1})$, рассматриваемый вместе со структурным морфизмом $\tilde{\mu}^{(1)}$, не является специальной $D_\infty^{(1)}$ E_∞ -алгеброй. Сложившееся положение можно исправить путем введения нового $D_\infty^{(1)}$ -дифференциала на Y_1 . В самом деле, пользуясь тем, что Y_1 является свободной градуированной алгеброй над градуированной операдой E_∞ , введем на Y_1 новый $D_\infty^{(1)}$ -дифференциал $\{\hat{d}_1^{i+1}\}$, который на образующих совпадает с $D_\infty^{(1)}$ -дифференциалом $\{\tilde{d}_1^{i+1}\}$, а на произведениях определяется при помощи формулы

$$\hat{d}_1^{i+1} \tilde{\mu}^{(1)} = \tilde{\mu}^{(1)} (d^{i+1} \times 1 + 1 \times \hat{d}_1^{i+1}), \quad i \geq 0.$$

Таким образом, определена специальная $D_\infty^{(1)}$ E_∞ -алгебра $(Y_1, \hat{d}_1^{i+1}, \tilde{\mu}^{(1)})$. Рассмотрим морфизм $D_\infty^{(1)}$ -модулей $\zeta = \{\zeta^i\}: (Y_1, \hat{d}_1^{i+1}) \rightarrow (Y_1, \hat{d}_1^{i+1})$, где $\zeta^0 = 1_{Y_1}$ и $\zeta^i = \zeta^{(i)}$, $i > 0$. Легко проверяется, что ζ является изоморфизмом $D_\infty^{(1)}$ -модулей. Заметим теперь, что по построению $\hat{d}_1^1 = \tilde{d}_1^1 = \tilde{d}_1$. Из этого следует, что имеется SDR-ситуация дифференциальных модулей $(F_\wedge(\hat{\beta}): (Y_1, \hat{d}_1^1) \rightleftharpoons (X_1, d_1): m, t)$, где $\hat{\beta}$ — стандартное β -отображение, рассмотренное в § 4, $F_\wedge(\hat{\beta})$ — канонический морфизм E_∞ -алгебр, определяемый β -отображением $\hat{\beta}$, $m(x) = x$, t — цепная гомотопия, определяемая следующим образом:

$$t[[e_1], [e_2, \dots, e_n], \dots]x = [[e_1, \dots, e_n], \dots]x,$$

и $t = 0$ на элементах другого вида. Если применить к SDR-ситуации дифференциальных модулей $(F_\wedge(\hat{\beta}): (Y_1, \hat{d}_1^1) \rightleftharpoons (X_1, d_1): m, t)$ теорему 4.2, то получим на E_∞ -алгебре $(X_1, d_1, \mu^{(1)})$ структуру стабильной специальной $D_\infty^{(1)}$ E_∞ -алгебры $(X_1, d_1^{i+1}, \mu^{(1)})$, где $d_1^1 = d_1$. Применяя теперь теорему 5.2 к этой $D_\infty^{(1)}$ E_∞ -алгебре, получим утверждение теоремы.

Если в утверждении теоремы 5.3 взять суммарные E_∞ -структуры для стабильных $D_\infty^{(s)}$ E_∞ -структур на членах спектральной последовательности, то получим следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть над произвольным полем задана любая коммутативная спектральная алгебра $\{(X_s, d_s, \pi^{(s)})\}_{s \geq 1}$. Тогда на каждом члене X_s этой спектральной алгебры имеется такой дифференциал $D_s: X_s \rightarrow X_s$ и такая структура E_∞ -алгебры (X_s, D_s, μ_s) , $1 \leq s \leq \infty$, что соответствующий модуль гомологий $H(X_s) = \text{Ker } D_s / \text{Im } D_s$, снабженный индуцированной структурой E_∞ -алгебры, изоморфен как E_∞ -алгебра предельной E_∞ -алгебре $(X_\infty, D_\infty = 0, \mu_\infty)$.

Список литературы

1. Смирнов В. А. О коцепном комплексе топологического пространства // Матем. сб. 1981. Т. 115. № 1. С. 146–158.
2. Смирнов В. А. Гомологии B -конструкций и ко- B -конструкций // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 4. С. 80–96.
3. Лапин С. В. Дифференциальные возмущения и D_∞ -дифференциальные модули // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 11. С. 55–76.
4. Gugenheim V. K. A. M., Stasheff J. D. On perturbations and A_∞ -structures // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. 1986. V. 38. P. 237–246.
5. Lambe L. A., Stasheff J. D. Applications of perturbation theory to iterated fibrations // Manuscripta Math. 1987. V. 58. P. 363–376.
6. Gugenheim V. K. A. M., Lambe L. A. Perturbation theory in differential homological algebra. I // Illinois J. Math. 1989. V. 33. № 4. P. 566–582.
7. Gugenheim V. K. A. M., Lambe L. A., Stasheff J. D. Algebraic aspects of Chen's twisting cochain // Illinois J. Math. 1990. V. 34. P. 485–502.
8. Gugenheim V. K. A. M., Lambe L. A., Stasheff J. D. Perturbation theory in differential homological algebra. II // Illinois J. Math. 1991. V. 35. № 3. P. 357–373.
9. Смирнов В. А. Гомотопическая теория коалгебр // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49. № 6. С. 1302–1321.
10. Смирнов В. А. Алгебры Ли над операдами и их применение в теории гомотопий // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 3. С. 121–154.
11. Лапин С. В. D_∞ -дифференциальные A_∞ -алгебры и спектральные последовательности // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 1. С. 119–142.
12. Лапин С. В. $(DA)_\infty$ -модули над $(DA)_\infty$ -алгебрами и спектральные последовательности // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66. № 3. С. 103–130.

Мордовский государственный университет
им. Н. П. Огарёва, г. Саранск
E-mail: slapin@mail.ru

Поступила в редакцию
29.06.2004